GINO LORIA

PROFESSORE EMERITO NELL'UNIVERSITÀ DI GENOVA

# STORIA DELLE MATEMATICHE

## DALL'ALBA DELLA CIVILTÀ AL SECOLO XIX

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA E AGGIORNATA

Con 80 figure intercalate nel testo

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

1950

# *PREFAZIONE-SOMMARIO*

*Le storie aventi per soggetto una determinata scienza sono di due tipi distinti. Nelle une l'autore si propone di dare di essa un'idea generale — direbbesi panoramica — in modo da essere intelligibile ad ogni persona di media coltura, limitandosi quindi alle grandi innovazioni determinatrici di decisivi progressi; bando, dunque, ai particolari tecnici e, per compenso, considerevole spazio alle notizie biografiche sui più celebri scienziati. Nelle altre, invece, l'autore entra nel vivo della disciplina di cui si occupa; egli si dirige a persone che questa conoscono e si propone di accrescerne la coltura; perciò egli si occupa anche dei lavori di apparenza modesta, ma che seppero imprimere qualche nuovo orientamento sul pensiero scientifico, nè trascura di segnalare le eventuali influenze esercitate da altri ordini di studi, non esclusa la filosofia; finalmente l'elemento biografico viene ridotto a quanto è essenziale.*

*Nel momento d'intraprendere il lavoro che ora per la seconda volta si presenta al giudizio del pubblico, dovetti chiedermi a quale di queste due specie intendevo che esso dovesse essere ascritto e, senza esitare scelsi la seconda, proponendomi di scrivere* da matematico per dei matematici. *Per ciò non rifiutai il debito spazio a sviluppi di carattere prettamente dottrinali; tuttavia accordai spazio conveniente anche alla narrazione della vita dei più eminenti scrittori* (1)*, essendo mia convinzione che la biografia degli eroi dello spirito umano è un elemento di primo ordine per l'educazione della gioventù, la quale mentre conosce vita e miracoli di coloro che inondarono il mondo di sangue e di lacrime, ignora completamente le commoventi vicissitudini che di regola ebbero da subire coloro che seppero aggiungere qualche pagina ai fasti delle ascensioni umane.*

*Il numero delle persone che lasciarono onorevole memoria di sè nel campo matematico è talmente considerevole che è vano ogni tentativo di prenderle totalmente in considerazione; perciò non pensi il lettore di trovare in questo volume memorie di tutti i lavori che furono scritti e di tutte le questioni che vennero trattate; una cernita fu necessaria e sul modo con cui fu eseguita non a noi spetta di giudicare. Nella coscienza poi, di non avere detto*

(1) Poichè qui si accenna ai dati biografici relativi agli autori considerati, reputo conveniente fare presente al lettore che rilevasse qualche discordia di date o qualche doppia indicazione relativa, che è nell'ottobre 1582 che fu introdotta la riforma gregoriana del Calendario in Italia, Spagna e Portogallo; tale esempio fu presto seguito da altre nazioni cattoliche, mentre nel 1700 lo fu anche dagli Stati protestanti della Germania e in Inghilterra dal 1757.

*tutto quello che potevasi sopra i Grandi incontrati, al termine di ciascun Capitolo ho dato l'elenco delle loro opere, quasi tacito invito al lettore di prenderne diretta conoscenza. Che se poi egli desidera anche di prendere conoscenza diretta dei lavori di critica od esegesi di cui essi furono oggetto, ci è forza rinviarlo ad altra nostra pubblicazione* (1).

*Ed ora daremo un'ordinata notizia intorno agli argomenti svolti in quest'opera ed all'ordinamento scelto per renderne manifesta la logica e cronologica concatenazione.*

*Chiunque intraprende un lavoro storico deve anzitutto decidere di dove prendere le mosse. Per quanto concerne la matematica, la cui origine risale a parecchie migliaia d'anni, se non si vuole smarrirsi nel labirinto delle favole o adottare il pericoloso sistema delle ipotesi incontrollabili, i primi popoli da considerare sono quelli che ebbero le loro sedi, uno nella valle del Tigri e dell'Eufrate (il biblico paese dei due fiumi), l'altro sulle rive del Nilo. In conformità a questo modo di vedere abbiamo dedicato il nostro I Cap. agli Assiro-Babilonesi ed agli Egiziani, sfruttando i non numerosi ma preziosi documenti posti a disposizione degli studiosi dalle fortunate esplorazioni che da più di un secolo si vanno compiendo nelle terre abitate da quei due popoli.*

*I cinque Capitoli seguenti concernono la scienza greca, esaminata con un'ampiezza commisurata alle benemerenze di una stirpe che seppe imprimere a tutte le manifestazioni del pensiero umano orme (a venti secoli di distanza è lecito proclamarlo senza tema di essere tacciati di esagerazione) indelebili.*

*Alle cognizioni matematiche dei Romani è dedicato il nostro Cap. VII; capitolo breve e povero di contenuto, perchè il popolo — che dopo essere giunto a conquistare tutto il mondo allora conosciuto, seppe governarlo con una saggezza dinnanzi a cui il mondo s'inchina; quel popolo che nella poesia e nella storia raggiunse i fastigi della gloria — mostrò per le scienze esatte una così invincibile negativa che i suoi uomini più rappresentativi furono costretti a riconoscerla e confessarla e che non potè essere vinta neppure quando Archimede, sugli spalti di Siracusa, mostrò quanto potesse la scienza, applicata all'arte della guerra.*

*Alla luce crepuscolare sovrastante (per limitarci a parlare delle matematiche) su tutto il mondo sottoposto alla dominazione romana, seguono in Europa tenebre complete per il corso di alcuni secoli; tuttavia lo storico ha lo stretto dovere di ricercare e poi segnalare alla riconoscenza dei posteri, i rari uomini che, quali instancabili Vestali, mantenendo accesa una debole ed oscillante fiammella, si opposero a che l'umanità precipitasse in uno stato di completo abbrutimento: il sorgere delle Università medioevali (delle quali è parola nella chiusa del Cap. VIII) sta a provare come le loro opera non sia stata del tutto vana.*

(1) *La storia della matematica. Ciò che è, ciò che fu, ciò che dev'essere.* (Milano, Hoepli, 1946).

*Allo studio delle origini e delle manifestazioni matematiche dei popoli che occupano la parte orientale del continente euro-asiatico (Cinesi, Indiani, Arabi) sono dedicati i nostri Capitoli IX-XI. Ora, mentre in tutto il nostro lavoro noi siamo pronti e disposti a riconoscere manchevolezze e lacune, ciò vale in assai più vasta misura riguardo alla Sezione testè segnalata, giacchè gli studi relativi non poterono essere da noi condotti sopra documenti originali i quali sono scritti in lingue note esclusivamente agli esperti in filologia orientale; a mostrare quanto irti di difficoltà siano i relativi studi, basta citare il fatto che persino i nomi dei pensatori del luogo si trovano espressi dai traduttori in caratteri latini in modo differente secondo che il trascrittore è italiano, francese o tedesco, onde sullo storico sovrasta il gravissimo pericolo o di non ravvisare lo stesso individuo presentato sotto nomi differenti o di identificare fra loro personaggi di nomi diversi.*

*Riguardo alla Cina, la parte che essa rappresentò nelle scienze esatte, è tuttora molto problematica e venne valutata in modi molto dissimili da storici differenti; nel nostro Cap. IX ci sforzammo di far conoscere imparzialmente lo stato della relativa questione, colorendo un quadro nel quale le luci si alternano alle ombre.*

*Meno incerta è l'analoga questione riguardo agli Indiani (Cap. X); tuttavia i testi sinora tradotti e pubblicati sono così poco numerosi che è legittima la speranza che nuovi documenti rendano possibile decidere se l'India subì una decisiva influenza da parte della Grecia o se eventualmente fu a questa maestra nel suo primo periodo di sviluppo.*

*In condizioni molto differenti ci si trova riguardo agli Arabi — il popolo che per primo studiò, apprese, tradusse, si assimilò e applicò le immortali produzioni del genio greco —; e ciò perchè nelle opere matematiche dovute a credenti in Allah (parecchie furono già volte in qualche lingua europea) si trova nettamente distinto ciò che è originale da quanto è desunto da opere greche. Però, se si paragona il numero di tali opere sinora tradotte, con quello dei manoscritti che giacciono tuttora inesplorati in grandi e piccole biblioteche, è forza concludere che la determinazione del contributo dato dagli Arabi alle scienze esatte, è una questione che può dar luogo a sorprese tanto inaspettate che sorgerà forse l'alba di un giorno in cui ci si troverà di fronte alla necessità di rifare totalmente alcune sezioni della storia delle matematiche greche. Serva ciò di esortazione e incoraggiamento ai giovani desiderosi di contribuire al progresso della branca di studio di cui ragioniamo.*

*Questa difficoltà che s'incontra nel redigere un bilancio esatto del sapere matematico dei più grandi popoli orientali, rende anche malsicuro il giudizio sopra i moventi della ripresa presso di noi delle ricerche sulle scienze esatte. Ciò vale «in primis et ante omnia» riguardo all'eminente matematico italiano a cui è dedicato il nostro Cap. XII; ma tuttavia, se anche la scoperta di tutte le fonti a cui attinse Leonardo Fibonacci portasse un giorno a menomarne l'originalità, spetterà sempre a lui l'incontrastabile gloria di avere per primo riunito in un corpo di dottrina importanti teorie ignorate dai*

*suoi conterranei e di avere così additata la via che li condusse a glorioso porto.*

*Ma i tempi non erano ancora maturi perchè l'umanità, nel campo matematico, riprendesse il cammino in avanti; seguirono, infatti, al grande matematico pisano circa tre secoli durante i quali essa, anzichè progredire non fece che segnare il passo.*

*L'esame della produzione nel nostro campo dei secoli XII-XIV (veggansi i nostri Capitoli XIII-XV) mostra che — se si eccettua la Prospettiva, il cui studio fu allora iniziato per merito di scienziati artisti — la geometria in Europa non raggiunse allora neppure il livello a cui l'antica Grecia era giunta ai tempi di Euclide (non parliamo di Archimede e di Apollonio, allora pressochè o totalmente ignoti), mentre altre branche della matematica elementare si trovavano nello stato raggiunto dai matematici Arabi dei secoli IX-XI. Ma, poco dopo, si avverte un indiscutibile avanzamento; già sullo scorcio del Sec. XV l'algebra manifestava (v. Capp. XVI-XVII) una indiscutibile tendenza verso quel simbolismo che, col tempo, doveva dotarla dell'energia indispensabile per spiccare i voli più arditi* (1)*; ma, anche prima, essa si rivelò abbastanza robusta per oltrepassare quelle che erano riguardate le colonne d'Ercole della teoria delle equazioni algebriche. Siamo nell'epoca gloriosa in cui l'Italia insegnò al mondo la risoluzione delle equazioni di III e IV grado. L'esempio dato dalla patria nostra non tardò ad essere seguito al di là delle Alpi (Cap. XVII) per merito di scienziati della statura di un Viète. D'altra parte si verificò allora un fenomeno sorprendente: l'Umanesimo, importante movimento degli spiriti dovuto in gran parte alle esortazioni di Petrarca e Boccaccio, cominciò ad esercitare la sua benefica influenza anche sui cultori delle scienze esatte; in conseguenza le grandi opere dovute all'Ellade antica, per tanti secoli trascurate e dimenticate, furono lette, commentate, tradotte (Cap. XVIII).*

*Il problema della quadratura del cerchio, fu rimesso all'ordine del giorno e non infruttuosamente studiato, mentre la trigonometria, sino a quel giorno semplice modesta ausiliare dell'astronomia, cominciò ad assurgere al grado di branca autonoma della matematica pura (Cap. XIX).*

*Il numero delle persone intese alla ricerca delle proprietà dei numeri e delle figure geometriche era già allora cospicuo e si presentava in così promettente aumento, che fu necessario provvedere a mezzi adeguati per farne conoscere i lavori: mentre da un lato venivano istituite Accademie a scopi non esclusivamente letterari, la stampa scientifica iniziò la propria corsa nel mondo (Cap. XX). Si giunge così all'alba di uno dei più gloriosi periodi della storia delle matematiche (Capp. XXI-XXII); il periodo che, nei suoi primi anni, assistè all'invenzione dei logaritmi e che vide nel loro fecondo lavoro Galileo ed i suoi immortali discepoli. Pure allora vennero iniziati gli studi sulle equazioni algebriche (Cap. XXIII), destinati ad essere pro-*

(1) La limitatezza dello spazio di cui disponiamo non consentendoci di dare particolareggiate notizie sulle fasi successive attraversate dall'algoritmo algebrico rimandiamo il lettore all'opera di F. Cajori, *A History of mathematical Notations.* (Chicago, 1928).

*seguiti nei secoli seguenti e che continuano ancora oggi. Tocchiamo così l'alba della matematica moderna; essa è caratterizzata dalla metodica applicazione dell'algebra alla geometria; ciò grazie a Descartes e Fermat, di cui la vita e le opere danno materia al nostro Cap. XXIV. A partire da questo momento (dal quale datano anche i primi sforzi metodici per creare la scienza dell'infinito) algebra e geometria, allacciate fra loro in armonico connubio, assumono l'ufficio di guide sicure per qualunque fruttifera ricerca matematica; da questo momento l'analisi matematica non si atteggia più a disciplina avente unicamente per oggetto il numero astratto, ma anche come potente strumento per lo studio delle figure nel piano e nello spazio; mancando il concetto generale di funzione, si ragionava allora sopra il suo equivalente grafico e, volendo porre alla prova i nuovi procedimenti, in luogo di esempi numerici, si ricorreva a curve o superficie speciali. Donde la spiegazione del moltiplicarsi di queste* [1] *e la giustificazione dell'opinione di Fontenelle* [2], *secondo cui « un géomètre ne doit pas étre moins glorieux d'avoir donné son nom à une courbe qu'un prince d'avoir donné le sien à une ville ».*

*Mentre valenti discepoli perfezionavano e applicavano il nuovo metodo di ricerca geometrica, altri due eminenti matematici francesi, Desargues e Pascal, mostravano come la pura geometria degli antichi, debitamente ampliata grazie al concetto di proiezione centrale, disponesse sempre di potenti risorse (Cap. XXV). Altri ancora, traendo ispirazione e lume dalle opere dei sommi geometri dell'Ellade antica, usavano procedimenti la cui profonda radice trovasi nel concetto d'infinito (Cap. XXVI), preparando in tal modo l'avvento del Calcolo infinitesimale. È gloria purissima ed imperitura di Newton e Leibniz (ai quali è consacrato il nostro Cap. XXVIII) di averlo creato, indipendentemente l'uno dall'altro, applicando ciascuno concetti suoi propri. Attorno ad essi non tardarono a sorgere valorosi seguaci (Cap. XXIX), i quali furono al loro fianco quando si accese la memorabile contesa sulla scoperta del nuovo procedimento (Cap. XXX), contesa che per lungo volgere d'anni trasformò in un campo di fiera battaglia l'ambiente matematico d'ordinario in istato di idillica pace.*

*Segue l'esposizione di quanto contengono le opere di coloro che si batterono per la scoperta di nuovi veri applicando i precetti dati da quei grandi capitani e di informazioni intorno all'accoglienza che la nuova procedura ricevette al suo apparire nel mondo scientifico; l'una cosa e l'altra costituiscono la materia dei nostri Capp. XXXI e XXXII. Riguardo al contenuto dei quali giova fare due osservazioni che trovano applicazione anche in altri punti della nostra opera. Anzitutto — come già si è accennato altrove — dato il numero sempre crescente dei cultori della nostra scienza, fu impossibile tenere parola di tutti; e poichè, nel raggruppare quelli che ci sembrarono avere diritto ad un cenno da parte nostra, noi adottammo, come già precedentemente, spesso il criterio della nazionalità; con ciò non*

[1] Si veggano i due volumi dell'autore: *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti.* (Milano, 1930).

[2] *Eloge de M. Tschirnhausen.*

*intendemmo di negare il verificarsi di influenze attraverso i confini politici, ma ritenemmo dovere nostro di dare il giusto peso al costituirsi di vere e proprie famiglie d'investigatori aventi per centro maestri illustri.*

*Dai lavori di cui si è discusso nei due Capitoli testè citati escludemmo ad arte, per indiscutibili motivi intrinseci, quelli concernenti una nuova branca, la Teoria delle probabilità, di cui giudicammo opportuno esporre a parte (Cap. XXXIII) la costituzione ed il primo stadio.*

*Il Sec. XVIII è, dal punto di vista matematico, dominato dai due colossi: Euler e Lagrange; al primo ed alcuni suoi distinti contemporanei sono dedicati i Capp. XXXIV-V, al secondo il successivo. La fine di quel secolo fu poi contrassegnato da un nuovo movimento generale degli spiriti, non solo di carattere politico, il quale, originatosi a Parigi, ebbe ripercussioni in tutto il mondo, specialmente quando dei principii della rivoluzione francese si fecero propagandisti i soldati di Napoleone. Degli scienziati che vissero ed operarono in questo fortunoso periodo parve opportuno dar notizia in uno speciale Capitolo (il XXXVII). Circa nello stesso tempo il mondo assistette ad un fenomeno del più alto interesse: la geometria, lungamente soverchiata dalla sua eterna rivale, si risveglia da un secolare letargo ed offre tutti i sintomi di una feconda rinascita; di esso rende conto il nostro Cap. XXXVIII.*

*Analogo è il fenomeno offerto, circa nello stesso tempo, dalla Germania, la quale, specialmente per opera di Gauss, a partire dagli inizi del secolo decorso, diviene collaboratrice costante e validissima del progresso della nostra scienza; tale fatto, di cui è superfluo sottolineare l'importanza, è descritto e illustrato nel nostro Cap. XXXIX.*

*Va ora notato che nell'ansia di applicare il Calcolo infinitesimale a questioni d'urgente interesse i matematici non si erano arrestati a chiedersi se e quanto ne fossero solidi i fondamenti; ma una revisione dei principii non tardò ad apparire assolutamente necessaria, quando, a partire dall'epoca degli Enciclopedisti francesi, lo spirito critico cominciò ad esercitare in tutto il mondo la sua benefica influenza. A tale esame critico diedero opera Bolzano, Cauchy, Abel i cui lavori, insieme a quelli del contemporaneo Jacobi, sono enumerati e valutati nel nostro Cap. XL. In quel tempo si cominciò ad applicare metodicamente e su vasta scala allo studio dei fatti naturali suscettibili di misura, le nuove procedure analitiche inventate da Euler, Lagrange e loro seguaci. In conseguenza, accanto alla Meccanica razionale, antecedentemente creata da quei due sommi, sorse la Fisica matematica, nelle sue svariate diramazioni (Cap. XLI).*

*Il moto in avanti impresso alla Geometria da Monge e dai suoi diretti discepoli, non si spense con la scomparsa di quel Grande e dei risultati raggiunti per tal modo dà notizia il nostro Cap. XLII* [1]*, il quale abbraccia*

[1] In questo Cap. avrebbe dovuto prendere posto anche l'enumerazione degli scritti di coloro che svolsero le idee di Monge; ma poichè essi hanno una fisonomia loro propria, l'autore ritenne opportuno di dedicare ad essi una esposizione *ad hoc*; la si trova nel volume: *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni.* (Milano, 1921).

*non soltanto i frutti che diede la ricerca geometrica nel senso degli antichi, ma anche quelli ottenuti ricorrendo a coordinate; perciò ivi è data notizia anche dei procedimenti più delicati di origine recente (teoria delle forme algebriche, applicazione delle funzioni trascendenti alla Geometria) a cui il cultore della Geometria deve oggi ricorrere se vuole elevarsi sul livello già raggiunto dai predecessori o penetrare sino al fondo delle questioni.*

*Ma il Sec. XIX, oltre ad assicurare un buon governo ed a svolgere tutte le attività latenti delle provincie già conquistate, seppe arricchire di nuovi ubertosi territori il già vastissimo impero matematico; ai principali fra essi (geometria non-euclidea, considerazione degli spazi superiori, teoria delle sostituzioni, gruppi di trasformazioni, quaternioni, algebre) è dedicato il nostro Cap. XLIII; mentre il successivo ha lo scopo di far conoscere i più eminenti analisti che, nella seconda metà del precedente Sec., coltivando i campi già dissodati, seppero farvi crescere nuove fioriture* (1).

*Il continuo sviluppo della disciplina di cui ci occupiamo destò in molti il legittimo desiderio di descriverne le tappe successive; così ebbe vita la vasta letteratura sulla storia delle matematiche; ora a noi parve che, in un'opera come la presente, avessero diritto di prendere posto gli storici della nostra scienza; ad essi è dedicato il nostro Capitolo conclusivo, dal quale si apprende l'evoluzione di quel ramo dello scibile dalla metà del Sec. XVIII alla fine del successivo.*

*L'opera termina con un'Appendice relativa all'antica matermatica Giapponese, che non è possibile collegare in alcun modo con la scienza europea. È un omaggio doveroso reso ad un popolo che, dopo avere fatto gettito coraggiosamente di tutta la scienza avita, ha dato saggio, dopo un breve periodo di noviziato, delle proprie qualità inventive, dotando già la nostra scienza di risultati di valore permanente.*

*Il nostro lavoro si chiude, non già per mancanza di materia, ma in conformità al programma stabilito in precedenza e dichiarato nel titolo. Coloro che si proporranno di proseguirlo oltre la soglia del presente secolo, mentre dovranno constatare come nessuno dei temi studiati sia stato abbandonato perchè esaurito e quindi sterile, avranno la soddisfazione di registrare nuovi nomi ormai illustri e nuovi temi ricchi di indiscutibile importanza.*

*Spetterà pure ad essi di porre in luce come le scienze esatte nelle loro più recenti fasi di sviluppo continuarono ad essere animate e sospinte da due aspirazioni: giungere ad una generalità sempre maggiore ed estendere la propria sfera di applicazione ad altre discipline.*

L'Autore

(1) L'abbondanza di materia ci vietò di tenere parola dei trattati concernenti i vari rami della nostra scienza, molti dei quali possiedono un indiscutibile valore, essendo scritti da maestri illustri animati dalla nobile aspirazione di adoperarsi a che l'istruzione dei giovani seguisse da presso la scienza nel suo incessante cammino ascendente.

# INDICE DELLA MATERIA

CAPITOLO VII



CAPITOLO VIII



CAPITOLO IX

CAPITOLO X



CAPITOLO XI

CAPITOLO XV



CAPITOLO XVI

CAPITOLO XXIV

Capitolo XXV



Capitolo XXVI

## Capitolo XXVII

CAPITOLO XXVIII

## Capitolo XXIX



## Capitolo XXX



## Capitolo XXXI

CAPITOLO XXXIII



CAPITOLO XXXIV



CAPITOLO XXXV

CAPITOLO XXXVII



CAPITOLO XXXVIII

CAPITOLO XXXIX



CAPITOLO XL

Capitolo XLIV



Capitolo XLV



Appendice

## CAPITOLO I

# LE ANTICHE CIVILTÀ MEDITERRANEE

### Esordio

1. Le transazioni commerciali fra individui e fra popoli differenti, conseguenze inevitabili dell'umano consorzio, e, d'altro lato, l'aspirazione di sottoporre a misura l'universo dei fenomeni di cui il mondo è teatro e il genere umano spettatore, nella segreta speranza di determinarne il meccanismo e scoprirne le forze motrici, condussero, con un irresistibile imperativo categorico, l'uomo, non appena uscito dallo stato di barbarie, a foggiarsi tanto un'embrionale geometria quanto una infantile aritmetica (1). Perciò è lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che *la storia delle matematiche comincia con la storia della civiltà*.

Siffatta conclusione impone a chiunque si proponga di conoscere le vicende delle scienze esatte attraverso i secoli di andare in traccia dei documenti offerti dai popoli di più antica civiltà, per scoprirvi quelli che, sia pure incidentalmente, toccano il numero, la forma, la misura; ricerca lunga e spinosa, la quale dev'essere integrata da altre, ancor più delicate, aventi per fine di scoprire l'eventuale interdipendenza dei procedimenti adoperati e dei risultati ottenuti da popoli differenti, nonchè l'ordine cronologico delle relative invenzioni e scoperte. Ora se i mezzi sicuri offerti allo storico che si propone di avvertire i più remoti bagliori di ricerca scientifica sono poco numerosi e di difficile accesso, scarsissimi sono quelli a cui egli può ricorrere per

(1) Le occasioni al contare sono tanto frequenti e multiformi, che riuscirebbe vano tentativo di redigere la fede di nascita dell'aritmetica; ben se ne avvide Platone il quale, a chi pretendeva si attribuisse l'arte del conteggio a un tal Palamede (personaggio mitologico, nel quale gli antichi Greci impersonavano gli Orientali loro maestri) argutamente rispose: « E che forse, senza Palamede, Agamennone avrebbe ignorato quanti piedi aveva ? »

A questo proposito giova osservare che tribù selvaggie di recente visitate da arditi viaggiatori dichiararono di non sentire il bisogno di un'aritmetica tanto sviluppata quanto quella che noi riteniamo inseparabile da una umana civiltà. Nè va taciuto che presso alcuni aggruppamenti umani si dovette riconoscere che i loro componenti erano in grado di valutare esattamente il numero degli elementi di un insieme, anche senza disporre di un vocabolo esprimente il numero stesso; così, alcuni pastori erano in grado di accorgersi subito della scomparsa di un capo di bestiame, pur senza potere esprimere quanti animali contenesse il loro gregge, ed esperti cacciatori avvertivano la fuga di un cane da una muta anche numerosa, pur senza essere in grado di dire quanti essa ne contenesse; fatto questo che ricorda la facoltà, segnalata da H. Hankel, che ha l'anitra di avvertire subito la scomparsa di uno dei piccoli formanti il proprio seguito.

stabilire l'esistenza di relazioni fra coloro che, a distanza, coltivarono la medesima scienza e per determinare la direzione in cui si è esercitata l'ipotetica influenza degli uni sopra gli altri, chè, in generale, malsicura è la cronologia delle età più remote e rarissime le testimonianze degne di assoluta fede, intorno ai rapporti intellettuali fra popolo e popolo. E siccome innumerevoli esempi stanno a dimostrare che, in condizioni analoghe, uomini appartenenti anche a razze differenti, di fronte ai medesimi problemi, si comportarono in modi somiglianti, così prudenza storica esige che, in presenza di manifestazioni identiche, non ci si affretti a proclamare dimostrato un legame fra pensatori di epoche e di stirpi differenti.

Per siffatti motivi è impossibile oggi (e forse lo sarà sempre) lo scrivere una storia del pensiero scientifico donde emerga, senza incertezze, quali furono i popoli che si consacrarono *successivamente* ad una medesima disciplina e quale e quanta influenza essi esercitarono gli uni su gli altri.

In particolare, per quanto concerne la matematica, data l'incertezza delle notizie che ci pervennero intorno alla presunta azione che l'India e la Cina esercitarono sui popoli europei e all'epoca in cui si sarebbe fatta sentire (dei lavori matematici di questi popoli tratteremo nei Cap. IX e X), è da consigliarsi a coloro che intendono di determinare — per quanto possibile — le primissime fasi di sviluppo di quella scienza, di concentrare i proprii sforzi sopra i popoli che, nell'antichità, occuparono le rive del Mediterraneo: gli è appunto quanto noi ci proponiamo di fare al principio di questa narrazione, dopo di avere premessa la seguente osservazione generale.

2 - È evidente che lo storico della matematica non deve arrestarsi all'epoca nella quale l'uomo non era ancora giunto a concepire i numeri astratti; in cui disponeva di mezzi fonetici per indicare due pecore, due capre, quattro buoi, ecc., ma non era in grado di concepire i numeri *due, quattro,* ecc. Il suo cómpito comincia nel momento in cui l'uomo sentì il bisogno di contare e di calcolare. Ora, per far ciò è indispensabile avere a propria disposizione una serie di vocaboli atti a designare gli elementi della serie naturale; a tale scopo, invece di crearne « ad hoc », si usarono nomi di oggetti aventi relazioni palesi con gli elementi stessi. Così alle parole (già adoperate in altri significati) *io, ali, trifoglio, mano,* fu affidato anche l'ufficio di rappresentare i numeri *uno, due, tre, cinque.* Se non che è chiaro che, per quanto fosse fervida la fantasia e tenace la memoria degli aborigeni, ben presto essi si saranno trovati nell'impossibilità di designare con vocaboli sempre nuovi, scelti in base ad analogie spesso discutibili e di rado palesi, tutti i numeri che si possono concepire e poi di ricordare la nomenclatura prescelta. Per rimuovere questo ostacolo che frapponevasi allo sviluppo naturale della pratica del conteggio, si pensò di fissare, nella serie omogenea dei numeri, alcuni individui (che possono chiamarsi « numeri fondamentali ») succedentisi ad intervalli costanti, i quali funzionassero quasi di pietre miliari per giudicare del cammino che il nostro pensiero deve percorrere per raggiungere un elemento qua-

lunque di quella serie; fatto ciò, per caratterizzare il detto elemento, non si ebbe che indicare di quanto esso si scostasse dal numero fondamentale più prossimo inferiore.

È questo il concetto che funge quale midollo spinale, non soltanto nei sistemi di numerazione oggi in uso presso tutti i popoli civili [1], sistemi i quali differiscono fra loro soltanto per l'ampiezza dell'intervallo scelto. Tranne rare eccezioni, tale ampiezza è 10; è questo un fatto notevole, che venne rilevato sino da tempi remotissimi e che diede origine alla seguente questione formulata da Aristotele nel suo libro dei *Problemi*: « Perchè tutti, tanto i barbari quanto gli Ellèni, contano per decine e non altrimenti? »; ad essa il sommo filosofo rispose, con piena ragione, che ciò dipende dal fatto che le mani dell'uomo, naturale ausiliario nei calcoli aritmetici, hanno complessivamente dieci dita. La stessa spiegazione ha la presenza in certi sistemi di numerazione in uso, dei numeri 5 e 20.

Se dalla numerazione parlata passiamo a quella scritta, notiamo essersi avvertito che i numeri comprendenti unità di vario ordine si seguono nel senso in cui procede la scrittura, in base alla loro grandezza decrescente; così noi, che scriviamo da sinistra verso destra, segniamo a sinistra quante migliaia, poi quante centinaia e finalmente quante unità sian contenute in un dato numero; abitudine questa che trova la propria spiegazione nel fatto che lo scrivente vuole presentare i vari gruppi costituenti un numero in ordine d'importanza decrescente. Questo sistema si designa di solito come « legge di Hankel », dal nome di colui che per primo l'ha esplicitamente avvertita.

## Gli Assiro Babilonesi

3 - Non seguiremo l'esempio dato da chi per primo si accinse a scrivere una storia generale delle matematiche (parliamo dell'Heilbronner), facendo risalire le presenti indagini sino al nostro comune progenitore; ma, pur lasciando in pace Adamo, cercheremo le prime tracce di cognizioni matematiche fra gli abitanti della vasta pianura che, secondo l'Antico Testamento, fu sede del Paradiso terrestre, cioè quel vasto piano che ha per confini naturali due grandi fiumi, il Tigri e l'Eufrate, e che, abitato nell'Antichità da due popoli uno dei quali (i Sumerii), non semitico e proveniente dal Sud, subì successivamente il dominio dei Persiani antichi, dei Macedoni, dei Seleucidi, dei Parti, dei Persiani moderni, degli Arabi e finalmente dei Turchi: è la terra designata oggi col nome di Mesopotamia meridionale e che, nell'epoca in cui costituiva uno stato indipendente, aveva per capitale la biblica Babilonia.

[1] Si sarebbe tentati di sopprimere l'aggettivo « civili » dal momento che la presenza del numero 10 in sistemi numerali usati da popoli ancora barbari fu segnalata e dagli investigatori dell'America pre-colombiana e da viaggiatori che visitarono di recente tribù selvagge abitanti nelle foreste dell'America meridionale, in alcune regioni dell'Africa e in parecchie isole della Polinesia; ci limitiamo a questo accenno, nostro scopo essendo di narrare soltanto quanto si riferisce all'Europa, facendo qualche scorreria in terre finitime extra-europee, soltanto per scoprire l'influenza che ebbero in origine sulla nostra, altre civiltà e per segnalare l'espansione di recente avvenuta della scienza nostra.

La fama dei Babilonesi come indefessi e accurati investigatori del corso degli astri è attestata da Plinio il Vecchio, il quale fissa l'inizio delle loro osservazioni a 100.000 anni innanzi l'E. v., e da Polibio, che restringe a 31.000 anni la durata delle osservazioni stesse. Senza farci mallevadori della esattezza di questi dati, probabilmente fantastici, rileviamo che Callistene, entrando in Babilonia al seguito di Alessandro Magno (331 a. C.), scoprì tracce di osservazioni astronomiche risalenti all'anno 2234 a. C., e che Claudio Tolomeo, la massima autorità greca in fatto di astronomia, attribuisce ai Babilonesi l'osservazione di una eclisse lunare accaduta nell'anno 747 a. C., e finalmente che un calendario babilonese, il quale (secondo l'interpretazione datane dall'eminente orientalista Sayce) risale all'anno 3700 a. C., dimostra inoppugnabilmente che l'ammirazione di Plinio e di Polibio, per quanto sembri un po' spinta, non può dichiararsi destituita di fondamento (1).

Affrettiamoci a notare che allo studio dei movimenti celesti i Babilonesi furono spinti, non già dalla brama disinteressata di scoprire le leggi governatrici dei moti del sole e delle stelle, ma dal tormentoso desiderio di scoprire qualche segnale annunziatore degli avvenimenti futuri: onde affiora qui per la prima volta il fatto, che più volte si è rinnovato nel corso dei secoli, che pratiche bugiarde e ingannatrici (quali quelle caratteristiche dell'astrologia) diedero vita ad una delle discipline (alludiamo all'astronomia) costituenti a ragione l'orgoglio dello spirito umano.

4 - Sino al principio del secolo scorso le fonti di notizie intorno alla vita intellettuale e sociale dei Babilonesi erano rappresentate dalla Bibbia e dalle opere storiche di Erodoto e di Diodoro Siculo; fonti indirette ed impure, nelle quali è percepibile l'influenza perturbatrice della fantasia, così sbrigliata nei popoli dell'Oriente e del Mezzogiorno. Un mezzo per verificare i dati da esse somministrati era offerto dalle inscrizioni esistenti sulle pareti della reggia dell'antica Persepoli, segnalate sino dal 1621 dal viaggiatore Pietro della Valle (n. a Roma il 2 aprile 1586, m. a Napoli il 20 aprile 1652) e più tardi dalle numerose tavolette o prismi di argilla, ricoperte di segni misteriosi (2) e che in grande numero vennero in luce durante il secolo XIX, grazie agli scavi metodici iniziati nel 1821 dall'inglese J. Birch e continuati poi su larga scala in Mesopotamia, sotto la direzione di varie missioni ufficiali (3). Ma, per poterle utilizzare, era indispensabile decifrare la scrittura adoperata.

(1) Quali istrumenti usavano gli antichi Assiro-Babilonesi nelle loro osservazioni? La soluzione di questo fondamentale problema storico si attende da nuovi scavi; solo si può notare che già furono scoperti una lente e uno specchio.

(2) Questi venivano tracciati quando l'argilla era ancora molle; l'essiccamento aveva poi luogo al fuoco od al sole.

(3) Può interessare il fatto che le tavolette scoperte erano destinate a formare (se così è lecito esprimerci) dei *volumi*, come è dimostrato dai fori centrali in esse praticati, attraverso i quali doveva passare una fettuccia rilegatrice. L'ordine di successione è stabilito dall'osservazione che ciascuna si chiude con le stesse parole con cui comincia la seguente; chi ha famigliarità con libri antichi sa che questo sistema fu sempre in uso nei primi tempi dell'arte della stampa. I *volumi* risultanti venivano conservati in appositi locali, uno dei quali risale a Assurbanipal, che regnò negli anni 668-626 a. C.

Ora il primo felice tentativo per vincere le straordinarie difficoltà di questo problema è dovuto a uno studioso tedesco F. G. Grotenfend (n. il 9 giugno 1755, m. il 15 settembre 1853), il quale addì 4 settembre 1802, presentò una memoria sull'argomento alla Società delle Scienze di Gottinga; ma questa, nell'incapacità di misurarne il valore, rifiutò di pubblicarla nei propri atti (1); però (a conferma dell'antico adagio « veritas temporis filia ») il lavoro del Grotenfend, scoperto negli archivi di quel sodalizio novant'anni più tardi, essendo stato finalmente apprezzato a dovere, vide la luce nel 1904: così fu documentato il merito non comune di chi lo vergò. Ma, in conseguenza di questa tardiva pubblicazione, il Grotenfend non potè partecipare alle ricerche che, durante lo scorso secolo, compirono R. Lepsius, P. E. Botta (figlio dell'illustre storico italiano), H. Layard, E. V. Hilprecht ed altri minori, le quali condussero ad una soddisfacente conoscenza della lingua in uso presso i Babilonesi, e, in conseguenza, del grado di civiltà raggiunto da questi.

5 - La lingua in cui sono scritte le tavolette babilonesi è quella usata dai Sumerii; i caratteri sono quelli detti *cuneiformi*, perchè risultanti dalla combinazione di tre segni speciali, cioè un tratto orizzontale, uno verticale e uno (che ricorda un cuneo) nascente dalla congiunzione ad angolo di due tratti rettilinei. Tali segni possono riprodursi schematicamente come segue: | , — , < . Per quanto concerne la nostra scienza (alla quale debbono naturalmente restringersi le nostre considerazioni) la migliore sorgente d'informazione è rappresentata da un cimelio che risale al periodo 2300-1600 a. C. e che porta il nome di *Tavole di Senkreh*; esso è così chiamato perchè fu scoperto nel 1854 dal geologo W. K. Loftus, nei pressi di Senkreh, sulle rive dell'Eufrate. Emerge da questo prezioso documento che l'aritmetica babilonese aveva due cardini, il 10 e il 60; l'esistenza del primo è dimostrata dai seguenti simboli speciali con cui sono rappresentati i numeri 1, 10, 1000, 10.000 e 100.000:

| , < , |— , < |— , < < |— , < < < |— ;

ripetendo ciascuno di essi un numero (minore di dieci) di volte si possono evidentemente rappresentare tutti i numeri inferiori a un milione; in ogni caso risulta in questo modo un simbolo costituito da un certo numero di unità, un certo numero di decine, ecc., succedentisi in ordine conforme alla legge di Hankel. L'esistenza del secondo numero fondamentale (60) è attestata anzitutto dai nomi speciali (*Soss. Ner, Sar*) con cui i Babilonesi designavano i numeri 60, 600 3600 (2) e anche

(1) Circa nello stesso tempo (lo vedremo a suo tempo) l'Istituto di Francia evitava di pronunziarsi sul valore della dimostrazione ideata da P. Ruffini per l'irresolubilità delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto: così (osserviamolo per incidenza) a breve distanza si avevano due impressionanti manifestazioni del timore panico che assale le grandi corporazioni scientifiche quando sono chiamate a stabilire una fama, la loro azione palesandosi di preferenza nel ratificare i giudizi su cui non è possibile dubbio alcuno.

(2) A semplice titolo di curiosità aggiungiamo che con i numeri 1, 2, ..., 60 venivano designati gli dei della mitologia babilonese, mentre le frazioni intermedie servivano a rappresentare gli « spiriti » d'entità comprese tra l'uomo e un dio.

più chiaramente dall'uso costante di frazioni aventi per denominatore le potenze successive di 60 (¹): sono queste le frazioni così largamente usate nell'astronomia greca (epperò d'ordinario chiamate « frazioni astronomiche ») e di cui qualche traccia si trova nel nostro costume di dividere ogni grado in 60 minuti primi e ogni primo in 60 secondi.

La presenza del numero 10 nei fondamenti dell'aritmetica babilonese non esige alcuna spiegazione particolare, perchè rientra in un sistema generale, che vedemmo (p. 3) avvertito sino dai tempi di Aristotele. Più oscura e controversa è l'origine della presenza dei numeri 6, 60, 360. Alcuni (Formaleoni, Cantor) la ricollegano all'ipotesi che i Babilonesi considerassero l'anno solare come composto di 360 giorni e che essi sapessero dividere l'intera circonferenza in sei parti uguali. in base alla proprietà del lato dell'esagono regolare di essere eguale al raggio del cerchio circoscritto. Altri (Kewitsch, M. Simon) obiettarono che la conoscenza di questa proprietà da parte dei Babilonesi non è storicamente provata; che esperti osservatori dei fenomeni celesti quali essi erano non potevano acquetarsi a quella rozza approssimazione della lunghezza dell'anno solare; e che finalmente l'aritmetica è un presupposto, non una conseguenza, di qualunque osservazione astronomica; epperò preferirono cercare la ragione dell'intervento dei numeri 6 e 60 nel sistema aritmetico babilonese nella preziosa prerogativa di cui godono tali numeri di possedere un ingente numero di divisori.

Una nuova spiegazione delle origini del sistema sessagesimale venne data (E. Hoppe) partendo dall'osservazione che, per rendersi conto del trascorrere del tempo, gli Assiro-Babilonesi, traendo profitto da un clima veramente paradisiaco, si giovarono dell'ombra proiettata sul terreno da uno stile verticale, dividendo il terreno circostante alla base in un certo numero di angoli fra loro eguali. Ora, siccome l'angolo di 60° può ottenersi con estrema facilità costruendo un triangolo equilatero, si presentò spontaneamente la scelta del numero 6 come numero delle parti in cui dividere tanto l'angolo-giro, quanto la giornata; tracce di tale divisione cronologica furono realmente trovate. Ma col procedere del tempo e col progredire della civiltà essa si manifestò insufficiente. combinando allora il 6 col numero 10, base del sistema di numerazione in uso, si giunse al numero 60, il quale, combinato nuovamente col 6, portò al numero 360; ed è certo che questo aumentò di importanza allorquando accurate osservazioni astronomiche portarono alla conclusione che esso misura il numero di giorni dopo i quali, almeno con una certa approssimazione, il sole ritorna alla posizione da esso occupata in origine. Ammesso tutto ciò, la divisione del grado in 60 minuti e del minuto in 60 secondi si comprende senza grande difficoltà.

6 - Altra questione importante a cui dà luogo l'aritmetica in uso sulle rive dell'Eufrate è di sapere se i Babilonesi si avvidero della ne-

(¹) In certe occasioni i Babilonesi si servirono di frazioni a denominatore 6 e non ignorarono le seguenti relazioni: 2/6 = 1/3, 3/6 = 1/2, 4/6 = 2/3.

cessità di un simbolo per indicare l'assenza di unità di un ordine determinato, se cioè conobbero lo zero. Le tavole di Senkreh non abilitano a risolvere l'interessante questione; il fatto, così imbarazzante, che non sempre è indicato per quale potenza di 60 debba sottintendersi moltiplicato un dato numero, farebbe inclinare verso una risposta negativa; però alcuni registri di osservazioni astronomiche di recente segnalati e nei quali un segno speciale di separazione annuncia l'assenza di unità di un determinato ordine, fanno desiderare vengano scoperti e decifrati altri documenti capaci di trasformare in certezza la qui adombrata possibilità che i Babilonesi abbiano preceduto gli Indiani nell'avvertire il bisogno di un simbolo analogo allo zero, il cui valore pratico è l'inverso del valore numerico.

Ma intanto notiamo che la scoperta dei due numeri fondamentali nel sistema aritmetico dei Babilonesi ebbe per immediato corollario la definitiva spiegazione del contenuto matematico delle tavole di Senkreh; prescindendo da alcune lacune prodotte da spiegabilissimi deterioramenti, vi si trovano i quadrati dei numeri 1, 2,..., 60 e i cubi dei numeri 1, 2,..., 30, onde potevano servire assai utilmente per facilitare le operazioni inverse (estrazioni di radici quadratiche e cubiche) necessarie ai sacerdoti nelle loro manipolazioni astrologiche.

Ulteriori notizie intorno al sapere aritmetico dei Babilonesi si ebbero grazie agli scavi iniziati nel 1889 nei pressi di Nuffar, a spese dell'Università della Pensilvania e sotto la direzione dell'Hilprecht; infatti l'esame di circa cinquantamila bronzi incisi in caratteri cuneiformi portò alla scoperta di tavole di moltiplicazione dei numeri interi, disposti in colonna, nel modo che vedremo ebbero a praticare nel Medio Evo i calcolatori italiani e i loro seguaci; la loro estensione è veramente imponente, perchè il moltiplicando giunge sino a 180.000. Seguono tavole di divisione, che arrivano sino a $60^4 = 12.960.000$ (numero che sarebbe, secondo alcuni da identificarsi col misterioso « numero di Platone », regolatore delle nascite buone e cattive). Ma non è questo il massimo numero che sia stato incontrato nei documenti babilonesi sinora esplorati, chè vi si trova anche quello, ben più rispettabile, che oggi si scrive come segue: 195 955.500 000 000. Un'ultima notizia ci è fornita dai documenti di cui si è recentemente arricchita la storia della scienza babilonese; ed è l'uso del « metodo sottrattivo » nella rappresentazione grafica e fonetica dei numeri, che, si riteneva caratteristico della numerazione parlata e scritta dei Romani: ed invero nelle tabelle decifrate dall'Hilprecht s'incontrano non meno di dodici esempi di designazioni di numeri analoghi all'« undeviginti » = XIX latino. Si tratta di una coincidenza fortuita, oppure uno dei due popoli ha insegnato all'altro il concetto fondamentale di questo ingegnoso artificio? È una questione il cui interesse aumenta osservando che il metodo sottrattivo sembra essere stato usato qualche volta dagli Ebrei, senza dichiarare se in tale occasione fossero maestri o discepoli, ma che oggi non si è in grado di risolvere.

Riguardo all'ampiezza delle cognizioni aritmetiche del popolo di cui ci occupiamo, possiamo riferire un solo dato offertoci dal Dickson nella sua *History of the Theory of Numbers* (t. I, 1919, p. 337) ed è

che nel cosidetto « Talmud babilonese » è asserito che, affinchè un numero della forma $100\,a + b$ sia divisibile per 7 è necessario e sufficiente che questo accada riguardo a $2\,a + b$, il che è chiaro dal momento che $100\,a + b = 7 \times 14\,a + (2\,a + b)$; ora è possibile si tratti di una tarda derivazione di sapere assiro-babilonese.

7 - Nel nostro secolo le cognizioni intorno alla matematica assiro-babilonese si accrebbero in un modo talmente imponente da farla apparire sotto una luce totalmente nuova; e ciò accadde perchè un grande numero delle tavolette costituenti già il materiale di studio e di quelle che vennero poi aggiunte venne decifrato, studiato dal punto di vista matematico e pubblicato da persone dotte tanto in filologia come nel campo delle scienze esatte (particolarmente il Neugebauer e il Thureau-Dangin). Si vide così che quelle tavolette, riguardo al contenuto, sono di due specie. Alcune insegnano i risultati dell'applicazione di assegnate operazioni aritmetiche a serie di numeri interi, onde sono simili ai nostri « libri dei conti fatti »; le altre fanno conoscere la risoluzione mediante il calcolo di problemi, generalmente a scopi geometrici, con dati numerici. Nelle prime spiccano quelle che danno i quadrati dei numeri naturali, nonchè quelle che esprimono in frazioni sessagesimali inversi dei numeri interi. A questo proposito è necessario tenere presente che la divisione di un numero $a$ per altro $b$ viene definita come la ricerca di un numero $c$ che moltiplicato per $b$ dia $a$ e inoltre che la si ritiene equivalente alla moltiplicazione del dividendo per l'inverso del divisore $b$. Sgraziatamente nei materiali di cui si dispone si notano un grande disordine e ingenti lacune, il che si spiega perchè furono scoperte e raccolte in località differenti, anche lontanissime fra di loro, spesso da persone rozze e ignoranti e che i competenti in materia ritengono appartenenti al lungo periodo che va dai 2000 ai 200 anni a. C. Mentre le anzidette tabelle, grazie alle loro applicazioni anche a problemi interessanti la vita civile di un popolo, hanno uno scopo evidentemente pratico, le altre si direbbero destinate all'istruzione della gioventù. Decifrate e interpretate che furono rivelarono nella gente assiro-babilonese la conoscenza e l'uso di una vera e propria algebra, la quale permette la risoluzione di problemi che noi oggi trattiamo col mezzo di equazioni o sistemi di equazioni dei primi tre gradi. Le soluzioni si traggono, non già come applicazioni di regole enunciate in generale, ma dalla loro applicazione a problemi con dati numerici; per ciò vi si cercano invano deduzioni esplicite le une dalle altre delle fasi del procedimento applicato; ma tali regole si intravvedono nell'ordine di successione dei calcoli, e potrebbero servire alla divinazione di una logica pre-aristotelica. Prima di chiudere queste informazioni è dovere nostro notare una essenziale limitazione nella totalità dei numeri considerati dagli Assiri-Babilonesi, la quale proviene dall'uso esclusivo da essi fatto di frazioni i cui denominatori sono potenze del numero 60; ora è chiaro che affinchè l'universo di un numero $a$ si possa esprimere con una serie finita di frazioni dell'anzidetto tipo, è indi sperabile che $a$ sia della forma $2^{\alpha}\,3^{\beta}\,5^{\gamma}$; per ciò tutti gli altri numeri vengono, sia pure teoricamente, metodicamente esclusi.

8 - Siccome, come si disse, molti problemi risolti nelle tavolette testè discorse hanno soggetti geometrici, così è chiaro che esse possono servire per trarre elementi di un quadro del sapere geometrico del popolo dei due fiumi. Non meritano più di un cenno da parte nostra le « piante » di appezzamenti di terreno che si ritrovano, dal momento che non hanno lo scopo di determinare delle superficie, ma soltanto quelle di fissare nella memoria quali fossero i campi confinanti con un campo determinato; del resto va notato che tutte le figure illustrative dei problemi sono esclusivamente schematiche, nessuna tenendo conto dei relativi dati numerici.

Una parte dei problemi risolti hanno un carattere prettamente pratico, come ad es. quelle della determinazione degli uomini necessarî alla lavorazione d'un dato campo.

Ma in altri si trovano figure notevoli, citiamo ad es. un solido polie-

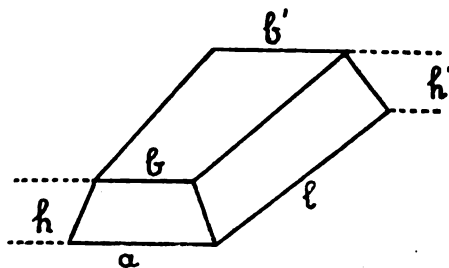



Fig. 1.

drico, che si trova tuttora nei trattati di geometria pratica; s'insegna a calcolare il volume in base ad un procedimento che noi esprimeremmo con la seguente formula:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2}\right) \cdot \frac{h+h'}{2} \cdot l$$

Il calcolo della lunghezza della corda di un cerchio, mostra che gli Assiro-Babilonesi avevano, se non altro, intuita la relazione esistente fra l'ipotenusa ed i cateti di un triangolo rettangolo. Per il calcolo dell'area di un cerchio usavano il valore $\pi = 3$ certamente dedotto dalla considerazione di un esagono regolare inscritto in un cerchio e dalla identificazione d'un arco con la sua corda. Ma certe figure di aree limitate da due archi circolari inducono a ritenere che non ci si limitò ad una così rozza approssimazione e indurrebbe a supporre un movimento di pensiero analogo a quello che vedremo avere guidato alle lunule di Ippocrate da Chio; tali considerazioni confermano che a Babilonia il cerchio era stato largamente studiato, cosa che risulta anche dal calcolo dell'area di un segmento circolare definito dalla sua corda e dal relativo arco che s'incontra nei documenti sinora decifrati.

Del loro fattivo interesse degli Assiro-Babilonesi per la geometria è

ulteriore prova il fatto che erano in grado di delineare la « pianta » di un edificio.

Va da ultimo notato che essi avevano stabilito un sistema razionale e completo di pesi e misure. L'unità di misura fondamentale era il cubito = m. 0,496; di esso la 30ª parte, il « dito », era l'unità di misura per le lunghezze minori; veniva anche usato il « piede », eguale a 2/3 di cubito, cioè 20 dita. Sembra poi accertato che quale comune unità di capacità venisse assunta la 144ª parte del cubito-cubo, e finalmente come unità di peso quello di un volume d'acqua eguale alla 240ª parte di un cubito-cubo.

Quanto precede serve soltanto a porgere un'idea generale di quanto si conosce intorno al sapere matematico di un popolo che sinora passava per essersi dedicato esclusivamente ad osservazioni astronomiche: l'avvenire prepara certamente nuove sorprese quando verrà totalmente elaborato il materiale in continuo aumento (1).

9 - Mentre quanto precede serve a misurare la vastità dell'ambiente aritmetico percorso dai Babilonesi, altri fatti stanno a dimostrare che la geometria non rimase estranea al loro pensiero e che alle figure chiesero aiuto nei loro sforzi per leggere nel gran libro del destino. Parallele, quadrati, triangoli, angoli retti s'incontrano fra le macerie della civiltà babilonese. Non è improbabile che essi conoscessero la proprietà di essere rettangolo posseduta dal triangolo avente i lati misurati dai numeri 3, 4, 5; ma è certo che erano in grado di calcolare con precisione le aree di quadrati, di rettangoli, di triangoli rettangoli e persino di trapezi, mentre per determinare l'area di un cerchio servivansi del valore $\pi = 3$, che s'incontra nella Bibbia.

Tali cognizioni non debbono stupire in un popolo che, non soltanto seppe erigere imponenti edifici (alcuni dei quali seppero resistere vittoriosamente all'ingiuria del tempo) ma che — come prova un documento posto di recente a disposizione degli studiosi — erano in grado di delineare con sufficiente esattezza la pianta di un edificio. Perciò non è destituita di fondamento l'ipotesi che il quadro da noi delineato della matematica babilonese contenga meno di quanto avrebbe abbracciato se più numerosi fossero stati i documenti posti a nostra disposizione. Tale apprezzamento è confermato dalla notizia che i Babilonesi avevano stabilito un sistema completo di pesi e misure. L'unità di lunghezza era il cubito = *m*. 0,496; di esso il summultiplo secondo 30 (il « dito ») era l'unità di misura in uso per le lunghezze minori; veniva anche considerato il « piede », eguale a due terzi di cubito, epperò a venti dita. Sembra poi accertato che quale unità di capacità fosse assunta la centoquarantaquattresima parte del cubito-cubo e finalmente come unità di peso quello di un volume d'acqua eguale alla duecentoquarantesima parte pure del cubito-cubo.

---

(1) Citiamo a riprova il fatto che i più recenti scavi eseguiti sotto la direzione dell'Università di Chicago a Persepoli condussero alla scoperta di 30000 scritti cuneiformi di cui 2/3 in ottimo stato di conservazione.

## Gli Egiziani

10 - La storia civile e politica dell'Egitto è conosciuta con soddisfacente precisione; essa insegna che, sino alla conquista d'Alessandro Magno, quel paese fu retto successivamente da sovrani appartenenti a trenta diverse dinastie, la più antica delle quali risale a 4500 anni a. C. Le piramidi, oggetto di giustificata ammirazione per la loro mole imponente e per la loro orientazione rigorosamente costante (e che non può essere stata determinata in base a considerazioni igieniche non trattandosi di edifici destinati a ospitare persone vive), le quali furono erette sotto la quarta dinastia (cioè 3600 o 3700 anni a. C.), i colossali obelischi, i templi maestosi, la sapiente distribuzione delle acque e gli argini ultrapotenti, sono altrettante inoppugnabili testimonianze del considerevole sviluppo ivi raggiunto dai vari rami della scienza dell'ingegnere. Finalmente la scoperta, fatta dai dotti francesi che accompagnarono il generale Bonaparte nella spedizione d'Egitto, di avanzi di un canale navigabile congiungente il Mediterraneo al Mar Rosso, sta a provare che il taglio dell'istmo di Suez, di cui va giustamente orgogliosa la moderna ingegneria, fu almeno tentato trenta secoli prima di essere portato a termine. Editti, testamenti, contratti, ricevute, cambiali e simili documenti, che si sottrassero miracolosamente all'azione edace del tempo, mostrano poi come un saggio governo avesse avviluppato l'Egitto in una rete di provvidenziali disposizioni amministrative; in particolare l'avesse dotato di un servizio per il trasporto di persone, di merci e di lettere degno di gareggiare con quelli che si reputano portati dalla moderna civiltà. Aggiungasi che sembra risalire all'anno 4236 e forse al 4271 a. C. l'introduzione dell'anno solare di 365 giorni, ripartito in dodici mesi di giorni 30 ognuno, con l'aggiunta di 5 giorni intercalari.

Di questo invidiabile stato di cose scrissero « con le ginocchia della mente inchine » i Greci che percorsero l'Egitto nell'antichità, spinti o dalla sete di guadagno o dal nobile desiderio di venire a contatto con la casta sacerdotale a cui ivi, come di regola accadde nelle civiltà primitive, era riserbato il monopolio della scienza. Fra gli altri Erodoto, il padre della storia, dopo di avere asserito con frase scultoria che « l'Egitto è un dono del Nilo » (volendo con ciò affermare che la sua prosperità proviene dalle periodiche alluvioni di quel grande fiume), manifestò l'avviso che ivi fosse nata la geometria, come prodotto della necessità di ripristinare i confini di proprietà ogni anno cancellati dal Nilo [1]. Giamblico, dal canto suo, afferma, nella sua *Biografia di Pitagora,* che i sacerdoti egiziani dedicavano non meno di ventidue anni allo studio della geometria e dell'astronomia.

---

[1] Si ricordi che Sesostri (da identificarsi forse con Ramsete II), re, appartenente alla XIX dinastia, verso il 1300 a. C. divise fra i propri sudditi tutta la terra coltivabile, assegnando a ciascuno un appezzamento di forma quadrata.

11 - Le informazioni intorno alla civiltà in generale e in particolare intorno al sapere matematico ed astronomico degli Egiziani, essendo somministrate da scrittori greci e latini non dotati di speciale competenza in materia, lungi dal soddisfare rendevano più tormentoso il desiderio di notizie dirette sull'argomento; ma il mezzo migliore per procurarselo, cioè lo studio dei monumenti letterari superstiti, durante molti secoli superava le forze dell'uomo. Le lunghe strisce di papiro, nelle quali erano avvolte le mummie egiziane, erano ricoperte di segni e figure che si ritrovavano regolarmente sulle pareti dei più cospicui edifici superstiti, onde tutto facesse credere che si trattasse di ideogrammi; ma l'Iside misteriosa ne conservava gelosamente il segreto. È gloria perenne di J. F. Champollion (n. 23 dicembre 1790, m. 4 aprile 1832) di avere strappato il velo che per secoli celò ai profani il significato dei geroglifici in uso sulle rive del Nilo. Egli, giovandosi delle sue profonde cognizioni sulla lingua copta (idioma derivato dal greco e usata in Egitto dopo che Diocleziano vi ebbe introdotto il Cristianesimo), riuscì a decifrare un'iscrizione trilingue, scoperta a Rosetta durante la spedizione napoleonica in Egitto, e poi a spiegare definitivamente la scrittura in geroglifici.

Ma, oltre questo alfabeto, monumentale e sacro, ne esisteva in Egitto un secondo, derivato dai geroglifici e usato dalla casta sacerdotale; è la *scrittura jeratica* che il dotto tedesco R. Lepsius (n. 25 giugno 1775, m. 23 aprile 1853) ha per primo decifrata, finalmente in Egitto ne era in uso una terza, che, per essere stata usata dal popolo, chiamasi *scrittura demotica;* essa venne decifrata da un altro erudito della stessa terra, H. Brugsch (n. 18 febbraio 1827, m. 9 settembre 1894) il quale aprì e spianò la via a E. Révillout, la cui *Crestomazia demotica* rivelò un nuovo mondo, facendo conoscere quali fossero le leggi, le costumanze, le abitudini e persino gl'intimi sentimenti di coloro che nella più remota antichità vivevano sulle rive del Nilo. Se così, in particolare, si appresero i fenomeni celesti da essi osservati e i procedimenti usati per misurare il tempo (non solo con intenti civili, ma anche a sussidio dell'astronomia), rimaneva sempre in totale oscurità la loro tecnica matematica.

A colmare siffatta deplorevole lacuna provvide nel 1868 A. Eisenlohr, decifrando un documento egiziano, di contenuto aritmetico-geometrico, salvatosi dalla minacciata rovina per un complesso di fortunate circostanze; è quello che va nella storia della scienza sotto il nome di *Papiro Rhind,* dal nome del suo primo proprietario; attualmente si trova in discrete condizioni nel British Museum di Londra; solo un frammento intercalare è conservato nel Museo di New York.

12 - Scritto fra il 1788 e il 1580 a. C. servendosi di una miscela di geroglifici e di segni appartenenti alla scrittura jeratica, esso è copia di uno scritto di più antica data, che risale forse al periodo 1842-1801 a. C. [1]. Secondo alcuni si tratta di un quaderno scolastico,

[1] Esso comincia con le parole: « Regola per giungere alla conoscenza di tutto ciò che è oscuro, di tutti i misteri che risiedono nelle cose. Questo scritto fu redatto nell'anno 33 del quarto mese della stagione dell'inondazione sotto il re Raa-mus (Eisenlohr)

altri invece lo giudica una specie di vade-mecum per gli agricoltori [1]; è una collezione di problemi, in parte di natura geometrica, risoluti applicando regole non dimostrate, probabilmente tradizionali; gli errori evidenti che vi si incontrano mostrano la mediocrità tanto dell'amanuense, quanto di coloro a cui egli attingeva; la difficoltà dell'interpretazione è aumentata dagli strappi subiti dal papiro e dalla presenza di vocaboli, che sono di dubbia interpretazione perchè non s'incontrano altrove.

Da esso si desume anzitutto che, allorquando fu scritto, era usata come unità di misura il « cubito » (detto reale) equivalente a *m.* 0,523, di cui si consideravano i summultipli secondo 7 (il « palmo ») e secondo 7 × 14 (il « dito »); per le misure sul terreno come unità di misura si usava il cento-cubiti. Pure per calcoli topografici si usava un quadrato avente per lato 100 cubiti; e poichè l'area risultante (di diecimila quadrati) si manifestava sovente eccessiva, si preferiva il cento-cubiti quadrati. Il quadrato col lato eguale a un cento-cubiti veniva poi suddiviso in parti secondo i numeri 1/2, 1/4, 1/16, 1/32, che si designavano con nomi speciali. Pei volumi, l'ordinaria unità di misura era la decima parte del cubito avente il lato di lunghezza circa eguale a *m.* 0,471, il quale dividevasi in 320 *ro*. Non occorre arrestarsi sulle unità di peso usate dagli Egiziani, perchè non intervengono nel Papiro Rhind.

Prima di enumerare le principali questioni ivi trattate notiamo che, per indicare graficamente un numero, gli Egiziani in origine ricorrevano alla ripetizione di un medesimo segno, deputato a rappresentare l'unità. Più tardi, avvedutisi degli inconvenienti di tale sistema, espressero ogni numero con la parola che, nella loro lingua, serviva a designare quel numero. Ma, anche questo sistema presentando gravi inconvenienti se applicato su larga scala, si ricorse ad un vero e proprio sistema di numerazione, assumendo, al pari dei Babilonesi, come numero fondamentale il 10 [2]. Si introdussero in conseguenza segni speciali per rappresentare i numeri 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000, 10.000.000 e si convenne di scrivere questi simboli più volte, quando ciò fosse necessario; e poichè, quando essi presentavansi in numero cospicuo, la lettura riusciva difficile, così si convenne di formare dei gruppi contenenti ciascuno non più di quattro simboli. La direzione in cui succedevansi i vari gruppi è conforme alla legge di Hankel, cioè secondo la grandezza decrescente da sinistra verso destra. Speciali abbreviazioni si usavano per indicare l'« addizione » e la « sottrazione », e queste operazioni si eseguivano ripetendo un numero conveniente di volte il passaggio da un numero al suo consecutivo o al suo precedente, nella serie naturale dei numeri.

---

o Aauserre (Peet), secondo il modello di scritti più antichi dell'epoca del re dell'Alto e Basso Egitto, Nemare. Fu lo scriba Ahmes (Eisenlohr) o Ahmose (Peet) che scrisse questa copia ».

[1] A sostegno di tale interpretazione stanno le seguenti parole di chiusa del Papiro in questione: « Cattura gli insetti e i topi..... Invoca da Ra calore, vento e acqua alta ».

[2] Vi si nota anche qualche traccia della presenza di 5 come numero fondamentale secondario.

Per le operazioni di moltiplicazione e divisione venivano usate procedure speciali. La moltiplicazione per dieci non offriva alcuna difficoltà, perchè per eseguirla bastava nel simbolo del moltiplicando sostituire $10^{n+1}$ a $10^n$. Ogni altra moltiplicazione veniva decomposta in una successione di duplicazioni, seguite da un'addizione; per rendersi ragione di siffatto artificio osserviamo che qualunque numero intero $n$ può scriversi sotto la forma $2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots$ ove gli esponenti sono numeri interi positivi e si suppone $\alpha > \beta > \gamma > \ldots$; onde, volendo calcolare il prodotto di $n$ per un altro numero $m$, si può eseguire prima $\alpha$ duplicazioni di $m$, poi $\beta$, poi $\gamma$, ecc. e finalmente addizionare fra loro i risultati ottenuti; corrispondentemente per la divisione, sottraendo, cioè, dal dividendo tanti prodotti dalle forme $2^\alpha\, m$, $2^\beta\, m$,... sino ad ottenere zero o un numero inferiore a $m$. Per meglio chiarire questi procedimenti servono gli esempi seguenti:

Moltiplicazione di 7 per 6:

| | |
|---|---|
| 1 | 7 |
| * 2 | 14 |
| * 4 | 28 |
| 6 | 42; |

si cercano nella prima colonna i numeri la cui somma è 6 e si pone ad essi un segno; i numeri corrispondenti della seconda dànno in somma il prodotto cercato.

Divisione di 327 per 12:

| | |
|---|---|
| 1 | 12 * |
| 2 | 24 * |
| 4 | 48 |
| 8 | 96 * |
| 16 | 192 * |
| 27 | 324 |

si cercano nella seconda colonna i numeri la cui somma è eguale al dividendo o al massimo intero ad esso prossimo e vi si pone un segno; la somma dei numeri corrispondenti della prima colonna dà, in questo caso approssimativamente, il quoziente richiesto.

13 - Una fisonomia sua propria e caratteristica possiede la teoria delle frazioni nell'aritmetica pratica degli Egiziani, perchè questi, pur non ignorando il concetto generale di frazione e alcune proprietà relative, usavano nei calcoli esclusivamente frazioni a numeratore unitario (le diremo per brevità « frazioni fondamentali »); un'eccezione era fatta soltanto per la frazione 2/3, benchè non ne fosse ignota l'equivalenza con la somma di 1/2 e 1/6; una frazione fondamentale veniva indicata col denominatore a cui veniva annesso un determinato fregio; segni speciali si avevano soltanto per 1/2, 1/3 e 1/4. È chiaro che, adottando un tale sistema, si affacciava il problema di « decomporre una frazione arbitraria in una somma di fondamentali ». E infatti il Papiro Rhind

si apre con una tabella che insegna a decomporre in fondamentali tutte le frazioni del tipo $\frac{2}{2n+1}$ per $n = 2, 3, .... 50$ (si noti che l'esclusione delle frazioni della forma $\frac{2}{2n}$ mostra che erasi già notato che queste trasformansi immediatamente in fondamentali). essa permette di ottenere un'analoga decomposizione per tutti i numeri della forma $\frac{m}{2n+1}$, $n$ essendo uno dei predetti numeri. Crediamo opportuno riferire questa tabella sotto forma sincopata, sottintendendo, cioè, il numeratore 2 nei primi membri e il numeratore 1 nei secondi:

| | |
|---|---|
| 5 = 3 + 15 | 55 = 30 + 330 |
| 7 = 4 + 28 | 57 = 38 + 114 |
| 9 = 6 + 18 | 59 = 36 + 236 + 531 |
| 11 = 6 + 66 | 61 = 40 + 244 + 488 + 610 |
| 13 = 8 + 52 + 104 | 63 = 42 + 126 |
| 15 = 10 + 30 | 65 = 39 + 195 |
| 17 = 12 + 51 + 68 | 67 = 40 + 335 + 736 |
| 19 = 12 + 76 + 114 | 69 = 46 + 138 |
| 21 = 14 + 42 | 71 = 40 + 568 + 710 |
| 23 = 12 + 276 | 73 = 60 + 219 + 292 + 365 |
| 25 = 15 + 75 | 75 = 50 + 150 |
| 27 = 18 + 54 | 77 = 44 + 308 |
| 29 = 24 + 58 + 174 + 232 | 79 = 60 + 237 + 316 + 790 |
| 31 = 20 + 124 + 155 | 81 = 54 + 162 |
| 33 = 22 + 66 | 83 = 60 + 332 + 415 + 498 |
| 35 = 30 + 42 | 85 = 51 + 255 |
| 37 = 24 + 111 + 296 | 87 = 58 + 174 |
| 39 = 26 + 78 | 89 = 60 + 356 + 534 + 890 |
| 41 = 24 + 246 + 328 | 91 = 70 + 130 |
| 43 = 42 + 86 + 129 + 301 | 93 = 62 + 186 |
| 45 = 30 + 90 | 95 = 60 + 380 + 570 |
| 47 = 30 + 141 + 470 | 97 = 56 + 679 + 776 |
| 49 = 28 + 196 | 99 = 66 + 198 |
| 51 = 34 + 102 | 101 = 101 + 202 + 303 + 606 |
| 53 = 30 + 318 + 795 | |

Si noti ora che il problema di decomporre una frazione qualunque in una somma di fondamentali è di sua natura indeterminato, perciò è lecito aggiungere nuove condizioni alle quali debbano soddisfare le frazioni componenti, anzi variarne in ogni caso il numero e la natura; e siccome è probabile che la riportata tabella non sia stata costruita da una medesima persona, nè in una stessa epoca, così nulla vieta di pensare che la decomposizione sia stata eseguita in modi e con criteri differenti. Per chi adotta questo modo di vedere non esiste la questione di determinare il metodo di costruzione della tabella in questione; chi invece pensa differentemente ritiene opportuno di sottoporre la tabella

stessa ad un'accurata analisi, onde vedere se siavi qualche carattere comune alle decomposizioni ivi esposte; ora una semplice ispezione mostra: 1° che ognuna delle frazioni considerate viene spezzata in un certo numero di fondamentali, le quali, tutte meno una, hanno per denominatori dei multipli del denominatore della frazione decomponenda; 2° che la frazione esclusa, moltiplicata per il denominatore della frazione data, dà un prodotto compreso fra 1 e 2. Nasce per ciò l'idea che, per raggiungere lo scopo a cui mirava, il costruttore della tabella tentasse di sottrarre da ogni frazione della forma $\frac{2}{2n+1}$ tante e tali frazioni del tipo $\frac{1}{(2n+1)x}$ finchè ottenesse una frazione fondamentale. Ora su questo concetto di soluzione si può erigere un procedimento uniforme di calcolo [1]; nell'esporlo noi ci serviremo, per brevità e chiarezza, della tecnica moderna, perchè sono così scarse e frammentarie le informazioni che ci furono tramandate intorno ai metodi di calcolo degli antichi Egiziani, che mancano gli elementi per una verosimile divinazione; ma il lettore è avvertito che noi non intendiamo in alcun modo attribuire ad essi la nostra tecnica algebrico-aritmetica.

14 - *a*) Supponiamo anzitutto che si voglia spezzare $\frac{2}{2n+1}$ in due frazioni fondamentali, una delle quali abbia per denominatore $(2n+1)x$, $x$ essendo un intero da determinare; ora, qualunque sia $x$, sussiste l'identità seguente:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)\frac{x}{2x-1}}$$

e se determineremo $x$ in modo che l'ultima di queste tre frazioni sia fondamentale, avremo raggiunto lo scopo. notiamo intanto che l'eguaglianza precedente conduce alla limitazione

$$1 < (2n+1)\frac{1}{(2n+1)\frac{x}{2x-1}} < 2,$$

[1] Il più recente editore del Papiro (T. E. Peet) suppone che le decomposizioni ivi registrate siano state ottenute scomponendo il numero 2 mediante identità della seguente forma $2 = (2n+1)f + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$ ove $f$ vale $2/3$ o è una frazione fondamentale; da essa segue $\frac{2}{2n+1} = f + \frac{1}{(2n+1)a} + \frac{1}{(2n+1)b} + \ldots$ come volevasi; p. es. da $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ nasce la decomposizione poco felice $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$, con cui si chiude il Papiro. Ma si può osservare che lo stabilire una tale decomposizione di 2 è una questione in generale altrettanto difficile che quella di scomporre $\frac{2}{2n+1}$ in frazioni fondamentali.

conformemente a un'osservazione precedente. Ora siccome $2x - 1$ non è divisibile per $x$, così, se $2n + 1$ è un numero primo, affinchè il prodotto $(2n + 1)x$ sia divisibile per $2x - 1$ è necessario si abbia $2n + 1 = 2x - 1$, onde $x = n + 1$. Nasce in conseguenza la seguente identità:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

Facendo ivi $n = 1$ si trova $2/3 = 1/2 + 1/6$, mentre per $n$ successivamente eguale a 2, 3, 5, 11 si ottengono altrettante decomposizioni registrate nella tabella precedente. Se invece $2n + 1$ è un numero composto, basta eguagliare $2x - 1$ a uno dei suoi fattori; questo concetto porta alle altre decomposizioni binomie della tabella, facendo successivamente $n = 4$, 7, 10, 12, 13, 16, 19, 22, 24, 25, 27, 28, 31, 32, 34, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 49; restano così escluse le sole decomposizioni « binomie » delle frazioni coi denominatori 35 e 91, di cui diremo poi.

Va notata una semplificazione che può attuarsi e che fu tacitamente utilizzata nella composizione della tabella in esame; ed è che quando si conosca una decomposizione della forma $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se ne deduce immediatamente l'analoga

$$\frac{2}{(2n+1)(2p+1)} = \frac{1}{a(2p+1)} + \frac{1}{b(2p+1)}.$$

Non v'ha dubbio che di ciò si è tratto profitto per dedurre dalla decomposizione $2/3 = 1/2 + 1/6$ quelle delle frazioni di numeratore 2 e di denominatori 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99; e così dalla decomposizione $2/5 = 1/3 + 1/15$ si dedussero quelle delle frazioni con i denominatori 25 e 65; da $2/7 = 1/4 + 1/28$ le scomposizioni delle 2/49 e 2/77; finalmente dalla formola $2/11 = 1/6 + 1/66$ segue quella relativa a 2/55, come da quella concernente 2/19 nasce quella data da Ahmes per 2/95.

*b*) Passiamo alle decomposizioni trinomie. Osservando che si ha

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2x+1)y} + \frac{1}{(2n+1)\dfrac{xy}{2xy-(x+y)}},$$

si vedrà subito che per giungere al risultato voluto è necessario scegliere i numeri $x$ e $y$ per modo che $2n + 1$ sia un multiplo del denominatore della frazione $\frac{xy}{2xy-(x+y)}$ supposta previamente ridotta ai suoi minimi termini; notiamo intanto che l'ultimo termine dell'identità precedente, moltiplicato per $(2n + 1)$ dà per prodotto $2 - \frac{x+y}{xy}$, quantità sempre compresa fra 1 e 2, $x$ e $y$ essendo numeri interi fra loro differenti e maggiori di uno. Per determinare $x$ e $y$ nell'anzidetto modo

si può procedere per tentativi (noi oggi preferiremmo costruire una tabella dei valori assunti dalla funzione $\frac{x\,y}{2\,x\,y - (x+y)}$ per valori interi e positivi della $x, y$). Così facendo si vede che supponendo successivamente $n = 6, 8, 9, 15, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 35, 47$ e $48$ si giunge a tutte le decomposizioni trinomie registrate nel Papiro Rhind.

*c*) Con procedimento non dissimile si possono ottenere le decomposizioni quadrinomie; basta infatti rilevare l'identità

$$\frac{2}{2\,n+1} = \frac{1}{(2\,n+1)\,x} + \frac{1}{(2\,n+1)\,y} + \frac{1}{(2\,n+1)\,z} + \frac{1}{(2\,n+1)\,\frac{x\,y\,z}{2\,x\,y\,z - (y\,z + z\,x + x\,y)}}$$

per vedere che allo scopo si giunge scegliendo per $x, y, z$ valori interi positivi tali che la frazione $\frac{x\,y\,z}{2\,x\,y\,z - (y\,z + z\,x + x\,y)}$, ridotta ai suoi minimi termini, abbia per denominatore un fattore di $2\,n+1$. Questo risultato si può pure ottenere mediante tentativi (attualmente si costruirebbe in anticipo una tabella a triplice entrata dei valori assunti dalla funzione $\frac{x\,y\,z}{2\,x\,y\,z - (y\,z + z\,x + x\,y)}$ per valori interi e positivi di $x, y, z$). Supponendo successivamente $n = 14, 21, 30, 36, 39, 41, 44$ e $50$ si ottengono le otto decomposizioni quadrinomie registrate dallo scriba egiziano.

Quanto alle decomposizioni binomie escluse dalle considerazioni precedenti, esse si presentano molto spontaneamente, onde non è da escludere siano state ottenute direttamente, per la via schematizzata dalle formole seguenti:

$$\frac{2}{35} = \frac{5+7}{5.\ 6.\ 7} = \frac{1}{6.\ 7} + \frac{1}{5.\ 6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{101} + \frac{7+13}{7.\ 13.\ 10} = \frac{1}{13.\ 10} + \frac{1}{7.\ 10} = \frac{1}{130} + \frac{1}{70}$$

Richiamiamo infine l'attenzione del lettore sopra la decomposizione della frazione 2/101, ottenuta assumendo una delle parti eguale a 1/101, sistema troppo semplicista, usato in nessun'altra occasione e che non è giustificato in alcun modo, dal momento che si poteva assumere

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{60} + \frac{1}{404} + \frac{1}{1515}.$$

Un'ultima osservazione: i procedimenti da noi esposti guidano in generale, non ad una sola, ma a parecchie decomposizioni; ebbene,

uno studio più minuto di quello che può venire qui fatto mostra che la scelta fra le varie decomposizioni possibili fu ottenuta in base al criterio della semplicità.

Aggiungiamo che nuove tabelle dello stesso tipo di quella testè studiata si trovano in altri documenti concernenti l'aritmetica degli Egiziani: sono i cosidetti Papiro di Michigan e Papiro d'Akhmim; essi risalgono al periodo che va dal v all'VIII secolo dell'E. v., onde dimostrano la persistenza dell'uso delle frazioni fondamentali sulle rive del Nilo; e poichè, come vedremo (Cap. XII), tabelle congeneri si trovano nel *Liber Abaci* (1202) mediante cui Leonardo Pisano rivelò agli Europei l'Oriente matematico, così è indiscutibile la persistenza di procedimenti aritmetici di cui non resta ormai alcuna traccia nella scienza moderna.

15 - Mentre l'interpretazione della sezione introduttoria del Papiro Rhind non ha dato origine a dissensi e discussioni, si sono manifestate rilevanti discrepanze fra gli specialisti (Cantor, Rodet) riguardo al senso da attribuire ai problemi aritmetici trattati; alcuni, avendo rilevato la presenza di uno speciale vocabolo (*hau*) per designare l'incognita di un problema, credettero scorgervi antecipazioni di metodi algebrici, mentre altri invece non vi notarono che problemi di semplice aritmetica. Per conto nostro osserviamo che si tratta di questioni che oggi si sogliono ridurre alla risoluzione di equazioni di 1° grado a un'incognita, ma che si possono anche sciogliere applicando la regola del tre, talora combinata col metodo di falsa posizione, sotto la forma più semplice; onde riteniamo che nulla autorizzi a fare occupare al Papiro Rhind il N. 1 nel catalogo della letteratura algebrica.

Indicheremo ora brevemente le principali questioni trattate, dopo avere rilevato che molti dei calcoli eseguiti presentano una spiccata analogia con quelli che fa mestieri eseguire da chi voglia giungere alle decomposizioni surriferite delle frazioni del tipo $\frac{2}{2n+1}$ in fondamentali.

Così nei problemi 1-6 (secondo la numerazione apposta dai moderni trascrittori del Papiro Rhind), i quali si riferiscono alla ripartizione di pani fra più persone, si tratta in sostanza della scomposizione in fondamentali di frazioni della forma $n/10$; p. es. nei problemi 7-20 si deve esprimere come somma di un intero e di frazioni fondamentali il prodotto di due numeri espressi nello stesso modo; e nei problemi 21-23 si tratta di fare lo stesso per la differenza fra 1 2/3 e un numero dell'anzidetta specie. Le questioni 24-38 si tradurrebbero oggi in equazioni della forma $x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + ... = a$, le quali si possono risolvere applicando la falsa posizione come segue: si assuma per $x$ un valore $x_0$ arbitrario (che, però, gioverà supporre multiplo dei denominatori $m, n, ...$) e si calcoli il valore $a_0$ assunto in conseguenza dal primo membro, essendo $x_0 + \frac{x_0}{m} + \frac{x_0}{n} + ... = a_0$, si avrà evidentemente $\frac{x}{x_0} = \frac{a}{a_0}$, epperò $x$ si otterrà con una quarta proporzionale.

Il problema 39 ha per oggetto la ripartizione di un certo numero di pani in parti non tutte eguali, e nel seguente s'incontra il concetto di progressione aritmetica. Sorvolando per il momento sui problemi geometrici, rileviamo nel problema 61 una piccola tavola di moltiplicazione di frazioni fondamentali (2/3 incluso) per altre (cioè l'espressione dei prodotti ottenuti come somme di frazioni fondamentali); nel 64° ritroviamo delle progressioni aritmetiche. Notevole è il problema 79 il quale, per ignote vie, giunse a Leonardo Pisano, che l'inserì nel suo *Liber Abaci;* si trova ivi la progressione geometrica 7, 49, 343, 2401, 16.807, e ne è determinata la somma 19.607.

16 - Prima di lasciare la parte prettamente aritmetica del Papiro Rhind, notiamo che le questioni ivi trattate non rappresentano l'estremo limite delle conoscenze aritmetiche degli Egiziani, giacchè in un altro analogo documento scoperto a Kahun (Afghanistan) e interpretato dal Griffiths, e in un terzo esistente a Berlino e spiegato dallo Schack, s'incontrano questioni che oggi risolverebbevi con sistemi di grado superiore al primo, cioè i seguenti:

$$x^2 + y^2 = 100 \quad , \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{3/4}$$

$$x\,y = 12 \quad , \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 + y^2 = 400 \quad , \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{2/3}$$

per determinare i valori delle incognite che vi soddisfano, gli Egiziani ricorrevano, anche in questi casi, all'artificio della falsa posizione; ad es., per risolvere il primo dei succitati sistemi, si provi a soddisfarlo ponendo $x = 1$, $y = 3/4$; sostituendo questi valori nel primo membro della prima delle equazioni del sistema si ottiene 25/16, onde i numeri assunti differiscono da quelli cercati per il fattore 8; essi sono dunque $x = 8$, $y = 6$. Merita di essere rilevata la circostanza che i dati dei problemi considerati furono scelti in modo da ottenere soluzioni intere.

17 - Chi attribuisce agli Egiziani la conoscenza del classico triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5 (del quale però non vi è traccia nel Papiro Rhind) consente nel ritenere in uso sulle rive del Nilo un ingegnoso procedimento per costruire sul terreno un angolo retto; esso consiste nell'usare una fune la cui lunghezza sia 3 + 4 + 5 unità di misura e sulla quale siano effettivamente segnati i punti distanti dagli estremi risp. di 3 e 5 unità; è evidente che, in virtù dell'anzidetta proprietà di essere rettangolo il triangolo avente per lati 3, 4, 5, stendendo quella fune in modo da rinchiudere un triangolo, l'angolo opposto al lato 5 risulta retto. Siffatta operazione, se realmente effettuata da ufficiali governativi incaricati di determinare l'imposta-terreni dovuta da ciascun cittadino, fu addotta per spiegare il nome di « tenditori di corde »

(arpedonatti) dato a una classe di agenti delle imposte. ma, anche se non si vuole attribuire agli Egiziani quella costruzione degli angoli retti, quei funzionari potevano ricorrere alla tensione di corde per disimpegnare il loro ufficio e quindi meritare il nome di arpedonatti [1]. La speranza di trarre dal Papiro Rhind qualche informazione al riguardo andò delusa. Infatti la parte geometrica di quel prezioso cimelio non contiene che un certo numero di problemi aventi per iscopo il calcolo di superficie e volumi, determinati numericamente. Sgraziatamente delle figure considerate si cerca indarno la definizione nei documenti superstiti, il che porterebbe a credere esistesse un manuale di geometria contenente la base dottrinale delle soluzioni esposte da Ahmes. La scoperta di esse riuscirebbe veramente provvidenziale, perchè le figure che illustrano i problemi geometrici risolti nel Papiro Rhind sono delineate in modo così rozzo da far sorgere dubbi ben giustificati intorno alla specie delle figure stesse. Ciò ebbe per conseguenza un disaccordo nell'interpretazione di detti problemi, quando, dopo i più semplici concernenti quadrati e rettangoli, se ne incontrano altri concernenti triangoli e quadrilateri. Alcuni storici (Eisenlohr, Cantor), ritenendo che ivi si trattasse di triangoli isosceli (base $a$, lato $b$) e di trapezi isosceli (basi $b_1$ e $b_2$, lati obliqui $a$), giudicarono riprovevoli i calcoli eseguiti delle aree relative, perchè applicazioni delle formole errate $\frac{a\,b}{2}$ e $\frac{a\,(b_1 + b_2)}{2}$; e cercarono una spiegazione di tale errore osservando che sulla parete del tempio di Oro in Edfu (il quale fu finito di costruire il 23 agosto del 273 a C.) l'area di un quadrilatero di lati $a, b, c, d,$ viene valutata in base alla formola $\frac{(a + b)\ (c + d)}{2}$, nella quale rientrano come casi particolari quelle usate nel citato Papiro. Ma altri (Révillout, Simon) invocarono l'assoluzione di Ahmes « per non avere commesso il fatto », ritenendo che fossero rettangoli tanto i triangoli quanto i trapezi considerati.

Altre questioni trattate nel medesimo documento concernono la più semplice delle linee curve; esse documentano l'immensa antichità del problema della quadratura del cerchio, e mostrano che gli Egiziani lo avevano risoluto con soddisfacente approssimazione, giacchè usarono una costruzione che equivale ad assumere $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604$; senza arrestarci a riferire le ipotesi che vennero proposte (Simon, Vacca) per spiegare la genesi di questo valore, notiamo che esso guida a un errore del 6 per mille nel valore di $\pi$, cioè ad un'approssimazione più che sufficiente per i bisogni della pratica.

[1] Il legame fra la funzione degli arpedonatti fu segnalata da M. Cantor e accettata da molti storici. Di recente (S. Gaudz nel T. I. di *Quellen und Studien zur Gesch. der Math.*) si è però osservato che l'operazione di tendere una corda era comune presso tutte le antiche civiltà (Babilonesi, Ebrei, ecc.) onde quel nome equivale in generale a quello di agrimensori, depositari di tutta la scienza geometrica del tempo.

Quel valore di $\pi$ trova applicazione anche nei problemi del Papiro Rhind aventi per iscopo di calcolare il volume di granai (o, in genere, di magazzini per prodotti agricoli) limitati da superficie non tutte piane. Quelli poi che concernono ambienti completamente limitati da piani hanno con ragione attratta l'attenzione degli storici, i quali, benchè non siano riusciti a porsi d'accordo sopra tutti i particolari dell'interpretazione, ad una voce ritennero che, nei calcoli eseguiti da Ahmes, si trova in embrione il concetto di alcune funzioni trigonometriche. Nè va taciuto che detti problemi consentono di completare il quadro delle cognizioni aritmetiche degli Egiziani, giacchè uno di questi (porta il numero 45) mostra che essi erano in grado di eseguire, sia pure per tentativi, l'estrazione delle radici cubiche dei numeri.

Chiudiamo osservando che nel documento egiziano più di recente interpretato e pubblicato, cioè del cosidetto *Papiro di Mosca* (vedi *Bibliografia*) si trova calcolata la superficie di un recipiente emisferico che, seguendo l'interpretazione dell'editore, ha la propria giustificazione nel teorema che afferma essere la superficie di una sfera equivalente al quadruplo di quello di un suo circolo massimo. In tal caso Archimede sarebbe stato preceduto molti secoli prima in una delle sue più importanti scoperte.

18 - L'enumerazione, per quanto diligente, di tutte le figure considerate nei papiri matematici sinora decifrati, non basta per delineare un quadro completo delle cognizioni geometriche degli Egiziani; infatti la contemplazione delle pitture, che avendo resistito alle intemperie, si possono ancora ammirare sulle pareti dei templi superstiti, delle tombe e di altri insigni monumenti, fanno fede che essi altre ne conobbero e di esse avvertirono empiricamente alcune semplici proprietà. Così non v'ha dubbio che essi rilevarono la simmetria di un quadrato rispetto alle diagonali e giunsero a dividere un cerchio in 12 e in 16 parti eguali, mediante diametri. Gli stessi disegni mostrano che alla loro mente erano balenati i fondamenti della similitudine dei triangoli e alcuni principi della prospettiva (notisi, per incidenza, che questa rimase del tutto ignota ai popoli dell'Estremo Oriente). Finalmente l'uso che essi fecero della « pianta » e dell'« alzato » di un edificio, sta a provare che essi superarono i Babilonesi e che precedettero Vitruvio, il sommo architetto romano dell'epoca imperiale, nell'uso di questa forma primitiva del metodo della doppia proiezione ortogonale.

Da tutto ciò risulta che le cognizioni geometriche degli Egiziani non erano scarse nè malsicure, ma inspirate e commisurate alle esigenze dell'agrimensura e dell'architettura. Le nozioni e le procedure adunate nel corso dei secoli furono gelosamente tramandate di generazione in generazione, probabilmente per opera della casta sacerdotale, che ne era depositaria; e la prova più impressionante della conservazione di tal prezioso patrimonio è offerta dal fatto che, quando, nel I sec. dell'era nostra, Augusto volle fosse misurata la superficie dell'impero romano, affidò la direzione della colossale impresa a persone di alta rinomanza, cresciute e educate nell'antica terra dei Faraoni.

Non abbiamo fatto cenno delle estese cognizioni geometriche che furono attribuite agli Egiziani da coloro che, a partire dal noto astronomo Carlo Piazzi Smyth (1819-1900), vollero dedurle da misure eseguite sopra la grande piramide di Cheope [1], chè le loro argomentazioni poggiano sopra numeri poco esatti per due ragioni, cioè per lo stato in cui trovasi quel venerabile monumento e per la non perfetta conoscenza della lunghezza del « braccio egiziano ». Di recente si volle provare che le dimensioni di detta piramide furono scelte per illustrare la sezione aurea, senza tener conto di due fatti essenziali e cioè: 1° che gli Egiziani conobbero il teorema di Pitagora tutt'al più soltanto per il triangolo di lati 3, 4, 5, mentre si giunse a quella conclusione applicandolo in generale; 2° che la divisione in media ed estrema ragione rimase certamente ignota agli Egiziani, i quali non lasciarono alcun disegno contenente pentagoni e decagoni regolari, che sono appunto le figure in cui essa interviene.

19 - Da quanto succintamente esponemmo in questo Capitolo risulta che l'Aritmetica e la Geometria furono coltivate con qualche impegno sulle rive del Tigri, dell'Eufrate e del Nilo e che alcuni dei risultati ottenuti ottennero un posto stabile nella scienza. Ma Babilonesi ed Egiziani non seppero dar vita ad alcuna teoria matematica e neppure scrivere alcun capitolo di aritmetica e geometria: la ragione di tale insuccesso va ricercata nella tendenza generale delle indagini da essi compiute, le quali non miravano a stabilire verità di carattere dottrinale, ma soltanto ad aiutare l'astrologo o l'ingegnere. Al popolo al quale ora ci volgiamo era riserbata la gloria imperitura di rendere la ricerca scientifica in genere, e in particolare l'indagine matematica, fine a se stessa e di dimostrare che, soltanto così, essa può arrivare alle più sublimi altezze a cui alla mente umana è dato giungere.

## BIBLIOGRAFIA

L. G. du Pasquier, *Le développement de la notion du nombre* (Mém. de l'Université de Neuchâtel, t. III, 1925).
E. Fettweis, *Das Rechnen der Naturvölker* (Leipzig, 1927).

Assiro-Babilonesi

P. E. Botta, *Monument de Ninive decouvert et décrit* (Paris, 1849-50).
A. H. Layard, *Monuments of Niniveh* (London, 1849-53).
A. H. Sayce, *The Astronomy and Astrology of the Babylonians, with Translations of the Tablets relating to the subject* (Trans. of biblical Archeology, vol. III, parte I, London 1874).

---

[1] Riguardo a questo insigne monumento, su cui si è tanto fantasticato, Erodoto scrive che i sacerdoti egiziani gli avevano detto che in esso il quadrato dell'altezza equivale all'area di ciascuna delle facce laterali. Ma non bisogna dimenticare che mentre quello storico viveva nel V Sec. dell'Era nostra, quella piramide fu eretta da un Faraone della IV dinastia (2620-2597 a. C.).

R. LEPSIUS, *Die babylonisch-assyrisch Längenmaas nach den Tafeln von Senkreh* (Abh. der Berliner Akademie, 1877).

J. EPPING, *Astronomisches aus Babylon, unter Mitwirkung von P. J. R. Straussmayer* (Freiburg, 1889).

A. EISENLOHR, *Ein altbabylonischer Feldplan, nach Mittheilungen von P. V. Schell* (Leipzig, 1896).

H. V. HILPRECHT, *Mathematical, metrological and chronological Thablets, from the Temple Librairy* (Cuneiform Texts pubb. by the Babylonian Expedition of the University of Pennsylvania, ser. A, vol. XXX, parte I, 1906).

C. FRANK, *Strassburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache* (Berlin, 1928).

O. NEUGEBAUER, *Mathematische Keilschrifttexte herausgegeben und bearbeitet* (Berlin, 1935).

F. THUREAU-DANGIN, *Textes mathématiques Babyloniens, transcrits et traduits* (Leiden, 1938).

EGIZIANI

R. LEPSIUS, *Ueber ein hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu* (Abh, der Berliner Akademie, 1855).

A. EINSENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Papyrus Rynd des British Museum) (Leipzig, 1877).

W. M. FLIENDER PETRIE, *Illahun, Kahun and Gureb* (London, 1891).

J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmin* (Mém. publiés par les membres de la Mission archéologique française au Caire, t. IX, 1892).

J. L. GRIFFITH, *The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gureb* (London, 1828).

H. SCHACK-SCHAKENBURG, *Der Berliner Papyrus* 6619 (Zeitsch. für aegyptische Sprache, t. XXXVIII, 1906 e t. XL, 1902).

L. C. KARPINSKI, *Michigan Mathematical Papyrus N.* 621 (Iris, vol. I, 1923).

T. ERIC PEET, *The Rhind mathematical Papyrus, British Museum* 10057 *and* 10058. Introduction, Transcription, Translation and Commentary, Liverpool 1923).

O. GILAIN, *La science égyptienne. L'arithmétique an Moyen Empire* (Bruxelles, 1927).

W. W. STRUVE, *Mathematische Papiere des staatischen Museum der schönen Künsten in Moskau* (Quellen und Studien zur Gesch. der Mathem., Berlin, 1930).

## CAPITOLO II

## LA MATEMATICA GRECA IN SIMBIOSI CON LA FILOSOFIA

20 - Il primo periodo della storia della Matematica greca si inizia nel momento in cui viene timidamente accesa la fiaccola dell'indagine scientifica e si chiude con la morte di Alessandro Magno (323 a C.); perciò esso abbraccia all'incirca tre secoli. È un'epoca piuttosto di disordinata ricerca che di metodica elucubrazione; è un'epoca in cui l'investigazione di fenomeni speciali è subordinata a considerazioni di carattere universale, aventi per ultimo scopo di spiegare l'origine e la struttura del cosmo e di scoprire le leggi che lo governano; in allora ogni scienza — ed in particolare la Matematica — si trovava legata alla Filosofia da rapporti suggeriti da considerazioni di scambievole utilità, analoghi a quelli che intercedono fra animali in istato di parassitismo o di simbiosi; perciò era in quel tempo del tutto ignota la specializzazione caratteristica della scienza moderna. È un'epoca che non ci lasciò in eredità alcuna opera relativa alla nostra disciplina; ond'è che, per formarsi un concetto almeno approssimativo delle conquiste allora compiute, fa mestieri mendicare informazioni presso commentatori e da opere di carattere filosofico, storico, biografico ed enciclopedico. Ora chi ha presente quanto difficile sia l'esegesi delle fonti a cui attinsero gli autori di opere siffatte, quanto proclivi all'esagerazione siano i panegiristi, quali profonde deformazioni subiscano le notizie scientifiche quando riferite da persone prive di speciale competenza in materia, quanto frequenti siano i conseguenti equivoci, comprenderà senza stento quanto malagevole riesca il comporre con elementi siffatti un tutto immune da errori, libero da congetture ed esente da lacune. E poichè particolarmente arduo è il soddisfare a quest'ultima condizione, così tutto fa credere che l'elenco di nomi e il catalogo di scoperte che stiamo per presentare, siano destinati a subire in avvenire aggiunte e modificazioni per effetto o del ritrovamento di nuovi documenti o di una più soddisfacente conoscenza di quelli già noti: ed è presumibile che, in conseguenza, anche i dati biografici relativi ai personaggi del tempo potranno divenire più completi e sicuri di quanto siano oggi.

Durante il periodo di cui stiamo per occuparci i Greci continuarono le relazioni commerciali ed intellettuali iniziate da tempo immemorabile con gli altri popoli mediterranei che li avevano precorsi nel cammino della civiltà; l'influenza che ne subirono in antico dovette essere assai considerevole se il popolo ellèno — notoriamente, per orgoglio na-

zionale, a nessuno secondo — con la leggenda di Cadmo si proclamò debitore verso l'Oriente e se, col chiamare le lettere dell'alfabeto *segni fenici,* mantenne vivo il ricordo della loro origine oltremarina. Tale influenza si mantenne in vigore anche durante l'epoca di cui ci stiamo occupando, dal momento che molti dei pensatori che allora fiorirono si compiacevano di proclamarsi allievi dei sacerdoti egiziani. Tuttavia non bisogna esagerare la portata di questa influenza, se non altro perchè l'imperfetta conoscenza che i Greci avevano delle altre lingue li poneva nell'impossibilità di penetrare nell'intimo del pensiero delle nazioni con cui mantenevano rapporti commerciali. Inoltre tutto quanto conosciamo intorno all'opera scientifica dell'Ellade antica prova che, se anche i Greci attinsero fuori della madre patria i rudimenti del sapere, li trasformarono così profondamente e li svolsero in modo così originale, che non è possibile non considerare tutta la loro produzione scientifica quale loro esclusiva proprietà, tanto più che non è dato sorprendere nel pensiero greco alcun ingrediente esotico, alcun fatto che non si trovi in pieno accordo con quanto conosciamo intorno al genio di quella stirpe privilegiata della natura.

## Talete e la Scuola Jonica

21 - Sullo scorcio del VI secolo ed al principio del V gli eserciti della Media e della Lidia stavano schierati di fronte nella vallata dell'Ali, pronti alla pugna che doveva decidere delle sorti dell'Asia Minore, quand'ecco il sole si oscura e le schiere nemiche, ossequienti al precetto costantemente osservato dalle stirpi iraniche di non combattere se non alla luce del giorno, depongono le armi e scendono agli accordi. Il giorno in cui accadde questo memorabile fatto non è esattamente conosciuto, gli storici essendo titubanti nella scelta fra le date 30 settembre 610, 31 luglio 597, 28 maggio 585, suggerite come possibili dall'odierna astronomia. Ma ciò che è ammesso per concorde attestazione degli scrittori del tempo è che quell'impressionante fenomeno era stato predetto da Talete da Mileto, la prima eminente personalità che ci presenti la storia delle scienze nell'antica Grecia; e tale e tanta ammirazione questa predizione destò nei suoi conterranei che, sotto l'arcontato di Damaso (585-583), egli venne annoverato fra i sette saggi della Grecia.

La scienza di cui disponeva Talete non era tutta frutto di studi ed osservazioni personali, giacchè egli stesso, dopo di avere gettate le basi della celebre Scuola Jonica, non esitava a dichiarare di avere molto appreso in Egitto, con i cui sacerdoti egli era venuto a contatto nel corso delle peregrinazioni mediterranee, intraprese sotto l'assillo, piuttosto dell'avidità di guadagno, che della sete di sapere. Ora, mentre siffatta dichiarazione costituisce una prova della specchiata probità del saggio di Mileto, non deve farlo discendere al livello di commesso viaggiatore al servizio dei Faraoni, chè, ad esempio, nessuna derivazione esotica è stata sino ad oggi avvertita per il suo caratteristico sistema filosofico, secondo il quale l'*acqua* è l'elemento primitivo di tutte le cose create.

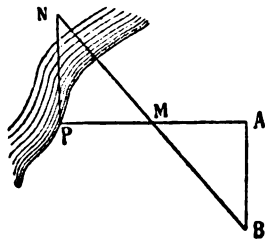
22 - Nè i documenti a noi noti autorizzano a dichiarare di provenienza straniera le cognizioni geometriche di cui egli era in possesso. Esse si compendiano nella dimostrazione e risoluzione di teoremi e problemi della più elementare geometria.

I primi sono: *a*) Il cerchio è dimezzato da un suo diametro; *b*) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono fra loro eguali; *c*) Gli angoli opposti al vertice sono fra loro eguali; e siccome si attribuisce a lui il merito di avere inscritto in un semicerchio un triangolo rettangolo, così egli merita di venire riguardato come primo ispiratore dei ben noti versi del nostro divino poeta:

> « O se del mezzo cerchio far si puote
> Triangol sì, ch'un retto non avesse ».
>
> (*Parad.*, XIII, 101-2).

Sgraziatamente nessuna informazione ci è giunta intorno al modo con cui egli stabiliva siffatte verità [1]; altrettanto dicasi riguardo alle costruzioni mediante cui egli riuscì a risolvere questi due problemi di geometria pratica, che gli sono attribuiti: *a*) Determinare la distanza di una nave dal porto. *b*) Determinare l'altezza di una piramide mediante l'ombra da essa proiettata.

Fig. 2.

Riguardo al primo osserviamo come nulla vieti si ammetta che Talete siasi servito della seguente semplicissima costruzione in uso presso gli agrimensori romani: sia (Fig. 2) $N$ la posizione occupata dalla nave e $P$ il porto; si elevi in $P$ la perpendicolare $PA$ alla visuale $PN$ e si fissi su di essa un punto arbitrario $A$; sia $M$ il punto medio di $AP$ e si consideri il punto $B$ nel quale la retta $MN$ incontra la perpendicolare condotta nel punto $A$ alla retta $AP$; la distanza fra i punti $A$ e $B$ è evidentemente eguale a quella cercata.

Meno agevole è divinare la soluzione del secondo dei surriferiti problemi. Secondo alcuni, per scioglierlo Talete si serviva di un bastone, coll'aiuto del quale determinava l'istante in cui esso fosse eguale alla propria ombra; nello stesso momento ogni altro corpo (in particolare la piramide considerata) gode della stessa proprietà. È questo un procedimento assai conveniente, ma che non è applicabile se non a solidi la cui base sia di grandezza trascurabile rispetto all'altezza, epperò certamente non al monumento a cui Talete dirigeva la propria mente. E tale difficoltà — la quale si vince ammettendo che il saggio di Mileto si proponesse di misurare l'altezza, non di una piramide, ma di un obelisco — — si ripresenta ammettendo, con Plinio il Vecchio, che Talete si servisse bensì di un bastone, ma in un'ora qualunque del giorno, sfruttando la costanza del rapporto che, in un medesimo istante, passa fra l'altezza

[1] Notisi però che i citati teoremi *a*), *b*), *c*) possono stabilirsi assai facilmente mediante sovrapposizione o col moderno artificio della piegatura della carta.

di un oggetto e la lunghezza dell'ombra che esso proietta. Questo secondo metodo porterebbe ad ammettere la conoscenza da parte di Talete dei fondamenti della similitudine e delle teorie precedenti, al che si oppone la sua *forma mentis,* giacchè viene concordemente riferito che egli s'interessava della matematica, non come disciplina autonoma, ma soltanto come ausiliare preziosa nelle ricerche di filosofia naturale. E così rimane *a fortiori* escluso che a lui fosse nota la relazione che sussiste fra le punteggiate determinate da un fascio di raggi paralleli sopra due rette poste nello stesso piano; è pertanto da abbandonare, come non rispondente al vero, la denominazione di « teorema di Talete », di consueto data alla proposizione che esprime quella relazione, a meno che questo nome sia attribuito soltanto *in onore* di Talete, come si dà quello di un grand'uomo ad una via, alla cui costruzione egli fu del tutto estraneo.

23 - Se dichiarammo Talete capo di una scuola, non è già perchè egli abbia raccolto a sè d'intorno un gruppo di ascoltatori, ma unicamente per esprimere che le sue idee più caratteristiche furono abbracciate e svolte da alcuni suoi connazionali dei quali si è serbata memoria. Fra questi limitiamoci a far menzione di Anassimandro ed Anassimene, i quali, non soltanto ritoccarono i cardini del sistema filosofico taletiano (col sostituire il primo la *materia* indefinita, il secondo l'*aria*, all'*acqua* come elemento di tutte le cose), ma accenuarono il distacco dalla matematica della Scuola Jonica. Per tal motivo questa ha diritto ad un posto nella storia delle scienze esatte, non per contributi diretti ed importanti alle nostre cognizioni positive, ma piuttosto per avere rivolta la propria attenzione sopra alcune questioni geometriche sfuggite. a quanto pare ai Babilonesi ed agli Egiziani. Essa, quindi, non rappresenta l'alba della matematica greca, ma piuttosto quel periodo di irrequieto fermento che prelude ed annunzia la vera e propria ricerca scientifica.

## Pitagora e la Scuola Italica

24 - L'avere determinato il periodo successivo della storia della matematica greca è gloria non destinata ad essere offuscata di Pitagora da Samo, il celebre creatore di un sistema filosofico nel quale l'elemento primordiale non è di natura tangibile, come per Talete, Anassimandro ed Anassimene, ma un essere di ragione, cioè il *numero*, considerato, non come l'animatore ed il governatore del cosmo, ma come l'essenza stessa delle cose (« le cose sono numeri », suona la massima fondamentale della filosofia pitagorica). Che tale concezione sia di origine orientale come molti sostengono, è cosa possibile, ma non storicamente provata; d'altronde non è destituita di fondamento l'ipotesi che ad essa siasi giunti, con rapida generalizzazione, quando, nella Scuola pitagorica, fu avvertita la rigorosa ossatura numerica posseduta dai fenomeni acustici.

La leggenda, sempre lussureggiante sotto il cielo dell'Ellade, compiacendosi di ornare di particolari fantastici tutte le notizie concernenti

Pitagora, costringe alla più oculata circospezione chi voglia tesserne la biografia; limitandosi a quanto sembra superiore ad ogni dubbio, si può ritenere assodato che egli nacque verso il 586 a. C., che visitò l'Egitto e che, per sottrarsi all'intollerabile tirannia di Policrate, verso il 540 abbandonò la sua patria, facendo vela verso la Magna Grecia, ed a Crotone fondò, circa nell'epoca della cacciata dei Tarquinii da Roma, quell'associazione *sui generis*, da cui non erano escluse le donne, piuttosto politico-religiosa che a scopi esclusivamente scientifici, denominata Scuola italica, la quale, essendo divenuta ben presto centro di un inquietante partito aristocratico, fu bersaglio del movimento popolare che sconvolse allora tutti gli stati della Grecia e venne violentemente disciolta. Ma nè la dissoluzione della scuola, nè la morte del fondatore di essa (500 a. C. circa), avvenuta in circostanze variamente riferite, non ebbero forza per distruggerne l'opera: le idee di Pitagora si diffusero, infatti, per la Grecia e poi per tutto il mondo, trovando ovunque ardenti ammiratori, che furono talora legione, e che neppure oggi sono totalmente scomparsi.

Mentre la leggenda costituisce un serio ostacolo a chi voglia tracciare un quadro dell'esistenza di Pitagora, il segreto imposto agli inscritti alla Scuola italica riguardo alle dottrine ivi professate rende malagevole e malsicuro il ricostruire l'opera matematica del sommo pensatore di Samo, e pone nell'assoluta impossibilità di misurare la parte che spetta al maestro nelle invenzioni e scoperte che sono gloria della sua scuola; perciò, quando si parla di ritrovati di Pitagora, non si esclude che si tratti di lavori a cui parteciparono anche i suoi discepoli.

25 - Due cose differenziano una semplice raccolta di verità matematiche da un sistema scientifico propriamente detto, e cioè: 1° una metodica ripartizione della materia studiata; 2° un elenco di definizioni di tutte le entità da considerare; ora l'una cosa e l'altra vennero proposte da Pitagora, per quanto ci consta, per la prima volta. A lui, infatti, si deve la divisione della Matematica nei quattro rami: Aritmetica, Musica, Geometria ed Astronomia, la quale fu giudicata così soddisfacente che queste discipline rimasero nel programma di tutte le scuole durante il Medio Evo, costituendo il celebre « Quadrivio ». A lui appartiene poi la definizione di punto come « unità avente posizione »; a lui la distinzione degli angoli rettilinei in tre categorie (acuti, retti, ottusi); a lui il concetto geometrico di spazio come ente continuo, illimitato, omogeneo. A siffatte considerazioni si collegano alcuni cervellotici ravvicinamenti fra figure geometriche e divinità, dei quali non è da escludere la provenienza extra-europea. Oggi essi appaiono come sogni di menti ammalate; ma, coprendo con la bandiera della « geometria mistica » i frutti della pura ricerca scientifica, i Pitagorici ne facilitarono la diffusione anche fra coloro che non sarebbero stati in grado di apprezzare il valore di una scienza allora in fasce.

Importanza di gran lunga superiore posseggono le investigazioni degli stessi sopra le proporzioni aritmetica, geometrica ed armonica,

proporzioni che si presentano quando il rapporto $\frac{a - b}{b - c}$ venga eguagliato ad uno dei tre $a/a$, $a/b$, $a/c$ (notisi, infatti, che così si ha rispettivamente $a + c = 2b$, $ac = b^2$, $1/a + 1/c = 2/b$). Che tali studi siano stati suggeriti a Pitagora dalla proporzione più perfetta $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$, che si dice egli abbia imparata dai Babilonesi, è possibile, non certo; indubitabile invece è che nella sua scuola siansi considerate esclusivamente le proporzioni fra numeri interi, come vedremo fece poi Euclide nel VII libro dei suoi *Elementi,* inspirandosi appunto a un esempio ritenuto classico.

Ai Pitagorici si attribuisce la conoscenza del fatto che un piano si può ricoprire soltanto con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari. Ad essi si fa merito eziandio della scoperta dei cinque poliedri regolari convessi, da loro denominati « figure cosmiche » perchè, trascinati dal loro prediletto misticismo, facevano corrispondere il tetraedro, il cubo, l'ottaedro e l'icosaedro rispettivamente al fuoco, alla terra, all'aria ed all'acqua, riserbando il dodecaedro a rappresentare tutto il cosmo. Va però notato che le tre più semplici di quelle forme geometriche erano senza dubbio conosciute assai prima e che il dodecaedro era probabilmente noto anteriormente agli Etruschi, coi quali è presumibile che Pitagora abbia avuta relazione al suo arrivo in Italia.

La costruzione del dodecaedro e dell'icosaedro regolari esigono quella del pentagono regolare, ora ciò non esorbita dalle cognizioni che si avevano nella scuola di Crotone; infatti i Pitagorici erano talmente famigliari con questa figura che, come segno di mutuo riconoscimento, avevano adottato il pentagono stellato, detto da alcuni *pentagramma* e dal P. Kircher (vedine *l'Arithmologia,* Roma 1665) *pentalfa* [1].

D'altra parte il problema di descrivere un pentagono regolare equivale in fondo alla divisione di una retta in media ed estrema ragione (« sezione aurea » di una retta) e tale questione rientra in quella più generale della risoluzione geometrica delle equazioni di 2° grado, che viene da Proclo annoverata tra i più cospicui risultati ottenuti in seno alla Scuola Pitagorica.

Questa fondamentale questione veniva dagli antichi distinta in tre, chiamate rispettivamente « applicazione semplice » (o parabola), « applicazione in eccesso », (iperbole) e « applicazione in difetto » (ellisse), nomi da cui traggono origine quelli notissimi usati per le tre sezioni coniche. L'applicazione semplice ha per iscopo di costruire sopra un dato segmento rettilineo $a$ un rettangolo di data area $b^2$; detto $x$, il secondo lato del rettangolo cercato, esso deve soddisfare l'equazione $a x = b^2$. L'applicazione in eccesso consiste invece nel costruire sopra un segmento $a$ opportunamente prolungato un rettangolo di data area $b$ e di altezza eguale appunto a quel prolungamento; onde detta $x$ la lun-

[1] Seguendo l'esempio dei Pitagorici i membri di una Società matematica americana ai dì nostri scelsero pure questa figura come simbolo di colleganza: cfr. *The American mathem. Monthly,* June, 1918.

ghezza del prolungamento, si deve avere $x(x + a) = b^2$. Finalmente l'applicazione in difetto consiste nello staccare da un dato segmento $a$ una sua parte $x$ tale chę il rettangolo di questa e del segmento residuo abbia una superficie data $b^2$; il segmento richiesto deve dunque soddisfare la relazione $x(a - x) = b^2$; notisi che se $b = a$ si ricade nella divisione di una retta in media ed estrema ragione. Le soluzioni date dai Pitagorici pei surriferiti problemi non dovevano differire da quelle che leggonsi negli *Elementi* di Euclide.

26 - Ai Pitagorici era noto il valore della somma degli angoli di qualunque triangolo rettilineo e sapevano dimostrare (come?) il relativo teorema; ad essi, per universale consenso, viene attribuita la scoperta e la dimostrazione (quale?) della proprietà caratteristica del triangolo rettangolo [1], onde il nome di « teorema di Pitagora », generalmente dato alla proposizione esprimente tale prerogativa, è da giudicarsi una delle più appropriate fra le congeneri che s'incontrano nella letteratura matematica.

Indubbiamente collegata a questo fondamentale teorema è la scoperta delle quantità irrazionali, essa pure attribuita al gruppo di matematici dei quali ci stiamo occupando, chè l'esempio classico di quantità irrazionale è offerto dal paragone fra la diagonale ed il lato di un quadrato, quando si abbia presente il citato teorema. È superfluo insistere sulla straordinaria importanza che possiede questa scoperta, tanto dal punto di vista dottrinale, quanto dal punto di vista pratico; e devesi lamentare che una tenebra completa ricopra la via che condusse ai nuovi enti matematici e le proprietà con cui essi vennero caratterizzati. Riguardo a quest'ultimo punto è presumibile che le quantità irrazionali venissero definite mediante caratteri negativi. ciò è presumibile sia in base a considerazioni intrinseche, sia per quanto ci apprende il più antico documento sulla questione. Alludiamo alla dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato riferita (certamente non inventata) da Aristotele. Col linguaggio moderno essa può compendiarsi come segue: $\sqrt{2}$ non può essere un numero intero dal momento che fra 1 e 4 non cade alcun numero quadrato; si ammetta valga $p/q$, ove $p$ e $q$ si suppongono numeri interi fra loro primi; sarà quindi $p^2 = 2q^2$; ciò prova che $p$ è divisibile per 2; pongasi quindi $p = 2p'$ sostituendo nella precedente si trova $q^2 = 2p'^2$, donde emerge che anche $q$ è pari; sia $q = 2q'$. Ma allora $p$ e $q$ hanno entrambi il fattore 2, contro l'ipotesi di partenza: onde è assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Tale argomentazione è applicabile anche alla dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,..; ed è di essa che probabilmente si servì più tardi un maestro di Platone, Teodoro da Cirene, per dimostrare l'assurdità di sup-

---

[1] Secondo il nostro parere la dimostrazione che presenta la massima verosimiglianza è quella basata sulla similitudine di un triangolo rettangolo qualunque con i due che nascono abbassando la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sulla ipotenusa; con una agevole metamorfosi essa diviene quella stessa che leggesi negli *Elementi* di Euclide.

porre razionali tutte le quantità di detto tipo sino a $\sqrt{17}$ inclusivamente, escluse naturalmente $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$.

Riepilogando, dunque, in Pitagora si trova non un ammasso disordinato di verità di ignota provenienza, ma linee chiare e sicure di una scienza a programma ben definito, relativa ad enti perfettamente caratterizzati e procedente con la fida scorta di una logica soddisfacente, cioè di una scienza avente tutti i lineamenti della nostra matematica; a Pitagora, pertanto, appartiene con incontrastabili diritti il nome di capo-stipite della nobile famiglia dei matematici, che si prolunga già per venti secoli e che tutto fa credere si perpetuerà nel più lontano avvenire.

27 - Devesi ascrivere alla categoria degli eredi e continuatori di Pitagora, Oinopide da Chio, passato alla storia per avere per primo insegnato ad abbassare da un punto la perpendicolare ad una retta ed a costruire un angolo di data grandezza, conoscendone il vertice ed un lato? È possibile, ma non certo, e d'altronde si tratta di questione di scarso interesse, essendo Oinopide un personaggio affatto secondario.

Ben più importante è l'opera di un altro matematico appartenente alla seconda metà del v sec. a. C., che tutti convengono nel considerare come un tardo seguace del grande filosofo di Samo: Ippocrate da Chio (da non scambiarsi col celebre medico di egual nome, nato a Cos). Aristotele lo cita come esempio di persone di intelligenza unilaterale, perchè, eccellente come pensatore, si lasciò ingenuamente gabbare da commercianti poco scrupolosi. A lui viene attribuito il merito di avere scritto il primo trattato di geometria; benchè di questo non resti ormai nemmeno il più insignificante vestigio, pure l'apparizione di un'opera di tal genere va accuratamente registrata come sintomo di un considerevole grado di sviluppo della disciplina a cui si riferisce. Ivi probabilmente trovavasi esposto in termini generali ed applicato il *metodo di riduzione* di un problema ad un altro, del quale si attribuisce la scoperta ad Ippocrate, quantunque non sia possibile ammettere che altri non se ne sia servito prima, sia pure incidentalmente, in qualche caso speciale.

Con Ippocrate fanno il loro ingresso nella storia greca due dei più celebri problemi che s'incontrino nella matematica di tutti i tempi: la « Duplicazione del cubo » e la « Quadratura del cerchio ».

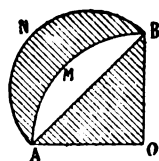
Il primo raggiunse una invidiabile notorietà quando in un'antica tragedia (di Euripide?) si vide un leggendario re di Creta lamentare che la tomba destinata a suo figlio fosse troppo modesta per un sepolcro reale e imporre venisse raddoppiata, pur conservandone la forma cubica. Ma la celebrità di esso crebbe a dismisura quando l'oracolo di Delo, richiesto del come porre argine ad una terribile epidemia che funestava la Grecia, suggerì a tal fine il raddoppiamento di un'ara foggiata a cubo: da ciò il nome di « problema di Delo » che quella questione porta ancor oggi. Giova osservare che, anche senza ricorrere a queste circostanze del tutto fortuite e forse fantastiche, la questione di cui si tratta sarà spontaneamente presentata ai geometri come analoga nello spazio

a quella della « duplicazione del quadrato »; se non che, mentre questa si risolve senza stento mediante il teorema di Pitagora applicato ad un triangolo isoscele e rettangolo, nessun teorema di geometria elementare porge una soluzione geometrica dell'analoga equazione

(1) $$x^3 = 2\,a^3.$$

Ora ad Ippocrate si attribuise una metamorfosi del problema di Delo, la quale è frutto di un'applicazione del metodo di riduzione di cui parlammo più sopra; egli, cioè, osservò che si saprà risolvere la equazione (1) quando si sapranno inserire due medie proporzionali fra $a$ e $a\sqrt{2}$, dal momento che le eguaglianze $a : y = y : x = x : a\sqrt{2}$, danno $a x = y^2$, $a y \sqrt{2} = x^2$, epperò $x^3 = 2a^3$. Il proposto problema è così ridotto ad altro di non minore difficoltà; ma, come vedremo, la suggerita trasformazione fu feconda di conseguenze, delle quali la geometria si è singolarmente avvantaggiata.

Fig. 3.

Non meno notevoli sono i contributi dati da Ippocrate all'altro dei problemi citati. Egli prese le mosse dalla seguente osservazione: Se (Fig. 3) $O\,A\,B$ è un triangolo rettangolo e si descrive il quadrante $O\,A\,M\,B$ e la semicirconferenza $A\,N\,B$, si ottengono due archi circolari che limitano una figura (detta *lunula* o *menisco*) equivalente al triangolo $O\,A\,B$; infatti quella lunula è eguale al triangolo $O\,A\,B$ aumentato del semicerchio $A\,N\,B$ e diminuito del quadrante $O\,A\,B$; ora siccome è facile vedere che queste due ultime aree sono fra loro eguali, così la lunula è eguale al triangolo come erasi enunciato. Partendo da questo risultato il nostro matematico ha cercato e scoperto altre figure dello stesso tipo esattamente quadrabili, anzi (come venne riconosciuto in epoca a noi vicina) *tutte* quelle godenti tale prerogativa. Non v'ha dubbio che a siffatte originali indagini Ippocrate sia stato spinto dalla brama di scoprire una lunula quadrabile che fosse una parte aliquota dell'intero cerchio; chè, trovatala, il tormentoso problema sarebbe stato *ipso facto* risoluto. Che egli siasi ingannato pensando di avere toccata la mèta, viene affermato da alcuni relatori delle sue scoperte; ma i frammenti superstiti dei suoi scritti, conservati da Simplicio (i quali costituiscono il *primo documento scritto* che oggi si possieda *relativo alla matematica greca*), quantunque giuntoci attraverso a deturpazioni e mutilazioni da parte di amanuensi e commentatori, indurrebbero piuttosto ad assolverlo da quella colpa che a pronunciare una definitiva condanna. Tuttavia, il problema della quadratura del cerchio fu tomba di tante riputazioni, che non si può escludere che anche quella di Ippocrate siasi infranta contro uno scoglio così pericoloso! Ma, anche se egli non avesse saputo evitare tanta jattura, la storia continuerebbe a registrarne il nome fra i valentuomini che seppero arricchire il patrimonio della geometria di scritti, di metodi, di risultati meritevoli della più alta considerazione.

28 - Certamente non meno di Ippocrate possiede indiscutibili diritti alla nostra ammirazione Archita di Taranto, l'« ultimus Pithagoreorum », il quale dai contemporanei e dai posteri vicini ci viene presentato come l'ideale dell'uomo ellènico in mezzo ad una stirpe degenerata; generale pari ai grandissimi, non subì mai l'onta di una disfatta; filosofo e moralista insigne, ebbe la gloria di vedere Platone nella turba dei suoi discepoli; esimio cultore dell'astronomia e della meccanica pratica fu ammirato da Orazio, il quale ne ricordò la tragica fine durante un naufragio con le parole:

Archita, Te, che compassar la terra,
Il mar sapesti, e l'infinita arena,
Poca polvere appena
Presso il Lido Martino ecco ti serra:
Nè ti giovò, per non morir, dal suolo
Gli Astri spiando, sollevarti al Polo.

(*Ode* 28ª del Iº Libro;
trad. Borgianelli, Venezia, 1776)

Nella storia della matematica egli lasciò traccia di sè soltanto per una geniale soluzione del problema di Delo, ottenuta sfruttandone la riduzione, operata da Ippocrate, alla ricerca di due medie proporzionali fra due rette date. Per caratterizzare il procedimento immaginato da Archita, si considerino le superficie che, in coordinate cartesiane ortogonali, sono rappresentate dalle equazioni:

$$x^2 + y^2 = a\,x \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2 ,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2};$$

sono un cilindro di rivoluzione, un cono circolare retto ed un toro. Sia $X$ un punto ad esse comune e pongasi $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$; allora le precedenti equazioni si potranno scrivere

$$v^2 = a\,x \quad , \quad u = \frac{a}{b}x \quad , \quad u^2 = a\,v.$$

Ora da queste si trae $v^2 = b\,u$, $u^2 = av$, vale a dire $a:u = u:v = v:b$, le quali mostrano che, fissata che sia la posizione del punto $X$, restano determinate due medie proporzionali fra $a$ e $b$, epperò, supponendo $b = a\sqrt{2}$, il cubo è duplicato. Tale procedimento, così ingegnoso nel concetto che lo informa, non solo dimostra il genio inventivo di Archita e la sua famigliarità con le figure dello spazio, ma, quando venga decomposto nei suoi elementi costitutivi, serve a misurare con sicurezza i grandi progressi che compì in Grecia la geometria del piano e dello spazio, nel secolo che tenne dietro alla morte di Pitagora.

## Eleati, Atomisti. Sofisti

29 - Se — come abbiamo testè mostrato — la Scuola italica, sino al giorno in cui ne rimase qualche vestigio, contribuì nel modo più efficace al progresso delle scienze esatte, le altre sètte filosofiche che pullularono nell'antica Grecia contribuirono tutte, benchè in vario modo e differente misura, al loro perfezionamento.

Così Zenone d'Elea, affigliato alla scuola che appunto da questa città prende nome, ha legato il proprio nome ad alcuni ragionamenti intesi a dimostrare l'impossibilità del movimento o della pluralità, i quali, benchè in realtà paradossali, servirono a precisare alcuni concetti fondamentali della matematica. Il più noto fra essi è il seguente *contro il movimento*: « Achille non può raggiungere la tartaruga che insegue, benchè egli avanzi più rapidamente; infatti egli deve raggiungere anzitutto la posizione occupata dalla tartaruga all'inizio del movimento, poi la posizione a cui questa arriva durante la prima fase di questo, in seguito quella che l'animale raggiunge durante la seconda fase e così via. Ora ogni contraddizione si toglie osservando che uno spazio finito può decomporsi in infinite parti indefinitamente decrescenti, come un tempo finito può scomporsi in infinite parti, alcune delle quali di lunghezza infinitesima. Altri argomenti di Zenone si dimostrano agevolmente privi di base quando si sappia calcolare la somma di una progressione geometrica indefinita decrescente, p. es. quando sappiasi essere

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

La spiegazione data col tempo ai sofismi zenoniani porge il primo esempio di un fatto generale, ed è che *in matematica non possono esservi contraddizioni*; ove una se ne incontri, vuol dire che esiste una verità, la cui scoperta porrà fine al momentaneo dissidio; perciò *ogni paradosso suggerisce un problema e sospinge a risolverlo.*

Similmente il famoso filosofo Anassagora, che tante veglie consacrò allo studio di problemi filosofici, sembra essersi occupato della quadratura del cerchio ed avere perfezionati i procedimenti in uso per delineare le scene dei teatri.

E il notissimo atomista Democrito d'Abdera deve avere volto il proprio pensiero a questioni geometriche (v. n. 33), se Plutarco gli attribuisce l'osservazione che due sezioni, prodotte in un cono da due piani paralleli fra loro vicinissimi, non possono risultare fra loro eguali, senza che il cono si muti in un cilindro, nè possono essere diseguali, altrimenti il cono presenterebbe rugosità e discontinuità; ed il sofista Brissone (cfr. più avanti n. 99), al pari del contemporaneo Antifonte, fece sforzi per risolvere il problema della quadratura del cerchio, i quali, benchè lo abbiano condotto ad errori indiscutibili, che Dante ha ricordati (*Paradiso,* XII, 123-6), contengono nel proprio seno un germe fecondo: cioè l'uso dei poligoni inscritti e circoscritti, di cui poi, come vedremo, Archimede fece sì mirabile applicazione.

30 - Ben più cospicuo è il contributo dato al medesimo problema da un altro sofista, Ippia d'Elide, al quale si attribuisce la scoperta di una nuova curva e di averne fatta applicazione, non solo alla misura del cerchio, ma anche al terzo dei più celebri problemi della geometria elementare, la Trisezione dell'angolo. Tale curva — la quale, in ricordo della prima di tali applicazioni, si chiama *quadratrice* — è trajettoria di un punto animato da un moto risultante da due movimenti uniformi simultanei, definiti come segue: « Sia (Fig. 4) dato un quadrato $A\ B\ C\ D$; si supponga che il lato $B\ D$ si muova equabilmente e parallelamente a sè stesso sino a raggiungere la posizione $A\ C$ e che nello stesso tempo $A\ B$ ruoti attorno ad $A$ con velocità costante sino a sovrapporsi ad $A\ C$; in ogni loro posizione queste rette s'incontrano in un punto $Z$ il cui luogo geometrico è la curva di Ippia ». Per chiarirne la natura assumiamo $A$ come origine e le rette $A\ C$ e $A\ B$ come assi di un sistema di coordinate cartesiane. Detto $\omega$ l'angolo $Z\ A\ C$, per le fatte ipotesi sussisteranno relazioni della seguente forma: $l - y = \mu t$ , $\frac{\pi}{2} - \omega = \nu t$, ove $\mu$, $\nu$ sono costanti e $l$ la lunghezza del lato del quadrato; indicando allora con $T$ il tempo necessario affinchè ciascuna delle due rette compia il viaggio assegnatole, sussisteranno queste altre relazioni $l = \mu\ T$, $\pi/2 = \nu\ T$;

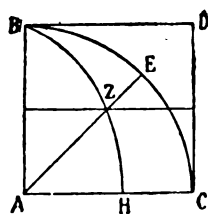



Fig. 4.

da queste si trae $\frac{(l - y)}{(\pi/2 - \omega)} = \frac{l}{\pi/2}$ ossia

$$y = \frac{2\,l}{\pi}\,\omega\,, \tag{2}$$

onde l'equazione cartesiana della quadratrice è

$$y = \frac{2\,l}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,. \tag{3}$$

Si tratta dunque di una curva trascendente, di cui gli antichi non considerarono che l'arco interno al dato quadrato. Per rendersi conto dell'applicazione di essa alla misura del cerchio, consideriamone l'intersezione $H$ con il lato $A\ C$; a tale scopo si scriva l'equazione (3) della curva come segue:

$$x = \frac{2\,l}{\pi}\;\frac{\left(\frac{\pi\,y}{2\,l}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\,y}{2\,l}\right)} \tag{4}$$

allora facendo tendere $y$ a 0 si trova

$$A\,H = \frac{2\,l}{\pi}\,. \tag{4}$$

Ciò prova che, conosciuto che sia il punto $H$, è noto anche $\pi$ come rapporto di $2\,l$ a $A\ H$, cioè si è in grado di rettificare la circonferenza;

se non che, la determinazione del punto $H$ non è possibile, a meno che non si sappia descrivere la quadratrice con moto continuo, questione che tutto fa credere oltrepassare le forze di Ippia: onde la considerazione immaginata da questo è in ultima analisi un metodo per ridurre un problema ad un altro. La (2) trasforma invece subito il problema di dividere un angolo in parti aventi dati rapporti nella questione di ripartire similmente un segmento rettilineo, cosa che non offre alcuna difficoltà.

Devesi ancora osservare che il commentatore Pappo, trattando della quadratrice, attribuisce a Dinostrato, altro geometra del periodo che ci occupa, l'applicazione di detta curva alla « quadratura del cerchio »; devesi da ciò inferire che era nota sino da allora l'identità sostanziale di questo problema con quello della rettificazione della circonferenza, che, in altri termini, si sapeva, prima di Archimede, che l'area del cerchio è data dal semiprodotto della circonferenza per il raggio? I documenti a nostra disposizione non permettono di rispondere in modo perentorio a questa domanda. Osserviamo finendo che, se il ragionamento per assurdo usato da Pappo per dimostrare la relazione (4) fosse quello usato da Ippia e da Dinostrato, verrebbe fatta risalire al periodo storico che ci occupa la scoperta di una procedura logica che vedremo applicata su larga scala durante il periodo successivo.

## Platone e l'Accademia

31 - Gli scienziati dell'epoca pre-euclidea dei quali dobbiamo ancora occuparci vissero negli anni che corrono tra Socrate (477-399 a. C.) e la perdita dell'indipendenza della Grecia. Per merito dell'or citato filosofo il focolare della cultura, dopo di essere andato ramingo di terra in terra, fissa per qualche tempo la propria sede in Atene; allora la ricerca della verità scientifica si accrebbe di una nuova potente arma (*il metodo deduttivo*) e la logica si irrobustì con la costante adozione della determinazione esatta dei concetti (*principio della definizione*); ed è degno di rilievo il fatto che questo fecondo principio, insegnato da Socrate, che della matematica era mediocre estimatore, soltanto da tale disciplina venne fedelmente seguito, il che riesce evidente osservando che in tutte le altre si trovano concetti imperfettamente definiti o non definiti affatto.

Più diretta e visibile fu la benefica influenza sopra le scienze esatte di Platone (n. ad Atene nel 420, m. ivi nel 348 a. C.) la cui attitudine di fronte alle scienze positive si accosta meravigliosamente a quella assunta dai moderni. Appartenendo egli a famiglia distinta e facoltosa, gli fu dato di usufruire di tutti i mezzi d'istruzione che si trovavano allora a disposizione della gioventù desiderosa di apprendere; così seguì l'insegnamento di Socrate e visitò le più cospicue località mediterranee che godevano maggior fama, cioè la Magna Grecia e l'Egitto. Ritornato in patria, consacrò il meglio di sè stesso a far fruttare i semi raccolti ed esporre i risultati dei proprii studi dalla cattedra che occupava nel ginnasio d'Academo. Come caratteristica dell'insegnamento

di Platone va notata la sua grande estimazione per la matematica (*Dio geometrizza sempre,* soleva egli dire), di cui vantava incessantemente l'azione educatrice e di cui raccomandava così caldamente lo studio da scrivere sulla porta della sua scuola: *Niuno ignaro della geometria entri sotto il mio tetto.* Ed è appunto in siffatte esortazioni e nelle innumerevoli considerazioni matematiche sparse nelle sue opere che risiedono le immense benemerenze di Platone di fronte alle scienze esatte.

Egli poi, non diremo creò, ma diede forma generale al *metodo analitico,* esponendolo sotto forma di lettera al suo discepolo Leodamante di Taso. Questo procedimento logico, applicato ad un teorema, lo trasforma successivamente in altri equivalenti, l'ultimo dei quali sia noto. per ciò, se ogni proposizione intermedia è invertibile, rifacendo in ordine inverso il cammino percorso, si arriva a dedurre il teorema in questione da uno già conosciuto. Per applicare, invece, il metodo analitico ad un problema, si suppone questo già risoluto e, con l'aiuto di opportune costruzioni ausiliari, lo si trasforma successivamente in altri, l'ultimo dei quali sia già stato risolto o sia d'immediata soluzione. Il metodo analitico è, dunque, specialmente utile se applicato ai problemi, dal momento che per dimostrare col suo mezzo un teorema bisogna di questo conoscere già l'enunciato. Questa procedura era stata applicata certamente in casi particolari prima del divino filosofo, onde il suo merito deve ridursi (ed è indubbiamente grande) ad averlo enunciato in termini generali.

E tutto fa credere che alle medesime proporzioni si deve ridurre la scoperta, che gli è attribuita, dei *luoghi geometrici,* chè già prima erano stati considerati serie continue di punti soddisfacenti ad una stessa condizione comune.

Di recente fu notato un passo di uno scritto di Erone, donde risulta che Platone avrebbe conosciuti due poliedri semi-regolari di quattordici facce ciascuno, limitati uno da 8 triangoli e 6 quadrati, l'altro da 8 quadrati e 6 triangoli.

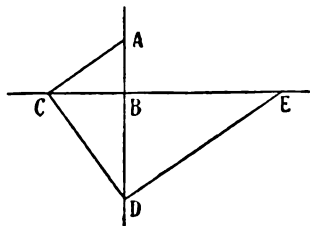



Fig. 5.

A Platone si attribuisce finalmente uno speciale dispositivo per inserire meccanicamente due medie proporzionali fra due rette date; esso riposa sopra la semplice osservazione che, se le rette date (Fig. 5) $BA$ e $BE$ sono disposte ad angolo retto, le rette cercate sono $BC$ e $BD$, nell'ipotesi che nella spezzata $ACDE$ siano retti gli angoli in $C$ $D$. Ciò è evidente perchè essendo $BC^2 = BA \cdot BD$, $BD^2 = BC \cdot BE$, si ha $BA : BC = BC : BD = BD : BE$. Questa osservazione riduce il problema indicato al tracciamento della spezzata $ACDE$, di noti estremi, cosa che può farsi mediante ben regolati tentativi.

32 - L'efficacia dell'insegnamento impartito nell'Accademia risulta dai contributi dati alle scienze esatte da discepoli di Platone, di cui ora ricorderemo i migliori.

Leodamante, che nominammo come particolarmente diletto al di-

rino filosofo, ebbe per proprio discepolo Leone, noto per avere scritto un libro di elementi superiore a quello di Ippocrate e più ancora per avere segnalata la necessità di completare la soluzione di ogni problema con il *diorisma*, ossia discussione delle condizioni di possibilità e determinazione del numero delle soluzioni. Più conosciuto, per essere protagonista di un celebre dialogo di Platone, è l'ateniese Teeteto, al quale vengono vagamente attribuiti studi profondi sopra le quantità irrazionali e i solidi regolari: ammesso ciò, Euclide avrebbe attinto a larga mano agli scritti di Teeteto nel comporre i libri X e XII dei suoi *Elementi*.

Per altri seguaci di Platone si è serbata memoria dei soli nomi, onde a noi, che interessano più i fatti che le persone, sia lecito passarli sotto silenzio. L'unico che ha diritto a venire da noi ricordato è Aristotele (n. a Stagira nel 384 a. C., m. ad Atene nel 322), il celebre precettore di Alessandro Magno, colui che Dante venerava siccome « maestro di color che sanno ». Ora, benchè i suoi lavori riflettano di preferenza le scienze naturali (il progresso delle quali egli giudicava indissolubilmente connesso all'uso metodico dell'osservazione e dell'esperienza), pure, col dare alla logica deduttiva un assetto da venti secoli giudicato eccellente, contribuì, sia pure indirettamente, al progresso della disciplina che a ragione passa per il tipo delle scienze di puro ragionamento. Inoltre, col rappresentare mediante le lettere dell'alfabeto i concetti su cui ragionava, diede un esempio che venne seguìto e portò, dopo lunga elaborazione, alla nostra algebra. Nè va taciuto che le opportune distinzioni da lui proposte fra *geometria* e *geodesia*, fra *aritmetica* (teoria dei numeri e *logistica* (aritmetica pratica) mostra di quanto i due più importanti rami della matematica pura si fossero allora elevati sopra l'ammasso di cognizioni possedute dai Babilonesi e dagli Egiziani. Aggiungiamo che i suoi studi sopra la scienza dei moti e delle forze, benchè non abbiano assicurate solide basi alla meccanica, arricchirono di una nuova vasta provincia il regno delle matematiche. E finiamo notando che i numerosi passi delle sue opere relativi a queste scienze — e che vennero raccolti pazientemente da dotti ammiratori del celebre Stagirita — permisero di aggiungere qualche numero al catalogo delle verità geometriche note al momento dello sfacelo dell'impero di Alessandro Magno, e di anticipare la data di nascita di alcuni postulati od assiomi posti da Euclide a base del proprio sistema geometrico.

## Eudosso e la scuola di Cizico

33 - Gli anni durante i quali si esercitò l'attività intellettuale e didattica di Platone sono all'incirca gli stessi in cui fiorì un eminente pensatore, il quale, fatto segno nell'antichità di ammirazione senza limiti, durante molto tempo vide la propria reputazione macchiata da chi non era riuscito a comprendere la sua opera di astronomo, per poi risplendere della luce più vivida e pura in seguito specialmente alle profonde e geniali ricerche di G. Schiaparelli. Parliamo di Eudosso (n. a Cnido verso il 408 a. C. secondo alcuni, nel 390 al dire d'altri;

m. circa nel 353). Istruito da Archita e dai sacerdoti egiziani, fondò a Cizico una scuola che assurse ben presto ad alta e meritata fama. La sua originalità come matematico è comprovata dal fatto che a lui viene attribuito il V libro degli *Elementi* di Euclide, il libro forse più ammirato ed ammirando di quella celebre opera, perchè, sotto l'apparenza di una teoria generale delle proporzioni, porge in realtà una teoria generale delle grandezze, razionali e non. Ad Eudosso sembra poi appartenere la scoperta e forse la dimostrazione delle eleganti proprietà della divisione di una retta in media ed estrema ragione con cui si apre l'ultimo libro della medesima opera. Meno dubbia — perchè attestata da Archimede — è la dimostrazione data per primo da Eudosso dell'essere (come affermò Democrito) una piramide (od un cono) la terza parte del prisma (o del cilindro) di egual base ed eguale altezza, nonchè quella dell'essere il rapporto di due sfere eguale a quello che passa fra i cubi dei loro diametri. Se, come tutto fa credere, egli ha anche dimostrate queste importanti proposizioni, a lui spetterebbe pure la gloria di avere enunciato ed applicato un principio equivalente al celebre assioma di Archimede (« date due grandezze omogenee, fra i multipli della minore si trova sempre una grandezza che supera la maggiore ») e di avere tracciate le prime linee di quel procedimento uniforme (chiamato dai moderni *metodo di esaustione*), che, prima dell'invenzione del calcolo integrale, rappresentava la colonna vertebrale della parte più elevata della geometria di misura. Se a queste memorabili scoperte si aggiungono alcuni perfezionamenti, sgraziatamente mal noti, che si attribuiscono ad Eudosso relativi alle precedenti soluzioni del problema di Delo e la geniale concezione delle « sfere omocentriche » per spiegare i fenomeni offerti dal movimento degli astri, si avranno elementi sufficienti per misurare la grandezza, a dir vero gigantesca, del geometra di Cnido.

34 - A tali elementi possiamo aggiungerne un altro di diversa specie, cioè che fra i suoi discepoli si trova Menecmo — fratello di Dinostrato, geometra a noi già noto (p. 37) —, assurto ad imperitura celebrità per l'invenzione, che gli viene attribuita, delle sezioni coniche. Sgraziatamente le informazioni che ci giungono dall'antichità sulla via che guidò alla scoperta della « triade di Menecmo » non gettano su di essa che una luce pallida ed incerta. Limitiamoci ad osservare che, trasformato da Ippocrate il problema di Delo nella ricerca di due numeri soddisfacenti la doppia equazione $a:x = x; y = y:b$, interpretando $x$ e $y$ come coordinate cartesiane di un punto, quella questione si mostra equivalente alla ricerca dei punti comuni alle tre curve $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, $xy = ab$, di cui le due prime sono parabole e un'iperbole la terza; e siccome tale riduzione non rimase ignota ai geometri greci, così è possibile che Menecmo sia stato tratto da ciò a considerare la parabola e l'iperbole ed avvertirne le fondamentali proprietà espresse dalle ultime equazioni scritte; quanto all'ellisse vi sono forti ragioni per credere fosse nota anteriormente. Ma, giunti che si fosse al punto indicato, restava da dimostrare che le curve in questione si possono ottenere segando con un piano un cono circolare retto; ha Menecmo mosso anche

quest'altro importantissimo passo? Una risposta immune da elementi ipotetici non essendo oggi possibile, preferiamo non proporne alcuna.

E limitiamoci a notare che, per generale attestazione, non è a Menecmo che si deve la prima esposizione metodica della teoria delle curve da lui scoperte. Tale merito viene generalmente attribuito ad altro geometra, esso pure imperfettissimamente conosciuto e designato d'ordinario con l'appellativo di Aristeo il Vecchio. Ma anche l'opera sulle sezioni coniche che gli viene attribuita (al pari di altra che egli avrebbe dedicato alla teoria dei poliedri) non si è sottratta all'ingiuria del tempo; ed appunto per risarcire la geometria del danno da essa in conseguenza subìto che un celebre discepolo di Galileo, Vincenzo Viviani, tentò di divinarla, eseguendo uno dei meglio riusciti fra quei tentativi di ricostruzione di opere perdute, a cui, con tanta passione, si abbandonarono eminenti geometri del secolo XVII.

35 - Aristeo è l'ultimo dei geometri a noi noti anteriori ad Euclide; brillante coorte di pensatori d'avanguardia che, a partire da Talete, di proposito od incidentalmente, somministrarono gli elementi per costituire una vasta e robusta scienza dell'estensione figurata. L'entità dell'opera compiuta da questi pionieri risulta da quanto abbiamo or ora esposto; essa riceve poi una indiretta, ma inoppugnabile, conferma dalla circostanza che Eudemo da Rodi, discepolo di Aristotele, giudicò giunto il momento per scrivere una storia delle scoperte matematiche compiute sino al suo tempo; ora la storia presuppone magnanime gesta! Sgraziatamente tale scritto andò esso pure distrutto, nemmeno il piano o l'ossatura se ne sono salvati; ma l'esistenza di esso sembrava dovere essere qui notata a titolo d'onore dei pensatori che fiorirono fra Talete ed Aristeo ed anche per rilevare come all'Ellade antica spetti, fra altre molte, anche la gloria di avere inaugurata la collezione delle Storie della Matematica.

## BIBLIOGRAFIA

*Opere di* PLATONE *e* ARISTOTELE; di cui esistono infinite edizioni e traduzioni in tutte le lingue.

H. DIELS, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 2ª ed. (Berlin, 1906-07).

H. DIELS, *Doxographi graeci* (Berlin, 1879).

H. DIELS, *Symplici in Aristotelis Physicorum Libros quattuor priores* (Berolini, 1882).

F. RUDIO, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, griechisch und deutsch* (Leipzig, 1907).

## CAPITOLO III

# I LEGISLATORI DELLA GEOMETRIA

36 - Il periodo della storia della geometria di cui imprendiamo lo studio si differenzia dal precedente per la fisonomia scientifica che hanno in generale i pensatori che nel nostro campo esercitarono allora la più decisiva influenza, per la natura dei documenti che stanno a nostra disposizione e per la sede del più ardente focolare di studio. Scompare, infatti, la brillante schiera di filosofi che, da Talete a Platone, guidarono il pensiero ellèno (filosofi pei quali una ricerca matematica costituiva un semplice episodio nelle loro consuete elucubrazioni), per dar posto a eminenti personalità, che alle scienze esatte dedicarono tutto il loro tempo e il loro ingegno; d'altronde si è dispensati dalla penosa ricerca di informazioni indirette in opere extra-matematiche, grazie all'esistenza delle più cospicue produzioni del tempo; finalmente il centro della cultura non si trova più sul suolo dell'Ellade, ma di nuovo sulle rive del Nilo, in Alessandria, la grande città che, dopo la dissoluzione dell'impero di Alessandro Magno seguente la morte del valoroso conquistatore, divenne metropoli del regno toccato in sorte a Tolomeo Sotero. Ed appunto sotto il governo di questo uomo, che natura aveva dotato di mente atta a comprendere i doveri verso l'alta coltura che incombono a sovrani non incuriosi della gloria dei loro popoli, venne fondato il famoso « Museo d'Alessandria », quell'istituto *sui generis* — università, biblioteca, seminario di ricerche scientifiche — il quale, durante il « periodo greco-alessandrino » di cui imprendiamo lo studio, accolse nel proprio seno molti eminenti investigatori nel campo matematico e seppe stabilire e coltivare relazioni costanti con coloro che non vi ebbero asilo, quel grande istituto che durante non meno di nove secoli si propose e riuscì a raccogliere con amorosa cura, tramandandoli alle età venture, i frutti che la scienza produceva nelle terre in cui era parlata e compresa la lingua di Omero e di Platone. Il Museo d'Alessandria è, pertanto, l'erede diretto delle grandi scuole che fiorirono in Grecia nel periodo precedente e — almeno per quanto concerne le scienze esatte — assicurò lo svolgimento regolare dei concetti e dei metodi germinati nella mente di coloro che ne furono i capi.

## Euclide

37 - La prima eminente personalità che s'incontra nell'epoca testè delimitata è anche il più famoso matematico di tutti i tempi e di tutte le nazioni: Euclide (da non confondersi con Euclide da Megara, filosofo contemporaneo di Socrate e Platone). Nato in Alessandria e fiorito verso il 300 a. C., condusse vita tranquilla all'ombra del trono dei novelli Faraoni, dividendo il proprio tempo fra il compiere ricerche matematiche, coordinare i risultati di quelle anteriori e diffondere oralmente, dalla cattedra conferitagli del Museo, i frutti delle une e delle altre. Mancano altre più minute notizie biografiche intorno a lui, se si prescinde da quelle, del resto poco considerevoli, pochissimo degne di fede e mediocremente interessanti, che ci pervengono per il tramite degli Arabi; è noto soltanto, per attestazione del commentatore Pappo d'Alessandria, che egli era di quell'indole mite che è così comune fra i matematici ed era propenso al trasmettere ai posteri le scoperte dei predecessori, senza arrecarvi alcun mutamento.

La straordinaria popolarità di Euclide riposa in massima parte sopra i suoi *Elementi,* opera che per lunghi secoli venne scelta (e ancora non cessò di esserlo) come libro di testo geometrico nelle più reputate scuole; opera che, per numero di edizioni e traduzioni, può certamente competere con la *Divina Commedia* [1] ed è vinta forse soltanto dalla *Sacra Bibbia.* Divisa in tredici libri, comprende, oltre a numerose proposizioni preliminari e buon numero di lemmi, 93 problemi e 372 teoremi. Giunta a noi attraverso ad innumerevoli trascrizioni da parte di amanuensi di regola senza competenza, ma talvolta anche senza coscienza, essa subì deterioramenti e ritocchi, che furono posti in luce dai cultori della filologia classica e dai conoscitori della lingua araba; fortunatamente però le tranquillanti conclusioni, a cui questi concordemente arrivarono, assicurano che il testo da noi posseduto differisce ben poco dall'originale primitivo, sicchè l'opera che ci sta sott'occhio deve essere ritenuta nel suo insieme conforme a quella scritta dal sommo alessandrino.

38 - Come è ben naturale, il I Libro degli *Elementi* di Euclide si apre con una serie di preliminari (Definizioni, Postulati, Nozioni comuni) che furono oggetto di acute analisi da parte di matematici e di filosofi, e contro i quali si appuntarono di preferenza gli strali della critica, la quale vi segnalò gravi difetti nella sostanza, nella forma, nell'ordinamento. Mentre è forza riconoscere che siffatti appunti sono nel loro insieme fondati per equità e giustizia, si deve avvertire che molti di essi probabilmente colpiscono, non Euclide, ma qualche troppo disinvolto trascrittore, il quale, essendo incapace di modificare i ragionamenti euclidei, non si fece scrupolo di alterare la parte espositiva degli *Elementi.* Giova notare che, fra quei Preliminari, si trova la conces-

[1] Volendo completare tale paragone si tenga conto che la *Divina Commedia* venne stampata per la prima volta nel 1472 e gli *Elementi* di Euclide solo dieci anni più tardi.

sione al geometra di usare la riga ed il compasso nelle proprie operazioni e soltanto tali strumenti e che ivi s'incontra il famigerato postulato « se una retta cadendo su due altre forma gli angoli interni dalla stessa parte minori in somma di due angoli retti, queste rette prolungate, si incontrano dalla parte in cui gli angoli stessi dànno una somma minore di due retti »; è la celebre *crux geometrica,* la quale, come vedremo, fu stimolo ad innumerevoli e svariate ricerche e finì col condurre a nuovi sistemi geometrici del tutto differenti dall'euclideo.

La parte dottrinale del I Libro degli *Elementi* contiene tutti i teoremi ed i problemi che sono necessari e sufficienti per giungere al teorema di Pitagora; nè bisogna stupirsi se noi annoveriamo alcuni problemi fra gli ingredienti di una dimostrazione, dal momento che è norma costante di Euclide di ragionare esclusivamente sopra figure di cui abbia insegnata prima la costruzione, onde nella sua opera non esiste alcuna « figura ipotetica »; aggiungasi che in molti casi la « costruzione » compie per lui (e per i geometri che ne seguirono le orme) lo stesso ufficio delle « dimostrazioni di esistenza » della matematica moderna.

Nel II Libro degli *Elementi* vengono gettate le basi del procedimento (chiamato comunemente « algebra geometrica ») che pose in grado gli antichi di risolvere, mediante immagini ed argomentazioni geometriche, tutti i problemi di I e II grado; per darne un'idea approssimativa diremo che, se si indica con $a^2$ il quadrato di $a$ e con $a\,b$ il rettangolo di lati $a$ e $b$, alcune delle proposizioni stabilite da Euclide si possono riprodurre con le formole seguenti:

$$m(a+b+c+\ldots) = m\,a + m\,b + m\,c + \ldots\,;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b;$$

$$a^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}, \text{ ecc.}$$

Il III Libro insegna i principali fra quei teoremi concernenti la circonferenza nei quali non intervengono rapporti e proporzioni; applicandoli nel Libro seguente vengono risolti semplicemente i principali problemi relativi a detta linea e dai poligoni regolari inscritti e circoscritti.

Il V Libro insegna la teoria delle proporzioni per grandezze qualsivogliano e ben a ragione R. Simson, dopo averne fatto uno studio profondo, ebbe a dichiarare « nihil extare in toto elementorum opere proportionali doctrina subtilius inventum, solidius stabilitum, accuratius pertractatum ». L'importanza di detto Libro venne già da noi rilevata incidentalmente, osservando (n. 33) che esso contiene una teoria generale delle grandezze; non si deve stupirsi se, per conseguire questo elevatissimo intento, Euclide faccia appello ai più riposti artifici della logica. Considerando le non indifferenti difficoltà che si incontrano per seguire le sottili argomentazioni euclidee, alcuni moderni proposero l'espediente di stabilire i teoremi di Euclide *soltanto per numeri interi;* così diedero prova di nulla avere afferrato dell'indole e degli

scopi di quel Libro e di non avere compreso che, adottando quel sistema semplicista, non giungevano che ad alcune proprietà, quasi evidenti, delle frazioni.

Dei risultati ottenuti Euclide fa un'importante applicazione nel VI Libro dei suoi *Elementi,* con lo stabilire la teoria della similitudine delle figure piane. con questo Libro si chiude la parte dell'opera in discorso relativa alla geometria piana.

39 - I tre Libri seguenti sono dedicati all'Aritmetica dei numeri razionali, esposta con rigore e generalità non minori di quanto sia oggi in uso, ricorrendo alla rappresentazione dei numeri generali, invece che mediante lettere, con segmenti rettilinei e servendosi di argomentazioni di sommo pregio, in alcuna delle quali non è difficile ravvisare il metodo dell'induzione completa nella sua prima fase di sviluppo. Tutta la materia ivi esposta è divenuta classica; ad esempio il procedimento per determinare il massimo comune divisore di due numeri porta tuttora il nome di Euclide, anche dopo di essere stato esteso all'analoga ricerca per due funzioni razionali intere di una variabile; similmente il ragionamento oggi in uso per dimostrare che « la serie dei numeri primi è infinita », è precisamente quello insegnato dal grande precettore del Museo; e la procedura da lui suggerita per costruire un numero (così detto « perfetto »), il quale sia eguale alla somma dei proprii divisori, benchè sia dubbio se guidi a tutti i numeri della detta specie, è ancora l'unica del genere che si conosca.

Di natura aritmetica è pure il X Libro degli *Elementi;* esso, infatti, contiene una completa teoria degli irrazionali provenienti dalla risoluzione delle equazioni (biquadratiche) della forma $x^4 + a x^2 + b = 0$; è un Libro che supera in estensione e in difficoltà tutti gli altri e merita ammirazione senza limiti anche dopo che, scoperta la teoria generale degli irrazionali, esso vide sempre più diradarsi le fila dei propri lettori. Nell'impossibilità di riassumerne in poche sentenze il contenuto, limitiamoci a rilevare che esso si apre con la seguente importante proposizione, continuamente invocata nelle indagini metriche compiute dagli antichi: « Date due grandezze omogenee diseguali, se si toglie dalla maggiore più della sua metà, dal resto più della sua metà, e così via, si finisce per giungere ad una grandezza minore della più piccola ».

Gli ultimi tre Libri degli *Elementi* sono consacrati, nella massima parte, alla geometria dello spazio. E precisamente l'XI insegna le relazioni fondamentali fra rette, e piani, parallelismo e perpendicolarità, ecc.; per le imperfezioni e lacune che vi si notano esso ha tutto l'aspetto di una prima stesura d'un'opera, in attesa di ulteriori diligenti revisioni. Il Libro successivo tratta invece della misura della superficie e dei volumi dei solidi considerati nella geometria elementare e possiede immenso valore, non soltanto per le numerose importanti verità che ci apprende, ma anche perchè è il primo lavoro a cui debbono attingere coloro che agognano a famigliarizzarsi con i procedimenti con cui gli antichi poterono eseguire complanazioni e cubature senza servirsi dell'algoritmo infinitesimale. Ai poliedri regolari convessi è dedicato l'ultimo Libro degli *Elementi;* esso si chiude con la dimostrazione del-

l'inesistenza di altre figure dell'indicato tipo, all'infuori di quelle scoperte da Pitagora e rese popolari da Platone; questo fatto indusse taluno a sentenziare che scopo della grande opera di Euclide sia appunto la costruzione di quelle celebri figure, opinione questa che certamente non verrà condivisa da coloro che, come noi, pensano essere qualunque trattato scientifico fine a se stesso.

Istituendo un paragone fra quanto contengono gli *Elementi* di Euclide e la totalità delle cognizioni geometriche che vedemmo possedute dai geometri anteriori, si vede agevolmente che a lui non appartengono i Libri I, II e IV, i quali, nel loro complesso, dovevano essere noti ai Pitagorici; non il III che, con ogni probabilità, è opera precipua di geometri contemporanei di Ippocrate da Chio (v sec. a. C.), nè il V, che sappiamo essere frutto delle meritorie fatiche di Eudosso. Nel VI egli probabilmente contribuì a stabilire con pieno rigore verità rivelate dalla testimonianza dei sensi, e nei tre seguenti si limitò a coordinare e completare verità già note nella Scuola di Pitagora; nel comporre il Libro X sfruttò lavori di Teeteto, arricchendoli di importanti sviluppi; mentre i materiali dei tre ultimi libri gli furono apprestati da Archita, Teeteto, Aristeo e presumibilmente da altri (i cui nomi, per usare una frase scultoria di un grande poeta, « furono scritti nell'acqua »), i quali progredirono nella via aperta da Pitagora e Platone. Nè a lui, come sappiamo, appartiene la filantropica idea di riunire in un corpo di dottrina tutte le verità già scoperte, e nemmeno è sua opera esclusiva lo stile rigorosamente uniforme, del quale non possiamo esimerci dal far qui rapido cenno.

Per ogni teorema, dopo l'enunciato in termini generali, sono indicate, ove necessario, le condizioni a cui debbono soddisfare i dati per la validità del teorema; segue la ripetizione dell'enunciato sulla figura, poi la « costruzione » (cioè il tracciamento delle linee ausiliari), a cui tien dietro la « dimostrazione », che finisce con la ripetizione dell'enunciato suggellata dalle sacramentali parole « come volevasi dimostrare ». Similmente pei problemi, ognuno dei quali termina, invece, con la frase « come volevasi ottenere »; anzi tale diversità di chiusa è quella che nell'antichità servì a determinare la natura logica della proposizione esposta e permise a più recenti editori di collocare le intitolazioni Teorema e Problema, che non esistevano in origine.

Euclide usa con marcata preferenza il metodo della riduzione all'assurdo (siccome esso convince ma non illumina, così i moderni hanno sostituito il più possibile i ragionamenti apagogici con altri più diretti), ma in genere ricorre a tutti gli artifici logici capaci di condurre allo scopo con maggiore rapidità e sicurezza. Riguardo alle costruzioni da lui insegnate, devesi notare che non sempre esse sono le più economiche dal punto di vista grafico, e ciò perchè queste di regola si conseguono soltanto applicando proprietà esposte più tardi o non insegnate negli *Elementi*: onde, nel giudicare i procedimenti di costruzione insegnati da Euclide, è indispensabile tenere costantemente presente la fondamentale distinzione fra « semplicità teorica » e « semplicità pratica » di una costruzione, la prima delle quali si raggiunge col minimo uso di

teoria, mentre alla seconda si arriva quando il numero delle linee da tracciare risulta ulteriormente irriducibile.

40 - Quantunque Euclide sia noto alla generalità dei matematici esclusivamente come l'autore degli *Elementi,* pure a lui si debbono altri lavori di carattere più elevato e che perciò venivano, in parte almeno, annoverati fra gli scritti che, al dire del commentatore Pappo, erano consigliati e offerti a coloro che, esauriti i rudimenti della geometria, intendevano spiccare il volo verso le regioni più elevate della scienza. Degli scritti euclidei appartenenti a questa « Raccolta di scritti di natura analitica », uno esiste tuttora, altri invece non si sottrassero alle ingiurie del tempo: quello porta il titolo *Dati* e tratta di una speciale categoria di proposizioni, designate appunto con tal nome perchè ognuna afferma essere una figura di cui si conoscono certi elementi « data » di forma (« di specie », come preferisce dire Euclide), di posizione o di grandezza; una tale proposizione viene dimostrata con l'insegnare la costruzione della figura a cui si riferisce. Per meglio chiarire la natura dei « dati » riferiamo i seguenti enunciati euclidei:

« Se di un triangolo si conoscono un angolo ed il rapporto del terzo lato alla somma dei due lati che comprendono l'angolo retto, il triangolo è dato di specie ». « Se di un triangolo si conosce un angolo, sarà pur dato il rapporto della sua area al rettangolo dei lati comprendenti quell'angolo ».

Si tratta, dunque, di veri e propri « teoremi di esistenza », intesa però questa locuzione in senso più ampio del solito, giacchè in molti casi vi si afferma la determinazione implicita, non di un intero ente geometrico, ma soltanto di talune caratteristiche di esso; tale significato delle proposizioni stabilite da Euclide mostra che con piena ragione Pappo ed un altro commentatore, Marino da Neapoli (a cui si deve una pregevole edizione ed una prefazione dell'opera in questione), dichiarano che questa era utilissima a tutti coloro che ambivano famigliarizzarsi con la difficile arte di risolvere i problemi. Essa comprende un centinaio di proposizioni (ci esprimiamo in questa forma un po' vaga perchè fra i vari manoscritti dei *Dati* non vi è perfetto accordo), alcune delle quali si ritrovano sotto altra forma nelle moderne esposizioni della geometria, mentre altre vi meriterebbero un posto sia pure a titolo di semplici esercizi.

Al pari dei *Dati* disimpegna un ufficio complementare rispetto agli *Elementi* il lavoro di Euclide che tratta *Della divisione delle figure,* giacchè è tutto consacrato all'importante categoria di questioni aventi per scopo di dividere, mediante rette soggette a certe condizioni, una data area piana in parti aventi fra loro relazioni prestabilite. L'originale greco non ne fu sino ad oggi scoperto, ma le ampie e sicure vestigia che quell'opera lasciò nella letteratura araba (cfr. n. 155) abilita a formarsene un chiaro concetto e permise di recente di ricostruirla con probabile verosimiglianza.

Una posizione analoga dei *Dati* rispetto agli *Elementi* occupava un'altra importantissima opera di Euclide, sventuratamente scomparsa dalla letteratura matematica, sulla quale Pappo offre informazioni

assai ampie, ma che acuiscono piuttosto che soddisfare il desiderio di conoscerla pienamente. Essa pure porta un titolo — *Porismi* — tratto da un tipo speciale di proposizioni; giacchè il vocabolo « porisma » aveva nell'antichità due distinti significati; era, cioè sinonimo di « corollario », ma aveva anche un altro senso, per determinare il quale acuti matematici dotati di vasta erudizione sottoposero ad una tormentosa analisi le parole dedicate da Pappo a quell'opera di Euclide. Così si giunse a concludere che i porismi, al pari dei dati, sono teoremi incompleti, i quali esprimono certe relazioni fra enti variabili secondo una legge assegnata, le quali relazioni bisogna completare, determinando la grandezza e la posizione di alcune figure che sono conseguenza delle ipotesi e che comparirebbero in un ordinario teorema. Il porisma, quindi, partecipa del teorema e del problema; lo stabilirlo esige tanto una dimostrazione, quanto una costruzione. Ad esempio la seguente proposizione:

« Se un $n$-latero completo si deforma per modo che i suoi lati ruotino attorno ad $n$ punti collineari e che $n$-1 dei suoi $\frac{n(n-1)}{2}$ vertici descrivano ciascuno una retta, i rimanenti $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ vertici percorrono altrettante rette ».

È un porisma, il quale richiede, non soltanto che si dimostri la verità dell'enunciato, ma anche che si fissi la posizione delle rette di cui è ivi parola. A divinare l'opera di Euclide si provarono parecchi celebri matematici, fra cui basti ricordare il più recente, M. Chasles, il quale sfruttò abilmente i risultati anteriormente stabiliti: però il suo lavoro, per quanto indiscutibilmente ottimo come opera personale, non basta a risarcire della perdita subita per la scomparsa dello scritto originale, tanto più che taluno pensa che questo fosse ancora più elevato della divinazione; aggiungiamo che è merito del citato geometra francese se il concetto ed il nome di porisma si ritrovano in opere moderne [1], ove certi teoremi sono presentati appunto sotto questo aspetto particolare.

Una terza opera perduta di Euclide sembra fosse una collezione di *Paradossi* o di *Paralogismi,* destinati alla gioventù per addestrarla al retto ragionare; ma di essi sgraziatamente neppur uno si è salvato onde venire citato come esempio.

In condizioni ancor peggiori ci troviamo riguardo ad uno scritto dello stesso matematico intorno ai *Luoghi superficiali,* sul cui argomento l'estrema varietà dei pareri dei competenti si rispecchia nella diversità delle ipotesi emesse intorno al suo contenuto.

Riguardo ad un trattato sulle *Coniche* che gli è pure attribuito, nulla ci è noto se non che le celebri curve componenti la triade di Menecmo venivano ivi ottenute secando un cono circolare col mezzo di piani perpendicolari ciascuno ad una generatrice, epperò venivano designate con i vecchi nomi di « sezioni del cono acutangolo, rettangolo ed ottusangolo ».

---

[1] Basti qui citare l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* di L. Cremona.

41 - Le opere euclidee sin qui discorse toccano senza esclusione due delle quattro discipline costituenti il medioevale « quadrivio », cioè l'Aritmetica e la Geometria; alle altre due — la Musica e l'Astronomia — il sommo alessandrino ha pure volta la propria attenzione; lo provano un frammento intorno alla teoria matematica del suono e un libro — intitolato *Fenomeni* — che è un trattato elementare di astronomia, esposto con la forma rigidamente compassata che il famoso docente del Museo usò in tutte le altre scritture che ci pervennero.

Per il tramite degli Arabi ci è anche giunto un frammento *Sulla leva*, di cui vuolsi fosse autore appunto Euclide; finalmente nella letteratura greca s'incontrano due lavori relativi allo studio matematico dei fenomeni luminosi che gli sono del pari attribuiti. Uno è intitolato *Ottica* e contiene le prime proposizioni dell'ottica geometrica in base all'ipotesi platoniana che il fenomeno della visione avvenga in causa di raggi emananti dall'occhio, e ad alcuni postulati che oggi si pongono a fondamento della prospettiva. L'altro — intitolato *Catottrica* — concerne i fenomeni della riflessione rispetto a specchi piani; questo certamente non è un genuino lavoro di Euclide, tutto al più può essere una tarda compilazione fatta in base a materiali lasciati dal sommo alessandrino. Benchè le più recenti teorie matematiche della luce, fondate sopra l'esperienza, abbiano fatto espellere questi lavori di Euclide dalle biblioteche ad uso degli investigatori, pure era dovere nostro ricordarle, onde mostrare che il grande geometra abbracciò nella sua vasta azione didattica tutte le scienze fisico-matematiche del suo tempo, e anche per notare come ad essi probabilmente si deve se nei migliori trattati generali di matematica pubblicati nei secoli XVII e XVIII, non manchino capitoli più o meno estesi relativi ai fenomeni cui dà luogo la propagazione della luce.

## Archimede

42 - Mentre il geometra di cui abbiamo testè descritta la cospicua produzione scientifica ci offre il tipo più genuino e schietto dell'insegnante e del trattatista, quello che l'ordine cronologico c'impone ora di considerare presenta un fulgido esempio dell'investigatore originale, il quale, non curante di spianare la via ai novizi, si preoccupa soltanto di rivelare nuovi veri a se stesso ed ai pensatori già maturi; ragione per cui, mentre per intendere Euclide non è necessaria un'intelligenza e una cultura di eccezione, le produzioni che ora ci apprestiamo a descrivere sono destinate esclusivamente a lettori di non comune levatura.

L'autore di esse, Archimede, nacque a Siracusa nel 287 a. C., onde taluno si compiace di riguardarlo, al pari di Archita, come un geometra italiano; opinione questa che molti sono riluttanti a condividere perchè le sue opere, quantunque apparse in un'epoca in cui le aquile romane avevano già spiccati voli superbi, sono scritte in dialetto dorico, epperò appartengono senza discussione alla letteratura greca. Vogliono taluni che suo padre fosse l'astronomo Fidia, noto per un tentativo di determinare il rapporto di grandezza fra il sole e la luna; tutti poi conven-

gono nel ritenerlo legato da vincoli di parentela e di amicizia con la casa regnante allora nella sua città natale.

A scopo di studio egli si recò in Egitto per venire a contatto, non con Euclide, che era allora già morto, ma con i suoi successori, stringendo relazioni affettuose con alcuni geometri (Conone da Samo, Eratostene da Cirene, Dositeo, ecc.) a cui egli dedicò poi i lavori che compì dopo il suo ritorno in patria. Qui egli consacrò tutto se stesso agli studi di geometria e di meccanica; ma quando, nel corso della seconda guerra punica, Siracusa, come alleata di Cartagine, venne assediata dall'esercito romano, egli pose il suo genio a servigio della terra natia e si dimostrò così straordinariamente fecondo nell'inventare armi di offesa e difesa (basti qui ricordare le potenti catapulte ed i leggendari specchi ustori) che presentò lo spettacolo, unico nella storia, di un uomo combattente da solo durante un triennio contro un intero esercito; soltanto trasformando l'assedio in blocco e poi ricorrendo all'astuzia più raffinata, Marcello, il duce romano, potè aver ragione del matematico Briareo con cui trovavasi alle prese.

Durante il saccheggio che seguì la resa di Siracusa (212 a. C.) Archimede perdette la vita, malgrado gli ordini dati dal generale latino che egli fosse rispettato; alla sua memoria fu elevata una tomba condegna, su cui, per soddisfare un legittimo desiderio dell'illustre estinto, venne incisa una sfera inscritta in un cilindro, a perenne memoria di una delle sue più importanti scoperte; tale sepolcro venne rintracciato e restaurato da Cicerone quando andò questore in Sicilia (75 a. C.); oggi non se ne trova più alcun vestigio.

43 - Volendo esaminare gli scritti di Archimede che ancora esistono, non si può ricorrere all'ordine cronologico, il quale, meglio di qualunque altro permette di tener dietro alla figliazione delle idee di qualsiasi pensatore, mancando al riguardo dati attendibili; onde ci atterremo ad un ordinamento fondato sopra gli argomenti trattati.

In conseguenza inizieremo la nostra analisi con l'importantissimo contributo dato dal Siracusano ai problemi della quadratura del circolo e della rettificazione della circonferenza, dei quali egli mise in luce l'identità sostanziale, insegnando che « l'area di un cerchio è espressa dal prodotto della lunghezza della circonferenza per la quarta parte del diametro » A differenza dei geometri anteriori, Archimede non si ostinò nel volere risolvere mediante la riga ed il compasso una questione che esige ben altri mezzi, ma (sostituendo la ricerca di una *costruzione* con quello di una *misura*) si pose per l'unica via che, ai suoi tempi, poteva dare un risultato soddisfacente, proponendosi, cioè, di determinare con sufficiente approssimazione il rapporto $\pi$ della circonferenza al diametro. A tale scopo egli ricorse alla considerazione dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a cui, nell'epoca precedente, avevano tentato ricorrere, con analoghi intenti, Antifonte e Brissone. Partendo dall'esagono regolare e raddoppiando successivamente il numero di lati dei poligoni regolari considerati, giunto a quello di 96 lati, egli con-

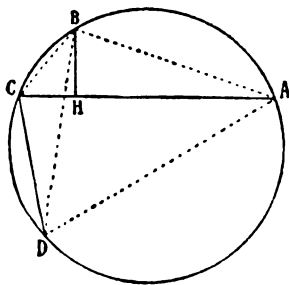
cluse la celebre limitazione

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

alla quale si arrestò, ritenendo tale risultato bastantemente approssimato, tanto più che i malcontenti non avevano che a spingersi più oltre nella via da lui aperta; vedremo più avanti che tale tacito invito fu accettato da molti, ma intanto osserviamo che, applicando una proposizione che abbiamo già ricordata, Archimede conclude che l'area di un cerchio è con grande approssimazione 11/14 del quadrato del suo diametro. Queste conclusioni rappresentano i primi risultati concreti ed utili che abbiano dati gli sforzi fatti per sciogliere il più celebre problema che s'incontri in tutta la geometria.

L'opuscolo di Archimede *Sulla misura del cerchio* è un estratto, ad uso scolastico, di un più vasto lavoro sul medesimo argomento, l'originale del quale non fu sino ad oggi scoperto; ivi, secondo alcuni, Archimede si sarebbe spinto sino al poligono di 384 lati, ottenendo così il valore $\pi = 3.1416$, che gli Indiani si vantarono di avere trovato da sè, senza però produrre alcuna prova in appoggio a tale asserzione. Ma un dato prezioso riguardo al contenuto di quel lavoro è offerto da un erudito arabo che impareremo a conoscere nel Cap. XI, Al-Biruni, chè egli ne estrae la seguente proposizione: In un cerchio sia segnata la spezzata $A\ C\ D$ (Fig. 6); si segni il punto medio $B$ dell'arco $A\ C\ D$ e si conduca $B\ H$ perpendicolare alla $A\ C$; si avrà $A\ H = H\ C + C\ D$. Ora detti $\alpha$, $\beta$ gli angoli $B\ C\ A$ e $B\ A\ C$, quella proposizione (la quale sotto quella forma è scomparsa dalla letteratura matematica) si mostra equivalente alla seguente relazione:

Fig. 6.

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

mentre dall'essere $A\ C = A\ H + H\ C$ risulta

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta;$$

e poichè da queste seguono le analoghe espressioni per cos $(\alpha \pm \beta)$, così si giunge all'inattesa conclusione che al sommo Siracusano non restarono ignote le proposizioni equivalenti alle ordinarie formole per l'addizione e sottrazione degli archi.

È chiaro che questi lavori di Archimede sulla più semplice delle curve studiate dagli antichi possono riguardarsi come complementi agli *Elementi* di Euclide.

Un carattere analogo si può riscontrare nei due libri *Su la sfera ed il cilindro,* dal momento che la materia che vi è esposta è divenuta parte integrante di ogni trattato di geometria elementare. Nel I, infatti, si apprendono eleganti espressioni per la superficie laterale e per il volume di un cilindro o di un cono retto o del tronco nascente segando un cono retto con un piano parallelo alla base, e per la superficie od il volume

di una sfera o di un settore sferico; Archimede, combinando genialmente tali espressioni, giunge ad importanti relazioni fra le indicate grandezze.

Delle stesse relazioni egli fa applicazioni, nel secondo dei citati Libri, alla risoluzione di parecchi problemi aventi per fine la costruzione di una sfera equivalente ad un cono o ad un cilindro e la divisione di una sfera mediante un piano in due parti di cui le superficie e i volumi abbiano fra loro un assegnato rapporto. Alcuni equivalgono alla risoluzione di equazioni di 1° o 2° grado; altri invece si riducono alla duplicazione del cubo ed altri ancora alla risoluzione di un'equazione di 3° grado completa. Archimede ritiene inopportuno di entrare nei particolari di soluzione che sarebbero tanto desiderati, rimandandoli alla fine della memoria, che, purtroppo, non ci è pervenuta; i suoi commentatori non ci porgono sull'argomento che spiegazioni monche e frammentarie, onde gli antichi metodi di risoluzione delle equazioni di 3° grado costituiscono uno dei più tormentosi enigmi che si incontrino nella storia della geometria greca; attorno ad esso spesero enormi fatiche i più profondi conoscitori dell'antica geometria, senza giungere a scioglierlo definitivamente.

I teoremi di cui testè abbiamo fatto cenno possono, in parte almeno, considerarsi come casi particolari di altri riferentisi alle superficie che sono generate dalla rotazione d'un'ellisse attorno ad un suo asse, di una parabola attorno al suo asse o di un ramo d'iperbole attorno al suo asse trasverso, sono le notevoli figure a cui Archimede consacrò l'altro magnifico libro dal titolo *Conoidi e Sferoidi*. Dal quale si apprendono le espressioni dei volumi delle figure che nascono segando una delle dette superficie mediante piani perpendicolari all'asse; esse sono ottenute col mezzo di ingegnosissimi ragionamenti, che sono vere e proprie integrazioni travestite e che servirono di stimolo e guida per le altre investigazioni dello stesso tipo eseguite prima della creazione del calcolo integrale.

Innanzi di accingersi ai cennati calcoli, Archimede dovette attardarsi ad esporre alcune essenziali prerogative delle superficie dianzi definite (sono tutte le quàdriche rotonde, eccettuato l'iperboloide ad una falda di rotazione) e ciò fece mediante argomentazioni di grande valore e il cui pregio si accrebbe quando si avvertì la loro applicabilità a quàdriche qualisivogliano. Sia o non sia Archimede il primo che si è occupato delle superficie di secondo ordine rotonde, è indubitato che a lui si deve se tali superficie entrarono a far parte delle figure oggetto di particolari cure da parte dei matematici.

44 - Una benemerenza congenere si acquistò il grande geometra di Siracusa con l'altro splendido scritto intitolato *Spirali*, ove è fatto uno studio metodico delle curve (che sembrano esser state concepite per la prima volta da Conone di Samo) rappresentabili in coordinate polari mediante equazioni della forma $\rho = a\,\omega$ ove $a$ è una costante data [1];

---

[1] Benchè nessun documento lo dimostri, pure ci sembra estremamente probabile che il concetto generale di coordinate polari tragga la sua origine dall'opuscolo in que-

sono le curve chiamate comunemente « spirali d'Archimede » per ricordare che al matematico di cui ci occupiamo si è debitori della scoperta e della dimostrazione delle loro proprietà fondamentali. E infatti egli ne avvertì l'applicabilità alla rettificazione, non solo dell'intera circonferenza, ma di un arco circolare qualsiasi, insegnò a costruirne la tangente servendosi (siaci lecito usare per brevità un vocabolo moderno) della sottotangente polare e stabilì buon numero di teoremi di quadratura, tutti di suprema eleganza. Se nulla egli dice riguardo alla rettificazione, gli è che si tratta di una questione che non si può risolvere che servendosi della funzione logaritmica. Il cammino che guidò il Siracusano a tali conclusioni appare oggi lungo ed impervio, onde il libro sulle *Spirali* trova oggi pochi lettori; ma le conclusioni stesse hanno preso posto stabile nella scienza e ciò costituisce senza dubbio il premio più ambito per qualunque investigatore.

Fra gli altri scritti di Archimede che ci restano da esaminare hanno grande importanza i due Libri sull'*Equilibrio dei piani,* fra cui va inserito quello ordinariamente intitolato *Quadratura della parabola,* benchè Archimede parli sempre di « sezione del cono rettangolo ». Essi costituiscono la prima trattazione scientifica della statica e sono scritti con un metodo così rigorosamente conforme a quello adottato da Euclide che si è effettivamente in presenza di un capitolo di geometria a quattro dimensioni ove ogni punto è caratterizzato dalle proprie coordinate e dal suo peso. Il primo dei citati Libri s'inizia con la determinazione delle condizioni di equilibrio di una retta pesante (come rappresentante di un'asta rigida) appoggiata ad un fulcro verticale; è ivi stabilito il principio della leva che guidò Archimede alla superba, ma non ingiustificata affermazione, « da mihi ubi consistam et terra movebo ». Si passa poi alla ricerca dei centri di gravità delle più semplici figure geometriche (parallelogramma, triangolo, trapezio); e poichè è naturale la curiosità di sapere in qual modo detti punti fossero concepiti dagli antichi, avvertiamo che nulla di preciso al riguardo si conosce, perchè la relativa definizione si trovava in un'opera di Archimede che si considera oggi come perduta, il titolo eccettuato. I risultati ottenuti vengono applicati alla parabola, giungendosi alla celebre proposizione seguente: « La porzione di piano limitata da un arco di parabola e dalla relativa corda è 4/3 del triangolo avente la stessa base e per vertice opposto il punto (« vertice » della curva) ove la tangente è parallela alla base stessa ». Questo fondamentale teorema è proprietà di Archimede, il quale, stabilendolo, riuscì a quadrare la prima area piana non limitata soltanto da linee rette o circolari. Ma poichè il procedimento che lo guidò a siffatta conclusione contiene elementi attinti alla meccanica, così il grande geometra si credette in dovere di sostituirlo con altro prettamente geometrico; questo si legge appunto nell'opuscolo relativo alla *Quadratura della parabola,* in cui l'area in discorso viene determinata come limite della somma dei termini di una progressione geometrica avente per ragione 1/4.

stione e che dallo studio di esso si sia stati condotti a introdurre, come ausiliare per il tracciamento delle tangenti, la sottotangente (e quindi la sottonormale) polare.

La stessa figura (il « segmento di parabola ») viene ulteriormente studiata nell'ultimo dei tre suindicati libri, col precipuo intento di dimostrare che il centro di gravità di essa cade sulla retta che ne unisce il vertice al centro della base e la divide in due parti tali che quella attigua al vertice sta a quella vicina alla base nel rapporto 3/2. Applicando poi un teorema generale, il quale abilita a determinare il centro di gravità della figura che nasce togliendo da una figura una sua determinata porzione, Archimede deduce dall'or riferita proposizione quale sia la posizione del baricentro della figura risultante tagliando un segmento parabolico con una retta parallela alla base.

Mentre nei tre libri testè discorsi il grande siracusano pose alla statica basi definitive, in quelli dal titolo *Sui galleggianti* iniziò la trattazione metodica dell'idrostatica [1], anzi si spinse così innanzi che, come ebbe a sentenziare Lagrange, insegnò una teoria dei corpi galleggianti a cui i moderni nulla mutarono e ben poco aggiunsero. Ed infatti non è possibile non condividere tale apprezzamento quando si rifletta che vi si legge il notissimo « principio di Archimede », il quale non manca in alcun trattato di fisica. È ignoto se esso fu il punto di arrivo o quello di partenza per le meditazioni che permisero ad Archimede di scoprire la frode, commessa a danno del re di Siracusa, dall'orafo incaricato di fabbricare una corona di oro puro [2].

Di quel principio Archimede fa, nei citati libri, un'applicazione importante e difficilissima, determinando le condizioni di equilibrio della figura che si ottiene secando un paraboloide ellittico di rotazione con un piano perpendicolare all'asse, nell'ipotesi che venga immerso in un liquido; anche tale ricerca servì di eccitamento e modello per coloro che, in tempi più vicini a noi, sciolsero questioni dello stesso tipo.

45 - Di un ultimo importantissimo lavoro di Archimede non possiamo per il momento occuparci perchè, per farne comprendere il significato ed il valore, è necessario inquadrarlo nell'esposizione dell'aritmetica dei Greci, della quale ci occuperemo *ex-professo* più innanzi (Cap. VI). così dicasi riguardo ad un difficile problema aritmetico

---

[1] Il testo greco ne fu di recente scoperto in un palinsesto esistente a Gerusalemme; prima non si disponeva che di una versione fatta da G. de Moerbeke e pubblicata da N. Tartaglia.

[2] « Jerone, nobilitato della regia podestà della città di Siracusa, essendogli le cose prosperamente successe, ed avendo deliberato di porre al tempio una corona d'oro votiva, per grandissimo prezzo la diede a fare, fornendo a colui, che si prese il carico di farla, a peso la quantità dell'oro. Questi a tempo debito apportò al re l'opera sottilmente fatta con le mani, e parve che al giusto peso dell'oro restituisse la corona. Ma poichè venne indiziato, che levatane una quantità d'oro, altrettanto di argento in quella avesse posto, Jerone sdegnato di essere stato beffato, nè avendo un mezzo per dimostrare il furto, pregò Archimede che prender volesse la cura di riconoscere il fatto, pensandovi molto ben sopra. Avendo Archimede allora posto il suo pensiero sopra di ciò, per caso entrò in un bagno. E disceso nella tinozza gli venne veduto che quanto del suo corpo entrava, tanta di acqua usciva. Per il che avendo ritrovato il metodo di poter dimostrare la proposta, non rimase più oltre nell'acqua, ma uscitone con grande allegrezza, andando ignudo verso casa, dimostrava ad alta voce di avere ritrovato quello che cercava, perchè correndo tuttavia gridava « eureka, eureka » cioè « ho trovato », VITRUVIO, *De Architectura*, l. IX, cap. III.

recante il suo nome. Ma in questo momento, dopo avere sommariamente indicate le più cospicue verità geometriche e meccaniche scoperte dal siracusano, ci corre l'obbligo di spendere qualche parola intorno ai metodi da lui usati prima per ottenere e poi per dimostrare le verità stesse. Ora, riguardo a questi ultimi va rilevato l'uso larghissimo da lui fatto dell'algebra geometrica, che egli rese più raffinata e possente di quanto ci si presenta in Euclide; inoltre il largo impiego con intenti dimostrativi delle operazioni, dette « inserzioni », scopo delle quali è disporre un segmento rettilineo in modo che i suoi estremi giacciano su due date linee e che la retta a cui esso appartiene passi per un dato punto: e va rilevato che Archimede ne usa anche quando sia impossibile eseguirle con la riga ed il compasso, dando ad intendere che non aveva scrupolo di effettuarle meccanicamente col mezzo di una riga su cui fossero segnati due punti distanti fra loro della lunghezza del dato segmento. Finalmente Archimede applicò su larga scala quelle considerazioni, concepite da Eudosso ed abilmente applicate da Euclide, che permettono di calcolare aree e volumi senza ricorrere ad integrazioni esplicite, e vi aggiunse del proprio (come vedemmo parlando della quadratura di un segmento parabolico), allo stesso scopo, l'originale impiego della bilancia.

Siccome molti dei ragionamenti archimedei sono, per quanto ammirabili, artificiosi e non esenti da complicazioni, così sorse in molti il ben giustificato sospetto che non fossero essi il veicolo che guidò il grande scienziato alle verità che lo resero famoso in tutto il mondo; ebbene, tale congettura trovò la più luminosa conferma in un palinsesto di recente scoperto in una biblioteca di Costantinopoli, ove si legge un importante frammento (intitolato E'φόδιχον) di natura metodologica, nel quale si trova, fra l'altro, fatta una netta distinzione fra « metodo di scoperta » e « metodo di dimostrazione » delle verità geometriche ed è dichiarato senza reticenze che, mentre un'argomentazione avente il fine di stabilire un teorema di geometria deve essere esente da qualsivoglia ingrediente che alla scienza dell'estensione non appartenga, colui che si trova intento in una ricerca scientifica è autorizzato di ricorrere a qualunque mezzo capace di condurlo più sicuramente allo scopo; saggio consiglio, che ancor oggi potrebbe giovare a chi si ostinasse a praticare un purismo confinante con la pedanteria; di esso Archimede fa toccar con mano la ragionevolezza servendosene in parecchi casi, in particolare nel determinare il volume di un'unghia cilindrica, o quello comune a due cilindri circolari retti, i cui assi s'incontrano sotto un angolo di novanta gradi (1).

---

(1) Questo volume è espresso da due terze parti del cubo avente per lato il diametro comune dei due cilindri; nell'esporre questo risultato Archimede ne rileva la somma importanza che dipende dal fatto che un solido limitato da superficie curva risulti calcolabile esattamente. Volendo verificare l'esattezza dell'enunciato archimedeo si noti che, se il solido in discorso è quello comune ai due cilindri

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad y^2 + z^2 = r^2 ,$$

46 - I lavori di Archimede finora rapidamente esaminati ci giunsero nella loro integrità (sebbene non tutti nella lingua originale), ma molti altri sono a lui attribuiti; sorvolando su quelli dei quali conosciamo il solo titolo (spesso anche sotto forma sospetta), faremo, finendo, rapido cenno di quelli dei quali conosciamo l'intento e qualche risultato.

Tacendo di una trattazione di una teoria delle *Sezioni coniche* di cui egli è fatto autore (e che certamente egli era in grado di scrivere, data la profonda conoscenza delle qualità di dette linee, rivelata da altri suoi scritti), segnaleremo un suo lavoro sui *poliedri semi-regolari,* figure limitate da poligoni tutti regolari, ma di specie differenti; con mezzi a noi non noti egli li determinò tutti tredici, spintovi probabilmente dall'esame dei due, per quanto ci consta (v. n. 31), noti anteriormente a Platone.

Sotto il nome dello stesso matematico va una raccolta di proposizioni di geometria elementare trasmessaci dagli Arabi, che forse ne trassero gli elementi da fonti svariate. Per dare un'idea di questi *Lemmi* (tale è il titolo della raccolta citata) riferiremo i due seguenti teoremi, i quali dànno notizia di nuove aree piane limitate da archi circolari e che, al pari delle lunule di Ippocrate, hanno aree espresse in modo notevole:

*a*) Dato (Fig. 7) un semicerchio $A\ B\ C$ ed un punto D del suo diametro, si descrivono all'interno di esso due semicerchi aventi per

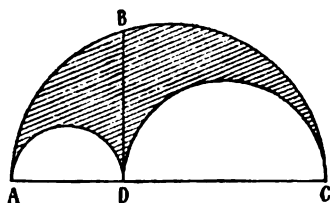



Fig. 7.

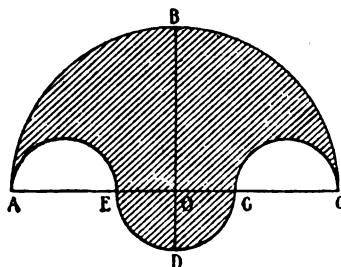



Fig. 8.

diametro $AD$ e $DC$. la figura (ἄρβηλος) limitata dalle tre semicirconferenze è equivalente al cerchio che ha per diametro la retta $B\ D$ perpendicolare ad $A\ C$.

---

il volume indicato è dato da

$$V = 8 \int_{y=0}^{y=r} \int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} \cdot z\, d x \quad d y\ ;$$

onde successivamente si ha

$$V = 8 \int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} dx \int_{y=0}^{y=r} \sqrt{r^2-y^2}\, dx = 8 \int_{y=0}^{y=r} (r^2-y^2)\, dy =$$

$$= 8 \left| r^2 y - \frac{y^3}{3} \right|_0^r = 8 \frac{2 r^3}{3} = \frac{2}{3} (2 r)^3.$$

*b*) Dati (Fig. 8) un semicerchio e due punti *E, G* del diametro equidistanti dal centro O, sopra i segmenti *A E, C G* come diametri si descrivono due semicerchi interni al dato e su *E G* uno esterno; la figura (σαλίνον) limitata dalle quattro definite semicirconferenze è equivalente al cerchio che ha per diametro la retta *B D* perpendicolare ad *A C* nel centro *O* del dato semicircolo.

Di una memoria del siracusano *Sull'ettagono,* l'originale si considerava perduto sino dalla fine del x secolo; ne esistono però molti rifacimenti in arabo, uno dei quali, dovuto a Tabit ibn Qorra (826-901), ha visto la luce in veste tedesca [1]. Si apprende da esso un'elegante proposizione che porta ad una figura dell'indicata specie; giudichiamo opportuno riferirla; Sia data (Fig. 9) la retta *A B;* segnamo in essa due punti *C, D* tali che si abbia $AD \cdot CD = DB^2$, $CB \cdot DB = AC^2$; i segmenti *A C, D B* risultano maggiori di *C D,* onde si potrà costruire su *C D* un triangolo *C H D* tale che sia $CH = AC$, $DH = BD$. Circoscriviamo al triangolo *A H B* una circonferenza *I* e prolunghiamo i lati *H C, H D* sino a incontrarla nuovamente in *Z* e *E*. Sia *T* il punto comune alle rette *B Z, H E*; i quattro punti *C, T, B, H* risultano conciclici. I tre archi del cerchio Γ *B H, A Z, Z E* sono fra loro eguali, mentre i due restanti *A H* e *B E* sono doppii di ciascuno di questi, cosicchè, bisecando questi, il primo dei detti cerchi resta diviso in sette parti eguali.

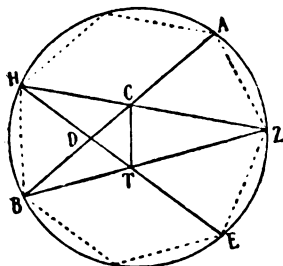



Fig. 9.

I seguaci di Maometto ci hanno tramandate anche circostanziate notizie intorno ad un gioco (chiamato d'ordinario « loculus Archimedius »), da eseguirsi mediante piastrelle di avorio parte triangolari e parte quadrate, di cui vuolsi sia stato l'inventore il sommo matematico di cui ragioniamo. Lo ricordiamo — sia pur di sfuggita — assieme agli innumerevoli apparati meccanici da lui inventati (e dei quali egli faceva poco conto, mentre destavano nel volgo dei contemporanei la più schietta ammirazione), perchè a chi aspiri a formarsi un concetto esatto di una personalità così eminente e complessa qual'è quella che ci ha testè occupati, non è lecito di trascurare alcuno degli aspetti sotto cui si presenta; ma, del resto, le informazioni da noi date intorno alla sua opera matematica sono sufficienti a mostrare che, per usare le parole di G. Wallis, Archimede fu « vir stupendae sagacitatis, qui pria fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas, nostra gloriatur ».

## Apollonio

47 - L'ammirazione che ispirò a Wallis le frasi testè riferite traspare limpidamente anche in quest'altra sentenza di Leibniz: « qui

[1] V. l'appendice al volume citato sotto il numero 60 nella *Bibliografia* che chiude il Cap. XI dell'opera presente.

Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum vivorum inventa parcius mirabitur ». Ma in questa è aggiunto un altro nome e additato un altro geometra, al quale viene conferito il sommo onore (che fra i moderni il solo Gauss ha sinora conseguito) di venir collocato al medesimo livello del siracusano.

È Apollonio nato a Pergia, città della Pamfilia, e vissuto nel II sec. a. C. (alcuni ritengono abbia vista la luce quaranta, altri venticinque anni dopo Archimede, mentre tal altro considera il 170 a. C. come l'anno della sua maturità). In Alessandria ebbe a maestri i successori di Euclide; soggiornò anche in Efeso e poi a Pergamo, città sede di una università e di una biblioteca non dissimili da quelle che resero celebre Alessandria; che quivi e altrove egli abbia insegnato pubblicamente, è possibile, anzi probabile, ma non storicamente provato, chè della sua vita si conosce così poco che non fu sinora possibile decidere in ultima istanza se egli sia da identificarsi con un astronomo del tempo designato col nome di Apollonio ε, per distinguerlo dai molti personaggi dallo stesso nome (una recente enciclopedia ne registra non meno di 128). Il commentatore Pappo ce lo dipinge di carattere vano e borioso, inebbriato dalla estimazione tributatagli dai contemporanei, i quali, mentre Archimede era ancor vivo o appena sceso nella tomba, solevano designarlo col soprannome di « grande geometra » e « geometra per eccellenza ».

Forse da siffatta ammirazione il Pergeo trasse la forza per criticare liberamente gli scritti di Euclide e proporre radicali modificazioni per l'ordinamento generale e per parecchi passi importanti degli *Elementi;* benchè, purtroppo, le notizie al riguardo siano scarse e frammentarie, pure bastano a provare che ad Apollonio spetta la gloria di avere, eventualmente per primo, coraggiosamente battuta una strada che, abbandonata dopo di lui per molti secoli, fu ritrovata dai moderni con l'illusione di avere per primi innalzato il vessillo della rivolta contro una troppo pesante dominazione.

Non è questo l'unico lavoro che gli *Elementi* di Euclide abbiano suggerito ad Apollonio; infatti, per il tramite degli Arabi ci giunge notizia di ricerche inspirategli dal X Libro della stessa opera e che avrebbero avuto per risultato una generalizzazione (quale?) della teoria degli irrazionali ivi considerati [1].

Inoltre Ipsicle — geometra di cui ci occuperemo fra breve (p. 69) — narra avere Apollonio perfezionato un lavoro sui poliedri del vecchio Aristeo, giungendo a dimostrare con pieno rigore che « se un dodecaedro ed un icosaedro sono inscritti nella stessa sfera, il rapporto dei loro volumi è eguale al rapporto della loro superficie ».

Finalmente si è serbata memoria di altri tre lavori di Apollonio riferentisi alla geometria elementare. benchè essi siano andati perduti, pure le informazioni date su di essi da Pappo ci abilitano ad indicarne la natura ed il contenuto; ciò che faremo ora considerandoli separatamente:

---

[1] Cfr. una memoria di F. Woepcke inserita nel t. XIV (Paris 1856) dei *Mém. prés. par divers savants.*

*a*) Ai *Contatti* erano dedicati due Libri, nei quali trovavasi risoluto, in tutti i vari casi che presenta, il seguente problema: « data di posizione una terna qualunque composta di punti, rette e circonferenze, descrivere una circonferenza che passi per i punti dati e tocchi le linee date ». Oggi si preferisce considerare le differenti ipotesi che si possono fare sui dati come casi particolari della costruzione di una circonferenza tangente a tre altre, cioè di quello che porta oggi il nome di « problema d'Apollonio ». I molti e pregevoli lavori che a tale questione furono dedicati a partire dal Rinascimento sino ai nostri giorni stanno a provare l'importanza non transitoria che fu in essa ravvisata.

*b*) I *Luoghi piani* invece contengono una serie di teoremi (locali) aventi per fine la determinazione del luogo geometrico di un punto in un piano in molti casi in cui la linea richiesta sia retta o circolare (cioè sia, per usare il linguaggio degli antichi, un « luogo piano », denominazione usata in contrapposto a quelle di « luogo solido » e « luogo lineare » impiegate per indicare rispettivamente le sezioni coniche e tutte le altre curve). Per es. Apollonio dimostra essere una circonferenza in luogo de' punti le cui distanze da due punti fissi hanno un rapporto costante; donde il nome di « circonferenza d'Apollonio » con cui detto luogo viene spesso designato.

*c*) Finalmente l'opera intitolata *Inserzioni* trattava di quelle speciali operazioni, che vedemmo usate come ausiliari logici da Archimede, nella supposizione che si possano eseguire esclusivamente mediante riga e compasso; per es. il pergeo insegna ad « inserire in un dato circolo una corda di lunghezza assegnata che passi, eventualmente prolungata, per un dato punto ».

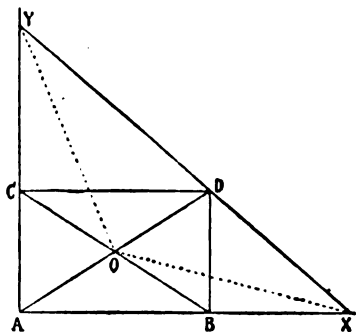



Fig. 10.

Allo stesso geometra si attribuisce un procedimento grafico per rettificare la circonferenza, fondato sull'impiego di una linea speciale, la quale non si è finora riusciti ad identificare e che alcuni storici ammettono fosse l'elica del cilindro circolare retto, e ciò perchè fama vuole che a questa curva egli consacrasse un lavoro speciale.

A lui si fa anche merito di avere risolto il problema di Delo con la seguente procedura: Le due rette date siano (Fig. 10) $AB = a$ e $AC = b$ disposte ad angolo retto; si completi il rettangolo $ABDC$ e se ne determini il centro $O$; si conduca poi (per tentativi) per $D$ una retta tale che, dettene $X$ e $Y$ le intersezioni con le rette $AB$ e $AC$ prolungate, questi punti risultino equidistanti dal punto $O$; allora $BX = x$ e $CY = y$ sono le due medie accennate [1].

[1] Per verificarlo si noti che le due condizioni di essere i punti $X$, $D$, $Y$ allineati e i due primi equidistanti da $O$ si traducono nelle equazioni

$$\frac{b}{x} = \frac{y}{a}, \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

48 - Malgrado l'indiscutibile pregio di questi lavori, non è su di essi che riposa l'altissima rinomanza di cui, da secoli, Apollonio venne fatto segno da parte di coloro che sono in grado di apprezzare una ricerca matematica. Fondamento pressochè unico di essa è il grande trattato delle *Sezioni coniche,* una delle più eccelse opere della letteratura scientifica di tutti i tempi e di tutte le nazioni.

Degli otto Libri che la costituiscono i primi quattro ci pervennero nell'originale, presumibilmente perchè, essendo usati come testo nelle scuole greche, ebbero frequenti trascrizioni; i tre successivi si conoscono soltanto attraverso una versione araba; l'ultimo si ritiene irremissibilmente perduto.

Sappiamo che Apollonio non è l'inventore di quelle celebri curve e nemmeno il primo che siasi accinto ad esporne la teoria metodicamente; ma il fatto che la sua opera sia riuscita ad eclissare le analoghe attribuite ad Aristeo, ad Euclide e forse anche ad Archimede, ne stabilisce la incontrastata superiorità. Quantunque la scomparsa di queste renda malagevole il determinare i perfezionamenti arrecati da Apollonio alla teoria delle sezioni del cono, pure sicuri indizi inducono a ritenere che la nuova trattazione dell'indicata teoria differisca dalle precedenti per ciò che il pergeo prese le mosse dalla definizione di quelle celebri curve come sezioni prodotte da *piani qualunque* in un cono a base circolare, mentre i suoi predecessori si servivano esclusivamente di *piani perpendicolari alle generatrici;* donde la ragione per cui egli reputò indispensabile abbandonare gli antichi nomi dati a tali curve, per altri più espressivi e che sono quelli ancora in uso; aggiungiamo che siccome Apollonio, come per Archimede, un'iperbole veniva riguardata come costituita da un solo ramo, così, quando gli accadde di considerare la curva completa, egli la designa col nome di « sezioni opposte ».

Lo stile di Apollonio è modellato fedelmente sopra quello di Euclide, specialmente nei primi tre libri del suo trattato; come caratteristica dell'ordinamento da lui preferito noteremo che, verso il termine di ciascun libro, sono collocati i problemi che si è in grado di sciogliere servendosi dei teoremi precedenti.

49 - Scendendo a qualche particolare più minuto, noteremo che il I Libro delle *Coniche* apolloniane si apre con una serie di definizioni e di teoremi concernenti i coni circolari; in particolare è stabilita l'esistenza di una seconda serie di sezioni circolari nei coni obliqui. Viene poi dimostrata l'essenziale proprietà delle coniche che oggi esprimiamo mediante l'equazione cartesiana $y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2$; secondochè $q \lesseqgtr 0$ la curva possiede 0, 1 o 2 punti reali all'infinito; in base a quella rela-

ossia

$$x\,y = a\,b \qquad x\,(x + a) = y\,(y + b)\,;$$

ora eliminando dalla seconda successivamente $y$ e $x$ mediante la prima si trova

$$x^3 = a\,b^2 \quad , \quad y^3 = a^2\,b$$

come dovevasi.

zione e giovandosi di una nomenclatura in uso sino dai tempi di Pitagora (v. n. 24) per una classe importante di problemi (alludiamo a quelli di « applicazione d'aree » che conducono alla risoluzione in tutti i casi delle equazioni di 2° grado), sono proposti i nomi di « ellisse », « parabola » ed « iperbole », nonchè i concetti di « lato retto » e « lato trasverso ». Segue una coorte di importanti proposizioni sulle serie di ordinate fra loro parallele, le corde e le tangenti, le quali somministrano quanto è necessario per « determinare un cono circolare su cui stia una parabola, un'ellisse, un'iperbole o due sezioni opposte », immaginando che di siffatte curve si conosca un diametro e la direzione delle corrispondenti ordinate e inoltre il lato retto, se si tratta di una parabola, i lati retto e trasverso nel caso di una conica a centro. Resta in tal modo dimostrato che qualsivoglia curva rappresentata da un'equazione del tipo $y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2$ si può ottenere come sezione di un cono a base circolare.

Con gli asintoti dell'iperbole o di due sezioni opposte si fa conoscenza nel II Libro, ove se ne apprendono anche le relazioni con i punti e le tangenti di dette curve; in particolare vi si trova, sotto forma più generale dell'ordinaria, l'equazione canonica dell'iperbole riferita agli asintoti ($x\,y = k^2$); l'ultima parte dello stesso Libro comprende molti importanti problemi, alla soluzione dei quali toglie però qualche valore la necessità di supporre che le coniche ivi considerate siano completamente tracciate.

I limiti che ci siamo prefissi non ci consentono di riferire altre delle molte proposizioni dello stesso tipo stabilite da Apollonio; ma ci corre l'obbligo di notare che (come egli afferma trionfalmente nella prefazione generale del suo « opus magnum ») esse permisero a lui di determinare completamente il « luogo di un punto tale che il prodotto delle rette condotte da esso sotto dati angoli a due rette date stia in un rapporto assegnato al rettangolo delle rette analoghe condotte dallo stesso punto ad altre due rette, oppure al quadrato della retta condotta ad una terza retta data, pure sotto angolo dato »; è questo il celebre « locus ad tres aut quatuor lineas » degli antichi geometri. La curva risolutrice è sempre di second'ordine; nel caso in cui le rette siano quattro, questa è circoscritta al quadrilatero semplice di cui queste sono lati; e siccome, invece del rapporto suindicato, è lecito dare un punto del luogo domandato, così, stando a quanto egli afferma, il grande geometra avrebbe, in ultima analisi, risoluto il fondamentale problema di « descrivere una conica determinata da cinque punti ». Per sventura nostra, Apollonio non scende al riguardo ad alcun particolare; è pertanto naturale domandarsi se la boria di cui era affetto non l'abbia indotto a promettere più di quanto fosse in grado di mantenere; ma tale irrispettoso sospetto non è più lecito dopo che un profondo conoscitore della geometria greca (lo Zeuthen) dimostrò che, con gli elementi da lui offerti, il problema delle tre o quattro rette si può agevolmente risolvere nell'ipotesi che due di esse siano fra loro parallele ed inoltre che si può ridurre il problema generale a tale caso speciale.

Fra le molte proposizioni metriche che s'incontrano nel III Libro notiamo buon numero che sono casi particolari della seguente: « Se da

un punto $M$ del piano di una conica si conducono due corde $A\,B$, $C\,D$ di direzioni fisse il rapporto $M\,A \, . \, M\,B \, : M\,C \, . \, M\,D$ avrà un valore indipendente dalla posizione di $M$ »; quantunque già nota ad Archimede, questa proposizione porta attualmente il nome di « teorema di Newton », forse per ricordarne l'estensione a tutte le curve algebriche che vedremo essere stata scoperta dall'immortale geometra inglese.

Un'altra rilevante categoria di teoremi stabiliti da Apollonio concerne (per usare un concetto moderno) le coniche come inviluppi di rette e conduce alla costruzione delle tangenti di una curva di secondo ordine che passano per un punto del suo piano. Nel caso della parabola la questione si riduce alla seguente: « date in un piano due rette con un punto sopra ciascuna, dati inoltre un rapporto ed un punto esterno alla curva, condurre per questo una retta che stacchi dalle date a partire dai due punti dati due segmenti aventi fra loro un rapporto eguale al dato »: è il problema della *Sezione di ragione*, intorno a cui Apollonio scrisse uno speciale opuscolo, di cui non esiste ora che una versione araba. Nel caso dell'iperbole, invece, la questione si riduce al problema analogo a quello testè enunciato, col solo divario che dei due segmenti, invece del rapporto, si conosce il rettangolo: è il problema della *Sezione di spazio*, a cui pure Apollonio dedicò uno scritto che ci è noto soltanto per quanto ne lasciò scritto Pappo (le informazioni da lui date sopra tale scritto sono tanto circostanziate che resero possibile una riuscita divinazione dell'opera perduta). Aggiungiamo che in condizione del tutto analoga ci troviamo riguardo ad un terzo lavoro dello stesso geometra dedicato alla *Sezione determinata*, cioè al problema di « determinare in una data retta un punto tale che, dei segmenti compresi fra esso ed alcuni punti della retta, il quadrato di uno, oppure il rettangolo di due, stia in un rapporto conosciuto col quadrato di un altro di quei segmenti, o col rettangolo di esso e di un segmento esterno, o col rettangolo di due di essi ».

Ritorniamo al III Libro del trattato apolloniano per segnalarvi la presenza dei fuochi delle coniche a centro, rilevando come di questi sono stabilite le più importanti proprietà, senza però designarli con un nome speciale; delle « direttrici » non è fatto alcun cenno (anzi in tale lacuna si trovò la più grave imperfezione dell'opera di Apollonio) e così dicasi del « fuoco della parabola »; se tale silenzio significhi — cosa poco probabile — che egli abbia ignorata la esistenza di questo importantissimo punto, non siamo in grado di dichiarare; una risposta al riguardo si troverebbe forse nell'opera *Sugli specchi ustori* che gli viene attribuita, ma di cui non fu trovata sinora alcuna traccia..

Non possiamo chiudere queste notizie intorno al III dei Libri sulle *Coniche* scritto dal geometra di Perga, senza segnalare, al termine di esso, un notevolissimo gruppo di proposizioni, dalle quali si apprende, in casi particolari, la generazione delle coniche mediante fasci proiettivi di raggi.

Maggiore unità possiede il Libro seguente, il quale ha per programma la ricerca del numero dei punti comuni a due coniche o ad una conica e ad un cerchio, nelle varie posizioni scambievoli in cui queste curve possono trovarsi; le proposizioni relative sono di evidenza intuitiva, ma,

per stabilirle rigorosamente, è necessario ricorrere a svariati artifici, molti dei quali consistenti in una riduzione all'assurdo; l'importanza dei risultati emerge dalle applicazioni che essi trovano nelle discussioni dei problemi di grado superiore al secondo.

50 - Col Libro V si penetra nella regione più elevata della teoria delle coniche; esso tratta principalmente delle rette massime e minime che si possono condurre ad una conica da un punto del suo piano; esso porge, quindi, i fondamenti della teoria delle normali alle curve di second'ordine. Apollonio mostra non soltanto che per un punto del piano di una conica passano in generale quattro normali della curva, ma anche l'esistenza di infiniti punti, attraversati ciascuno da due sole normali; il loro luogo geometrico è (per usare la nomenclatura moderna) l'« evoluta », curva della quale egli avverte le più spiccate prerogative, pur senza considerarla esplicitamente. I piedi delle normali che si possono condurre da un punto ad una conica a centro si ottengono segandola con un'iperbole, quella che oggi viene spesso designata col nome di « iperbole di Apollonio ». Ma, per la parabola, come linea ausiliare può usarsi una circonferenza, circostanza importante dal punto di vista grafico, la quale sfuggì ad Apollonio; egli fu, in conseguenza, ripreso da Pappo, che si mostrò pedantemente scandalizzato nel vedere un geometra ricorrere ad una curva di second'ordine per risolvere un problema che non esigeva se non il tracciamento di una circonferenza [1].

Nel Libro VI della grande opera che percorriamo sono determinate le condizioni di eguaglianza e di similitudine di due coniche o di due loro porzioni; è generale convincimento che ivi il pergeo siasi limitato a riordinare e completare una teoria già schizzata prima di lui.

Assai più originale è il Libro successivo, l'ultimo superstite; in esso sono fatte conoscere notevoli espressioni per certe funzioni di diametri e parametri delle coniche e ne sono poi determinati i valori massimi e minimi. Nell'impossibilità nella quale ci troviamo di riferire la moltitudine di verità esposte dall'immortale geometra, limitiamoci a segnalare

---

[1] Per l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'iperbole apolloniana relativa al punto $(\alpha, \beta)$ ha per equazione

$$a^2 (x - \alpha)\, y = b^2 (y - \beta)\, x.$$

Invece i piedi delle normali condotte dello stesso punto alla parabola

$$y^2 = 2\, p\, x$$

sono determinati dall'iperbole di equazione

$$x\, y + (p - \alpha)\, y - p\, \beta = 0\ ;$$

ma a questa si può sostituire l'altra

$$x^2 + y^2 - (p + a)\, x - \frac{\beta}{2}\, y = 0$$

ottenuta combinando le due precedenti e che rappresenta un cerchio; donde la giustificazione della critica di Pappo.

fra esse le proposizioni dette di consueto « teoremi di Apollonio », le quali, come è noto, affermano la costanza delle espressioni $a^2 \pm b^2$ rispettivamente nell'ellisse e nell'iperbole e la costanza del prodotto $ab \operatorname{sen} \omega$ nell'ellisse, supponendo che $a$, $b$ siano due qualunque semidiametri coniugati e $\omega$ l'angolo che essi formano.

Intorno all'VIII Libro — vittima innocente dei secoli di barbarie che seguirono la civiltà greca — sappiamo ( per dichiarazione stessa dell'autore) che conteneva la soluzione di alcuni problemi relativi alle funzioni considerate nel precedente. Preziose informazioni al riguardo sono offerte dai Lemmi lasciati da Pappo per agevolare l'intelligenza dell'opera originale; esse, anzi, sono così circostanziate che permisero al grande astronomo Halley (di cui ci occuperemo più avanti) una divinazione di quel libro che passa per una delle meglio riuscite opere del genere, ma che certamente non basta a risarcire della perdita deploratissima della parte più elevata della grande opera apolloniana.

51 - Per quanto, in conseguenza, questa ci si presenti monca, per quanto numerose e profonde siano le modificazioni deturpatrici da essa sofferte, specialmente per mano degli Arabi, pure essa si presenta come lavoro degno di ammirazione sincera e di studio profondo da parte dei moderni, se non altro perchè, paragonandone il contenuto con quanto insegnano i trattati moderni sul medesimo argomento, non si tarda a riconoscere come la differenza sia ben piccola. Per converso, riguardo ai metodi di dimostrazione, il distacco dagli odierni trattati di geometria sintetica superiore si palesa assai profondo, perchè (fatto che, per quanto strano, è però pienamente conforme al vero) esso si accosta ben più alle recenti esposizioni della teoria delle curve di second'ordine mediante coordinate cartesiane. Infatti, non soltanto le proprietà con cui Apollonio caratterizza le tre celebri curve si traducono, come vedemmo, nelle loro equazioni canoniche nel metodo di Descartes, ma molti dei ragionamenti da lui usati, tradotti nel nostro linguaggio algebrico, si palesano equivalenti in fondo ad eliminazioni, risoluzione di equazioni e trasformazioni di coordinate. Perciò al grande geometra greco risale il merito di avere scoperta di quella che oggi si considera essere più feconda procedura per studiare le sezioni del cono e di essere arrivato, applicandola, a tutte le più belle proprietà di tali curve. L'ammirazione che egli ha destata per venti secoli è, pertanto, ben giustificata; e che tale sentimento non siasi affievolito e spento presso i moderni è provato dal fatto che, quando il secolo scorso assistette attonito alla rinascita della geometria pura per opera di Steiner, per trovare un personaggio storico che potesse reggere al paragone di questo, non si trovò di meglio che equipararlo a colui che diede fama imperitura alla città di Perga e segnò l'apogeo della geometria greca.

## BIBLIOGRAFIA

### Euclide

*Euclidis Opera omnia, ediderunt* I. L. Heiberg et H. Menge, Lipsiae Teubner. Vol. I, *Elem.*, l. I-IV (1883); vol. II, *Elem.*, l. V-IX (1884); vol. III, *Elem.*, l. X (1886); vol. IV, *Elem.*, l. XI-XIII (1885); vol. V, l. XIV-XV, *Scholia* (1888); vol. VI, *Data* (1896); vol. VII, *Optica et Catoptrica* (1895); vol. VIII, *Phaenomena, Scripta musica, Fragmenta* (1916).

M. Chasles, *Les trois livres des porismes d'Euclide rétablis pour la première fois* (Paris, 1860).

R. C. Archibald, *Euclid's Book on Division of Figures, with a restoration based on Woepcke's Text and on the Practica geometriae of Leonardo Pisano* (Cambridge, 1915).

### Archimede

*Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii, ed.* Heiberg, 2ª ed., Lipsiae, vol. I (1910); II (1913); III (1915).

### Apollonio

*Apollonii Pergaei Conicorum Lib. VIII, ed* Halley, Ononiae, 1710.

*Apollonii Pergaei quae Graece extant cum Commentariis antiquis, ed.* Heiberg, Lipsiae, vol. I (1891); vol. II (1893).

## CAPITOLO IV

# L'AUTUNNO DELLA GEOMETRIA GRECA

52 · Al modo istesso che la filosofia greca, nell'epoca in cui splendette nel modo più abbagliante, procedette con passo sicuro sotto la guida oculata e sapiente della triade costituita da Socrate, Platone e Aristotele, così, nel periodo aureo della geometria greca, di cui testè ci occupammo, campeggiano quali giganti i tre sommi che portano i nomi di Euclide, Archimede ed Apollonio. Come vedemmo, per opera del primo di questi sommi l'umanità giunse in possesso di una raccolta ordinata nel modo più soddisfacente delle proprietà essenziali dell'estensione figurata, la quale, per lungo volgere di secoli, fu giudicata bussola o faro per tutti coloro che si avventurarono nel mare periglioso della ricerca geometrica. Il secondo — che, nella sua vasta mente seppe abbracciare tutte le teorie di pertinenza delle matematiche pure ed applicate del suo tempo — oltre ad avere creato la statica dei solidi e dei liquidi, si palesò di tanta meravigliosa fecondità nell'escogitare geniali espedienti per risolvere, senza fare esplicito appello all'infinito, una plejade d'importantissime questioni in cui questo concetto appare oggi quale strumento inevitabile, che lo studio delle sue opere riempie ancor oggi di stupore ed induce a domandarsi se, come la scrittura indebolì nell'uomo la memoria, l'invenzione e l'uso continuo di metodi generali, vanto della scienza moderna, non abbia per caso tolto vigore alle facoltà inventive che natura ci hà largite. Meno spontanea sorge, forse, l'ammirazione in chi oggi mediti sugli scritti superstiti di Apollonio; perchè noi siamo talmente abituati a servirci di procedure rapide e rigorosamente uniformi che a stento riusciamo a misurare con precisione quale ingente sforzo fosse necessario per giungere al vero senza invocare l'aiuto di esse: tuttavia, constatando come i moderni ben poco abbiano saputo aggiungere ai risultati conseguiti dagli antichi nella teoria delle coniche, ci rendiamo pienamente ragione del culto che da venti secoli viene tributato al grande geometra di Perga.

Ora, la contemplazione di un campo che, per merito di queste menti sovrane, presentavasi così ubertoso, doveva naturalmente far nascere in molti l'aspirazione di accrescerne l'estensione od almeno di ripercorrerlo nella speranza di raccogliere quanto i pionieri avevano sdegnato o trascurato di raccogliere. Sgraziatamente di molti fra coloro (e furono certamente numerosi) che seguirono tale lodevole impulso si è cancellato

ogni ricordo [1]; ma di quelli le cui orme sono ancora visibili dobbiamo ora dire qualche parola, considerando tanto i contemporanei che furono *discepoli* o come tali si presentano, quanto i posteri, che hanno l'aspetto di *epigoni,* pallidi e sfiaccolati.

## Eratostene

53 - Fra questi geometri di second'ordine merita il primo posto Eratostene da Cirene, col quale Archimede strinse così saldi rapporti d'amicizia durante il suo giovanile soggiorno in Alessandria che, ritornato in patria, diresse a lui uno dei più notevoli fra i suoi lavori (alludiamo a quello di natura metodologica (v. n. 45), ed un curiosissimo problema aritmentico, di cui parleremo nel seguente Capitolo.

Eratostene nacque 276 o 275 anni a. C.; in patria fu educato dal grammatico Lisania, in Alessandria da Callimaco, a cui era allora affidata la custodia della grande biblioteca gloria dei Tolomei, ad Atene da altri che lo resero famigliare con le idee di Platone. Intorno al 235 fu chiamato da Tolomeo Evergete a succedere a Callimaco; morì nel 194, vuolsi di propria mano, per la disperazione di avere perduta la vista.

Da natura dotato di ingegno più versatile che profondo, egli conquistò fama in vari rami dello scibile. Così la determinazione da lui fatta del grado del meridiano terrestre [2] gli fece conferire la dignità di primo geodeta che ricordi la storia; da ciò la ragione per cui, nel XVII secolo, un eminente investigatore olandese, W. Snellio, diede il titolo di *Eratosthenes Batavus* all'opera con cui inaugurò la letteratura geodetica. Inoltre la parte decisiva da lui presa negli studi che portarono alla riforma del calendario attestano la profondità ed ampiezza delle sue cognizioni astronomiche. Finalmente del suo interesse per la geometria fa fede un'importante lettera da lui diretta al terzo dei Tolomei, per far conoscere le origini favolose del problema della duplicazione del cubo e le soluzioni che ne erano state sino allora proposte; dalla stessa si apprende che a tali soluzioni egli ne aggiunse una del suo, avente per fondamento dottrinale la teoria dei triangoli simili e per ausiliare uno strumento (da lui denominato *Mesolabio*) composto di piastrelle rettangolari mobili.

Quale fosse lo scopo, il piano e l'estensione di un'opera sulle *Proporzioni* che Pappo gli attribuisce, ci è ignoto; è a premusersi che ivi, fra l'altro, fosse esposta la proposizione « se $a, b, c,$ sono tre numeri in progressione geometrica, lo stesso accadrà dei tre numeri $a, a + b, a + b + c$ » che vuolsi da lui scoperta. Ignoto ci è pure per quale tramite egli abbia comunicato il metodo — designato tuttora col nome di *Staccio* o *Crivello di Eratostene* — per costruire una tavola di numeri

---

[1] È notevole (e deplorevole) il fatto che, mentre il periodo preparatorio alla ricerca geometrica ebbe uno storico in Eudemo da Rodi, i matematici dell'epoca seguente non trovarono (almeno per quanto ci consta) alcuno che ne eternasse le gesta.

[2] Egli lo valutò a circa 120 Km, mentre la sua lunghezza è approssimativamente 110.

primi, che rese popolare il suo nome. Si tratta di un procedimento di ingenua semplicità, il quale consiste nel cancellare dalla serie dei numeri dispari prima tutti i multipli di 3, poi quelli di 5, poi quelli di 7, ecc.; i numeri superstiti da questa strage sono evidentemente divisibili soltanto per sè stessi e per l'unità. Questa procedura costituisce un complemento indispensabile al teorema dato da Euclide (v. n. 39) che afferma essere illimitata la serie dei numeri primi; ad essa, in fondo, ricorsero tutti i numerosi posteriori costruttori di tavole di numeri primi; ad essa è presumibile si seguiterà a ricorrere sino a che non si riesca a scoprire una quantità caratteristica dei numeri dell'indicata specie.

## Ipsicle

54 - Ai tredici Libri degli *Elementi* di Euclide gli antichi editori ne fecero seguire due altri, i quali svolgono ulteriormente la teoria dei poliedri regolari convessi, ma che non furono scritti dal sommo Alessandrino.

Quello designato come XIV Libro degli *Elementi* è opera di un geometra chiamato Ipsicle, fiorito in Alessandria fra il 150 ed il 120 a. C. e ricordato per altri lavori di pertinenza dell'aritmentica e dell'astronomia. Posteriore di poco ad Euclide, ne imitò così fedelmente il procedere da rievocare il ricordo dei fenomeni di mimetismo così comuni negli strati inferiori del mondo animale; posteriore anche ad Aristeo ed Apollonio, ne cita, ne sfrutta, ne completa alcuni lavori e così arriva ad un gruppo di eleganti relazioni che intercedono fra varii elementi (area, volume, lunghezza dello spigolo, raggio del cerchio circoscritto ad una faccia) di un poliedro regolare convesso, le quali hanno diritto ad un posto in ogni esposizione completa delle proprietà di cui godono tali interessanti figure geometriche.

Invece il cosidetto XV Libro degli *Elementi* consta di tre parti ben distinte e che tutto fa credere scritte da persone differenti. Nella prima sono indicate alcune semplici considerazioni intese a derivare un poliedro regolare da un altro; vi si nota, ad es., che i centri delle faccie di un poliedro regolare sono vertici di un'altro. Nella seconda il numero degli spigoli e dei vertici di un poliedro regolare viene espresso, col mezzo di un'unica argomentazione, in funzione del numero delle facce, problema semplice ma certamente non spregevole. E nella terza s'insegna a determinare graficamente l'ampiezza del diedro di un poliedro della detta specie. Se questo Libro non è molto inferiore al precedente per gli scopi a cui mira, lo è fermamente per lo stile in cui è scritto e che si trova agli antipodi da quello che Euclide insegnò ad Ipsicle. Tale stile contrassegna un'opera di decadenza; ed infatti i competenti in materia attribuiscono l'ultima Sezione di questo scritto a Damascio di Damasco, che fiorì intorno al 510 dell'E. v., oppure ad un anonimo discepolo di Isidoro da Mileto, celebre come architetto della Chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli e noto anche come editore e commentatore di opere classiche.

## Nicomede, Diocle, Perseo

55 - Mentre gli scritti testè menzionati si aggirano nelle regioni più modeste della scienza dell'estensione, dobbiamo ora tener parola di tre matematici che, arricchendo l'elenco delle linee piane speciali, prepararono da lungi uno dei più importanti capitoli della geometria, cioè della teoria generale delle curve.

Primo fra essi è Nicomede, che si ammette essere vissuto nel periodo 250-150 a. C. e che raggiunse permanente celebrità per avere concepita la notevole curva (algebrica, di quarto ordine) detta ancor oggi *concoide*. Essa è descritta (Fig. 11) dall'estremo libero di un segmento di

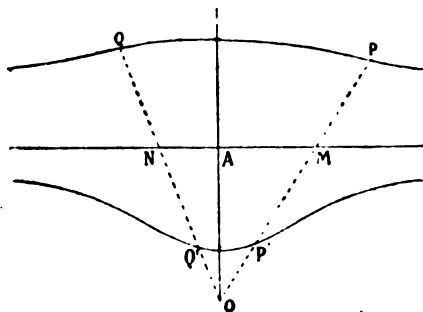



Fig. 11.

lunghezza costante, il quale appartiene ad una retta passante sempre per un punto fisso (detto *polo*), e di cui l'altro estremo percorre una retta fissa (detta *base*). Se quel segmento cade sempre nella regione di piano limitata dalla base e nella quale non è situato il polo, la curva generata ha una forma simile all'apertura di una conchiglia, il che giustifica la scelta del suo nome; ma se, invece, esso si trova sempre nell'altra regione, la curva presenta un nodo, una cuspide od un punto isolato secondochè la lunghezza del segmento mobile è superiore, eguale od inferiore alla distanza fra il polo e la base. Nicomede ha *certamente* considerata la prima di queste quattro curve e *probabilmente* anche le altre; contrariamente a quanto oggi si pratica, egli, però, non associava regolarmente alla prima una delle altre tre per formarne un tutto. La concoide, superiore od inferiore, si può facilmente descrivere con uno strumento semplicissimo e che è agevole immaginare; a concepirlo Nicomede fu probabilmente indotto partendo dalla operazione di « inserzione », che vedemmo adoperata con scopi differenti da Archimede e da Apollonio e che doveva essere di continuo usata ai suoi tempi.

L'importanza della concoide agli occhi degli antichi riposa sulla prerogativa di condurre a convenientissime soluzioni, non soltanto del problema della « duplicazione del cubo », ma anche di quello della « trisezione dell'angolo », terza delle questioni che per tanti secoli furono tormento dei matematici e potente stimolo alla ricerca geometrica.

Un'altra curva superiore (algebrica, di terzo ordine) fu concepita

circa nel medesimo tempo da Diocle, matematico al quale è inoltre attribuita una soluzione mediante coniche del problema archimedeo (v. numero 43) di dividere con un piano una sfera in due parti i cui volumi abbiano un rapporto assegnato. La nuova curva si chiama *cissoide*, per una certa somiglianza di forma con la foglia di edera, quando, come facevano gli antichi, se ne considerino soltanto i rami interni al cerchio che serve a definirli (Fig. 12); essa è definita come segue: Data una circonferenza, un suo punto $O$ e la tangente nel punto $A$ diametralmente opposto a $O$, si conduce per $O$ una trasversale arbitraria ad incontrare nuovamente la circonferenza in $M$ e quella tangente in $N$ e si porta il segmento $OP$ eguale e dello stesso senso di $MN$; il luogo geometrico delle posizioni occupate dal punto $P$ al variare di quella trasversale attorno ad $O$, è una cissoide. Come mostrò Diocle, essa guida ad una nuova soluzione del problema di Delo [1].

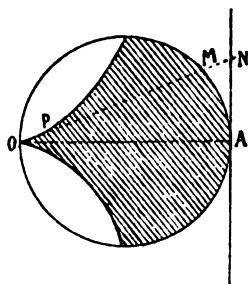



Fig. 12.

56 - Mentre la concoide e la cissoide ripetono la loro origine da due dei celebri problemi della geometria elementare, un'altra notevole categoria di linee fu concepita estendendo il procedimento mediante il quale le coniche furono ottenute « nel solido ». Ora — all'infuori dei coni, dei cilindri e delle sfere — gli antichi considerarono anche la superficie (anulare) generata dalla completa rotazione di un cerchio attorno ad una retta data nel suo piano e le imposero il nome di *spira* (mentre noi usiamo quello di *toro* suggerito dagli architetti). In un caso particolare tale superficie s'incontra, come vedemmo a suo tempo (n. 28), nella soluzione ideata da Archita per il problema di Delo e diede argomento ad un'opera, oggi perduta, di un tal Dionisidoro (matematico imperfettamente noto, che è forse da identificarsi a colui al quale Eutocio attribuisce una soluzione mediante sezioni coniche del succitato problema archimedeo), nella quale era, fra l'altro, insegnato che « il volume della spira è espresso dal prodotto della superficie del cerchio generatore per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro, nel corso del supposto movimento ». A coloro ai quali erano famigliari le considerazioni a cui debbono la vita le sezioni coniche, doveva affacciarsi spontaneamente l'idea di segare una siffatta superficie mediante piani, onde pervenire a nuove figure; siccome un piano passante per l'asse di una spira o ad esso normale dà per sezioni soltanto dei cerchi, così, prima di avventurarsi a considerare le sezioni prodotte da piani del tutto arbitrari, si presentava naturalmente la considerazione di quelle nascenti mediante piani paralleli all'asse. Tali curve possiedono evidentemente due assi di simmetria e furono investigate per la prima volta da un certo Perseo, geometra di epoca ignota, ma certamente anteriore al commentatore Proclo che ne serbò memoria.

[1] Uno scritto in versione araba di Diocle sugli specchi ustori esiste nella Biblioteca dell'Escurial (S. Perez, *Las matematicas en la Biblioteca de l'Escurial.* (Madrid, 1937).

Tale ritrovato è ricordato in due versi, unici superstiti dello studio da lui consacrato alle *linee spiriche*. Viene ancora assicurato che di queste curve egli determinò il « sintomo », cioè la proprietà caratteristica che, nell'antica geometria, disimpegnava un ufficio analogo a quello affidato all'equazione di una linea nel sistema cartesiano; sappiamo, di più, che egli avvertì le varie forme che le nuove curve presentano a seconda della distanza dall'asse del centro del cerchio che genera la spira o del piano in cui si trova la spirica. Tali frammentarie notizie fanno vivamente lamentare la perdita di un lavoro di cui è impossibile revocare in dubbio la notevole importanza.

## Zenodoro

57 - Mentre Nicomede, Diocle e Perseo, seguendo le orme gloriose impresse da Apollonio ed Archimede, adunarono materiali preziosi per la futura teoria delle curve, Zenodoro, probabile contemporaneo del geometra di Perga, di cui dobbiamo ora parlare, scrisse le prime linee di un capitolo della geometria, che soltanto durante lo scorso secolo raggiunse uno stato di soddisfacente perfezione, cioè la *Teoria degli isoperimetri*. Il breve libro che egli ci tramandò sull'argomento si direbbe dovuto dalla lodevole aspirazione di sradicare l'erronea opinione (che è visibile persino in un passo delle storie scritte da Tucidide nel v sec. a. C.), che per calcolare un'area piana basti misurarne il contorno. Per conseguire lo scopo il mezzo migliore che si offre è quello di paragonare il contenuto di due superficie isoperimetre; ed infatti Zenodoro dimostra anzitutto che « di due poligoni regolari isoperimetri ha area maggiore quello che ha un maggior numero di lati »; ne deduce che « se un poligono regolare ed un cerchio sono isoperimetri, il secondo ha un'area maggiore del primo »; e poichè il greco geometra non ignora che « un poligono regolare ha un area maggiore di un poligono irregolare isoperimetro », arriva a concludere il *teorema fondamentale*: « il circolo è di area massima fra le superficie piane di eguale contorno ».

Nello spazio ha luogo una proposizione analoga e per stabilirla Zenodoro istituisce qualche ricerca preliminare, ma non riesce a conseguire l'intento: il che non stupirà chi ricordi che esso non fu pienamente raggiunto nemmeno da Steiner, ma soltanto da matematici posteriori, famigliari con i concetti ed i metodi dell'analisi moderna. L'opuscolo di cui abbiamo testè parlato non è, quindi, una di quelle produzioni privilegiate in cui il desiderio s'acqueta; non è un frutto ma un seme, e come tale è dovere dello storico di registrarlo e valutarlo.

## Pappo

58 - La miglior parte delle notizie che possediamo intorno alle opere dei matematici greci distrutte dall'azione del tempo o dalla mano di barbari è somministrata da una estesa composizione, dovuta ad un geometra d'Alessandria, che visse e probabilmente insegnò durante

il IV secolo dell'E. v. [1]: Pappo. La preziosa compilazione che di lui ci resta (unico superstite dei suoi scritti geometrici, perchè i suoi commenti ai *Dati* euclidei non esistono più) ha un carattere suo proprio. Non è un'enciclopedia nel senso ordinario della parola, perchè presuppone che a disposizione del lettore si trovino le opere originali; non una raccolta di semplici chiose, perchè spesso Pappo parla in nome proprio, correggendo, criticando, generalizzando le proposizioni che riferisce; e, benchè sia una inesauribile miniera di particolari storici e bibliografici, non è certamente una storia o una bibliografia. Si tratta, secondo il nostro parere, di un riassunto di vari corsi di lezioni fatte per diffondere la conoscenza ed agevolare l'intelligenza dei capolavori del genio matematico greco. Lo studio della *Collezione matematica* (tale è il titolo dell'opera in questione) permette di perfezionare in molti punti importanti il quadro dell'opera matematica dei più antichi geometri greci, onde è indispensabile che di essa noi facciamo una completa, per quanto rapida, analisi.

59 - Degli otto Libri costituenti in origine la *Collezione*, il I non venne peranco rintracciato, e del II non si conosce che un frammento, di cui faremo cenno parlando dell'aritmetica dei Greci (Cap. VI).

Il III si apre con un'interessante Prefazione diretta ad un individuo di nome Pandrosio, di cui è persino dubbio il sesso, il quale o la quale si trovava alla testa di una scuola, ma era di così mediocre levatura che i suoi scolari erravano, non soltanto nel risolvere, ma persino nell'enunciare i problemi; ora per illuminare maestro e discepoli, Pappo — adottando un modo di procedere che oggi direbbesi almeno strano — diresse al collega quanto era, a suo credere, necessario e sufficiente per far luce sull'importante argomento.

Egli comincia con l'esporre un metodo per risolvere il problema di Delo, scoperto da un certo Jerio, non esatto, ma che, applicato ripetutamente, permetterebbe di calcolare una radice cubica con l'approssimazione che si desidera. All'esame critico di questo procedimento Pappo fa seguire la distinzione, ideata dagli antichi, dei problemi geometrici in « piani », « solidi » e « lineari » secondo che si risolvono con rette e circoli, con sezioni coniche o con altre linee. Alla seconda di tali categorie appartiene il problema di Delo, ed il nostro autore coglie l'occasione che così gli si offre per esporre le soluzioni che se ne conoscevano ai suoi giorni.

Esaurito così quanto bastava a chiarire le idee di Pandrosio e dei suoi discepoli, Pappo si volge ad altro tema, cioè alla Teoria delle proporzioni, ed insegna come si possano ottenere in un cerchio le dieci allora considerate; esse nascono eguagliando un rapporto del tipo $\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}$ successivamente ad uno dei seguenti: $\frac{\delta}{\delta}$, $\frac{\delta}{\varepsilon}$, $\frac{\delta}{\zeta}$, $\frac{\zeta}{\delta}$, $\frac{\zeta}{\varepsilon}$ oppure uno del tipo $\frac{\delta-\zeta}{\delta-\varepsilon}$ ad uno dei tre $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, $\frac{\delta}{\varepsilon}$, $\frac{\delta}{\zeta}$,

[1] Un suo commento all'*Almagesto* di Tolomeo fu scritto poco dopo il 320.

o finalmente ponendo $\frac{\delta - \zeta}{\varepsilon - \zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ : sono le proporzioni dette ordinatamente aritmetica, geometrica, armonica, contrarmonica, quinta, sesta, settima, ottava, nona e decima.

Nella terza Sezione dello stesso libro III, l'autore dà un riassunto e un commento di un'opera, dal titolo *Paradossi*, di un certo Ericino; essa contiene una serie di proposizioni relative al paragone del perimetro di un triangolo o di un poligono col contorno di una linea poligonale interna, la quale sembra avere avuto per punto di partenza la 21ª Prop. del I Libro degli *Elementi* di Euclide.

Nell'ultima Sezione del III Libro della *Collezione* il nostro autore si occupa della teoria dei poliedri regolari, giovandosi dell'opera di Aristeo, alla quale non manca di arrecare qualche complemento; vale la pena di notare che, a differenza di quanto praticò Euclide, Pappo costruì quelle notevoli figure coll'inscriverle in una sfera: in tal modo la questione veniva ridotta a quella di dividere la data superficie in poligoni sferici regolari fra loro congruenti.

60 - Il IV Libro, benchè diviso in varie Sezioni che sembrano fra loro estranee, pure possiede una fondamentale unità, dal momento che contiene una esposizione delle proprietà di cui godono le curve risolutrici dei tre problemi classici dell'antica geometria; l'assenza di Prefazione offerse un valido argomento a favore della tesi che, in origine, il IV Libro della *Collezione* fosse unito al III, della cui terza Sezione esso ha l'aspetto di un naturale proseguimento.

Nella prima Parte di detto Libro va notata una generalizzazione del teorema di Pitagora a triangoli obliquangoli, non soltanto per la sua importanza dal punto di vista geometrico, ma anche perchè si può dimostrarne l'equivalenza colla proposizione nota nella meccanica sotto il nome di « teorema di Varignon ». Seguono alcune relazioni, di ignota provenienza, fra i raggi e gli elementi successivi di una serie di circonferenze, ognuna tangente alla precedente e tutte tangenti a due circonferenze tangenti fra loro internamente, nell'ipotesi che la prima abbia il proprio centro sulla retta che unisce i centri delle date; tali relazioni vennero completate un secolo fa da Steiner e diedero poi origine ad uno dei più importanti « teoremi di chiusura » che si conoscano.

La seconda Sezione del Libro IV della *Collezione* è consacrata alla spirale d'Archimede; riguardo alla quadratura di essa, il nostro commentatore aggiunge eleganti proposizioni a quelle insegnate dal siracusano e che non sfigurano al paragone di queste. Invece la Sezione successiva è consacrata alla quadratrice di Ippia; Pappo, oltre alla genesi primitiva (v. n. 30), ne espone due originalissime costruzioni, che offrono prove impressionanti di quanta utilità possano riuscire le considerazioni stereometriche per lo studio di figure piane. Scendendo a più precisi particolari diremo che egli, anzitutto, dimostra, che « si ottiene una quadratrice segando la superficie di una vite a filetto quadrato con un piano passante per una generatrice e poi proiettando ortogonalmente la curva ottenuta sopra un piano normale all'asse della

superficie ». Ancor più riposta (epperò più notevole) è una seconda costruzione dello stesso tipo, la quale si basa sulla considerazione di un cilindro retto avente per base una spirale d'Archimede e di un cono retto avente per asse la retta condotta dal polo perpendicolare al piano di quella curva; ora se da tutti i punti della linea in cui s'intersecano queste due superficie si abbassano le perpendicolari all'asse della seconda si ottiene una superficie rigata, la quale è segata da un piano passante per una sua generatrice secondo una curva, che si proietta ortogonalmente in una quadratrice sul piano dell'anzidetta spirale.

Queste mirabili considerazioni stereometriche guidarono il matematico di cui ci occupiamo a considerare la curva analoga sulla sfera della spirale d'Archimede; per descriverla si supponga che, mentre un cerchio massimo ruota di moto uniforme attorno ad un suo diametro, un suo punto, partendo da un estremo del detto diametro, lo percorra pure equabilmente; la traiettoria di questo moto composto è la nuova spirale ideata da Pappo; l'importanza della quale è solidamente stabilita dal dotto commentatore dimostrando un elegantissimo teorema di quadratura a cui essa dà luogo nel caso particolare in cui i due ipotetici movimenti uniformi sono regolati in modo che, quando il cerchio massimo ha descritto un intero giro, il punto mobile abbia coperto un solo quadrante ([1]).

L'utima Sezione del Libro di cui ragioniamo ha per argomento la divisione di un angolo in parti aventi fra di loro rapporti prestabiliti (in particolare la divisione in tre parti eguali), e Pappo mostra in qual modo si possa risolverlo, ricorrendo alla quadratrice di Ippia oppure alla spirale d'Archimede; è facile persuadersi che tale prerogativa di dette curve è conseguenza del fatto che esse abilitano a ridurre l'enunciato problema all'analogo relativo ad un segmento rettilineo.

61 - Maggiore unità dei precedenti possiede il V Libro della *Collezione*, giacchè esso è completamente consacrato alla Teoria degli isoperimetri. È un rimaneggiamento dell'opuscolo di Zenodoro (n. 57); esso si apre con una brillante prefazione, ove, prendendo le mosse del fatto che le api dànno alle celle destinate alla conservazione del miele la forma poligonale più utile (quella, cioè, di superficie massima fra quelle di eguale contenuto) il geometra d'Alessandria istituisce un parallelo fra l'intelligenza degli uomini e quella degli animali. Stabilito poi il teorema fondamentale della teoria degli isoperimetri per figure piane, Pappo s'industria di estenderlo allo spazio; tale eccelso scopo non viene raggiunto, ma bisogna felicitarsi che egli si sia, almeno, proposto di raggiungerlo, perchè così ci ha somministrate le uniche notizie che ci siano pervenute sino ad oggi intorno ai poliedri semi-regolari di Archimede (v. n. 51).

Sul VI Libro della *Collezione* non spenderemo che poche parole, perchè esso risulta da osservazioni sparse, intorno ad opere, di cui ci

([1]) Tolta questa condizione restrittiva la curva di Pappo si identifica con le curve ideate assai più tardi da Guido Grandi e da lui dette clelie: cfr. l'opuscolo *Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes* (Flor., 1728).

occuperemo in seguito, concernenti l'Astronomia sferica dei Greci; tale brevità da parte nostra è tanto più giustificata giacchè ivi Pappo non trovò campo di manifestare notevole originalità.

Al contrario possiede agli occhi nostri valore straordinario il Libro seguente, il quale, somministrando notizie sopra un considerevole numero di opere importanti, oggi perdute, dovute ai sommi geometri dell'antichità, venne da noi già largamente sfruttato e lo sarà sempre dagli storici della matematica greca. Esso s'inizia con una lettera-prefazione indirizzata da Pappo al proprio figlio per presentargli un catalogo illustrato delle opere costituenti quella « Collezione di opere analitiche » che, come dicemmo, sono destinate a coloro che, avendo esauriti gli elementi della geometria, aspirano ad addestrarsi nell'arte di risolvere i problemi. Tali opere sono: i *Dati*, i *Porismi* ed i *Luoghi superficiali* di Euclide; la *Sezione di ragione*, la *Sezione di spazio* e la *Sezione determinata*, i *Contatti*, le *Inserzioni* e le *Coniche* di Apollonio; finalmente le *Proporzioni* di Eratostene. Per ognuno di questi scritti Pappo indica lo scopo ed il numero delle proposizioni costituenti, aggiungendo del suo un grande numero di Lemmi giovevoli alla intelligenza del testo. Alcuni completano in parecchi particolari l'antica « algebra geometrica », onde non hanno ormai più che un interesse storico; ma in altri si trovano alcune verità che, in processo di tempo, ottennero un posto stabile nella geometria, però con altro marchio di fabbrica: tali ad es. le proposizioni dette oggi « teorema di Guldin » e « teorema di Stewart » e quelle che esprimono l'invarianza per proiezione del birapporto di quattro punti di una punteggiata o di quattro raggi di un fascio.

L'ultimo Libro della *Collezione* concerne la Meccanica secondo i concetti del tempo antico: Teoria dei centri di gravità e Macchine semplici. Siccome le figure considerate sono idealizzazioni prettamente matematiche dei solidi che s'incontrano in natura, così la trattazione è condotta in base ai più rigorosi criteri euclidei; anzi, alcuni dei risultati esposti, essendo propriamente geometrici nella sostanza e nella forma, va sconsigliato ai matematici puri di considerare il Libro ultimo della *Collezione* come estraneo alle loro abituali occupazioni.

Da questa esposizione dell'ultima grande produzione relitta dall'Ellade antica, per quanto forzatamente rapida ed incompleta, risulta quanto ricco, vario ed importante ne sia il contenuto; ma se chi ci segue, incoraggiato e sospinto dalle nostre parole di schietto elogio, ricorrerà all'originale, ne trarrà non soltanto preziosi complementi a quanto dicemmo sull'evoluzione della geometria greca, ma vi apprenderà una folla di gustosi ed istruttivi particolari intorno ai procedimenti usati dagli antichi per scoprire il vero nel campo matematico ed ai ritrovati che essi fecero col loro aiuto.

Dopo ciò saremmo autorizzati ad abbandonare l'eminente commentatore alessandrino ove di recente non ci fosse pervenuto per tramite degli Arabi un altro suo lavoro di natura analoga alla *Collezione matematica*. È un commento al X Libro degli *Elementi* di Euclide, il quale sappiamo riferirsi agli irrazionali provenienti dalla risoluzione delle equazioni biquadratiche. Si sperava che da esso potessero trarsi nuovi materiali per ricostruire la storia delle quantità irrazionali in generale;

ma invece esso non porge che qualche conferma intorno a quanto già sapevasi riguardo al contributo dato da Teeteto alla teoria esposta da Euclide in quella parte della sua grande opera. D'altra parte va osservato che, mentre nella *Collezione* Pappo non ha fatta, neppure larvatamente, alcuna professione di fede filosofica, nel lavoro in esame si mostra aderente alla setta costituita dai Neo-Platonici; e mentre in quella si servì di uno stile conciso, in questo è verboso e mediocremente istruttivo. Quantunque ciò possa forse attribuirsi al genere del tèma svolto, era nostro dovere rilevarlo, per concludere che le nuove pagine di recente aggiunte alle opere complete di Pappo di poco o nulla accrescono la fama di cui egli sin da prima meritatamente godeva.

## Sereno

62 - Esistono tuttora nella letteratura matematica antica due opuscoli miracolosamente sfuggiti alle insidie che, nei secoli tenebrosi, minacciarono i manoscritti; l'autore di essi — Sereno — non è citato da Pappo, nè da alcuno dei commentatori che conosciamo; si ritenne per lungo volgere di secoli che la sua patria fosse Antissa, città dell'isola di Lesbo, rasa al suolo dai Romani 167 anni a. C.; ma un più attento esame di manoscritti degni di fede portò a concludere esser egli oriundo della città egiziana di Antenoeia o Antinouopoli, di cui l'imperatore Adriano pose le fondamenta nell'anno 122 dell'E. v.; tale conclusione autorizza ad ammettere che Sereno sia stato posteriore a Pappo e spiega perchè egli non abbia potuto venire menzionato da questo.

Il primo dei citati opuscoli può riguardarsi come un complemento delle *Coniche* d'Apollonio, mirando a porre in luce l'identità delle sezioni piane dei cilindri di rotazione con le linee dal pergeo denominate ellissi. Tale scopo viene pienamente raggiunto col mezzo di argomentazioni semplici e rigorose, concepite e redatte secondo le norme fissate dai geometri del periodo aureo della geometria greca; ad esse cresce pregio il fatto che le proposizioni a cui conducono porgono i mezzi per risolvere alcuni interessanti problemi relativi a coni e cilindri passanti per una data ellisse.

Nell'altro dei detti scritti l'autore si aggira in un campo più elementare, giacchè esso può considerarsi come un capitolo della teoria geometrica dei massimi e minimi. Esso, infatti, è costituito di proposizioni che insegnano quale sia la grandezza relativa dei triangoli determinati in un cono circolare retto (naturalmente limitato dal vertice e dalla base) da piani passanti per il vertice. Per dichiarazione stessa di Sereno è questo un soggetto che nessuno prima di lui aveva studiato, ed è giustizia riconoscere che egli lo ha trattato in modo felice ed esauriente; limitiamoci a segnalare la scoperta da lui fatta della diversità di comportamento, di fronte alle dette questioni, dei coni acutangoli e dei coni ottusangoli. Nelle ultime pagine del suo lavoro Sereno espone un buon numero di proposizioni sopra le superficie ed i volumi di coni (sottinteso « circolari retti ») fra loro diversi, le quali offrono limitato interesse essendo facili conseguenze delle note espressioni per la superficie e il volume di uno di quei solidi.

## I commentatori

63 - Con Sereno si chiude, per mancanza di dati, la serie degli epigoni dei sommi geometri della Grecia, non caduti in completa dimenticanza. Ma per esaurire l'elenco degli scrittori ai quali arrise questa singolare fortuna dobbiamo spendere qualche parola intorno ai commentatori, che si moltiplicarono dopo che la Grecia, con l'indipendenza, aveva perduto il genio inventivo, almeno nel campo delle scienze esatte (chè, per altre discipline, i Greci soggetti furono maestri dei Romani dominatori). Alcuni sono modesti chiosatori, nel senso più umile della parola, mentre altri infiorarono le opere classiche con considerazioni storiche, filosofiche e metodologiche intese a tener vivo il culto pei sommi, a destare il gusto per le ricerche matematiche e, possibilmente, ad aumentare la forza per compierne.

Accorderemo il primo posto nella nuova categoria di scrittori che dobbiamo considerare, a Gemino, nato a Rodi probabilmente verso il 70 a. C., il quale, a quanto viene riferito, scrisse un'opera di lunga lena e parecchi brevi scritti intorno alla filosofia delle matematiche; deve egli venire identificato col Gemino autore di una mediocre opera di astronomia descrittiva che esiste tuttora? Tale fusione dei due personaggi venne ammessa senza discussione da tutti coloro che, sino a questi ultimi tempi, si occuparono della storia intellettuale della Grecia; ma in seguito ai risultati dei più recenti studi, non si può accettarla in via definitiva, essendo giustificato il sospetto che Gemino sia una di quelle figure mal delineate le quali, contemplate con intensa attenzione, presentano lo strano fenomeno di un improvviso sdoppiamento.

In ordine cronologico a Gemino segue Teone da Smirne, vissuto nel II sec. dell'èra nostra, il quale, quando per effetto di uno di quei ricorsi non infrequenti nella storia del pensiero umano, le dottrine di Pitagora e di Platone riebbero il generale favore, giudicò opportuno di comporre un'opera il cui scopo è chiaramente indicato dal titolo che essa porta: *Delle cognizioni matematiche utili per la lettura di Platone.* Di scarso valore scientifico, essa fu ed è tuttora sfruttata per le attendibili informazioni che porge sugli studi dei Pitagorici intorno all'aritmetica (e cioè tanto i loro ritrovati quanto le loro divagazioni mistiche intorno alle proprietà dei numeri) e riguardo alla scienza astronomica degli antichi Greci.

64 - Della setta dei Neo-Platonici fu « magna pars » quel Proclo, a cui più volte ricorremmo come abbondante fonte di notizie, e su cui dobbiamo ora spendere qualche parola. Nato a Bisanzio nel 410 dell'E. v., fu discepolo e poi successore di Siriano nella direzione dell'Accademia, risorta in Atene per merito di ammiratori del divino filosofo, e tale ufficio mantenne sino al giorno (17 aprile 485) in cui fu tocco dall'ala inesorabile della morte. Il posto che, per universale consenso, gli fu conferito nella storia della scienza è meritato premio per il coscienzioso *Commento al I Libro di Euclide,* il quale fa desiderare i lavori congeneri

relativi al resto dell'opera, che egli forse ha scritto, ma che non ci sono sino ad oggi pervenuti.

Nello svolgere il suo programma Proclo sceglie a guida Platone, ma attinge a larga mano da tutti coloro che erano in grado di prestargli qualche aiuto ed in prima linea a Gemino, presentando così una massa considerevole di preziose notizie storiche e bibliografiche, nelle quali risiede, almeno ai nostri occhi, il pregio permanente delle sue fatiche: non potendo entrare qui in alcun particolare al riguardo, ci limitiamo ad osservare che lo schizzo storico da lui tracciato della evoluzione della geometria greca fu il canevaccio sul quale ricamarono tutti i posteriori storici dello stesso periodo. Va notato che se, per intendere ed illustrare un autore, è condizione essenziale il condividerne le idee, Proclo non era affatto indicato per diffondere nel mondo il verbo euclideo; giacchè mentre il sommo alessandrino pronunziò sentenza di divorzio fra matematica e filosofia, Proclo sembra essersi proposto di ottenerne la riconciliazione; ora se si paragona la lussureggiante fioritura che coronò le fatiche del primo con la desolata sterilità dei tempi che seguirono il secondo, è forza concludere che, nell'interesse della scienza, le direttive del primo vanno fedelmente mantenute.

Come duce della sètta neo-platonica a Proclo segue Marino da Neapoli, nato in Palestina — a Flavia Neapolis — che va ricordato come biografo del suo predecessore, come editore dei *Dati* euclidei (v. p. 98) e come autore di una eloquente prefazione a questa opera.

A lui seguì Isidoro, maestro di quel Damascio che, come dicemmo (n. 54), alcuni fanno autore dell'ultima parte del cosidetto XV Libro degli *Elementi* di Euclide. Costui però studiò anche sotto la direzione di Teone d'Alessandria, altro celebre editore e commentatore di Euclide, vissuto nel IV sec. dell'E. v. e padre di Ipazia, famosa, meno per i suoi studi matematici (nei quali non riuscì a affermarsi pensatrice originale) che per essere miseramente perita (415 E. v.) durante una delle sanguinose ribellioni con cui il Paganesimo agonizzante cercava di sbarrare il passo al Cristianesimo, nella sua marcia trionfale.

65 - Circa nella medesima epoca fiorì un altro benemerito commentatore, Eutocio, appartenente ad una cospicua famiglia di Ascalona (Palestina). Di lui si sono conservate alcune modeste delucidazioni agli scritti di Archimede *Su la sfera ed il cilindro,* sulla *Misura del cerchio* e sull'*Equilibrio dei piani,* nonchè sui primi quattro libri delle *Coniche* d'Apollonio. Esse nulla aggiungono di essenziale al nostro patrimonio scientifico, ma non vanno dimenticate e trascurate da chi aspira a conoscere a fondo ed in tutti i suoi aspetti l'antica geometria.

Contemporaneamente al succitato Damascio, insegnò ad Atene il notissimo Simplicio, la cui fama è affidata, non a commenti di Euclide — di cui non esiste più se non qualche lieve traccia —, ma alle sue illustrazioni di opere di Aristotele. Il pubblico insegnamento da lui impartito, essendo apparso poco ortodosso, incorse nel biasimo dell'imperatore Giustiniano, allora in procinto di ricevere il battesimo; egli, per impedire la ulteriore diffusione di germi reputati pericolosi, nel 529 decretò

la chiusura dell'Università ateniese: così venne spenta l'ultima fiammella attestante che nella patria di Talete non era peranco abbandonata totalmente la ricerca scientifica.

## BIBLIOGRAFIA

G. BERNHARDY, *Erathostenica* (Berolini, 1822).

H. BERGER, *Die geographischen Fragmente des Erathostenes* (Leipzig, 1880).

SERENI ANTINOENSIS, *Opuscula*, ed. Heiberg (Lipsiae, 1896).

GEMINI, *Elementa Astronomiae, ed.* C. MANITIUS (Lipsiae, 1898).

PROCLI DIADOCHI *in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ex rec. G. FRIEDLEIN (Lipsiae, 1873).

PAPPI ALEXANDRINI, *Collectionis quae supersunt*, ed. F. HULTSCH (Berolini, 1876).

J. DUPUIS, *Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Esposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (Paris, 1892).

H. SUTER, *Der Kommentar des Pappus zum X Buche des Euklides aus der arabischen Uebersetzung des Abû'Othman al-Dimashki* (Abhadl. zur Gesch. der Math., der Naturwissenschaften und der Medizin, Heft IV, 1922).

G. JUNGE and W. THOMSON, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements* (Haward Semitic Series, t. VIII, Cambridge U. S. 1930).

G. JUNGE, *Das Fragment des lateinischen Uebersetzung des Pappus, Kommentars zum X Buche Euklide* (Quellen und Studien zur Gesch. de Math. t. III, 1934).

## CAPITOLO V

# L'OPERA MATEMATICA DEGLI ASTRONOMI E DEI GEODETI GRECI

66 - Presso tutti i popoli assurti a civiltà e in tutti i tempi, dai più remoti a quelli a noi più vicini, lo studio dei fenomeni naturali, condotto con elevatezza di vedute e rigore di metodo, fu potentissima leva alla ricerca puramente scientifica. Tale fenomeno generale essendosi verificato anche presso i Greci, per rendere conforme al vero il quadro dei contributi dati alla matematica dai pensatori apparsi sul suolo dell'Ellade, è indispensabile che noi esaminiamo gli scritti di quelli fra costoro che si sentirono attratti dalla nobile aspirazione di scoprire la struttura e il meccanismo del cosmo o almeno da quella, più modesta, ma non meno utile alla società, di determinare la grandezza e la forma del nostro pianeta; l'esame che noi, in conseguenza, ci apprestiamo a fare ci permetterà di determinare quali nuove figure geometriche siano state considerate, quali nuove proprietà dell'estenzione figurata siano state scoperte, quali nuovi metodi siano stati escogitati. Per tal modo saremo condotti ad aggiungere nuovi nomi all'elenco delle grandi personalità apparse sulla faccia del mondo ellèno ed anche a segnalare alcuni aspetti, che finora ci rimasero occulti, dell'attività scientifica dei sommi, dei quali già ci occupammo.

## L'astronomia greca da Talete a Cl. Tolomeo

67 - Per raggiungere il suindicato scopo fa mestieri che noi ritorniamo agli albori della civiltà greca; giacchè colui che, con più o meno ragione, viene designato come « padre dell'astronomia greca », è Talete da Mileto: tale onorevole epiteto gli fu probabilmente attribuito « ab antiquo » in memoria dell'eclisse memorabile che egli seppe predire (v. n. 21), ma i moderni glielo conservarono avendo riconosciuto che la sua scomparsa contrassegna la transizione dalla cosmografia popolare, di cui serbarono memoria i poemi di Omero e di Esiodo, ad una, sia pure embrionale, scienza astronomica.

La propensione per la contemplazione e lo studio dei fenomeni celesti che manifestò il fondatore della Scuola jonica si ritrova nei suoi successori Anassimandro ed Anassimene, grazie ai quali i Greci si famigliarizzarono gradatamente con l'idea che la terra fosse un solido limi-

tato, sospeso liberamente nello spazio. Tuttavia lo scienziato che determina il trapasso dell'astronomia dallo stadio metafisico allo stadio scientifico è lo stesso a cui è dovuta la metamorfosi congenere subita dalla geometria, cioè Pitagora. Questi, infatti, insegnò ai suoi discepoli essere la terra un corpo di forma sferica col centro fisso, essere dessa abitabile anche nell'emisfero opposto a quello in cui trovavasi la Magna Grecia e divisa in cinque zone, ed aggiunse che i pianeti sono animati da movimenti propri da Occidente verso Oriente. L'emergente sistema venne giudicato per molti secoli tanto soddisfacente che fu accettato nel lungo periodo che corre da Platone a Dante, come stanno a provare il dialogo del primo intitolato dal pitagorico Timeo da Locri ed il Canto XXII (v. 135-152) dell'ultima cantica della *Divina Commedia*.

Spento il grande filosofo di Samo e dispersa la sua scuola, i Greci non smisero l'abito della ricerca scientifica, nè cessò in loro la bramosia di rendersi ragione del come avvengano i fenomeni celesti: a prova di ciò sta il fatto che un contemporaneo di Socrate, il tarantino Filolao, modificò il sistema astronomico di Pitagora in un senso che deve dichiararsi come un avviamento verso il sistema copernicano; dopo di lui, tale movimento progressivo si accentuò in modo talmente impressionante che, all'epoca di Platone, i Greci erano giunti così innanzi che ben poca strada rimaneva a loro da compiere per rendersi padroni del concetto generale di « moto eliocentrico dei pianeti ». Ma è loro gloria l'avere poco dopo percorso anche quest'ultimo tratto di strada; il merito principale di tale memorabile risultato si attribuisce ad un matematico contemporaneo di Archimede (forse a lui lievemente anteriore), Aristarco di Samo, il « Copernico dell'antichità ». Di lui non esiste più (e nemmeno è certo se fu mai scritta) l'opera in cui egli tentò di suscitare una rivoluzione nell'astronomia del suo tempo, mentre è giunto sino a noi un opuscolo *Su le grandezze e le distanze del sole e della luna*, il quale, se per le conseguenze numeriche che stabilisce non merita di prendere posto oggi nella biblioteca di alcun astronomo, per la somma di cognizioni matematiche che aduna o rivela, e per la rigorosa concatenazione logica delle parti, è degno di figurare onorevolmente accanto alle migliori opere coeve; d'altronde, a stabilirne il valore non basta forse il fatto che ad esso Archimede attinse i fondamenti astronomici dei calcoli consegnati (v. Cap. seg., n. 82) nel suo *Arenario*?

68 - Sembra che i tempi non fossero maturi per una innovazione, qual è quella immaginata da Aristarco, la quale sembra contraddetta dalla testimonianza dei sensi; induce a crederlo il fatto che il sistema detto più tardi copernicano fu tosto abbandonato per il « sistema degli eccentrici e degli epicicli » ideato, a quanto pare, da Apollonio Pergeo, il quale sembrava prestarsi meglio alla rappresentazione dei fenomeni celesti e ai calcoli relativi e fors'anche perchè da esso risultava più rigorosamente rispettato il principio fondamentale di tutti i sistemi astronomici proposti da Pitagora a Copernico, di non attentare menomamente alla bellezza e alla semplicità del creato.

Ora il sistema apolloniano (sui particolari del quale a noi è vietato di arrestarci) per venire svolto esige una vasta conoscenza delle relazioni

che intercedono fra le figure tracciate sopra una sfera; essa, d'altronde, è indispensabile anche da parte di chi intenda affrontare il famoso problema che Platone propose mentre era intento a svolgere le idee cosmologiche di Pitagora, e che si enuncia così: « quali sono i movimenti circolari ed uniformi capaci di spiegare in modo soddisfacente i fenomeni offerti dalle rivoluzioni planetarie? »

A risolvere questa bella questione geometrico-meccanica si accinse un grande matematico che già conosciamo (v. n. 33) Eudosso da Cnido; così egli pervenne al celebre « sistema delle sfere omocentriche », il quale, dal giorno in cui G. Schiaparelli insegnò a comprenderlo e a valutarlo, accrebbe a dismisura la rinomanza di colui che spianò la via che doveva condurre Archimede a tante capitali scoperte geometriche.

È estraneo al còmpito nostro l'esporre tale nuovo sistema astronomico; ma dobbiamo esplicitamente rilevare che esso attesta in chi lo concepì e svolse una grande famigliarità con la « geometria della sfera » (disciplina speciale detta dagli antichi *Sferica*) e probabilmente anche con l'arte di congegnare meccanismi capaci di porgere un adeguato concetto del moto degli astri (altra disciplina creata dagli antichi e da essi chiamata *Sferopea*). Ora vedremo fra poco che di esposizioni metodiche delle proprietà delle figure sferiche se ne contano parecchie nella letteratura greca; lo studio profondo di esse ed il loro paragone indusse i più competenti in materia, non soltanto ad ammettere che ne sia esistita un'altra di più antica data, ma anche a ricostruirla nelle sue linee generali. Fatto ciò, sorse la questione di determinare chi fosse l'autore di questa ipotetica opera, e per risolverla si cercò *fra i nomi noti* quello che meglio convenisse allo scopo e si finì per concludere che colui che aveva maggiori titoli alla preferenza era precisamente Eudosso; ed in realtà, limitata per necessità di cose la ricerca nel modo detto, la conclusione è naturale, anzi quasi inevitabile; se non che, quella limitazione è necessaria, ma arbitraria; e poichè, se generalizzata, guiderebbe ad un criterio storico capace di condurre in molti casi a conseguenze false od assurde (¹), così noi, pure ammettendo l'esistenza di un prototipo, oggi perduto, dei trattati di sferica ancora esistenti, ci asteniamo dall'aggiungerlo all'elenco delle opere del grande geometra di Cnido.

69 - A quanto asserisce Pappo, i più antichi scritti che si possiedono sulla sferica sono dovuti ad un contemporaneo di Euclide (forse di poco anteriore a lui), nato sulle coste dell'Asia minore, Autolico da Pitana. Dei due suoi lavori esistenti uno insegna le più semplici relazioni che provengono dalla considerazione di una sfera animata da un movimento rotatorio uniforme attorno ad un suo diametro, l'altro, che si direbbe una continuazione del primo, tratta invece dei fenomeni che accompagnano il sorgere ed il tramontare degli astri; essi, più che per il contenuto, sono pregevoli per lo stile, il quale possiede tutte le caratteristiche

(¹) Per chiarir meglio il nostro pensiero osserveremo che, se il piccolo volume ove sono raccolti gli scritti di Galois perdesse il nome del suo autore, cercando questo *fra i nomi noti* si finirebbe per identificarlo a Cauchy, Sturm o Liouville, i matematici che emergevano in Francia al tempo di Galois.

che resero famosi gli *Elementi;* siccome l'autore dei citati lavori non è posteriore ad Euclide, così resta confermato che la forma regolare e compassata usata negli *Elementi* dal sommo alessandrino non è del tutto creazione di questo.

Con gli scritti di Autolico presenta indiscutibile rassomiglianza quello di Euclide, intitolato *Fenomeni,* di cui già facemmo rapido cenno (n. 41); benchè uno dei più profondi conoscitori della scienza greca (alludiamo al Delambre) abbia sentenziato che le proposizioni che lo costituiscono appartengano alla « metafisica dell'astronomia », pure ci sembra disforme al vero l'affermare che da esse non derivi alcuna utilità alla pratica, dal momento che esse sono elementi indispensabili per una descrizione razionale dei più notevoli fenomeni celesti.

Senza arrestarci sopra un opuscolo di contenuto astronomico dovuto a Ipsicle (v. n. 54) e che tratta *Delle ascensioni* — nel quale il matematico nota alcune proprietà delle progressioni aritmetiche —, faremo meno rapido cenno della più cospicua delle opere superstiti sull'argomento. Essa è dovuta a Teodosio da Tripoli, scienziato vissuto probabilmente un secolo e mezzo a. C.; la sua fama proviene in massima parte dall'avere egli scritto un pregevole manuale di *Sferica,* il quale fu tradotto dall'arabo in latino nell'XI secolo, dall'erudito conosciuto sotto il nome Platone da Tivoli e pubblicato più tardi per cura di F. Maurolico; nell'originale greco, accompagnato da una versione latina, vide la luce nel 1558 per merito di G. Pena.

Si tratta di un'opera in tre libri, la quale sopperisce al quasi completo silenzio serbato negli *Elementi* di Euclide intorno alle proprietà delle figure sferiche, silenzio che non si spiega se non ammettendo che si trattasse di una materia riguardata allora estranea alla pura geometria, perchè utile principalmente all'investigazione dei fenomeni celesti. È un'opera elementarissima, la quale insegna soltanto le più semplici relazioni che intercedono fra circoli massimi e circoli minori; e per rendersi ragione del perchè Teodosio si dilunghi con tanta compiacenza sopra un tema di così scarso interesse dottrinale, fa mestieri ammettere che egli pensasse incessantemente all'uso che ne sarebbe stato fatto da coloro che si sarebbero proposti di descrivere razionalmente quanto succede nell'ambito sconfinato dei cieli.

70 - L'apogeo della sferica è contrassegnato dall'apparizione dell'egregia opera scritta sull'argomento da Menelao; il quale, nato in Alessandria, fece a Roma nel 98 dell'E. v. un'osservazione astronomica, che permette di asserire essere egli vissuto fra il I ed il II sec. dell'èra nostra. Quell'opera ci è nòta soltanto attraverso versioni dall'arabo e dall'ebraico e doveva venire completata da altra *Sul calcolo delle corde di un circolo,* di cui conosciamo il solo titolo. Nella *Sferica* di Menelao la teoria delle figure tracciate sulla superficie della sfera assume, forse per merito appunto dell'autore, i lineamenti che era destinata a conservare e che sono il riflesso della perfetta analogia che essa manifesta con la geometria del piano, quando si convenga di far corrispondere alle rette di questo le circonferenze massime. In particolare, grazie a tale opera, fa il suo ingresso nella scienza il « triangolo sferico » (cioè un triangolo

avente per lati tre archi di circolo massimo), figura che doveva ben presto assumere un ufficio fondamentale in tutte le ricerche aventi per oggetto la sfera; e va notato che Menelao, mentre ne avverte le numerose somiglianze con il triangolo piano, non manca di rilevare che si tratta di una corrispondenza non senza eccezioni. Merita di essere rilevato che nella *Sferica* di Menelao si legge uno dei teoremi fondamentali della teoria delle trasversali per triangoli sferici, cioè quella proposizione che porta oggi a ragione appunto il nome di « teorema di Menelao » e che i moderni enunciano dicendo: « Se i lati $BC$, $CA$, $AB$ di un triangolo sferico $ABC$ sono tagliati nei punti $L$, $M$, $N$ da un arbitrario circolo massimo, il prodotto

$$\frac{\operatorname{sen} BL}{\operatorname{sen} CL} \cdot \frac{\operatorname{sen} CM}{\operatorname{sen} AM} \cdot \frac{\operatorname{sen} AN}{\operatorname{sen} BN}$$

ha per valore assoluto l'unità ».

Molteplici applicazioni di questa proposizione fatte da Menelao ne dimostrano l'importanza; notiamo ad esempio una relazione equivalente a quella che dice: « se il triangolo sferico $ABC$ è rettangolo in $A$ si ha $\operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} BC \cdot \cos B$ »; inoltre la proprietà di concorrere in un punto posseduta dagli archi bisettori e dagli archi-altezze di un triangolo sferico; finalmente il teorema: « Se l'arco $AD$ divide in parti eguali l'angolo in $A$ del triangolo sferico $ABC$ sussisterà la relazione:

$$\frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} AC} = \frac{\operatorname{sen} BD}{\operatorname{sen} CD} ».$$

Avvertiamo anche che Pappo attribuisce a Menelao la scoperta di una speciale curva detta « paradossale »; ma poichè egli nulla dice per dichiararne la natura, così gli storici della geometria, nell'intento di colmare la conseguente lacuna, ricorsero ad ipotesi, le quali non possiedono una base abbastanza sicura per meritare un posto nella raccolta dei dati certi intorno al sapere matematico degli antichi.

## Claudio Tolomeo

71 - Le opere di Autolico, di Euclide, di Ipsicle e di Aristarco di cui testè ci occupammo, insieme ad altre di minor conto, al dire del commentatore testè citato, facevano parte della *Piccola Collezione Astronomica,* composta di opere indispensabili all'intelligenza del massimo codice astronomico legatoci dall'Antichità. Alludiamo alla celebre opera di Claudio Tolomeo, che in origine portava il titolo *Composizione matematica* e che i posteri ammiratori mutarono in *Grande composizione* (μεγάλη σύνταξις); gli Arabi, che nell'VIII secolo la tradussero nella loro lingua, unendo l'articolo da essi usato al vocabolo *magisti,* corruzione di μεγίστη, composero la barbara parola *Almagesto,* che è quella sotto cui è generalmente nota quell'opera. Lo studio di essa è inevitabile per chi vuole conoscere la scienza antica, giacchè si tratta dello scritto gra-

zie a cui Tolomeo per molti secoli dominò senza rivali gli spiriti di tutti gli astronomi.

L'interesse storico che essa possiede deriva in primo luogo dal fatto che da essa si desumono le informazioni più attendibili intorno al principe degli astronomi greci, Ipparco da Nicea [1], il quale introdusse in Grecia la divisione del cerchio in 360 gradi e fece, nel II sec. a. C., molte osservazioni a Rodi ed in Alessandria, di tale importanza che (come scrisse Plinio) egli si elevò ad un livello superiore all'umano, avendo portate a termine cose che un dio stesso non avrebbe potuto compiere che con fatica. Il secondo motivo per cui lo studio dell'*Almagesto* possiede notevole importanza storica è perchè ivi si trovano le uniche notizie biografiche sicure intorno al suo autore (chè quelle, troppo numerose e minute, offerte dagli Arabi non meritano in generale fede alcuna, essendo parti di una troppo fervida fantasia): sgraziatamente però i dati risultanti si riducono all'essere Tolomeo vissuto intorno al 150 dell'E. v.

Al pari degli *Elementi* di Euclide e dell'*Aritmetica* di Diofanto (v. cap. seg.), la *Composizione matematica* consta di tredici libri, il I dei quali contiene i preliminari indispensabili per un'indagine fruttifera dei fenomeni celesti, in base all'ipotesi che la terra occupi il centro dell'universo; dal II si apprende la divisione del cielo in zone ed i fenomeni che contrassegnano il sorgere ed il tramontare degli astri; la lunghezza dell'anno e la teoria del sole dà materia al III, la lunghezza dei mesi e la teoria della luna al IV. Dal V si apprende la costruzione e la struttura del celebre strumento chiamato « astrolabio » (serviva a porgere un'idea dei movimenti degli astri) e dal seguente quali siano i fenomeni denominati « congiunzioni » ed « opposizioni » del sole e della luna e quali relazioni abbiano con le eclissi. I due libri successivi sono consacrati alle stelle fisse ed alla precessione degli equinozi (memorabile scoperta di Ipparco!); mentre gli ultimi cinque sono destinati ciascuno ad uno dei pianeti Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

72 - Oltre ai suindicati motivi di indole storica per i quali l'*Almagesto* è ricco di tanto interesse, un terzo ne esiste, di peso ancora maggiore; esso consiste nell'essere quell'opera il più antico lavoro nel quale si trovino numerosi elementi e brillanti applicazioni della trigonometria (sferica), scienza che divenne ausiliare indispensabile e costante dell'astronomia, se non prima per merito di Archimede, almeno dal giorno in cui Ipparco prese ad individuare mediante la latitudine e la longitudine la posizione degli astri in cielo. Ma siccome di quella disciplina Tolomeo fece conoscere soltanto quanto era necessario ai suoi scopi, così le proposizioni da lui esposte non si possono intendere come rappresentanti la totalità delle cognizioni possedute dai Greci sull'argomento; sgraziatamente ci mancano i mezzi per completarle.

La trigonometria tolemaica è senza dubbio di aspetto differente dalla nostra, perchè ivi non si trovano le ordinarie funzioni trigonometriche,

(1) L'unica opera superstite di Ipparco è un mediocre commento a un poema di Arato e ai lavori di Eudosso, di cui esiste una edizione recente.

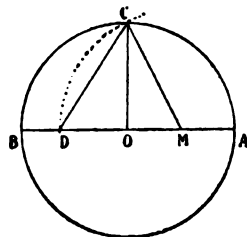
ma invece vi compariscono esclusivamente e costantemente le corde degli archi considerati. Però, se nei teoremi che s'incontrano nell'*Almagesto* in luogo di *corda* $x$ si sostituisce $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ e di più si fa uso della moderna simbolica algebrica, ogni divario scompare, e così rimane stabilita l'identità sostanziale di due procedure, di lineamenti differenti, miranti al medesimo scopo.

La creazione di un surrogato della teoria delle funzioni circolari fu un prodotto della necessità da parte degli astronomi di potere disporre di una tavola dei valori delle corde degli archi multipli di una parte aliquota dell'intera circonferenza [1]; tale necessità, avvertita (se non prima) da Ipparco, venne di lui soddisfatta in un'opera di dodici libri, sventuratamente perduta; aggiungiamo che non è escluso che egli abbia avuto alcuni precursori, il capostipite dei quali sarebbe, al dir di taluno, Apollonio Pergeo e fors'anche Archimede. Tutti questi scritti dovendo oggi dichiararsi perduti, il solo *Almagesto* è in grado d'illuminarci intorno alla via tenuta dagli antichi per conseguire il suindicato scopo.

Fig. 13.

Da quella grande opera si apprende che, a somiglianza di quanto si pratica anche oggi, per raggiungere l'indicato scopo si cominciava dal calcolare le corde di alcuni archi notevoli, servendosi del teorema di Pitagora e delle relazioni, insegnate negli elementi della geometria, che intercedono fra il raggio di un cerchio ed i lati dei più semplici poligoni regolari inscritti, costruibili col mezzo della riga e del compasso. Giova riferire una costruzione dei lati del pentagono e del decagono regolari inscritti in un cerchio che si raccomanda per la sua estrema semplicità. Nel dato cerchio (Fig. 13) si conduca il diametro $A B$ e il raggio $O C$ ad esso perpendicolarmente; se $M$ è il punto medio del segmento $O A$ si descriva un arco di cerchio di centro $M$ e raggio $M C$ e se ne determini l'intersezione col raggio $O B$; sarà $O D$ il lato del decagono e $C D$ quello del pentagono inscritti nel dato cerchio [2].

Le surriferite considerazioni essendo di portata assai limitata, Tolomeo sentì il bisogno di ricorrere ad una verità di carattere generale e

---

(1) È un bisogno che, dal punto di vista geometrico, era stato sentito da Archimede, come risulta da un'opera di cui non conosciamo che qualche frammento (v. n. 51).

(2) Questa costruzione si ritrova registrata, senza nome d'autore, nel *Codice Atlantico* di Leonardo da Vinci. Essa è analoga, ma più semplice, di altra, di data assai più recente, che trovasi indicata in una lettera diretta a Gauss addì 17 febbraio 1814 (*Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. L. Gerling*, Berlin 1927, pag. 46); ci sia lecito riferirla: I dati essendo gli stessi (fig. 14) nel punto $A$ si conduca la tangente al dato cerchio e si porti su di essa il segmento $A B$ eguale alla metà del raggio; si tracci la retta $O B$ e si porti $B C = B A$; se la retta $A C$ incontra di nuovo il cerchio in $D$, sarà $O D$ perpendicolare a $O B$, $O C$ il lato del decagono e $C D$ quello del pentagono inscritti nel dato cerchio.

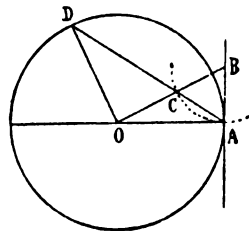



Fig. 14.

dimostrò che « se $A\ B\ C\ D$ è un quadrangolo inscritto in una circonferenza, la somma dei prodotti delle coppie di lati opposto $A\ B\ .\ C\ D$ e $A\ D\ .\ B\ C$ è eguale al prodotto delle diagonali $A\ C\ .\ B\ D$ ». È l'importante teorema che reca appunto il nome di Tolomeo, non già per affermare con sicurezza che egli ne sia l'inventore, ma piuttosto per ricordare che lo si incontra per la prima volta nell'immortale suo volume. Applicandolo con opportune cautele egli ne deduce due fondamentali risultati, i quali oggi si esprimono con le note formole:

$$\text{sen }(x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen } y$$

$$\cos x \cos y = \cos (x + y) + \text{sen } x \cdot \text{sen } y.$$

Da esse, come è notorio, si possono derivare tutte quelle che costituiscono l'odierna teorica delle funzioni circolari; ad esempio Tolomeo ne deduce le relazione

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

servendosi di essa più volte egli, dalla corda di 12° preventivamente calcolata, arriva a corda di $\frac{3^\circ}{4}$.

L'ultimo elemento teorico necessario a Tolomeo per costruire la desiderata tavola di corde è rappresentato da un teorema, che s'incontra già in Aristarco ed in Archimede e si enuncia come segue: « Se si considerano due archi $x, y$ entrambi minori di un quadrante, e si suppone $x > y$ sarà $\frac{\text{corda } x}{\text{corda } y} < \frac{x}{y}$ ». Giovandosene, Tolomeo arriva ad un valore di corda 1°, la cui esattezza può misurarsi osservando che, se si identifica quella corda all'arco corrispondente, si ottiene come lunghezza della circonferenza di diametro eguale a 1, il valore

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3.14166\ldots$$

che ha tre decimali esatte.

Sfruttando questi vari risultati Tolomeo perviene ai valori delle corde di tutti gli archi multipli di mezzo grado e che non sono superiori a 180°, nell'ipotesi che il diametro del cerchio considerato sia espresso dal numero 120: è in sostanza una tavola dei seni di tutti gli archi multipli di un quarto di grado non superiori a 90°, la cui esattezza può misurarsi notando che essa dà per sen 30′ un valore con quattro cifre decimali esatte. Siccome all'autore non sfugge che, con il procedimento seguito, gli errori vengono ad aggiungersi gli uni agli altri (dal momento che le corde di molti archi vengono ottenuti mediante le formole di addizione e moltiplicazione), così per correggerli paragona i valori risultanti per le corde di archi notevoli ai valori da lui ottenuti (come dicemmo a pag. 87) direttamente.

Chi ha presente lo schema generale dei nostri trattati di trigonome-

tria sarà indotto a supporre che Tolomeo, stabilita una disciplina equivalente alla nostra teorica delle funzioni circolari, si volga ad applicarla alla risoluzione dei triangoli rettilinei. Nulla di tutto ciò; benchè egli mostri su qualche esempio di essere in grado di calcolare tutti gli elementi di una tale figura, quando se ne conosca un numero sufficiente di lati e di angoli, pure non ne fa oggetto di metodica trattazione; e poichè, invece, egli si comporta in modo diametralmente opposto riguardo ai triangoli sferici, resta assodato il curioso fatto che *in ordine storico la trigonometria sferica ha preceduto la piana*.

Ora, come fondamento dottrinale di quella disciplina, Tolomeo sceglie il teorema di Menelao per triangoli sferici, che egli ha cura di stabilire, dopo di avere dimostrato il teorema analogo della geometria piana; ad esso egli ricorre ogni qualvolta abbia bisogno di esprimere qualche elemento di un triangolo sferico mediante dati sufficienti a determinarlo. Fra le proposizioni a cui egli giunge in tal modo notiamo le seguenti relative ad un triangolo sferico $ABC$ rettangolo in $A$ ed aventi i lati misurati dai numeri $a, b, c$:

$$\text{sen}\, c = \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, C; \quad tg\, c = \text{sen}\, b \cdot tg\, C;$$
$$tg\, c = tg\, a \cdot \cos B;$$

e poichè queste non sono le uniche applicazioni del genere che può ricevere il teorema di Menelao, resta assodato che il teorema stesso è capace di esercitare nella trigonometria sferica un ufficio ben più importante di quello che gli è affidato nelle trattazioni moderne di tale disciplina.

73 - Come a tutte le opere giudicate classiche, all'*Almagesto* non mancarono commentatori; il più noto di essi è quel Teone Alessandrino, vissuto fra il IV e il V sec. dell'E. n. sotto il regno di Teodosio il Grande e noto per una pregiata edizione degli *Elementi* di Euclide. La sua opera astronomica, almeno in parte (e fors'anche totalmente, perchè non è certo che egli abbia estese le sue illustrazioni all'intero *Almagesto*) [1] resistette vittoriosamente alla azione distruggitrice del tempo, con limitato vantaggio della scienza e della sua storia, chè ben poco essa aiuta nell'intelligenza del testo e nemmeno porge i desideratissimi particolari intorno all'evoluzione dell'astronomia greca sino a Tolomeo. Non è, dunque, il caso che noi ci arrestiamo ad analizzare questo povero scritto del mediocre chiosatore alessandrino; all'opposto è dover nostro segna-

[1] Del *Commento* di Teone all'*Almagesto* si conosceva quanto riguarda i Libri I e II e si considerava perduta la parte relativa al III; ma A. Rome l'ha di recente rintracciata nella Biblioteca Nazionale di Firenze; notizie sopra tale scoperta leggonsi nell'articolo dello stesso Rome *Le troisième livre des commentaires sur l'Almageste, par Théon et Hypathie* (Pubblications du Laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'Université de Louvain, vol. III, 1916). Emerge da esso che in tale lavoro Teone fu aiutato da sua figlia Ipazia, quella dotta scrittrice che, come dicemmo (p. 79), fu barbaramente trucidata per le vie d'Alessandria, nel corso delle lotte allora scatenatesi fra il Paganesimo agonizzante e il Cristianesimo diffondentesi ovunque. Nella nostra storia essa è degna di menzione in quanto inaugura la serie delle donne che lasciarono traccia di sè come cultrici delle scienze esatte.

lare altri due notevoli lavori superstiti dell'autore della *Composizione matematica.*

Uno, intitolato *Analemma,* ha per tema la proiezione ortogonale di un piano, a sussidio della delineazione degli orologi solari (meridiane); l'altro, che ha come titolo *Planisfero,* ha per argomento la proiezione della superficie di una sfera eseguita dal polo boreale sopra il piano dell'equatore; si tratta dunque di quel metodo di rappresentazione di una sfera su di un piano che oggi, adottando il suggerimento dell'Aguillon, si chiama proiezione stereografica; Tolomeo ne conobbe una delle proprietà fondamentali, quella cioè di far corrispondere ad una circonferenza della sfera un'analoga linea del piano, e ne fa utili applicazioni. Chiudiamo osservando che, nella più popolare delle sue opere, cioè la *Geografia,* egli si serve di un altro metodo di rappresentazione di una sfera su di un piano, al quale più tardi si è ispirato Mercatore nel concepire l'analoga procedura che porta il suo nome. Cosicchè nella letteratura greca esistono in germe i tre principali metodi che furono più spesso applicati alla rappresentazione su di un piano della superficie terrestre.

## Erone d'Alessandria

74 - L'esame della totale produzione scientifica tolemaica ci fece gradatamente discendere dal cielo alla terra, e qui ci conviene rimanere per rilevare come, fra gli scritti lasciati dai Greci, esista una collezione ricca, ma confusa, di lavori, i quali vanno sotto il nome di Erone e costituiscono il nocciolo della letteratura geodetica del popolo ellèno, e come si presenti anzitutto il problema di distribuirli fra i personaggi di quel nome dei quali si è serbato ricordo. Tale problema storico — conosciuto sotto il nome di « questione eroniana » — riesce di soluzione difficile per le innumerevoli interpolazioni e mutilazioni che subirono i manoscritti costituenti la detta raccolta, per essere quel nome tanto comune fra i Greci che sono noti circa venti personaggi che lo portarono, finalmente perchè il vocabolo Erone è di origine egiziana e, oltre essere nome proprio, aveva un significato analogo a quello che ha oggi la parola « ingegnere ». Fortunatamente, delle persone di nome Erone a noi note, tre soltanto si occuparono di matematica; uno è un Alessandrino citato da Eutocio, da Pappo e da Proclo; un secondo fu maestro a quest'ultimo; ed un terzo è un bizantino (designato ordinariamente come Erone « il Giovane ») di cui parleremo a suo tempo (n. 97). Al primo si fa risalire la miglior parte dei lavori fisico-matematici attribuiti ad un Erone; ma, in quale epoca ha egli vissuto? Non v'ha dubbio che egli fiorì fra il 300 a. C. ed il 200 dell'E. v.; per restringere questo lungo intervallo furono istituite svariate e delicate considerazioni, le quali portarono coloro che si occuparono con più geniale assiduità della questione eroniana a concludere che il geodeta di cui ragioniamo visse nel I secolo a. C., non senza escludere che la sua esistenza sia cominciata nel II. Probabilmente insegnò in Alessandria e in Egitto i suoi scritti ebbero larga diffusione; ma più precisi particolari biografici non siamo in grado di somministrare. A meno vaghe conclusioni guida la disamina dei suoi lavori, a cui ora ci volgiamo.

75 - Dei frutti raccolti da Erone applicando i principi fondamentali della statica archimedea dà notizia Pappo nell'ultimo libro della *Collezione matematica*, e sul valore di essi è possibile di pronunciare oggi un giudizio meglio motivato dopo la pubblicazione (con versione in lingua moderna) della traduzione in Arabo d'un importante lavoro meccanico dello scienziato in discorso, quello cioè intitolato *L'elevatore*.

Da esso emerge che Erone si dedicò di preferenza alla meccanica pratica, assumendo a guida la galileiana massima « l'esperienza è la migliore educatrice » ; tale caratteristica mentale è confermata da numerosi altri lavori (che escono però dalla cornice del quadro che noi stiamo colorendo), i quali fecero assurgere Erone al livello di suprema autorità nella costruzione di meccanismi sorprendenti e di apparati a scopo bellico. Malgrado tale propensione verso la fisica applicata, egli, di fronte al problema archimedeo « sollevare un peso conosciuto con una data forza », si trovò nella necessità di occuparsi del problema di « inserire due medie proporzionali fra due rette date » ; e poichè lo risolse con ben regolati tentativi, dopo di averlo ridotto ad uno speciale problema d'inserzione, così l'*Elevatore* ha diritto ad onorevole menzione in qualunque storia della geometria ; tanto più che ivi si trovano precise notizie intorno all'elica cilindrica, presumibilmente desunte dall'opera sull'argomento che è fama scrivesse Apollonio Pergeo, ma della quale non si è finora rintracciato il più piccolo frammento.

Siffatte considerazioni rivelano in Erone un'attitudine alla ricerca puramente geometrica, della quale i citati lavori potevano fare ragionevolmente dubitare. Ora di essa possiamo segnalare altre attestazioni e tanto numerose da indurci a ritenere che egli abbia composto un commento, fors'anche completo, agli *Elementi* di Euclide, ripieno di vedute originali ed importanti.

A tale conclusione si è condotti anzitutto enumerando le migliorie e le aggiunte a quell'opera che Proclo ha riferito nel suo *Commento*, attribuendole appunto ad Erone. Ora tale conclusione ricevette di recente numerose conferme in un congenere lavoro di un arabo, chiamato in Occidente Anarizio, lavoro che nel XII secolo Gherardo da Cremona tradusse in latino. Essendo questa versione stata pubblicata per merito di uno dei più profondi studiosi della matematica medievale, vennero portate in dominio universale alcuni pregevoli complementi arrecati dal geniale geodeta alessandrino alle teorie insegnate da Euclide. Come esempio citiamo l'osservazione da lui fatta che, nella figura che serve ad Euclide per dimostrare il teorema di Pitagora, la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa, prolungata passa per il punto in cui concorrono i lati dei quadrati costruiti sopra i cateti che sono opposti ai cateti stessi : in tal modo egli ha implicitamente segnalata quella figura come germe fecondo di nuovi veri.

Ad Erone viene anche attribuita una raccolta di *Definizioni dei termini geometrici*, che segnaliamo, per quanto di paternità incerta o sospetta, perchè, qualunque ne sia l'autore, si tratta di un documento utile per chi intenda di rendere in ogni sua parte completo l'elenco delle figure considerate dagli antichi geometri.

76 - Il contributo più importante dato da Erone alla geometria fu incontrato per la prima volta in un lavoro nel quale egli insegnò l'uso della diottra, strumento di sua invenzione che, nell'antica geodesia, disimpegnava uffici analoghi a quelli che si affidano oggi al teodolite. Dall'esordio del relativo opuscolo (che porta il titolo *Il traguardo* nella versione italiana che ne fece G. B. Venturi in principio del sec. XIX) emerge che Erone non fu il primo greco che abbia composto un trattato di geometria pratica, ma che, per primo, vi introdusse il concetto dell'unità di metodo, la quale egli conseguì appunto con l'uso sistematico della diottra. La semplice ispezione dei trentasei problemi da lui trattati mostra che il suo scritto è un *vade-mecum* della massima utilità per l'agrimensore, giacchè a questo insegna a misurare distanze e superficie, altezze e profondità, a dividere un campo, a traforare un monte, ecc.; e tali risultati egli consegue applicando concetti, teoremi e metodi che risalgono ad Euclide.

Ma ad un certo punto egli s'imbatte in una questione importante di cui non si trova alcun cenno negli *Elementi*, quella cioè di calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscano i lati in lunghezza; e la risolve in uno squarcio di geometria così splendido di forma e di tale valore nella sostanza che Euclide stesso non avrebbe certamente sdegnato di apporvi la propria firma. Il risultato ottenuto si esprime oggi con la formola

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)},$$

ove $a, b, c$ sono le misure dei lati, la quale, finchè non ne sia segnalata la presenza in qualche scritto di più antica data (e vedremo che un arabo l'attribuisce ad Archimede), ben merita il nome di « formola di Erone », in luogo di altri che le furono dati, quando non era stata ancora dissepolta la più antica opera in cui trovasi registrata. Riguardo ad essa due cose vanno ricordate. L'una è che in essa compare la radice quadrata del prodotto di quattro linee, fatto strano giacchè si tratta di un'espressione evitata accuratamente dagli antichi, perchè non ne esiste una rappresentazione geometrica analoga a quelle che possiedono i prodotti di due o tre linee; forse Erone intendeva di rappresentare con una espressione del tipo $\sqrt{m\,n\,p\,q}$, ossia $\sqrt{m\,n} \times \sqrt{p\,q}$ il rettangolo del segmento medio proporzionale fra $m$ e $n$ per l'analogo medio proporzionale fra $p$ e $q$; oppure egli non vide alcun ostacolo ad una scrittura di quel tipo intendendo che $m, n, p, q$ fossero semplicemente i numeri misuratori delle lunghezze considerate: ad accogliere questa seconda spiegazione milita il fatto che la sostituzione metodica di una lunghezza col numero che la misura si trova (v. Cap. seg.) costantemente in Diofanto, il quale, in conseguenza, non si fece scrupolo di addizionare grandezze eterogenee, quali rette e superficie. L'altra osservazione è che nessun autore o commentatore greco posteriore ad Erone ha fatto menzione dell'importante aggiunta da lui operata negli *Elementi*; l'unica spiegazione di tale strano silenzio sta, secondo noi, nel fatto che la formola di Erone venisse dagli antichi considerata come appartenente

alla geodesia, epperò estranea al programma della pura geometria; siffatta spiegazione sembra accettabile quando si rifletta che un congenere ostracismo colpì, come vedemmo, la geometria sferica, riguardata allora esclusivamente come un ausiliare della astronomia: ammesso ciò si sarebbe in presenza di due fenomeni congeneri di scolastica pedanteria.

77 - Ad Erone devesi un'altra estesa opera in tre libri concernente la geometria pratica, di cui nel 1896 venne scoperto l'originale nella Biblioteca del Serraglio di Costantinopoli, quando il governo dei Giovani Turchi l'aperse agli infedeli; essa fu scoperta in un prezioso manoscritto che risale al XII sec. dell'E. v. È intitolata *Metrica* e meglio d'ogni altra a noi nota può servire a chi intende fissare i lineamenti scientifici del pensatore di cui ci occupiamo. Essa può riguardarsi come modello dei trattati anglo-sassoni dal titolo « Mensuration », perchè sono ivi insegnate le regole da seguire da chi voglia calcolare superficie e volumi e sono minutamente illustrate sopra esempi numerici; e va notato che i dati sono sempre numeri interi e di più spesso scelti in modo che, nei casi in cui si esigano estrazioni di radici, i risultati siano razionali.

Essa si apre con una Prefazione di indole storica, nella quale è ricordato che in origine cómpito unico della geometria era la misura degli appezzamenti di terreno (donde il nome dato a tale scienza), ma che, a poco a poco, il programma ne venne ampliato, introducendo la ricerca dei volumi e delle superficie non piane; ciò diede origine ad investigazioni di carattere dottrinale, le quali permisero ad Eudosso ed Archimede di scoprire le espressioni dei volumi del cono e della sfera, nonchè la superficie di quest'ultimo solido.

Nelle prime proposizioni del I Libro dei *Metrica* sono calcolate le aree di rettangoli e triangoli; in alcuni problemi di quest'ultima specie Erone applica la formola dianzi riferita e che egli ha cura di stabilire, servendosi dello stesso ragionamento che s'incontra nel *Traguardo*. Passa poi a valutare il contenuto di quadrangoli piani, inscrittibili o non, e finalmente a calcolare con sufficiente approssimazione le lunghezze dei lati dei poligoni regolari di 3, 5,... o 12 lati; per quanto concerne quelli di 9 e 11 lati egli si sarà giovato di risultati consegnati in un'opera di Ipparco che poteva avere a sua disposizione; per gli altri egli non ricorse, per quanto sappiamo, che alle proprie forze e pervenne a conclusioni non prive di eleganza: citiamo a titolo di esempio il teorema seguente « il lato dell'ottagono regolare inscritto in un cerchio sta al raggio di questo approssimativamente nel rapporto 7/8 ». Per calcolare l'area di un poligono non dotato di alcuna regolarità, il nostro autore ne suggerisce la decomposizione in triangoli, mentre per determinare l'area di un cerchio si appoggia ad Archimede; al quale si rivolge eziandio per risolvere il problema inverso, cioè per determinare il raggio di un cerchio di data area, per calcolare l'area di un segmento o di una corona circolare, finalmente per trovare l'area di un'ellisse, di un cono o di una calotta sferica.

Nel II Libro dei *Metrica* Erone espone il modo di misurare un grande numero di solidi, alcuni dei quali (ad esempio i poliedri regolari) s'incontrano nella classica geometria, mentre altri (come sarebbero

i mucchi di ghiaia) sono suggeriti dai bisogni della pratica e altri ancora appartengono alle regioni più elevate della scienza dell'estensione. Notiamo fra questi, anzitutto, la spira o anello, il cui volume vien calcolato con la formola che vedemmo (n. 56) già applicata da Dionisidoro e che Erone giustifica trasformando quel solido in un cilindro avente per base il cerchio generatore del solido in questione e per altezza la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro durante la rotazione generatrice: è la stessa ardita argomentazione che, come diremo a suo tempo, assai più tardi usò Keplero al medesimo scopo; altri solidi misurati da Erone sono quelli che s'incontrano nell' Ἐφόδικον di Archimede.

L'ultimo libro dell'opera in esame tratta, non più della misura, ma della divisione delle figure in parti aventi fra loro o col tutto relazioni assegnate; è un tema che, come sappiamo (v. n. 40), fu già trattato da Euclide in un'opera la cui scomparsa manifestasi in questo momento sommamente deplorevole, perchè in conseguenza non ci è possibile decidere quali modificazioni ed aggiunte vi abbia apportate il geodeta alessandrino. Quella perdita ci fa tanto maggiormente rallegrare per il recente ritrovamento dei *Metrica*, chè l'ultima parte di tale lavoro ci permette di formarci un'idea del come i Greci concepirono e trattarono il problema della ripartizione delle superficie. Queste ultime pagine dell'opera eroniana, specialmente nella parte planimetrica, sono scritte in istile prettamente euclideo e, grazie alla importanza dei procedimenti e dei risultati, potrebbero tuttora servire come prezioso complemento agli *Elementi* di Euclide. Nelle questioni stereometriche ricompaiono i numeri; fra esse merita di essere notato il difficile problema di dividere un tronco di cono retto a basi parallele, con un piano parallelo alle basi, in due parti i cui volumi abbiano fra loro un assegnato rapporto. Vi si trova, inoltre, un cenno, purtroppo eccessivamente conciso, intorno al problema archimedeo di dividere una sfera in due parti i cui contenuti abbiano fra di loro un rapporto assegnato; giova finalmente ricordare come i *Metrica* rappresentino l'unico documento capace di gettare qualche raggio di luce sul procedimento seguito dai Greci per estrarre le radici cubiche dai numeri.

Le urtanti diseguaglianze di stile che s'incontrano nei *Metrica* sono probabilmente da addebitarsi, non ad Erone, ma a posteriori compilatori, rifacitori od amanuensi, onde non possono impedire di dichiarare i *Metrica* un'opera egregia, che, se anche non può gareggiare con i capolavori dell'antica geometria, giustifica pienamente l'alta considerazione di cui l'autore godette presso i contemporanei ed i posteri immediati.

Al sorgere ed al permanere di tale sentimento contribuirono senza dubbio le altre opere fisico-matematiche, su cui a noi è vietato di soffermarci, ma che fanno apparire Erone come il primo esempio di quelle menti scientifiche poliedriche, pronte e disposte tanto ad investigazioni di carattere puramente dottrinale, quanto a svariatissime applicazioni, delle quali l'Italia offrì nel Rinascimento due tipi splendidissimi in Leonardo da Vinci e L. B. Alberti.

78 - Tolomeo ed Erone — i più eminenti cultori delle matematiche applicate che produsse la Grecia e le cui opere si sono sottratte alla furia

distruggitrice dei barbari — sono le ultime personalità spiccate che si incontrino nell'antica letteratura geometrica: con la loro scomparsa comincia quel periodo di decadenza che è contrassegnato dai pallidi commentatori di cui già descrivemmo (nn. 63-65) le non geniali fatiche. Il popolo prediletto dalla natura, che aveva manifestata un'originalità sino ad oggi insuperata nella poesia e nell'eloquenza, nella scultura e nell'architettura, nella filosofia ed in tutte le scienze di puro ragionamento, diviene gradatamente sempre meno fertile in produzioni di valore permanente, scendendo giù giù nella china che lo portò al livello intellettuale di quei barbari che, nei suoi bei tempi, esso copriva di ben giustificato disprezzo.

È vano, a parer nostro, cercare una causa unica a tale deplorevole mutazione, neppur restringendo la ricerca alle scienze di cui ci occupiamo. Invero siffatta causa non risiede nell'avere i geometri del periodo aureo della matematica greca esauriti i campi d'indagini che essi avevano schiusi e coltivati: infatti la geometria elementare attendeva impaziente migliorie nelle basi e complementi alla sommità; della teoria delle curve e delle superficie erano stati scoperti soltanto sparsi e scarsi materiali; finalmente le brillantissime applicazioni fatte, specialmente da Archimede, dei metodi infinitesimali del tempo dovevano servire di stimolo e guida ai più animosi ed esperti matematici posteriori. Nè si creda che i procedimenti allora in uso per la ricerca della verità, per quanto non esenti da gravi imperfezioni, fossero divenuti ormai inservibili, giacchè vedremo che quando, dopo molti secoli di pigro torpore, risorsero possenti negli uomini il desiderio di accrescere la ricchezza della matematica e l'energia per raggiungere lo scopo, essi diedero frutti così numerosi e sostanziosi che parve l'antica pianta miracolosamente ripullulasse da profonde radici.

Può darsi che alla decadenza e rovina della matematica greca abbiano contribuito un senso di stanchezza o di noia somigliante a quello che assale chi siasi a lungo occupato di uno stesso soggetto, fors'anche la moda, e finalmente le condizioni politiche in cui trovavasi la Grecia dopo il trionfo delle aquile latine: però non va dimenticato (specialmente da noi Italiani) come la storia insegni che popoli schiavi, divisi e dispersi hanno saputo validamente resistere all'azione oscurantista di dominatori rozzi e incolti, e abbiano saputo manifestare, appunto nelle investigazioni più lontane dal contatto con la realtà, la loro inestinguibile genialità e l'indistruttibile unità etnica.

Se, pertanto, a nessuna di queste circostanze si può attribuire l'ufficio completo di verme roditore del genio matematico greco, per converso nessuna deve venire *a priori* esclusa dall'elenco delle cause recondite di un fenomeno che non verrà mai sufficientemente lamentato, cioè della scomparsa del popolo greco dall'elenco delle stirpi costantemente intese a ricercare la verità nei campi e coi metodi in cui s'illustrarono Euclide ed Archimede, Apollonio e Pappo, Tolomeo ed Erone. Tuttavia i germi creati da quei nostri sommi progenitori scientifici, sepolti durante lungo volgere di secoli, non perdettero nemmeno in parte la loro virtù fecondatrice; giacchè, come vedremo nel proseguimento di questi nostri

studi, quello che, per quasi un millennio, apparve come un cadavere irrigidito, era destinato a dar vita a nuovi enti pieni di vigore, in conformità e a conferma della grande legge di natura, secondo cui dalla Morte trae origine la Vita.

## BIBLIOGRAFIA

TH. L. HEATH, *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus. A History of Greek Astronomy to Aristarchus* (Oxford, 1913).

AUTOLYCI, *De sphaera quae movetur libri duo. De ortibus et occasibus libri duo, una cum Scholiis antiquis,* edidit F. Hultsch (Lipsiae, 1886).

C. MANITIUS, *Des Hypsikles Anaphorikos nach Ueberlieferung und Inhalt kritisch behandelt* (Dresden, 1888).

J. L. HEIBERG, *Theodosius Tripolites Sphaerica* (Abh. der Gesell, der Wissenschaften zu Göttingen, Phil.-ist. Klasse, Neue Folge, Bd. XIX, 1927).

PAUL VER EECKE, *Les Sphériques de Théodose de Tripoli.* Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une Introduction et des Notes (Bruges, 1927).

HIPPARCHI *in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum,* ed. Manitius (Lipsiae, 1894).

*Composition mathématique de* CLAUDE PTOLOMÉE, traduite pour la première fois du grec en français par HALMA, 2 vol. (Paris, 1813 e 1816; riprodotto nel 1927).

PTOLEMAEI, *Planisphaerium:* JORDANI, *Planisphaerium:* F. COMMANDINI *Urbinatis in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius* (Venetiis, 1558).

C. PTOLEMAEI, *Liber de Analemmate* (Romae, 1552).

*Traité de Géographie de* CLAUDE PTOLEMAEI, trad. par HALMA (Paris, 1828).

*Commentaire de* THÉON *sur le premier Livre de la Composition mathématique de Ptolemée,* trad. par HALMA (Paris, 1821).

HERONIS ALEXANDRINI, *Opera quae supersunt omnia.* Vol. I: *Herons von Alexandria Druckwerke und Automathentheater griechisch und deutsch herausgegeben von* W. Schmidt (Leipzig, 1899). Vol. II: *Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik herausgegeben und übersetzt von* L. Nix *und* W. Schmidt (Leipzig, 1901). Vol. III: *Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von* H. Schöne. Vol. IV: *Heronis Definitiones cum variis Collectionibus, copiis G. Schmidts usus, edidit* J. L. Heiberg (Lipsiae, 1912). Vol. V: *Heronis quae feruntur Geometrica et de Mensuris,* edidit J. L. Heiberg (Lipsiae, 1914).

ANARITII *in decem Libros priores Elementorum Euclidis Commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi* 569 *servata, edidit* M. Curtze (Lipsiae, 1899).

*Codex Leidensis* 399, I, *Arabice et Latine ediderunt* R. O. BESTHORN et L. L. HEIBERG (Hauniae, 1893-1910): pubblicazione portata a termine da G. JUNGE, J. RAEDER, W. THOMSON (id. 1932).

A. A. BJÖRNBO, *Studien über Menelao's Sphärik* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, Heft XIV, Leipzig, 1902).

## CAPITOLO VI

# L'ARTE DEL CALCOLO E LA SCIENZA DEL NUMERO PRESSO I GRECI

79 - Qualunque corpo solido possiede, indipendentemente da tutte le altre sue proprietà fisiche, una determinata *forma,* la quale, ove non intervengano cause perturbatrici esterne, è invariabile, epperò caratteristica per quel corpo. D'altra parte, se si considera una qualunque collezione di individui distinti, anche di nature differenti fra loro, e si prescinde mentalmente da tutte le proprietà fisiche di ciascuno, essa possiede un « quid » specifico, che denominasi *numero* di quegli oggetti. Da queste due semplici osservazioni traggono origine tutti i concetti che s'incontrano nella matematica; chè al concetto di forma di un corpo, logicamente svolto, deve la propria esistenza la *geometria,* mentre l'idea di numero è il germe da cui rampollò l'intera *aritmetica.* Entrambe queste discipline furono studiate con grande impegno dal popolo ellèno: ai Greci che coltivarono con successo la scienza dell'estensione figurata sono dedicati i quattro precedenti Capitoli; bisogna, ora, che intraprendiamo una ricerca congenere riguardo all'arte del calcolo e alla scienza del numero; ciò, fra l'altro, ne porgerà occasione per rendere più conforme al vero l'immagine che abbiamo delineata di alcuni scienziati eminenti, dei quali già esaminammo la produzione geometrica. Però, come alla storia letteraria di qualunque popolo debbono venire premesse precise informazioni intorno all'alfabeto ed alla lingua da esso usati, così all'esposizione dell'opera aritmetica di qualsivoglia nazione deve premettersi qualche notizia intorno ai procedimenti da essa adoperati per designare oralmente o graficamente i numeri della serie naturale; onde, prima d'ogni altra cosa, faremo conoscere a grandi linee i mezzi usati dai Greci per eseguire i calcoli sempre più complicati, resi necessari dal consorzio civile, dai traffici ognor più estesi e dalle investigazioni scientifiche, grado grado più elevate.

### L'alfabeto del linguaggio aritmetico dei Greci

80 - Tali mezzi sono la Numerazione parlata e la Numerazione scritta.

Ora, applicando un concetto generale che già esponemmo (n. 2), i Greci adoperarono un sistema di numerazione avente per « base » (indicando, come già facemmo, con tal nome l'intervallo costante fra due nu-

meri fondamentali consecutivi) il numero 10, nel quale, però, anche al numero 20 è accordato un posto distinto. Infatti i primi dieci numeri venivano ad essi designati con nomi speciali; col mezzo di questi, ricorrendo alla giustapposizione, denominarono i numeri 11, 12,..., 19, ma per il numero 20 foggiarono un nuovo vocabolo, il quale li pose in grado di designare più comodamente i numeri 21, 22,..., 29. Scelto un nuovo nome per il 30, su esso furono modellati i nomi dei numeri 40, 50,..., 90: così si poterono indicare con la voce tutti i numeri inferiori a 100. Creati poi dei vocaboli per rappresentare i numeri 100, 1000, 10.000, si fu in grado di rappresentare tutti i numeri non superiori a questo limite (*miriade*), al quale per lungo volgere d'anni i Greci sembra si siano arrestati, non avendo sentito il bisogno di oltrepassarlo.

Giunti a nominare tutti gli individui che popolavano l'ambiente numerico da essi considerato, i Greci poterono eseguire su di essi le prime operazioni aritmetiche (addizione, sottrazione, moltiplicazione) nei casi più semplici con la memoria, nelle circostanze più complesse aiutandosi con le dita o con gettoni o pietruzze (« calcoli » dei Latini, donde il vocabolo « calcolare ») o finalmente giovandosi di una tavola (« abaco ») ricoperta di polvere, di cui vuolsi che Pitagora abbia diffuso la conoscenza presso i propri connazionali, dopo di averla vista in uso presso gli Egiziani: va notato che, mentre siamo all'oscuro riguardo ai congegni aritmetici adoperati dai Greci, uno smirneo vissuto nel secolo XIII o XIV — Nicola Artavasde detto Rhabdas — , in due lettere che studieremo più innanzi (n. 99) ha lasciate notizie esaurienti intorno al calcolo digitale in uso nell'antichità presso i proprii compatrioti.

81 - Ma il più potente ausiliare per il calcolatore fu in ogni tempo offerto dalla scrittura. Ora il modo più semplice e naturale per indicare graficamente un numero consiste evidentemente nel ripetere un medesimo segno (un tratto verticale od un punto) tante volte per quante sono le unità in esso contenute. Questa procedura doveva presentarsi spontaneamente ai Greci dal giorno in cui Talete insegnò loro essere un numero null'altro che una collezione di unità; ed infatti una inscrizione, che risale al 391 a. C., fa fede che essa fu in uso presso la gente di cui ci occupiamo. Evidentemente, però, essa può servire soltanto per numeri piccoli perchè, quando si tratti di numeri un po' considerevoli, è incomoda per chi la usa e oscura per chi deve leggere le figure risultanti. In quale epoca i Greci ne abbiano avvertiti i difetti è ignoto; sappiamo soltanto che l'abbandonarono per altra, la quale venne accuratamente descritta dal grammatico Erodiano (170-240 dell'E. v.), il cui nome essa porta oggi ancora. Seguendo tale sistema, i numeri 1, 5, 10, 100, 1000, 10.000 sono designati con le lettere Ι, Π, Δ, Η, Χ, Μ: collocando poi una delle lettere Δ, Η, Χ, Μ, fra le due aste verticali del segno Π si arrivò a rappresentare i numeri 50, 500, 5000, 50.000; allora gli interi intermedi potevansi rappresentare scrivendo di seguito parecchie volte alcuni di questi simboli opportunamente scelti.

In processo di tempo anche questo sistema rivelò la propria insufficienza e se ne limitò l'uso nelle epigrafi, in modo analogo a quanto noi oggi facciamo riguardo ai numeri romani.

Per gli usi comuni, regnando Tolomeo Ciladelfo (III sec. a. C.), si cominciò ad usare un altro metodo di numerazione scritta, nel quale le 21 lettere dell'alfabeto jonico, arricchito di altri tre segni (*episemi*) provenienti da altro alfabeto caduto in disuso, servirono a designare i numeri 1, 2,..., 9, 10, 20, 90, 100, 200,..., 900; mediante giustapposizione si fu così in grado di rappresentare tutti i numeri inferiori a mille, e va notato che i simboli delle varie specie venivano scritti rispettando la « legge di Hankel » (v. n. 2), scrivendosi, cioè, prima il simbolo delle centinaia, poi quello delle decine, finalmente quello delle unità. Ponendo un indice, a destra ad in basso, a ciascuno dei simboli ora enumerati, solevano i Greci designare i prodotti per 1000 dei numeri considerati; così, senza abbandonare il concetto generale suindicato, si era in possesso di un veicolo per percorrere una regione aritmetica assai più estesa (¹).

È opportuno qui osservare che tutti i numeri del tipo $\alpha\ 10^r$, ove $\alpha$ è un numero fisso della prima decade, mentre $r$ è un numero arbitrario, godono di proprietà comuni, che il nostro sistema di numerazione mette immediatamente in evidenza; ciò invece è difficilmente percepibile da chi usi la numerazione scritta dei Greci; ora per rimediare a tale inconveniente essi introdussero la nozione di « pitmene » di un numero che sia multiplo di 10, chiamando in tal modo ciò che noi oggi chiamiamo la sua cifra significativa, ed inserirono in ogni trattato d'aritmetica una tabella indicante per ogni numero dell'indicata specie minore di 1000 il relativo pitmene.

L'indiscutibile utilità pratica di siffatta considerazione fu posta in luce da Apollonio Pergeo, in un'opera perduta, che Pappo ha commentato nel II Libro della sua *Collezione*, come risulta dal frammento che tuttora ne esiste. Va eziandio osservato che, contrariamente a quanto opinarono e scrissero alcuni eminenti storici, si deve assolutamente escludere che i Greci abbiano usato lo *zero*, nel significato che esso ha nella nostra aritmetica di posizione, chè il segno ο che si trova per segnalare l'assenza di unità di un certo ordine decimale altro non è che l'iniziale della parola οὐδέν (nulla).

L'ultimo sistema di numerazione scritta dei Greci presenta una grande analogia con quello che si trova applicato in scritti ebraici; per molto tempo si ritenne, senza discussione, che ai Greci l'avessero insegnato gli Ebrei, i quali, in conseguenza, avrebbero provocato l'abbandono del sistema erodianico; ma di recente furono addotti ottimi argomenti a sostegno della tesi secondo cui questi avrebbero imparato da quelli a servirsi delle lettere dell'alfabeto per rappresentare i numeri interi; a dimostrare la fondatezza di tale opinione milita il fatto che tale uso — almeno per quanto insegnano i documenti esistenti — non risale, presso i discendenti di Mosè, oltre il II sec. a. C.

(¹) È il sistema usato anche dagli Ebrei; ma quale dei due popoli l'insegnò all'altro? Questione oscura e tuttora irresoluta. Per informazioni relative rinviamo il lettore all'articolo di S. Gaudz: *Hebreu Numerals* (Proc. of American Academy for Jewish Researches, Vol. IV, 1932-33).

82 - Mentre spetta agli specialisti in esegesi biblica ed in filologia greca il pronunciare una sentenza in ultima istanza sopra questo importante problema storico, al sistema numerale dei Greci è collegata una questione prettamente scientifica di non minore interesse, quella cioè di determinare i confini della regione aritmetica governata dal sistema stesso. Essa si manifestò ben presto di così fondamentale importanza che Archimede non sdegnò di dedicarvi un'opera speciale, dal titolo *Principî*, diretta a Zeusippo, ma, per nostra disgrazia, perduta; fortunatamente però la quintessenza se ne trova in un opuscolo, tuttora esistente, da lui dedicato a re Gelone, opuscolo che nelle prime versioni latine recava il titolo *De numero arenae o Arenarius*. La ragione di questo curioso titolo sta nel fatto che in tale lavoro il grande siracusano si è proposto di mostrare infondata l'opinione (di cui qualche traccia, in forma poetica, si trova anche nella *Bibbia*) che il numero dei granelli d'arena esistenti nel mondo, essendo infinito, non può esprimersi con i segni dell'aritmetica. Per raggiungere lo scopo egli si propose di far vedere che, invece, è possibile esprimere graficamente il numero dei grani di sabbia esistenti in una sfera concentrica alla terra e giungente sino alle stelle fisse, sfera che (come egli dimostra) ha un diametro non superiore, e che egli fa proprio eguale, a $10^{10}$ stadi.

Premesse alcune nozioni e considerazioni di carattere astronomico, egli prosegue osservando che furono dati dei nomi ai numeri non superiori ad una miriade (v. sopra) e che pei numeri maggiori non si fece che ripetere una miriade sino a diecimila miriadi. Orbene, tutti i numeri risultanti (che, cioè, sono $\leqq 10^8 = 100000000$) si chiamino numeri primi, mentre una miriade di miriadi del massimo numero primo (cioè il numero $10^{16} = 10^{2.8}$) sia chiamato « unità dei numeri secondi ». Si conti mediante questa nuova unità per decine, centinaia, migliaia e miriadi sino ad una miriade di miriadi ($10^8$); una miriade di miriadi di unità di numeri secondi (cioè il numero $10^{3.8}$) sia l'« unità dei numeri terzi »; e con lo stesso metodo si prosegua fino a toccare il numero $10^{8.108}$, cioè al numero che noi esprimiamo con l'unità seguita da 800 milioni di zeri. Continua Archimede osservando che, benchè questa massa di numeri sia largamente sufficiente per raggiungere il fine propostosi, pure, con la stessa procedura da lui usata, è lecito spingersi molto più oltre. Infatti tutti i numeri non superiori a $10^{8.108}$ si chiamano « numeri del primo periodo » ed all'ultimo di essi si dia il nome di « unità dei numeri primi del secondo periodo »; si conti col mezzo di essi fino a toccare il numero

$$10^8 \times 10^{8.108} = 10^{8\,(108+1)}$$

e questo si chiami « unità dei numeri secondi del secondo periodo » e si prosegua analogamente toccando successivamente le unità $10^{8\,(108\pm2)}$, $10^{8\,(108+3)}$, sino a raggiungere il numero $10^{2.8.108}$; così si saranno considerati tutti i numeri del secondo periodo: l'ultimo di essi è espresso dall'unità seguita da milleseicento milioni di zeri.

Difficil cosa è rendersi ragione della enormità di tale numero; per formarsene in qualche modo un concetto aiutano le considerazioni seguenti:

*a*) Supposto che una cifra occupi linearmente lo spazio di due mm., per scrivere 1600 milioni di zeri occorre un nastro lungo 3.200.000 metri ossia 3200 Km., distanza che per essere percorsa esigerebbe più di 32 ore di treno direttissimo!

*b*) Se, per evitare l'uso di una striscia così poco maneggevole, si preferisce scrivere quel numero in un volume, si noti che le ordinarie tavole logaritmiche contengono in ogni pagina 50 linee, ognuna delle quali risulta da 50 cifre, onde in ogni pagina entrano 2500 cifre; ciò prova che per scrivere il numero suindicato occorrono 640.000 pagine, cioè 1280 volumi di 500 pagine; un'intera biblioteca!

*c*) Ritenendo che per scrivere una cifra s'impieghi poco meno di un minuto secondo, in un'ora (di 3600 secondi) si potranno scrivere circa 4000 cifre e 40.000 in una giornata di dieci ore di lavoro; onde, per scrivere il numero in parola, occorrerebbero 40.000 giorni, cioè più di un'intera laboriosissima esistenza!

83 - Archimede si arresta all'ultimo numero del secondo periodo, ma non manca di osservare come il metodo di generazione da lui ideato per numeri sempre più grandi si possa applicare indefinitamente, della qual cosa è facile rendersi ragione. Per facilitare i calcoli con le nuove entità aritmetiche da lui create, egli stabilisce il teorema che oggi noi esprimiamo con la formola $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$, $m$ e $n$ essendo numeri interi positivi quali si vogliano. Col mezzo di esso e di tutti gli altri principi astronomici ed aritmetici da lui stabiliti il sommo matematico arriva a concludere che esiste un numero non superiore a $10^{63}$ atto a rappresentare il numero dei grani di sabbia che capirebbero in un sfera concentrica alla terra e raggiungente le stelle fisse. Ed invero chiunque percorra l'originalissimo opuscolo ora discorso non può negare che egli abbia toccata la lontana mèta che si era prefissa: ma egli fece molto di più e di meglio. Mediante l'ingegnoso suo scritto egli mostrò ai propri connazionali, affetti da invincibile idiosincrasia per i grandi numeri, che questi si possono trattare con gli stessi procedimenti in uso riguardo agli altri elementi della serie naturale; in tal modo egli riuscì a dirigere la loro attenzione verso l'infinitamente grande aritmetico, come nelle memorabili applicazioni da lui fatte del metodo di esaustione li aveva indotti a vincere la loro ripugnanza per l'infinitamente piccolo geometrico.

L'*Arenario* è un lavoro di così robusta ossatura e di così vasta portata che poco o nulla lascia a desiderare, sicchè anche coloro che sarebbero stati tentati di spigolare nel campo mietuto da Archimede si saranno ben presto convinti che le loro fatiche non avrebbero ricevuto un equo compenso. Tuttavia il II Libro della *Collezione matematica*, nel frammento che ancora ne possediamo, insegna la esistenza di un'opera di Apollonio Pergeo — di cui già facemmo (p. 99) casuale menzione — ove, per rendere illimitato il potere degli strumenti aritmetici dei Greci, si proponeva una modificazione semplificatrice ai concetti inventati dal siracusano, sostituendo alle « ottadi », da questo costantemente impiegate, periodi minori detti « tetradi »; vale a dire, mentre nel sistema

archimedeo funge da protagonista il numero $10^8$, in quello del Pergeo questo importante ufficio è affidato a $10^4$; in conseguenza qualunque numero è rappresentato sotto la forma $\sum_r A_r \cdot 10000^r$. $A_r$ essendo un numero inferiore ad una miriade. L'emergente sistema fu giudicato più pratico del precedente, onde sembra avere finito per trionfare in Grecia.

84 - Le frequentissime occasioni, di natura teorica e pratica, in cui devesi eseguire il quoziente di due numeri, di cui il maggiore *non* è multiplo del minore, portarono ad ampliare il primitivo concetto di numero, aggregando agli interi le frazioni: donde la necessità di rappresentare con la scrittura anche questi nuovi enti aritmetici. Ora i Greci considerarono tre specie di frazioni e cioè:

1°. Le *frazioni fondamentali,* che senza dubbio appresero dagli Egiziani; essi le indicarono con i caratteri rappresentanti i denominatori, sormontati da un segno di varia forma; al pari dei loro maestri usarono un simbolo speciale per la frazione 2/3 e tutti gli altri numeri frazionari decomposero in interi e frazioni fondamentali. Chi voglia trovare applicazioni di queste può ricorrere alle opere di Erone, alle *Lettere* del Rhabdas, che citammo incidentalmente e che analizzeremo al termine del presente Capitolo, e più ancora ad un Papiro matematico, che porta d'ordinario il nome di Akhmim, in memoria della località egiziana ove esso venne scoperto. È scritto in greco e risale al VII o all'VIII sec. dell'èra nostra; è dovuto alla mano di un cristiano, ma è probabilmente copia di un documento di più antica data. Riguardo al contenuto può, in gran parte, riguardarsi come la continuazione del Papiro Rhind, giacchè contiene estese tabelle di scomposizioni di frazioni ordinarie in fondamentali, scomposizioni che si potrebbero stabilire direttamente applicando le considerazioni da noi svolte parlando del più antico documento concernente la logistica egiziana (v. n. 14). Possiamo aggiungere che i problemi aritmetici ivi risolti sono del genere e della difficoltà di quelli che incontrammo nel Papiro Rhind, il che serve di riprova alla persistenza delle procedure aritmetiche create sulle rive del Nilo.

2°. Benchè tale sistema abbia resistito per lungo volgere di secoli (tanto che se ne trova traccia persino nel XIV secolo), pure i Greci non ignorarono (almeno a partire da Archimede) il modo di servirsi delle frazioni a numeratori qualunque e le indicarono con una scrittura non dissimile da quella da noi usata, sui particolari della quale reputiamo opportuno non insistere perchè ci troviamo nell'impossibilità di decidere se i simboli vergati nei manoscritti esistenti siano parto degli autori o di posteriori amanuensi.

3°. Finalmente, specie nell'astronomia di misura, uniformandosi ai concetti in uso presso i Babilonesi, i Greci adoperarono le frazioni « sessagesimali » o « astronomiche », cioè rappresentarono ogni numero sotto la forma $a_0 + \frac{a_1}{60} + \frac{a^2}{60^2} + \dots$, ove $a_0$ è un intero arbitrario,

mentre $a_1$, $a_2$,... sono numeri pure interi, ma inferiori a 60; è un sistema di cui notoriamente ancora esistono tracce nella nostra letteratura matematica e nell'uso comune.

## La Logistica greca

85 - Il complesso delle regole per eseguire praticamente le operazioni con numeri, sino dai tempi di Aristotele, veniva dai Greci riguardato come costituente una disciplina speciale detta Logistica e che, nella gerarchia delle discipline matematiche, occupava un posto di molto inferiore a quello accordato all'Aritmetica propriamente detta, alla quale veniva riserbato lo studio delle proprietà dei numeri. Forse, appunto grazie a tale modestissima posizione della Logistica, i Greci non ce ne tramandarono alcuna esposizione metodica, e non sembra infondata l'ipotesi che neppure ne abbiano composta, ritenendola materia di esclusiva pertinenza dell'insegnamento orale. In conseguenza, per formarsi un'idea della maniera con cui essi calcolavano non v'è altro mezzo che spiare come essi procedevano in ogni singolo caso. I commenti di Eutocio, di Pappo e di Teone Alessandrino, le già citate *Lettere* di Rhabdas ed alcuni sparsi scoli anonimi sono gli unici aiuti a cui si può ricorrere per far luce sull'importante argomento (1). Si riesce in tal modo a convincersi che l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione venivano eseguite « ab antiquo » con procedimenti del tutto simili a quelli oggi in uso; però, per la moltiplicazione, si ricorreva sovente al procedimento delle successive duplicazioni che vedemmo usato dagli Egiziani (v. n. 12), dai quali i Greci senza dubbio l'appresero. Inoltre per rendere più agevole, sicura e spedita la moltiplicazione di due numeri interi vennero costruite nell'antichità tavole di moltiplicazione (le quali però non furono mai attribuite a Pitagora, come i moderni a torto si ostinano di fare) (2); vero è che le uniche che esistano tuttora appartengono ad epoca relativamente recente (perchè si leggono nelle succitate *Lettere* del Rhabdas); ma siccome sono dichiarate « invenzione di Palamede », frase che i cultori della filosofia greca assicurano designare una provenienza dell'antica tradizione, così è certo trattarsi di un ausiliare le cui origini risalgono ai primordi della civiltà greca.

Da lavori a scopi astronomici si apprendono poi i particolari dell'esecuzione delle stesse tre operazioni sopra numeri espressi in interi e frazioni sessagesimali. Quanto all'estrazione di radice quadrata, gli esempi che stanno a nostra disposizione provano che, quando si adoperavano frazioni di quella specie, i Greci procedevano in modo sostanzialmente identico a quello che usiamo noi allo stesso scopo; ma quando

(1) Vanno aggiunti due marmi incisi, uno dei quali, essendo stato trovato (nel 1846) nell'isola di Salamina, ne porta ordinariamente il nome; non potendo entrare in particolari al riguardo, rinviamo il lettore a una memoria di A. NAGL (*Abh. zur Gesch. der Mathematik*, t. IX, 1899) ove trovasi anche riprodotta in litografia la tavola di Salamina.

(2) *A torto*, a meno che non si tratti di un semplice omaggio alla memoria del sommo filosofo.

si servivano di frazioni ordinarie applicavano un artificio che, usando il linguaggio algebrico, può enunciarsi come segue: se $A = a^2 + b$, ove $a^2$ è il massimo quadrato contenuto in A, $\sqrt{A}$ ammette la seguente serie di valori sempre più approssimati:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),\ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right),\ \alpha'' = \frac{1}{2}\left(\alpha' = \frac{A}{\alpha'}\right),\ldots$$

La più elevata delle operazioni aritmetiche eseguite dai Greci è la estrazione delle radici cubiche dai numeri interi; benchè di essa si conosca un solo esempio, di recente scoperto nelle opere di Erone d'Alessandria, dal quale non è agevole trarre conclusioni generali, pure sembra assai probabile che la si eseguisse servendosi di una forma speciale del metodo di falsa posizione.

A ciò riduconsi le informazioni degne di fede che ci vengono date intorno all'aritmetica pratica dei Greci antichi.

## L'Aritmetica nelle opere di Pitagora, di Platone e dei loro discepoli

86 - Nel volgerci alla parte più elevata della scienza dei numeri, per descrivere quale messe vi abbiano raccolta i Greci, è necessario osservare che, mentre le varie fasi di sviluppo della antica geometria presentano fra loro la salda concatenazione che lega causa ad effetto, antecedente a conseguente, nello svolgimento storico dell'aritmetica si manifestarono due indirizzi nettamente distinti. L'uno ha il proprio fondamento nella rappresentazione dei numeri mediante segmenti e dei loro prodotti mediante rettangoli: come tale concetto sia svolto insegnano i libri VII-IX degli *Elementi* di Euclide. Nell'altro indirizzo procedono le esposizioni veramente pure, esenti cioè da qualunque rappresentazione concreta. Ora le scaturigini e il primo stadio di sviluppo di siffatto modo di concepire la scienza dei numeri risalgono alla scuola di Pitagora, i cui membri, dopo di avere scoperte le leggi fondamentali dell'acustica, erano costantemente sospinti dall'aspirazione a scoprire rapporti numerici fra gli agenti fisici suscettibili di misura. Sgraziatamente i risultati positivi di siffatte investigazioni andarono smarriti e confusi con quelli dei tardi rinnovatori del Pitagorismo, onde riesce vano ogni sforzo per redigerne un elenco esatto e la più oculata prudenza deve usarsi prima di attribuire qualche speciale ritrovato al filosofo di Samo od ai suoi discepoli diretti. Tuttavia, come già dicemmo in altra occasione (n. 25), sembra impossibile revocare in dubbio che nel cenacolo di Crotone siano state considerate e studiate alcune specie di proporzioni fra numeri interi e scoperte di quantità irrazionali. Ivi poi ebbe origine, non soltanto il concetto di « numero perfetto » — che già incontrammo in Euclide — ma anche quello di « numeri amici », ognuno dei quali è eguale alla somma dei divisori dell'altro (come sarebbero i numeri 220 e 284, noti ai Pitagorici), di « numeri quadrati » e di « numeri triangolari ». Di

queste due ultime specie i Pitagorici conoscevano la genesi che oggi si esprime mediante le formole:

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2,$$

$$1 + 2 + 3 + .... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ad essi si fa anche merito di una regola semplice per costruire infiniti triangoli rettangoli in numeri interi, partendo da un numero dispari $a$; essa può esprimersi dicendo che, in tale ipotesi $a$ e $\frac{a^2 - 1}{2}$ misurano i cateti di un triangolo di detta specie, del quale l'ipotenusa è $\frac{a^2 + 1}{2}$. A Pitagora si attribuisce poi l'osservazione che 16 e 18 sono gli unici numeri interi capaci di misurare ad un tempo la superficie ed il perimetro di un rettangolo (in altre parole che le coppie 4,4 e 3,6 rappresentano le uniche soluzioni dell'equazione indeterminata $xy = 2(x + y)$. Finalmente un presunto discepolo di Pitagora, Timarida, ha scoperto una regola (detta « epantema » e, in latino, « florida sententia ») per risolvere il problema che oggi si enuncia mediante un sistema di equazioni del tipo seguente:

$$x + x_1 = a_1 \quad , \quad x + x_2 = a_2 \quad , \quad ... \quad x + x_n = a_n \, ,$$
$$x + x_1 + x_2 + ... + x_n = a \, ;$$

in linguaggio algebrico quella regola si esprime scrivendo:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n - a}{n - 1}.$$

87 - In matematica Platone fu discepolo di Pitagora, onde le sue opere vanno accuratamente esaminate, tanto per rendere meno imperfetto il quadro delle cognizioni possedute dal maestro, quanto per segnalare le aggiunte fattevi dallo scolaro. Fra queste incontriamo anzitutto una procedura (che alcuni preferiscono attribuire ad Archita) per costruire infiniti triangoli rettangoli in numeri, la quale completa quella dovuta a Pitagora; mentre in questa si prendeva le mosse da un numero dispari, il divino filosofo partiva da un numero pari $a$ ed asseriva che $a$ e $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ sono cateti di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$.

Mentre ciò è perfettamente chiaro, l'intelligenza di altri passi matematici delle opere di Platone riesce estremamente difficile e persino impossibile; per esempio, malgrado i reiterati e geniali studi di cui furono oggetto gli scritti del divino filosofo, non si conosce ancora che cosa fossero i numeri da lui detti « armonici », ed i più reputati inter-

preti del suo pensiero disputano tuttora intorno al valore del « numero nuziale » al quale egli, imbevuto come era del misticismo numerico, caratteristico della filosofia pitagorica, attribuiva una fondamentale funzione regolatrice nell'andamento degli stati.

88 - Va ora notato che l'indirizzo prettamente pitagorico delle ricerche aritmetiche di Platone venne mantenuto da suo nipote Speusippo, che gli successe nella direzione dell'Accademia; abbondonato poco dopo per quello geometrico — come provano i Libri aritmetici di Euclide —, fu ripreso entusiasticamente all'epoca della rinascita del Pitagorismo, dovuta a coloro che appartennero alle sètte dei Neo-Pitagorici e dei Neo-Platonici.

Fra i primi va giustamente famoso Nicomaco da Gerasa (città dell'Arabia), vissuto tra la fine del I sec. ed il principio del II dell'èra nostra ed autore di una *Introduzione aritmetica,* tuttora esistente, e su cui è dover nostro spendere qualche parola (¹).

Senza arrestarci alle divagazioni filosofiche che vi abbondano, senza segnalarvi alcune conferme di ritrovati che già esponemmo parlando di Euclide e di Eratostene, rileveremo alcune applicazioni fatte da Nicomaco della dottrina dei numeri perfetti insegnati negli *Elementi;* così, applicando la legge di costruzione ivi dimostrata, egli trova che i primi quattro numeri perfetti sono 6, 28, 496, 8182, ed osserva quanto di rado s'incontrino numeri della detta specie nella serie naturale, senza però alludere al dubbio (che oggi ancora non è stato fugato) se la serie dei numeri perfetti abbia o non un termine. Accenniamo, senza riferirla per esteso, alla enumerazione da lui fatta di molte specie di rapporti fra numeri, la quale per lungo volgere di secoli rimase classica in Occidente, ma finì con lo scomparire; accenniamo pure alle diffuse considerazioni da lui svolte intorno ai « numeri figurati », alcune specie dei quali si incontrano in scritti anteriori, mentre altre fanno ivi il loro ingresso nella scienza; fra i primi citiamo i « numeri poligonali » per notare che Nicomaco sa che ogni numero quadrato è somma di due triangolari

$$\left(n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2} + \frac{(n+1)\,n}{2}\right).$$

Notevole il « teorema di Nicomaco » espresso dalla formola

$$(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 3) + \ldots + (n^2 + 3\,n + 1) = (n + 1)^3,$$

sia in sè che per avere quale corollario l'altra importante relazione

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2,$$

la quale veramente non s'incontra nell'*Introduzione aritmetica*, ma che era certamente nota ai Greci; essi l'insegnarono ai Romani i quali, come

(¹) Probabilmente Nicomaco scrisse un'analoga *Introduzione geometrica,* ma questa non ci è pervenuta.

vedremo, ce ne tramandarono notizia. Non ci arrestiamo sugli ampi sviluppi esposti da Nicomaco intorno alla teoria delle proporzioni fra numeri, perchè nulla di essenziale aggiungono alle notizie da noi già date intorno a questa teoria così importante nell'antica matematica, e chiudiamo queste informazioni intorno al più popolare degli aritmetici greci osservando che da uno scrittore del XII secolo — O' Creat — venne imposto il nome di « regula Nicomachi » al seguente artificio pratico per elevare a quadrato un numero $a$ compreso fra 5 e 10; « si calcoli $d = 10 - a$; sarà allora $a^2 = 10(a - d) + d^2$ »; ora essa non si trova in Nicomaco; però nel suo trattato si legge il teorema « se $n$ è la media aritmetica fra $m$ e $p$, si ha $mp = n^2 - \left(\frac{m-p}{2}\right)^2$, dal quale si trae la surriferita procedura supponendo $m = 10$, e $p = a - d$; da ciò forse la ragione per cui il nome di Geraseno si trova annesso a quella regola.

89 - Fra le fonti di notizie sull'aritmetica greca, dopo l'*Introduzione aritmetica,* troviamo l'opera a noi già nota (v. n. 63) che il neo-pitagorico Teone Smirneo scrisse per agevolare la lettura degli scritti di Platone. Naturalmente ivi spesseggiano le divagazioni metafisiche ispirate ad un malsano misticismo aritmetico; ma vi si trovano anche altre considerazioni più sostanziose che non ci è lecito di passare sotto silenzio. Citiamo ad esempio la proposizione « non esiste alcun numero intero quadrato che abbia una delle forme $3h + 2$, $4h + 2$, $4h + 3$ », primo esempio di proposizioni negative così frequenti nella moderna teoria dei numeri. Citiamo ancora le ampie considerazioni intorno ai numeri *laterali* e *diametrali*: questi costituiscono due serie infinite aventi per primo elemento l'unità e che si possono costruire per via ricorrente applicando le relazioni: $l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$, $d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1}$; a meglio stabilirne l'importanza si può osservare che esse sono costituite dai numeratori e denominatori delle ridotte successive della frazione continua in cui si sviluppa $\sqrt{2}$.

Alla scuola dei Neo-Pitagorici, a cui appartennero Nicomaco e Teone, fa riscontro quella dei Neo-Platonici, un membro della quale somministra preziose informazioni allo storico dell'antica teoria dei numeri. È Giamblico, nato a Calcide (Asia Minore), da cospicua famiglia, nella seconda metà del II sec. dell'E. v. La più importante delle sue opere porta il titolo *Collezione delle dottrine pitagoriche;* delle dieci parti che la costituivano, cinque soltanto esistono oggi: a noi interessano la terza (*Introduzione matematica*) e la quarta (*Commento a Nicomaco*). Da esse si apprendono ulteriori considerazioni sopra i numeri perfetti « euclidei » — cioè della forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ — non prive di novità e di valore, ma non scevre da errori. Ad esempio è vero, come asserisce Giamblico, esistere numeri perfetti nell'intervallo $10.000^2$ e $10.000^3$, ma altrettanto non succede, come egli ritiene, negli intervalli $10.000^3$... $10.000^4$ e $10.000^4$... $10.000^5$. Forse la più notevole aggiunta fatta, (o semplicemente riferita) da Giamblico all'aritmetica anteriore è data dal seguente teorema: « Dati tre numeri consecutivi il maggiore dei quali sia mul-

tiplo di 3, se ne faccia la somma; delle cifre esprimenti il numero risultante si faccia la somma; sul numero così nascente si operi similmente; così proseguendo si finirà per ottenere il numero 6 ».

90 - Gli scritti matematici dovuti ai rinnovatori del Pitagorismo hanno la non pregevole prerogativa di segnare, per quanto concerne la struttura e lo stile, un indiscutibile regresso di fronte alle opere del periodo greco-alessandrino, chè i loro autori sembrano avere ignorato o disconosciuto il fatto che una proposizione matematica assurge alla dignità di teorema soltanto il giorno in cui si giunge in possesso di una dimostrazione inconfutabile di essa. Essi, infatti, si limitarono a verificare ogni singola proposizione sopra pochi casi particolari e si arrogarono il diritto di concluderne la validità universale: ora chi sa quanto numerose siano le proposizioni aritmetiche vere *in moltissimi casi*, ma che non sussistono *in generale*, si accorgerà senza pena che questo troppo disinvolto modo di procedere poteva essere fonte di gravi errori, epperò era pericolosissimo per la scienza. Tale minaccia sovrastante alla matematica èllena venne avvertita da un condiscepolo di Proclo, Domnino da Larissa, il quale, in un *Manuale introduttorio all'aritmetica*, per un vero miracolo tuttora esistente, sostenne la necessità di bandire le sfiaccolate argomentazioni adottate dai commentatori di Platone, per far ritorno alla impeccabile procedura euclidea, invocando di continuo la rappresentazione dei numeri mediante i segmenti rettilinei. Quali e quanti seguaci abbia trovato il saggio Domnino ci è ignoto, forse nessuno; induce a crederlo il fatto che la rivalità sua con Proclo, degenerata in aperto dissidio e finita con la vittoria di questo, obbligò il rivale ad abbandonare Atene, centro della cultura greca, per finire la vita oscuramente a Laodicea (Siria); perciò il suo lodevole tentativo riuscì sterile; tuttavia ne andava fatto qui cenno, se non altro come manifestazione di un ricorso storico istruttivo e interessante.

## Diofanto

91 - Le elucubrazioni dei tardi discepoli di Pitagora e di Platone, avvolte nella nebbia che tanto spesso toglie precisione e chiarezza alle opere filosofiche, hanno — oltre quella additata nel n. prec. — un'altra caratteristica negativa degna di menzione, cioè la totale assenza di applicazioni delle teorie svolte alla risoluzione di problemi. La conseguente lacuna (la gravità della quale non ha bisogno di venire dimostrata a chi sa come i problemi rappresentino il più potente stimolo alla ricerca matematica) venne brillantemente colmata dal sommo scienziato a cui ora ci volgiamo: Diofanto d'Alessandria. I casi della sua vita sono noti ancor più imperfettamente di quelli di Euclide e Apollonio, chè di certo si sa solo che egli visse nel lungo intervallo di tempo che va dal 200 a. C. al 400 dell'E. v. ed esclusivamente in seguito a svariatissime considerazioni si giunse a ridurlo e concludere che Diofanto deve essere vissuto fra il 150 ed il 250 d. C.

La principale delle sue opere è costituita da una variopinta colle-

zione di problemi numerici dal titolo un po' vago *Cose aritmetiche*. In origine comprendeva tredici libri, ma ora siamo in possesso soltanto di sei. Secondo alcuni storici la perdita sarebbe inferiore di molto a quanto farebbe credere il semplice paragone dei numeri 6 e 13, perchè alcuni libri sarebbero scomparsi soltanto per effetto di un arbitrario rimaneggiamento della materia dovuto a qualche copista poco scrupoloso e molto audace, rimaneggiamento al quale si prestava senza ribellarsi una collezione di problemi risoluti: siffatta tesi di consolazione è ben lungi dall'essere stabilita inoppugnabilmente, chè l'esame dei codici diofantei insegna che gli attentati probabilmente subiti dall'opera in questione risalgono all'XI e forse al X sec. dell'Era nostra.

Per esporre più comodamente la materia impresa a trattare, Diofanto fece uso di una speciale simbolica (si potrebbe dire di una stenografia) certamente assai più imperfetta di quella che noi usiamo, ma che spinse alcuni suoi ammiratori a considerarlo come « padre dell'algebra »; ad essi noi non ci uniamo, quantunque riconosciamo che i caratteri usati dal grande matematico greco per designare l'unità, l'incognita e le sue potenze e per rappresentare la sottrazione da eseguirsi fra due espressioni o l'eguaglianza delle stesse, siano la forma embrionale della simbolica che guidò la scienza del calcolo alle sue più sublimi altezze: ciò con tanta maggior ragione in quanto che a lui non era ignota nè la legge degli esponenti $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ (per $m, n$ interi, positivi, nulli o negativi) nè la regola che insegna a decidere se sia positivo o negativo ogni prodotto parziale risultante dal moltiplicare fra loro la somma o la differenza di due quantità qualunque.

Per meglio chiarire il nostro pensiero riguardo alla considerazione di Diofanto come capostipite della grande famiglia di algebristi, notiamo che noi ora e in seguito attribuiamo alla parola « algebra » il significato di scienza che aduna in ordine metodico i procedimenti che servono a risolvere i problemi con dati numerici o letterali e con incognite della stessa specie, nonchè le considerazioni dottrinali che guidano a formularli o permettono di giustificarli. Inoltre noi adottiamo la distinzione proposta dal Nesselmann di tre fasi di sviluppo nelle dottrine algebriche; sono le seguenti:

1°. Nel primo stadio l'algebra può chiamarsi *retorica*, giacchè, mancando allora ogni sorta di simboli, i calcoli sono eseguiti a parole; gli scritti degli aritmetici greci delle scuole neo-platonica e neo-pitagorica appartengono a questa prima specie di algebra;

2°. Nel suo secondo stadio l'algebra può chiamarsi *sincopata*, perchè usa generalmente le parole, intercalando soltanto qua e là delle abbreviazioni per rendere più agile e spedito l'andamento dei ragionamenti e dei calcoli: ora appunto Diofanto determina l'inizio di questa nuova fase;

3°. Nell'ultimo e più perfetto stadio di sviluppo l'algebra può ben dirsi *simbolica*, giacchè usa segni speciali per indicare i dati e le incognite, nonchè per rappresentare le varie operazioni; vedremo che bisognava arrivare al secolo XVII prima che l'algebra toccasse questa alta mèta.

92 - Dei problemi trattati dall'aritmetico d'Alessandria alcuni sono di 1°, altri di 2° grado ed uno soltanto è del 3°; taluni sono determinati altri non: di questi ultimi egli cerca non già, come è nostro costume, le soluzioni intere e positive, ma solo le razionali positive: ciò evidentemente rende la ricerca molto più agevole e prova essere affatto ingiustificata la denominazione di *analisi diofantea* data all'analisi indeterminata, anche da parte di taluni (e basti citare il nome illustre di Jacobi) che conoscevano a fondo l'opera di cui ragioniamo.

Un'ispezione d'insieme alle questioni trattate da Diofanto (per compiere più agevolmente la quale è consigliabile sostituirvi ai dati numerici espressioni letterali e tradurle in equazioni) mette in luce che esse si possono distribuire in gruppi e che gli elementi di ciascuno sono collegati fra di loro da evidenti ragioni di analogia; inoltre che non sempre Diofanto considerò tutte le questioni che avrebbero avuto diritto di entrare in un medesimo gruppo: se le emergenti lacune siano state da lui volute di deliberato proposito o se invece siano state inflitte al testo da copisti poco rispettosi, è oggi impossibile decidere.

I procedimenti seguiti dal grande aritmetico greco per risolvere i problemi considerati non vengono da lui esposti in termini generali, ma semplicemente applicati caso per caso; è riserbato al lettore di risalire dalle applicazioni a conclusioni generali. Così facendo si vede, intanto, che per sciogliere un problema equivalente ad un'equazione di 1° grado ad un'incognita, egli procede all'incirca come facciamo noi, cioè riunisce in un membro tutti i termini contenenti l'incognita e nell'altro le quantità note: così il problema è ridotto ad eseguire una divisione o a cercare una quarta proporzionale. Quando, poi, Diofanto s'imbatte in un problema traducentesi in un sistema determinato di equazioni lineari, incontra una difficoltà a noi ignota, proveniente dal fatto che egli disponeva di uno solo simbolo per rappresentare le incognite e la vince esprimendo le altre incognite in funzione di una privilegiata; ora questa non è sempre una di quelle che entrano esplicitamente nell'enunciato della questione, ma spesso è un'incognita ausiliare, scelta per caso; ed appunto nella scelta di tale incognita principale Diofanto dà prova di una genialità e fecondità, che furono forse raggiunte, ma non oltrepassate da matematici posteriori.

Più difficile è trarre qualche illazione di carattere universale dalle soluzioni dei problemi diofantei equivalenti alla risoluzione di equazioni determinate di 2° grado, giacchè, ad esempio, non fu ancora possibile dedurre con certezza se egli conobbe le due radici di un'equazione quadratica nel caso in cui esse sono entrambe positive. Oscurità ancor maggiore si stende sulla via da lui tenuta per riconoscere che l'equazione cubica $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$ è soddisfatta da $x = 4$, quantunque sia assai verosimile l'ipotesi che egli se ne accorgesse dopo di averla scritta sotto la forma $x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$.

La stessa varietà di ingegnosi espedienti di cui Diofanto diede prova nel risolvere i sistemi determinati di equazioni lineari viene da lui impiegata quando si trova in presenza di sistemi congeneri, fra le cui equazioni se ne trovi una almeno quadratica, onde lo studio di quanto egli

insegna può riuscire anche oggi assai istruttivo a chi aspira a famigliarizzarsi con l'analisi determinata di grado superiore al primo.

93 - Da tutto ciò si desume che nel trattare problemi determinati Diofanto si comporta in modo non dissimile da quello che terrebbe un algebrista moderno; altrettanto non può ripetersi riguardo ai problemi indeterminati. Giacchè, mentre noi di ogni siffatta questione esigiamo la *soluzione generale in numeri interi e positivi,* il geometra greco si limita in generale a trovarne una *soluzione speciale in numeri razionali positivi.* « Rebus sic stantibus » è chiaro che per lui non esiste il problema dell'analisi indeterminata di 1° grado, dal momento che, scelto ad arbitrio un valore $x_0$ di $x$, minore del rapporto $c/a$, l'equazione $ax + by = c$ è soddisfatta dal numero razionale positivo $y = \frac{c - a x_0}{b}$.

Quando, invece, fra le equazioni del problema se ne trovino di quadratiche, Diofanto assume per alcune incognite delle espressioni contenenti una indeterminata e queste sceglie per modo che tutto risulti razionale; per es., di fronte all'equazione $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ egli pone $x = \lambda \xi - a$, $y = \mu \xi - b$ ove $\lambda$, $\mu$ sono costanti arbitrarie e $\xi$ una quantità da determinarsi: trova così $\xi = 2 \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda^2 + \mu^2}$ ed allora $x$, $y$ risultano razionali. È impossibile da parte nostra il riferire le svariate forme sotto cui tale concetto trovasi applicato da Diofanto; esse porgono altrettante prove di una insuperabile virtuosità nel calcolo. Preferiamo piuttosto osservare come molte delle questioni da lui trattate conducano al problema generale seguente: Date due funzioni algebriche razionali intere di 1° o 2° grado con un'incognita, determinare un valore di questa che faccia assumere a quelle funzioni valori quadratici. Risolvere una siffatta « doppia equazione » è impresa assai ardua quando si debba rimanere nel campo dei numeri interi, ma anche risolverla, quando è possibile, in numeri razionali presenta ostacoli gravissimi che lo stesso Diofanto non riuscì a superare se non facendo ipotesi speciali e talora ricorrendo ad un'ingegnosa procedura da lui denominata « metodo di approssimazione » e che è una speciale forma del « metodo di falsa posizione ».

Esempi di doppie equazioni s'incontrano nel VI Libro dell'opera in esame, il quale, a differenza dei precedenti, presenta una perfetta unità, avendo per iscopo la costruzione di triangoli rettangoli i cui lati siano misurati da numeri razionali e che soddisfacciano ad altre condizioni; per es., quella di avere razionale anche la bisettrice dell'angolo retto, oppure che sia tale che la somma della sua area e di un cateto abbia un valore assegnato. Notiamo, finalmente, che fra i problemi trattati da Diofanto uno soltanto ha attinenza con la vita civile; val la pena di riferirne l'enunciato: « Un tale ha comperate due qualità di vino, uno a 3 dramme l'altro a 5 il cògnio. Il prezzo pagato è espresso da un quadrato tale che aggiungendovi 60 si ottiene un secondo quadrato avente per lato la somma delle quantità dei due vini. Quanto vino di ciascuna qualità viene acquistato? ».

94 - L'*Aritmetica* di Diofanto merita accurato studio, non soltanto per la venustà dei problemi trattati e per il valore dei metodi di risoluzione, ma anche perchè insegna alcuni teoremi aritmetici che non si trovano in alcun autore di più antica data. Citiamo qualche esempio:

I. Il prodotto di due numeri, di cui ciascuno è la somma di due quadrati, può in due modi diversi esprimersi come somma di due quadrati.

II. La doppia equazione avente per primi membri $a_1 x + b_1$, $a_2 x + b_2$ è risolubile quando $b_1$ e $b_2$ sono numeri quadrati.

III. Se $3a + 1$ è somma di tre quadrati, $a$ non può essere della forma $8n + 2$.

IV. Ogni numero somma di due cubi può esprimersi anche come differenza di due cubi (in altre parole un cubo può scomporsi nella somma di tre altri).

Inoltre da un passo di Diofanto sembra risultare che egli, se non altro, intuì la proprietà di ogni numero intero di essere esprimibile come somma di un numero di quadrati non superiore a quattro.

L'assenza nella letteratura matematica di scritti del genere dell'*Aritmetica* di Diofanto ma di più antica data, la scomparsa di soddisfacenti commenti (i primi due libri trovarono un chiosatore nel secolo XIV in Massimo Planude (v. p. 116), mentre ignoriamo l'estensione di un lavoro congenere di Ipazia), l'oblio in cui cadde per la mancanza di persone in grado d'intenderla, sono tutti fatti deplorevoli perchè rendono impossibile misurare il grado di originalità di quell'opera. Solo si può osservare (e giova farlo) che alcune frasi scritte da Diofanto inducono a credere che ci si trovi in presenza di un lavoro non del tutto nuovo, che, per converso, Diofanto abbia adunati con diligenza materiali esistenti, li abbia perfezionati e così abbia potuto comporre un tutto della massima utilità per tutti gli studiosi.

Tale giudizio, un po' severo, riceve, al dir di taluni, una conferma da quanto oggi ci resta di un opuscolo dello stesso autore sopra i *Numeri poligonali*, nel quale non è trattato alcun tema originale, nè usato alcun nuovo metodo, ma in cui l'algebra geometrica, quale si apprende dagli *Elementi* di Euclide, è applicata ad un'esposizione corretta e migliorata di una teoria che leggevasi in uno scritto oggi perduto di Ipsicle Alessandrino (v. n. 54). Affrettiamoci però a notare come il dedurre da questa constatazione di fatti che Diofanto fu poco più di un compilatore, sembra una generalizzazione non sufficientemente ponderata; non mancando nella storia del pensiero umano esempi di investigatori originali, i quali, all'alba od al tramonto della loro carriera, non sdegnarono di farsi espositori di teorie che non recavano la loro firma: onde, per noi, la questione dell'originalità di Diofanto, come tutte quelle che concernono la sua vita, è tuttora avvolta in tenebre, almeno oggi, imperscrutabili.

## Ricreazioni aritmetiche dei Greci

95 - Lo sconsolato scetticismo che informa queste parole recherà forse stupore in coloro che ricordano di avere letto in alcune moderne raccolte di problemi aritmetici che sulla tomba di Diofanto stava scritto quanto segue:

« Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo le sue guance germogliarono; dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio e dopo cinque anni gli nacque un figlio. Ma questi — fanciullo disgraziato e pur tanto amato! — aveva raggiunta appena la metà dell'età a cui doveva arrivare il padre, quando morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore coll'occuparsi della scienza dei numeri, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza ».

Sembrerebbe, in conseguenza, assodato che il nostro matematico uscì di puerizia a 14 anni, mise barba a 21, prese moglie a 33, divenne padre a 38, ad 80 perdette suo figlio e ad 84 morì. Se non che, il piacevole enigma la cui soluzione compendia la carriera terrena di Diofanto, è tratto dall'*Antalogia greca,* raccolta composta da un tal Metrodoro, vissuto tra la fine del v e il principio del vi secolo dell'E. v., nel lodevole intento di offrire ai propri conterranei un gruppo variopinto di piccanti problemi aritmetici, ma non con la pretesa di somministrare attendibili informazioni storiche; e d'altronde i dati del problema surriferito sono troppo ben combinati per essere uno specchio fedele di eventi umani. Perciò è consigliabile di non prendere troppo sul serio le notizie da esso offerte.

Invece lo storico della matematica deve prestare la massima attenzione alla totalità dei problemi contenuti nell'*Antologia greca,* perchè, quantunque semplicemente enunciati, servono ottimamente a misurare l'altezza delle cognizioni aritmetiche possedute dal popolo di cui stiamo esponendo i titoli di nobiltà scientifica. Ora alcuni di tali problemi si risolvono con semplici applicazioni delle prime operazioni aritmetiche; in altri si tratta di dividere una totalità di oggetti in parti proporzionali a numeri dati; altri ancora offrono, sotto vari aspetti, il « problema delle fontane » che neppur oggi manca nei manuali scolastici, ed uno si scioglie applicando l'« epantema di Timarida » (n. 86). Un notevole gruppo di problemi si traducono in sistemi determinati di equazioni lineari; tale è quello già riferito concernente Diofanto; tale è il seguente che non sappiamo con quale fondamento (e forse senza alcuno) è attribuito ad Euclide: « Un mulo ed un'asina andavano insieme carichi di grano. L'asina gemeva sotto il gran peso. Il mulo se ne avvide e disse alla compagna: Madre, perchè gridi così tanto e ti lamenti come una ragazza piagnucolosa? Se tu mi dessi un medimno del tuo peso, io porterei il doppio di te, mentre se tu ne prendessi uno da me, i nostri pesi risulterebbero eguali ». Nè va taciuto che nell'*Antologia greca* fu riprodotto l'unico problema con dati concreti che, come vedemmo (p. 111), si trovi nell'opera Diofantea e che noi trascrivemmo.

96 - Ma il più bello e difficile dei problemi inseriti nella citata collezione (tanto difficile, non solo a risolversi, ma ad intendersi, che fu escluso dai primi editori di essa) è quello che viene attribuito ad Archimede, il quale l'avrebbe inviato al suo fedele amico Eratostene da Cirene. Crediamo stretto obbligo nostro riferirne qui l'enunciato:

« Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, operando con cura, tu che possiedi molta scienza; calcola in quale numero pascolavano un giorno sulle pianure dell'isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi di vario colore: uno di aspetto bianco latteo, il secondo splendente di color nero, il terzo poi di un bruno dorato ed il quarto screziato. In ogni gregge i tori erano in quantità considerevole, distribuiti secondo i rapporti seguenti: ritieni i bianchi come eguali alla metà ed alla terza parte di tutti i neri ed ai bruni; i neri poi eguali alla quarta parte ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; i restanti screziati considerali poi come eguali alla sesta ed alla settima parte dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni. Le giovenche invece erano distribuite nei rapporti seguenti: le bianche erano eguali precisamente alla terza e quarta parte di tutto il gregge nero; le nere alla quarta parte insieme alla quinta delle screziate prese assieme ai tori; le screziate erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta di tutti gli animali del gregge bruno; le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte ed alla settima parte del gregge bianco.

Quando, o amico, avrai determinato esattamente quanti erano i buoi del Sole, avrai distinto quanti erano di ciascun colore, non ti si chiamerà certamente ignorante nè inabile nei numeri, però non ti si ascriverà peranco fra i sapienti. Ma ora bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole.

Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri formavano una figura equilatera, le vaste pianure della Trinacria erano allora tutte piene di buoi; invece i bruni e gli screziati costituivano una figura triangolare. Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile e avrai anche trovato il numero totale dei buoi, allora, o amico, va superbo per quanto hai fatto come un vincitore e sta sicuro di venire considerato come ricco di quella scienza ».

Per valutare il grado di difficoltà di questo problema, si noti che designando con $v, x, y, z$ e $v^1\ x^1, y^1\ z^1$ i numeri dei tori e delle giovenche in ciascun gruppo, le condizioni del problema si traducono nelle seguenti equazioni:

$$v = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x + y \qquad v^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(x + x^1)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)z + y \qquad x^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z^1)$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)v + y \qquad y^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(y + y^1)$$

$$z^1 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(v + v^1)$$

$$v + x = p^2$$

$$y + z = \frac{q(q+1)}{2}$$

Siccome le incognite debbono avere valori interi, così dalle prime sette si deduce che avranno valori della seguente forma:

$$v = 10366482\,\nu \;,\quad x = 7460514\,\nu \;,\quad y = 4069197\,\nu \;,$$
$$z = 7358060\,\nu$$
$$v^1 = 7206360\,\nu \;,\quad x^1 = 4893246\,\nu \;,\quad y^1 = 5439213\,\nu \;,$$
$$z^1 = 3515820\,\nu.$$

Tenendo conto della penultima equazione del problema si vede che $v$ deve avere la forma $445.749\ \xi^2$; finalmente l'ultima (quando si ponga $2q + 1 = t$, $2.4657\ \xi = u$) guida alla seguente relazione fra $t$ e $u$:

$$t^2 - 4729494\, u^2 = 1.$$

Questa appartiene alla categoria di equazioni volgarmente (ma impropriamente) chiamate « equazioni di Pell ». Di essa fa mestieri trovare una soluzione tale che $u$ sia un multiplo di 2 . 4567; ora alla minima di tali soluzioni corrisponde un numero di buoi del Sole espresso da 7766 seguito da 206.541 zeri, e per scrivere i valori di tutte le incognite del problema — calcolando, come convenimmo parlando dell'*Arenario* (numero 82), che ogni pagina contenga 2500 cifre — si riempirebbe un volume di circa 660 pagine in-8° [1].

Da questo rapido schizzo di soluzione, la quale nessuno può ardire di affermare superasse le forze di un Archimede, emerge quanto cospicua fosse l'importanza della questione di cui ci occupiamo e come ben a ragione la frase « problema dei buoi d'Archimede » fosse usata nell'antichità per indicare in genere un problema di disperante difficoltà. Tale problema, congiunto alle altre informazioni da noi date intorno alla estensione del sapere aritmetico dei Greci, sta a provare che, benchè questi vadano a ragione famosi per la loro propensione verso la geometria e per la entità delle scoperte fatte in questo campo, pure non erano indifferenti allo studio delle proprietà dei numeri, nè rifuggivano dall'occuparsi di problemi capaci di atterrire qualunque ardito e robusto calcolatore; perciò l'opinione che gli Ellèni soffrissero di una invincibile negativa per l'aritmetica deve considerarsi come un preconcetto derivante da un'imperfetta cognizione di quanto concordemente attestano i documenti veramente degni di fede e dal quale è urgente liberarsi.

---

(1) Si può aggiungere l'osservazione che, siccome la Sicilia non potrebbe contenere un tal numero di animali, il problema dei buoi non può essere stato ispirato da considerazioni realistiche.

## Escursione relativa ai Matematici bizantini

97 - L'altezza raggiunta dall'analisi indeterminata col problema dei buoi di Archimede è talmente considerevole che molti secoli dovevano trascorrere prima che potesse essere, nonchè superata, raggiunta. Tuttavia lo studio dei numeri non fu abbandonato nell'epoca di indiscutibile decadenza, presso coloro che, almeno per la lingua in cui scrissero, si presentano come lontani eredi di Pitagora e Diofanto, quantunque fossero animati piuttosto da tendenze pedagogiche che da alti ideali scientifici. In quell'epoca si videro apparire di quando in quando a Costantinopoli personaggi che lasciarono qualche traccia nella storia della matematica, perchè contribuirono a diradare l'oscurità che avvolge i procedimenti logistici degli antichi Greci: appunto per tale ragione ne faremo qui rapida menzione, in gran parte a complemento di quanto si espone nel presente Capitolo, chiedendo venia ai lettori per l'infrazione all'ordine cronologico che stiamo per commettere.

Le più antiche tracce di studi matematici nell'impero d'Oriente sono rappresentate dalla presenza di un certo Leone, contemporaneo dell'imperatore Leone il Saggio (886-911), il quale si sarebbe occupato con amore di diffondere la conoscenza delle opere di Euclide e Archimede; ma neppure la vasta dottrina di uno dei più profondi conoscitori della scienza e della letteratura greca (parliamo dell'Heiberg) bastò a fissare con qualche esattezza i lineamenti di questo problematico personaggio.

Alla stessa epoca appartiene il mediocre geodeta chiamato Erone il Giovane (v. p. 90) per distinguerlo dal suo omonimo di Alessandria.

Circa un secolo più tardi incontriamo un modesto poligrafo, Michele Psello (1020-1105; l'ultimo suo scritto porta la data 1092), di cui esistono alcuni frammenti che attestano il suo interesse per la filosofia delle matematiche e per le opere di Diofanto; altri suoi lavori provano la sua conoscenza di quanto scrissero i Neo-Platonici e i Neo-Pitagorici. Ma, riguardo alla geometria, egli ci ha lasciato un gioiello che è senza dubbio una delle più curiose rarità che si trovano nella nostra scienza; cioè il *bis*, non desiderato nè richiesto, dell'affermazione di Brissone (v. n. 29) che l'area del cerchio di raggio $r$ è media proporzionale fra le aree $2\,r^2$ e $4\,r^2$ dei quadrati inscritto e circoscritto, il che equivale ad assumere $\pi = 2\sqrt{2} = 2,8284271$; non prova forse questo fatto che le opere del sommo Siracusano erano del tutto ignote ai suoi tardi e degeneri nepoti?

Un secolo e mezzo più tardi incontriamo un monaco, Massimo Planude, che visse circa cinquanta anni nel periodo 1260-1310; famoso per la sua profonda conoscenza del latino, egli rappresentò a Venezia nel 1296 l'imperatore Andronico II in qualità d'ambasciatore. Meglio che per un commento al I Libro dell'*Aritmetica* di Diofanto (p. 112), egli è noto per un *Manuale di calcolo*, ove per la prima volta un autore greco fece conoscere l'aritmetica decimale secondo il sistema indiano, che, circa da due secoli, era diffusa nel resto d'Europa; ai tempi nostri esso fu accuratamente studiato, tanto da coloro che vollero determinare la varia fortuna dell'attuale sistema di numerazione, quanto da quelli che

s'interessarono di conoscere i metodi in uso nell'antichità per estrarre le radici quadrate dei numeri, usando le frazioni astronomiche. Piuttosto che addentrarci in particolari al riguardo riferiamo due questioni risolute dal matematico di cui ci occupiamo:

I. Un tale trovandosi in punto di morte si fece portare il proprio scrigno e divise fra i suoi figli l'aver suo come segue: Il primo avrà una moneta d'oro e un settimo del rimanente; il secondo ne avrà due e un settimo del rimanente; il terzo, tre e un settimo del rimanente. Giunto a questo punto quel tale morì senza essere arrivato al termine del denaro nè all'enumerazione dei figli. Fatta la ripartizione con lo stesso sistema, si trovò che tutti i figli furono trattati egualmente. Quanti erano i figli e quanto vi era nello scrigno (somma 36, figli 6).

II. Trovare un rettangolo avente lo stesso perimetro di un lato e la cui area sia un multiplo dell'area di questo.

Questo problema in formole equivale a quello di risolvere il sistema $x + y = u + v$, $x y = n u v$ e il geometra bizantino ne dà la seguente soluzione (speciale)

$$u = n 1 \quad , \quad v = n (n^2 - 1) \quad , \quad x = n^2 - 1 \quad , \quad y = n^2 (n - 1) \; (^1)$$

98 - Che a Euclide sia toccata presso i Bizantini miglior sorte di quella che ebbe Archimede (v. n. prec.) è dimostrato dai commenti ai primi sei Libri degli *Elementi*, scritti nella seconda metà del secolo XIV da Isacco Argirio e da quelli relativi al II Libro dovuti a un monaco, Barlaam (m. nel 1348), la cui vita trascorse fra la Calabria e Costantinopoli. L'onore della stampa fu più volte tributato a una sua *Logistica* in sei Libri, nella quale trovasi esposto il calcolo con numeri interi o con frazioni ordinarie e sessagesimali.

Una *Geometria* di Giovanni Pediasimo, guardasigilli del patriarca di Costantinopoli durante il regno di Andronico III (1328-1341), essendo modellata piuttosto sugli scritti di Erone che sopra quelli di Euclide, può in certa misura servire a illustrare i metodi di calcolo in uso nel Medio Evo bizantino.

Allo stesso periodo appartiene un personaggio che incidentalmente citammo più volte, Nicola Artavasde soprannominato il Rhabdas. Nato a Smirne, curò una nuova edizione del *Manuale* di M. Planude e nel 1341 scrisse la seconda delle *Lettere* che gli fecero ottenere un posto nella storia delle matematiche.

La prima di esse si apre con una rapida esposizione della numerazione scritta dei Greci; prosegue con l'indicazione degli artifici da usarsi per indicare i numeri mediante le dita della mano (sono espedienti del genere di quelli usati per corrispondere con i sordo-muti). Seguono regole per eseguire le operazioni aritmetiche, sino all'estrazione delle

---

(1) Giova osservare che fra altre questioni, che s'incontrano in un manoscritto greco di epoca incerta e di ancor più incerto autore (J. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN, *Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik*, Bibl. Mathem. 3ª serie, t. VIII, 1907-08) trovasi un analogo problema, che si traduce nel sistema $u + v = n (x + y)$, $x y = n u v$ e ne è suggerita la seguente soluzione

$$x = 2 n^3 - 1 \quad , \quad y = 2 n^5 \quad , \quad u = n (4 n^3 - 2) \quad , \quad v = n .$$

radici quadrate inclusivamente. Giova notare che l'ambiente aritmetico abbracciato dal Rhabdas è assai più limitato di quello a cui giungono le considerazioni di Archimede; infatti egli considera nove classi di numeri, cioè quelle che possono indicarsi simbolicamente come segue: $n, 10\,n, 10^2\,n, 10^3\,n, 10^4\,n, 10^5\,n, 10^6\,n, 10^7\,n, 10^8 n$, $n$ essendo un numero compreso fra 1 e 9; « al di là » dice il nostro autore, « non vi è più ordine »: novella prova del completo oblio in cui era allora caduto il sommo geometra di Siracusa!

Il prodotto di due numeri della forma $10^m\,a$, $10^n\,b$ e della forma $10^p\,c$, ove $a, b, c$ sono numeri compresi fra 1 e 9 e $p$ è eguale a $m + n$ o $m + n + 1$. La lettera in questione si chiude con alcune tavole di conti fatti, designate come « invenzione di Palamede », frase che indica che sono il prodotto dell'antica tradizione; oltre ad alcune relative alla moltiplicazione, se ne trovano di relative alla divisione, che possono riattaccarsi al Papiro Rhind, perchè insegnano la scomposizione di numeri frazionari in frazioni fondamentali.

99 - Importanza magiore possiede la seconda delle *Lettere* del Rhabdas. Nelle prime pagine di essa l'autore insegna a eseguire la moltiplicazione (in particolare l'elevazione a quadrato e a cubo), la divisione di due numeri e l'estrazione di radice quadrata, nell'ipotesi che i dati siano espressi ciascuno come somma di un intero e di alcune frazioni fondamentali; l'artificio a cui egli ricorre costantemente consiste nel trasformare i numeri dati in frazioni ordinarie; eseguita sui risultati l'operazione indicata, si ottiene una frazione ordinaria che viene, inversamente, trasformata nella somma di un intero e di frazioni fondamentali; in questo andirivieni si direbbe rispecchiata la lotta fra l'antica logistica greco-egiziana e l'aritmetica dei numeri frazionari ordinari che andava imponendosi. È appena necessario avvertire che le pagine relative all'estrazione di radice sono quelle che offrono il maggiore interesse. Sorvoliamo sopra un nuovo metodo proposto dall'autore per determinare l'epoca della Pasqua, trattandosi di una questione estranea al nostro programma, e rileviamo che il Rhabdas espone in seguito una considerazione generale utile alla risoluzione dei problemi che s'incontrano nella vita civile, la quale ha il suo fondamento nella teoria delle proporzioni. Prima di farne applicazione a questioni speciali, egli presenta un lucido riassunto del sistema di pesi, misure e monete in uso ai suoi tempi nel mondo greco; non lo riferiamo perchè appartiene non alla matematica, ma alla metrologia; notiamo piuttosto che il Rhabdas aggiunge qualche norma utile per chi deve eseguire cambi di monete. Si volge poi a esporre le soluzioni di 18 problemi determinati, con dati concreti, uno dei quali, però, per una svista risulta non determinato. Gli enunciati presentano una spiccata rassomiglianza con quelli che leggonsi nell'*Antologia greca;* ma, siccome sono seguiti dalle soluzioni, così questa parte degli scritti del Rhabdas costituisce un prezioso complemento a quella raccolta di epigrammi. Le soluzioni esposte offrono un notevole interesse, giacchè mostrano come possono sciogliersi, e furono effettivamente sciolti, senza ricorrere all'algebra, problemi abbastanza

complicati a cui si applicano oggi le equazioni di primo grado. A prova di tale asserzione riferiamo il seguente problema:

(VIII). « Due negozianti vanno insieme al mercato; giuntivi incontrano un uomo che vuole vendere uno smeraldo e glie ne chiedono il prezzo, che è 10 mila monete d'oro. Essi aprono le loro borse e contano quanto possiedono ciascuno, ma riconoscono di non avere denaro sufficiente per comperare quello smeraldo. Il primo di essi dice allora all'altro: Prestami 1/5 del tuo oro; unendolo al mio, potrò acquistare lo smeraldo. Il secondo risponde: No, dammi piuttosto tu 1/7 del tuo denaro e potrò comperare io lo smeraldo. Desiderasi sapere quanto possiede ciascun negoziante ».

È appena necessario rilevare che questo problema si riduce oggi alla risoluzione del seguente sistema:

$$x + \frac{1}{5} y = 10000 \quad , \quad y + \frac{1}{7} x = 10000$$

il quale ha per soluzione:

$$x = 8235 \frac{5}{17} \quad , \quad y = 8823 \frac{9}{17};$$

ora il Rhabdas riesce a questi risultati con una serie di argomentazioni ingegnose e sottili, ma troppo estese per venire qui riferite; solo vogliamo osservare che l'ammirazione che si sarebbe tentati di tributare all'aritmetico greco si spegne quando si rifletta che egli scriveva un secolo e mezzo dopo che aveva vissuto e che aveva scritto il colosso che risponde al nome di Leonardo da Pisa.

100 - L'alta considerazione di cui il Rhabdas godeva ai suoi tempi è documentata dal fatto che a lui è dedicato un importante lavoro dovuto a un altro matematico bizantino. Parliamo di Emanuele Moscupolo, che scrisse in principio del XIV secolo. Il tema da lui trattato è la costruzione dei cosidetti « quadrati magici », che sono figure ognuna delle quali consta dei numeri 1, 2,...., $n^2$ distribuiti nelle $n^2$ caselle di un quadrato, con la condizione che in ogni linea o colonna o diagonale si trovino $n$ di quei numeri formanti la somma $\frac{n(n^2+1)}{2}$. È il primo scritto greco sopra tale argomento, sul quale più di uno se ne trova nelle letterature indiana e araba; però nulla autorizza a decidere se Moscopulo sia l'ultimo rappresentante della tradizione greca sull'argomento, oppure il primo che abbia trasportato in Europa frutti maturati in Oriente.

Moscopulo distingue tutti i numeri interi in tre categorie, chiamandoli rispettivamente dispari (sono della forma $2p + 1$); parimenti pari (hanno la forma generale $2^n$) e imparimenti pari (la loro espressione generale è $2^n(2p + 1)$); e insegna delle regole per costruire i quadrati magici in ordine $n$, supponendo che questo numero abbia una delle due prime fra quelle forme; le parole con cui si chiudono i manoscritti del lavoro in discorso sinora esplorati non permettono di decidere se Mosco-

pulo sia o non riuscito a fare altrettanto per $n$ della terza forma. Senza riferire in che consistano le procedure da lui esposte, riferiamo i quadrati magici da lui costruiti per $n = 7$ o $8$: e con ciò chiudiamo questi cenni intorno alle ultime opere matematiche a noi note, scritte nella lingua di Omero:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 14 | 32 | 1 | 26 | 44 | 20 |
| 5 | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 21 | 39 | 8 | 33 | 2 | 27 | 45 |
| 30 | 6 | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 46 | 15 | 40 | 9 | 34 | 3 | 28 |
| 13 | 31 | 7 | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 62 | 59 | 8 | 9 | 54 | 51 | 16 |
| 60 | 7 | 2 | 61 | 52 | 15 | 10 | 53 |
| 6 | 57 | 64 | 3 | 14 | 49 | 56 | 11 |
| 63 | 4 | 5 | 58 | 55 | 12 | 13 | 50 |
| 17 | 46 | 43 | 24 | 25 | 38 | 35 | 32 |
| 44 | 23 | 18 | 45 | 36 | 31 | 26 | 37 |
| 22 | 41 | 48 | 19 | 30 | 33 | 40 | 27 |
| 47 | 20 | 21 | 42 | 39 | 28 | 29 | 34 |

## BIBLIOGRAFIA

*Nicomachi Geraseni Pythagorai Introductionis arithmetici Libri II*, ed. HOCHE (Lipsiae, 1866).

M. SIMON, *Die ersten 6 Kapitel des Institutio Arithmetica del Nikomachos* (Arch. f. die Gesch. d. Naturw. u. d. Techn., t. I, 1909).

C. HENRY, *Prologus N. Ocreati in Helcelph* od *Adelardum Bateusem magistrum suum* (Abh. zur Gesch. der Math., t. III, 1880).

*Iamblichus de mathematici scientia liber*, ed. FESTA (Lipsiae, 1891).

*Iamblichus in Nichomachi arithmeticam Introductionem Liber*, ed. PISTELLI (Lipsiae, 1894).

[*Iamblichus*] *Theologumena arithmetica*, ed. V. DE FALCO (Lipsiae, 1922).

*Le Manuel d'introduction arithmétique du philosophe Domninos de Larissa, traduction par* P. TANNERY (Mém. scientifiques, t. III, Paris, 1915).

*Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis Commentariis*, ed. TANNERY (Lipsiae, t. I, 1893; t. II, 1895).

G. WERTHEIM, *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandrien* (Leipzig, 1890; in appendice gli epigrammi dell'Antologia greca).

J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmim* (Mém. de la mission archéol. franç. au Caire, t. IX, fasc. I, 1892).

J. L. HEIBERG, *Der byzantinische Mathematiker Leon* (Bibl. mathem., Nuova Serie, t. I, 1887).

P. TANNERY, *Psellus sur les nombres, Psellus sur Diophante* (Revue des études grecques, t. V, 1892, t. VII, 1894).

J. WASCHKE, *Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem griechischen übersetzt* (Halle, 1878).

BARLAAMI MONACHI, *Logistica nunc primum Latine reddita à* I. CHAMBERO (Parisiis, 1594).

G. FRIEDLEIN, *Die Geometrie des Pediasimus* (Ansbach, 1866).

P. TANNERY, *Notices sur deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas, texte et traduction*, (Notices et extraits des manuscrits, t. XXXII, parte I, 1886).

E. MOSCOPULO, *Opuscolo sui quadrati magici*: S. GÜNTHER, *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften* (Leipzig, 1876) e P. TANNERY, *Mém. scientifiques*, t. IV (Paris, 1920).

## CAPITOLO VII

## S. P. Q. R.

101 - Mentre i Greci disimpegnavano nel modo più alto e nobile la missione a loro affidata dal destino, guidando l'umanità ad una graduale incessante elevazione della spirito, epperò ad una migliore conoscenza dell'universo dei fenomeni, si sviluppava prodigiosamente in potenza un piccolo popolo, che in origine aveva la propria sede sulle rive del Tevere. L'Etruria, le fiorenti colonie che l'Ellade aveva stabilite nella Magna Grecia ed in Sicilia, Cartagine e persino il territorio avente per centro Atene, divennero successivamente preda delle aquile latine. La nuova stirpe dominatrice di tutto il mondo conosciuto, si mostrò in tutte le proprie fasi di sviluppo insuperabile nella poesia e nella storia nel combattere e nel legiferare, ma del tutto priva dell'attitudine di coltivare quelle discipline che nessuna palese relazione manifestavano con l'arte della guerra e la scienza del governare; essa produsse oratori capaci di trascinare il popolo alle più importanti deliberazioni, poeti in grado di cantare le glorie degli eroi, storici per eternare le gesta dei più abili condottieri, giurisperiti venerati tuttora come maestri insuperati; ma nella filosofia ed in tutte le scienze di ragionamento e di osservazione, non soltanto non ebbe la forza per emulare il piccolo popolo che aveva prodotto un Platone, un Archimede, un Aristotele, ma si manifestò incapace di comprendere il valore ed ammirare la sublime bellezza di una ricerca puramente scientifica. Chi volesse porgere col pennello un'idea della fondamentale differenza intellettuale fra i Greci ed i Latini potrebbe rappresentare da un lato Alessandro Magno che, a scopo di studio, si fa accompagnare da Aristotele nelle sue più lontane incursioni e dall'altro il rozzo legionario che fredda Archimede assorto in profonda meditazione.

Tale sostanziale divario fu riconosciuto e confessato da uno degli uomini veramente rappresentativi della razza latina, chè, mentre diffondevasi nel mondo la massima

> Graecia capta ferum victorem capit, et artes
> Intulit agresti Latio,

Cicerone scriveva: « In summo honore apud Graecos geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius; at nos ratiocinandi metiendique utilitate hujus artis terminavimus modum » [1]. Sicchè nella scienza non

---

[1] Senza insistere sulla presenza in un testo latino dell'erronea eguaglianza L + XXV = C, dovuta probabilmente a un errore di copia (v. Rend. dell'Istituto Lom-

si può neppure asserire (come per altri rami dello scibile) che i Romani siano stati alunni dei Greci; chè, quantunque sin dalla metà del III sec. a. C. Livio Andromaco siasi fatto diffonditore in Roma dei tesori del pensiero greco, nulla prova che (per non parlare se non di quanto fa parte del programma che andiamo svolgendo) i capilavori lasciatici da Euclide, da Apollonio, da Diofanto abbiano interessato i nipoti di Romolo.

Tuttavia, poichè è compito della storia non soltanto il narrare le vittorie dei sommi pensatori, ma anche di segnalare le incerte fiammelle che, pure oscillando, interrompono le maggiori oscurità, così non possiamo esimerci dal raccogliere tutti i dati capaci di far conoscere in qual senso ed in quale misura i Romani abbiano prestato qualche attenzione alle scienze esatte. Prima va notato come da questo momento e sino alla fine dell'Età di mezzo la storia della scienza abbia una funzione ben diversa da quella che adempie nei periodi più fertili di nuove scoperte: mentre in questi essa deve determinare i contributi dati al nostro patrimonio scientifico da ogni singolo pensatore, invece nell'epoca di cui intraprendiamo lo studio essa deve limitarsi a fastidiosamente ricercare da quali libri egli abbia copiato: lavoro estremamente difficile per ragioni di varia indole, fra le quali emergono le due seguenti: I. Le compilazioni caratteristiche delle epoche di decadenza sono esposte, assai più delle opere di spiccata originalità, ad essere deturpate, mutilate, rimaneggiate da parte di posteri poco coscienziosi, i quali, nella loro ignoranza, spesso confusero gli scritti di Tizio con quelli di Caio e talora si arbitrarono di attribuire a Sempronio un lavoro pel solo fatto che, data la sua mentalità, egli era in grado di condurlo a termine. II. Non tutti gli scritti dell'epoca, dati sinora alle stampe, furono tratti dai migliori codici esistenti, nè la loro pubblicazione venne sempre preparata da un completo esame critico comparativo dei vari manoscritti di una medesima opera.

102 - I Romani, al pari di tutti gli altri popoli usciti dallo stato di barbarie, dal bisogno di contare e di calcolare furon tratti a crearsi un'aritmetica pratica e, prima di ogni altra cosa, nomi e segni per indicare, con la voce o con la mano gli elementi della serie naturale dei numeri. Ora che essi (per iniziativa propria o subendo qualche influenza extra-nazionale) abbiano adottato un sistema di numerazione a base 10, ma in cui anche il 20 occupa un posto distinto, emerge dalla semplice ispezione dei vocaboli da essi usati per indicare i numeri e che qui giova rammentare: *unus, duo, tres, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem, undecim, duodecim, tredecim, quatuordecim, quindecim, sexdecim, septemdecim* (oppure *decem et septem*), *decem et octo* (o *duodeviginti*), *decem et novem* (o *undeviginti*), *viginti,... septem et viginti, triginta, quadraginta, quinquaginta, sexaginta, centum, tercenti,*

bardo, 2ª ser., t. LVIII, 1925, p. 307), noteremo che il significato di mago o stregone che aveva per i Latini la parola *mathematicus* risulta dalle seguenti parole con cui Volpisco nei suoi *Saturnali* accusa di magia i Cristiani: «nemo christianorum presbyter non mathematicus».

*nonagenti, mille, quadragintamilia, centies milia;* a titolo di curiosità aggiungiamo che la parola *sexcenti,* oltre un determinato significato di numero, possiede pur quello di numero superiore a qualunque altro, o infinito che dir si voglia.

Volendo determinare quali segni fossero usati dai Latini per scrivere i numeri interi, due fonti stanno a nostra disposizione; cioè: 1° le inscrizioni, che in numero cospicuo si sottrassero al furore delle invasioni barbariche; 2° i manoscritti contenenti i primi trattati di aritmetica pratica scritti in latino. Tali documenti hanno evidentemente valori fra di loro ben differenti, perchè, mentre i primi hanno un'autenticità che niuno ha finora osato di revocare in dubbio, riguardo ai secondi nulla autorizza ad escludere che gli ignoranti amanuensi medievali siansi lasciati trascinare a ritocchi formali nelle opere che trascrivevano, suggeriti da ignoranza, da capriccio o da abitudini nel frattempo invalse. Il non avere apprezzata a dovere tale diversità sostanziale e l'avere variamente valutata l'importanza relativa di quelle due specie di dati, ebbero per conseguenza una certa discrepanza di opinioni in coloro che con maggiore impegno si occuparono della numerazione scritta dei Latini (1).

Ciò che è indubitato si è che in origine i Romani per rappresentare graficamente un numero usavano ripetere più volte uno stesso segno, costume in pieno accordo con l'abitudine adottata sin dai più antichi tempi di infiggere ogni anno un chiodo (la cosidetta *clavis annalis*), su una parete del tempio di Minerva, per ricordare al popolo la data da usarsi. Ma quel sistema, essendosi ben presto rilevato di invincibile incomodità, fu surrogato con un altro, nel retroscena del quale è facile intravedere l'influenza dei numeri 5 e 10. Esso si basa sull'uso di segni speciali per designare alcuni elementi della serie naturale, cioè i numeri 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000; da molti tali segni si identificarono con le lettere *I, V, X, L, C, D, M,* come risulta, a mo' d'esempio dalla circonlocuzione

.....un cinquecento dieci e cinque

usata da Dante (*Purg.*, XXXIII, 43) in luogo della parola *DVX*. Tuttavia alcune antiche epigrafi ancora esistenti inducono a ritenere che in origine fossero segni particolari, tratti forse da inscrizioni etrusche (2), i quali, in seguito ad involontarie deformazioni, finirono con l'assumere l'apparenza di lettere dell'alfabeto. Un segno speciale, che in origine era forse una *M,* ma che in tempi più recenti prese l'aspetto di una lineetta orizzontale, collocato al di sopra delle lettere *V, X, L, C, D, M,* servì per indicarne la moltiplicazione per mille: anzi in alcuni manoscritti che risalgono al x secolo, per unità di metodo, il numero mille si trova rappresentato col segno $\overline{I}$; un sistema (moltiplicativo) congenere fu

(1) Le questioni collegate alle origini dei segni numerali usati dai Latini presentano ancora molte oscurità; noi non ce ne occupiamo perchè, a rigore di termini, appartengono piuttosto alla paleografia e alla filologia che alla storia della matematica; al lettore che desidera conoscerle consigliamo la lettura del dotto articolo di D. E. SMITH, *The Roman Numerals* (« Scientia », t. XL, 1926).

(2) Non v'ha dubbio che i Romani *molto* appresero dagli Etruschi che soggiogarono; ma *quanto* è ignoto oggi e tale resterà forse sempre.

usato per i multipli di 10.000 e 100.000, ma non è noto se esso sia stato adottato dai Romani o dai loro eredi diretti.

Col mezzo di tali simboli, cioè scegliendone e ripetendone opportunamente, e ordinandoli in modo conforme alla « legge di Hankel », si poteva evidentemente rappresentare uno qualunque dei numeri incontrati dai Romani. Ma, per semplificare un po' la scrittura, fu proposto un espediente (« metodo sottrattivo ») di cui gli Assiri avevano già fatto uso e che si può collegare con le forme verbali « duodeviginti » e « undeviginti »; esso consiste nel considerare un numero come differenza di due altri; così per indicare il numero 9, invece del *VIIII* si scrisse *IX*, nessun equivoco essendo possibile dal momento che, in forza della « legge » succitata, questo segno non può intendersi come rappresentante il numero 11; similmente si scrisse *IIX* per indicare l'8, *XL* per il 40, *XC* per il 90 e *CD* per il 400; l'analoga sostituzione di *IV* per *IIII*, così comune oggi, fu invece adottata in epoca vicina a noi. Osservisi che l'impiego rigoroso di siffatto sistema semplificatore non era obbligatorio, onde non vennero biasimati gli autori che in certe circostanze, per qualche motivo o per capriccio, se ne staccarono; va anche rilevato che, sotto l'impero di altri sistemi aritmetici adottati in prosieguo di tempo, la numerazione scritta latina subì delle strane modificazioni, visibili in forme ibride, delle quali però non è affatto responsabile il popolo di cui ci occupiamo e che quindi non meritano di venir qui enumerate.

103 - Passando dagli interi alle frazioni, i Latini abbandonarono la base *dieci;* la loro ristretta mentalità scientifica avendoli distolti dal considerare in generale questa nuova categoria di enti, essi si limitarono a considerare le parti delle misure in uso, le quali venivano divise in 12, 144, 288, ecc., parti eguali; donde la ragione dei nomi e dei simboli speciali usati per indicare 1/12 ed i multipli di questo o la sua metà, i 2/3, ecc. ([1]).

Il conteggio con numeri composti di interi e dodicesimi presenta

([1]) Si tratta sempre di frazioni monetarie come risulta dalla seguente tabella:

*as* $= 1$ | *semis* $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ | *semuncia* $= \frac{1}{24}$

*quincuux* $= \frac{5}{12}$ | *duella* $= \frac{1}{36}$ | *triens* $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

*sicilicus* $= \frac{1}{48}$ | *quadraus* $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ | *sextula* $= \frac{1}{72}$

*sextans* $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ | *drachma* $= \frac{1}{96}$ | *seruncia* $= \frac{1\ \frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{8}$

*dimidiasextula* $= \frac{1}{144}$ | *uncia* $= \frac{1}{12}$ | *scrupulus* $= \frac{1}{288}$

*obolus* $= \frac{1}{576}$ | *siliqua* $= \frac{1}{1728}$ | *cerates* $= \frac{1}{1152}$ | *calcus* $= \frac{1}{2304}$

La necessità di considerare altre frazioni fu avvertita dai Latini soltanto a partire dal X secolo.

qualche difficoltà a chi non sia un esperto calcolatore, donde il bisogno di « tavole di conti fatti » che certamente dovevano avere larga diffusione presso gli agenti delle imposte ed altri consimili funzionari dello stato romano. Benchè non se ne sia serbato alcuna di mano latina, pure ne porgono qualche idea alcune tabelle compilate da un tal Vittorio d'Aquitania, la cui epoca si determina osservando che nel 457 dell'E. v. compose un *Computus Paschalis* e, otto anni dopo, papa Ilario ricorse a lui per porre ordine nel calendario in uso. Ora la parte principale del *Calculus Victorii* è costituita da tabelle che insegnano quali siano i prodotti dei numeri 1000, 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 11/12, 10/12, 9/12, 8/12, 7/12, 6/12, 5/12, 4/12, 3/12, 2/12, 1/24, 1/48, 1/72, 1/144, e 1/1244 rispettivamente per tutti i numeri compresi fra 2 e 49: ivi i prodotti vengono espressi come somme di interi e di frazioni ridotte ai loro minimi termini.

Annesse a queste si trovano altre tabelle le quali offrono analoghi servigi a coloro che debbono eseguire operazioni aritmetiche di altra specie sopra numeri composti di interi e frazioni duodecimali.

Oltre a questi ausiliari i Romani ricorrevano ad altri consistenti nell'uso di strumenti (abachi) di vario tipo che indubbiamente appresero dai popoli con cui vennero a contatto, ma che essi modificarono affinchè meglio si adattassero alla loro aritmetica ed alla loro mentalità.

Un ultimo artificio agevolatore venne da essi usato, cioè la « moltiplicazione complementare », così chiamando quel procedimento fondato sulla identità $ab = (10 - a)(10 - b) + 10(a + b - 10)$ il quale riduce il calcolo del prodotto di due numeri compresi fra 5 e 10 a quello di due numeri situati nell'intervallo fra 1 e 5.

104 - Ulteriori particolari intorno alla logistica romana possono attingersi dai più antichi scrittori medioevali; però la difficoltà di sceverare ciò che è prodotto romano da quanto venne aggiunto da tardi nipoti esposti ad altre influenze, rende necessarie infinite cautele in chi si accinge ad abbeverarsi a tali fonti. Per rendersi poi conto della natura e dell'altezza dei problemi aritmetici che le circostanze imposero ai legislatori del mondo, fa d'uopo citare in primo luogo il « calcolo d'interessi », la famigliarità col quale era necessaria date le abitudini usurarie siffattamente diffuse presso i Romani che, nel 342, dovettero venire frenate da speciali norme governative (*Lex Genucia*), ed in secondo luogo l'applicazione delle disposizioni regolatrici la facoltà di testare (*Lex Falcidia*, anno 40 a. C.), le quali, nell'applicazione a casi complicati (come ad esempio quello di una vedova gestante) davano luogo a questioni ardue e delicate.

A quali autorità ricorressero i Romani per vincere le insorgenti difficoltà aritmetiche non è noto completamente nè sicuramente; tuttavia si sa che Apulejo di Madaura, vissuto nel II secolo dell'E. v., dopo di avere compiuti i propri studi in Atene, tradusse dal greco in latino l'*Aritmetica* di Nicomaco Geraseno (v. n. 88), corredandola *forse* di applicazioni numeriche; diciamo *forse* perchè il lavoro di Apulejo non venne peranco ritrovato.

Miglior sorte toccò ad una specie di *Enciclopedia* in nove libri scritta verso il 470 da un Cartaginese assurto alla dignità di proconsole romano: Marziano Mineo Felice Capella. Ivi, dopo Grammatica, Dialettica e Retorica, s'incontrano la Geometria, le discipline costituenti il quadrivio, l'Aritmetica, l'Astronomia e la Musica. La sezione dedicata alla scienza dell'estensione è una semplice compilazione delle definizioni date da Euclide [1] che si chiude col semplice enunciato del primo problema degli *Elementi* (rileviamo però che al grande alessandrino sono dedicate alcune frasi di entusiastico elogio) [2], mentre la scienza del numero ha contenuto e forma ispirati alle idee di Pitagora e dei più recenti rinnovatori del Pitagorismo. Tale scritto non soltanto attesta la totale mancanza di originalità in chi lo scrisse, ma documenta la scarsa facoltà dei Latini ad intendere i capilavori del genio greco ed un mal consigliato ritorno alla fusione della matematica con la filosofia, la scomparsa della quale, come vedemmo, contrassegna (e forse determina) il periodo aureo della matematica greca.

105 - I caratteri di scienza ausiliare dell'uomo d'affari e del giurisperito che, come testè dicemmo, rivestì presso i Latini una delle due grandi branche della matematica, si ritrova, « mutatis mutandis », nell'altra di esse (quantunque i Romani abbiano manifestata ancor minore attitudine per la geometria che per l'aritmetica).

A volgere la propria attenzione alla geometria pratica il popolo di cui ci occupiamo fu, sino dai tempi più remoti, indotto dalle esigenze del culto; giacchè, affinchè gli àuguri potessero adempiere le loro incombenze, era necessario che nei tempi fossero segnate con grande esattezza due rette fra loro perpendicolari — chiamate « decimanus » e « cardo » — la prima diretta da Oriente ad Occidente, l'altra da Mezzogiorno a Settentrione, forma embrionale di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali; segnata l'una, l'altra poteva dedursene, servendosi dell'istrumento fondamentale dell'agrimensura romana. Parliamo di quell'apparato detto comunemente *stella* o *asterisco*, ma che i Latini, con parola di etimologia oscura, denominavano « groma » (d'onde il vocabolo *gromatici* per *agrimensori*) e che aveva per elementi costitutivi essenziali due verghe rettilinee disposte ad angolo retto e mantenute orizzontali mediante un sostegno verticale terminante al loro punto di incrocio.

Altro stimolo potente allo studio della geometria pratica fu dato ai Latini da Giulio Cesare, quando, avendo portata a buon termine la riforma del calendario con l'aiuto di un dotto appartenente al Museo d'Alessandria (Sosigene) [3], deliberò la misura dei territori costituenti

---

[1] Infelicemente tradotte, che ad es. la I « il punto è ciò che non ha parti » diviene « il punto di cui la parte è nulla ».

[2] Osserviamo incidentalmente che un palinsesto che risale al IX secolo e che è proprietà della Biblioteca Comunale di Verona, porge altre prove del culto che venne da alcuni romani professato per il sommo insegnante del Museo.

[3] È interessante notare che il concetto fondamentale di questa riforma risale probabilmente ad Archimede, al quale si attribuisce un lavoro, oggi perduto, sulla lunghezza dell'anno. Da Siracusa esso passò in Egitto, e la prova di ciò si ebbe quando nel

allora la gloriosa repubblica: il pugnale di Bruto vietò al grande uomo di stato di veder il termine della colossale opera, ma non impedì che questa venisse compiuta sotto il suo successore: gli anni 37-20 a. C. hanno, quindi, importanza storica per la geodesia, come l'anno 46, dopo il quale venne inaugurato il calendario giuliano, l'ha per la cronologia astronomica.

Alcuni particolari intorno alla natura ed ai limiti della agrimensura romana si traggono compulsando la letteratura superstite. Così si apprende che il primo che abbia scritto su quel tema è Marco Terenzio Varrone (116-27 a. C.), riguardato dai Romani per un novello Platone e di cui vengono ricordate non meno di tre opere capaci di porgere informazioni sull'argomento (alludiamo a quelle intitolate *Mensuralia, Geometria* e *Atticus sive de numeris*), a cui va aggiunta una grande enciclopedia intitolata *De disciplinis* dedicata successivamente a tutte le discipline del tempo: Grammatica, Dialettica, Retorica, Geometria, Aritmetica, Astrologia, Musica, Medicina e Architettura; ma sgraziatamente nessuna venne sino ad oggi ritrovata, onde ci è attualmente tolta la possibilità di determinare quali legami esistessero fra la scienza romana e quella degli Etruschi e dei Greci.

Tentando di procurarci tali notizie dalla grande opera in dieci Libri *De architectura* dedicati nell'anno 14 a. C. dal celebre M. Vitruvio Pollone all'imperatore Augusto, l'aspettativa non è totalmente delusa, ma la nostra sete di sapere viene solo parzialmente soddisfatta, chè, mentre si può da essa desumere la riprova della conoscenza dell'autore di alcune scoperte matematiche dei Greci, non è possibile (e d'altronde tanto non potevasi ragionevolmente sperare da un architetto nell'esercizio delle sue funzioni) redigere un elenco completo di quanto i Latini avevano saputo apprendere dai matematici Greci [1].

Qualche altra notizia intorno alla geometria pratica dei Romani ci offre il tribuno militare Lucio Giulio Moderato Columella da Cadice, con l'opera in dodici Libri *De re rustica*, scritta presumibilmente nell'anno 62 dell'E. v.; ivi egli mostra di essere in grado di calcolare esattamente le aree di un quadrato, di un rettangolo e di un triangolo rettangolo; per valutare la superficie di un triangolo equilatero e di un

---

1866 fu scoperto, presso una delle foci del Nilo, fra le rovine dell'antica città di Canope, una stele scritta tanto in greco quanto in geroglifici e in scrittura demotica. È ivi inciso un decreto dei sacerdoti del luogo, per effetto del quale a partire dal 7 marzo 238 (cioè poco dopo la morte del siracusano), ai cinque giorni intercalari già aggiunti all'anno di 360 giorni, si doveva unirne un sesto ogni quattro anni. È questo il fondamento della riforma giuliana, che, dopo più di due secoli, ritornò in Italia, donde prese le mosse.

[1] Aggiungiamo che Vitruvio è lo scrittore romano la cui mentalità più si accosta alla nostra; egli si mostra tutto imbevuto di scienza greca, di cui è un sincero ammiratore; il fatto che fra i grandi da lui citati non si trovi alcun latino porge una implicita conferma del fatto che i Romani non arrecarono alcuna aggiunta alla scienza greca. Nelle prefazioni ai nove libri della sua *Architettura* Vitruvio si compiace di intrattenere il lettore sopra argomenti aventi una relazione assai discutibile con l'arte del costruire; esse, mentre possono essere saltate a piè pari dal futuro ingegnere, porgono interessanti informazioni allo storico della scienza; notevoli ad esempio sono la prefazione al VII Libro, perchè contiene un significante « elogio del libro » e quella al IX, ove è istituito un paragone fra l'atleta e il pensatore, sostenendosi che questi, meglio assai di quello, meriterebbe i sommi onori, che solevano essergli tributati in occasione dei giochi Olimpici.

esagono regolare, assume $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$, valore di notevole approssimazione, mentre per quadrare un cerchio od un semicerchio assume tacitamente per $\pi$ il valore 22/7; nè si arresta di fronte al difficile problema di calcolare per approssimazione la superficie di un segmento minore di una semicirconferenza, del quale siano date base ed altezza e lo risolve con la regola usata da Erone in un passo (libro I, probl. 31) dei *Metrica*. Columella al pari degli antichi Egiziani, non insegna regole generali, ma lascia al lettore di desumerle dalle applicazioni da lui fatte.

In un campo di più diretta pertinenza della geometria pratica ci riconduce l'esame di un'opera scritta in greco nel III sec. dell'Era nostra, in aiuto degli eserciti in campo, dal poligrafo Sesto Giulio Afri-

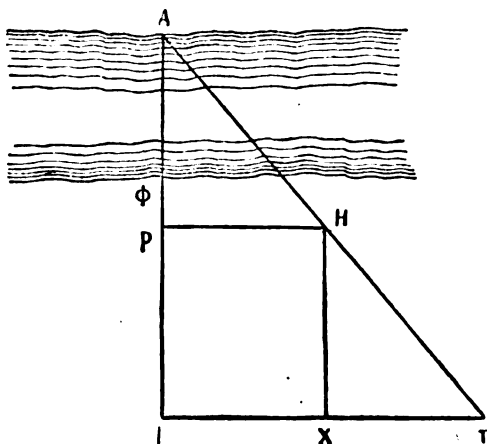



Fig. 15.

cano, nato a Gerusalemme, vissuto durante il regno di Alessandro Severo (222-235). In quello scritto — che il Vincent ha pubblicato e che porta il titolo Κεστοί — meritano di essere notati i procedimenti proposti per determinare la larghezza di un fiume e l'altezza di un muro; senza farci garanti siano parto di chi ne serbò memoria, riferiremo quello che consiste in un'elegante applicazione del teorema « se pel centro di un cateto di un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare a questo cateto e se per il punto in cui essa taglia l'ipotenusa si abbassa la perpendicolare all'altro cateto, tutti i lati del triangolo saranno divisi in parti eguali ». L'uso di questo lemma per la misura della larghezza di un fiume è ovvia: siano, infatti (Fig. 15), A un punto della riva opposta, A Φ la distanza richiesta, *I* un punto della retta A Φ e il segmento I Υ di lunghezza arbitraria, ma di direzione perpendicolare a A I. Si segni il centro X del segmento I Υ da esso si conduca la perpendicolare alla retta I Υ stessa e se determini l'intersezione H con A Υ e finalmente da H si conduca la perpendicolare H P a A I. Per il lemma succitato sarà A P = P I, epperò la lunghezza richiesta riuscirà = I P — P Φ.

106 - Una nuova fonte di notizie intorno alla geodesia dei Romani (e possiamo aggiungere anche intorno alla logistica da essi usata) è rappresentata da alcuni lavori di coloro che erano riguardati come i depositari della geometria pratica ufficiale, cioè gli agrimensori romani; tali lavori sono adunati in un volume che nel periodo 1566-1604 fu proprietà di Giovanni Arcerio, dotto di Groninga; ora si trova nella Biblioteca di Wolfenbüttel ed è famoso nella storia della matematica sotto il nome di *Codice Arceriano*; di recente alcune porzioni del suo contenuto vennero ritrovate in un manoscritto della Biblioteca di Monaco (Baviera) e date alle stampe.

I paleografi accertano che quel *Codice* fu scritto nel VII sec. e forse nel precedente, utilizzando materiali che risalgono al 450 dell'E. v. ed erano costantemente sfruttati da funzionari del catasto romano. Non è però certo che essi provengano direttamente dagli autori ivi citati e che sono Frontino, Igino, Balbo, Nipso, Epafrodito e Vitruvio Rufo. Di questi, il primo viene considerato come la principale autorità romana in materia d'idraulica pratica, grazie al lavoro *De aequaeductis urbis Romae*, e scrisse verso il 103 una estesa opera di agrimensura oggi scomparsa; il secondo è un contemporaneo di Frontino che, reduce da una campagna fatta sotto Trajano, compose un'altra opera dello stesso tipo, a cui toccò la medesima sorte; gli altri sono personaggi del tutto ignoti e perfino di problematica esistenza.

L'esame di quel *Codice* manifesta che tutti coloro che ne somministrarono gli elementi calcarono le orme di Erone (o di qualche autore più antico, al quale avrebbe attinto lo stesso geodeta alessandrino). Fra i problemi trattati limitiamoci a citare la ricerca di un triangolo rettangolo di cui si conosca l'ipotenusa $a$ e la superficie $A$; si tratta in sostanza di risolvere il sistema $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = 2A$, il quale non si incontra in Diofanto; ora questo equivale all'altro $(x \pm y)^2 = a^2 \pm 4A$, ossia $x \pm y = \pm\sqrt{a^2 \pm 4A}$, donde si traggono i valori dati, in un caso speciale, da Nipso, sotto il nome del quale si trova registrato quel problema.

Mentre la maggior parte di quanto si legge nel *Codice Arceriano* è di scarsa originalità, ma almeno scevro da inesattezze, vi è un passo che dimostra la scarsa intelligenza di chi lo scrisse; alludiamo a quello in cui per calcolare l'area di un poligono piano regolare di dato lato, si ricorre all'espressione, già nota sin dai tempi di Ipsicle, dei numeri poligonali: è questo il primo autentico grossolano errore che siasi incontrato nella letteratura matematica! Quasi per compenso troviamo, nel medesimo *Codice*, oltre le note espressioni delle somme $1 + 2 + \dots + n$ e $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, per la prima volta l'analoga formola

$$1^3 + 2^3 + 3^3 - \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Quantunque desunta da qualche altro lavoro, forse greco, scritto in continuazione o quale commento dell'*Aritmetica* di Nicomaco (v. n. 88), pure essa meritava di venir qui registrata come unica aggiunta alle nostre cognizioni matematiche che può trarsi dalle carte relitte dagli agrimensori romani.

Le opere di questi modesti funzionari, prive di originalità ed esenti da pretese, sembravano destinate a venire utilizzate esclusivamente dai funzionari dei nuovi regni sorti sulle rovine dell'impero romano; ma, per la squallida miseria dei tempi che ci apprestiamo a considerare, erano invece destinate a venire ricercate e sfruttate, anche da coloro che, per altezza d'intelletto, furono chiamati ad occupare posti cospicui nelle classi dirigenti della nuova società costituitasi sulle rovine dell'impero romano.

## BIBLIOGRAFIA

*Corpus Inscriptionum Latinorum* (Berolini, 1883-1893).

M. Vitruvii, De *Architectura Libri decem* (Florentia, 1522): se ne conoscono innumerevoli altre ed. e trad. in tutte le lingue.

G. Friedlein, *Der Calculus des Victorius* (Zeitschr. f. Math. und. Phs., t. XVI, 1871).

*Victorii Calculus ex Codice Vaticano editus* (Bull. di bibl. e storia delle scienze mat. e fis., t. IV, 1871).

Martiani Capellae, *Satyricon, in quo de nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares*, ed. U. Kopp (Frankfurt a. M., 1836).

F. Blume, K. Lachmann und A. Rudolff, *Die Schriften der römischen Feldmesser herausgegeben und erläutert* (Berlin, 1848 e 1852).

Vincent, *Notices et extraits de la Bibliothéque impériale* (t. XIX, parte 2ª, Paris, 1858).

M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst* (Leipzig, 1875).

M. Curtze, *Die Handschrift No.* 14836 *der Kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu München* (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, Heft VII, 1895).

V. Mortet et P. Tannery, *Un nouveau Texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus* (Notices et Extraits des Manuscrits, t. XXV, partie 2, Paris, 1896).

CAPITOLO VIII

# LE MATEMATICHE IN EUROPA DURANTE I SECOLI TENEBROSI [1]

## Cassiodoro, Boezio, Isidoro

107 - Con la proclamazione di Odoacre a « rex gentium », avvenuta a Pavia addì 23 agosto dell'anno 476, ha ufficialmente termine l'impero romano d'Occidente e s'inizia l'Età dei barbari (Eruli, Goti, Longobardi) e la triste êra delle dominazioni straniere in Italia, periodo per tanta parte del quale la civiltà latina ebbe a sostenere lotte tragiche e non sempre fortunate contro l'oscurantismo di genti rozze ed ignoranti

> Cui fu prodezza il numero,
> Cui fu ragion l'offesa,
> E dritto il sangue, e gloria
> Il non aver pietà.

Dei più remoti episodi di queste dolorose pugne furono protagonisti Magno Aurelio Cassiodoro (n. circa nel 475, m. nel 570) e Anicio Manlio Severino Boezio (n. fra il 480 e il 482, m. nel 542).

Il primo, meridionale di nascita, verso il 500, appena ventenne, fu assunto segretario privato di Teodorico, poco dopo la sua incoronazione a re dei Goti, e ne fu consigliere ascoltatissimo sino alla morte del suo sovrano. Si ritirò poi nell'Abbazia di Montecassino, per dedicarsi esclusivamente allo studio e alla meditazione. Frutto di tali assidue fatiche è una enciclopedia in sette libri dal titolo *De artibus ac disciplinis liberalium literarum,* la quale presenta una spiccata rassomiglianza con l'opera congenere di M. Capella (v. n. 104), giacchè tratta successivamente i seguenti argomenti, Grammatica, Retorica, Dialettica; poi Aritmetica, Musica, Geometria e Astronomia (cioè le discipline costituenti il trivio e il quadrivio). È una di quelle numerose compilazioni in cui l'autore, non avendo forza per navigare verso nuove terre, si contenta di descrivere le località che altri ha scoperte.

Ben più alto fu l'intelletto, ma più crudele il destino di Boezio, a ragione chiamato l'« ultimo dei Romani antichi » e riguardato come il

[1] In questo periodo continuò a rimanere in uso la numerazione scritta dei Romani, modificata in vario modo più o meno felicemente; particolari al riguardo si possono trarre dall'articolo dello Smith citato a pag. 123.

primo degli scolastici. Nato a Roma da cospicua famiglia e rimasto orfano in tenera età, attrasse l'attenzione, conquistò la simpatia e ottenne la protezione del patrizio Simmaco, del quale divenne poi genero. La fama, per ingegno e carattere, alla quale egli ben presto salì, giunse all'orecchio di Teodorico, che lo volle al proprio servizio; ma, calunniato da cortigiani, invidiosi dell'influenza da lui esercitata sull'andamento della pubblica cosa, venne gettato in carcere, sottoposto a torture la cui descrizione fa fremere d'orrore e finalmente (anno 524) tratto a morte [1]: sorte non meno crudele toccò a Simmaco, di cui unica colpa fu di avere pubblicamente pianta la morte di un illustre e sventurato congiunto.

Profondo conoscitore della letteratura greca, Boezio avvertì e apertamente sostenne la necessità del ritorno dell'umanità alle pure fonti elleniche ed è fama che l'agevolasse (per quanto concerne le scienze esatte) traducendo in latino alcune opere di Pitagora (?), di Tolomeo, di Nicomaco e di Euclide.

Il principale ed indiscusso contributo da lui dato in nome proprio, se non al progresso, almeno alla diffusione delle cognizioni matematiche, è rappresentato dalle sue *Istituzioni aritmetiche*, attorno alle quali è dovere nostro di spendere qualche parola (benchè ben poco di nuovo vi trovi chi conosce Nicomaco).

Fra gli oggetti che a noi è dato conoscere Boezio distingue, esordendo, le « collezioni » dalle « grandezze » ed osserva che le prime si possono considerare sole oppure insieme ad altre cose, mentre le seconde si possono considerare in quiete oppure in movimento. Delle prime trattano l'« Aritmetica » (che considera le collezioni in sè stesse) e la « Musica » (che le esamina in connessione con altri enti), mentre delle seconde si occupano la « Geometria » e l'« Astronomia », la prima supponendo le grandezze fisse, la seconda in movimento. Fra queste quattro discipline (costituenti, al dir di Boezio, il « quadruvium », base dell'istruzione scientifica, mentre grammatica, retorica e dialettica formavano il « trivium », base dell'istruzione letteraria), il primo posto compete alla « Aritmetica », dal momento che il concetto di numero entra nelle altre tre; e poichè lo studio del moto degli astri esige nozioni geometriche, così Boezio conclude che l'ordine in cui si debbono studiare quelle materie è il seguente: Aritmetica, Musica, Geometria, Astronomia. Era evidentemente sua intenzione il fare di ciascuna una esposizione metodica. Quelle delle due prime ci sono pervenute ed attestano la piena adesione da lui fatta alle idee dei rinnovatori delle dottrine di Pitagora e Platone; giacchè, limitandoci a parlare della prima di dette scienze, sebbene l'*Aritmetica* di Boezio non sia una versione di quella di Nicomaco

---

[1] Fu sepolto a Pavia, nella Chiesa di S. Pietro in Ciel d'Oro, come ricorda Dante nei seguenti versi:

« Lo corpo ond'ella fu cacciata giace
Giuso in Ciel dauro, ed essa da martiro
E da esilio venne a questa pace ».

(*Paradiso*, X, 127-9).

Il divino poeta colloca Boezio fra i dodici massimi dotti in teologia.

(lavoro che sarebbe stato superfluo perchè gia stato fatto da Apulejo), ne è però un vero e proprio rifacimento, giacchè ne riproduce le prolisse disquisizioni sulle varie categorie di numeri, sulle loro proprietà e sulle proporzioni che possono formarsi con numeri interi, che già incontrammo fra gli aritmetici greci, primo fra tutti il Geraseno.

108 - Esistono od almeno furono scritte le analoghe trattazioni degli altri due rami del quadrivio? Per quanto concerne l'Astronomia la risposta è concordemente negativa, non essendosi sino ad oggi scoperto alcun scritto su tale materia, recante la firma dell'infelice pensatore.

Assai più ardua è l'analoga questione relativa alla *Geometria*, giacchè si conoscono numerosi manoscritti, che risalgono all'XI secolo, i quali risultano di materiali geometrici distribuiti in due libri e che sono attribuiti a lui. Ivi (I Libro) s'incontrano anzitutto traduzioni latine, pressochè letterali, delle definizioni con cui cominciano gli *Elementi* di Euclide e degli enunciati delle proposizioni sparse nei primi quattro libri di questa grande opera, accompagnati dalle relative figure, ma senza dimostrazioni, giustificazioni o spiegazioni di alcuna specie. Merita di venire notato come i più antichi editori della compilazione in discorso ad illustrazione della Prop. XI del IV Libro, abbiano posto, oltre un pentagono convesso, uno stellato; ciò portò taluno a concludere che Boezio per primo aveva diffusa la conoscenza di una figura già considerata da Pitagora (v. n. 25), ma poi caduta in completo oblio; però l'esame dei migliori codici contenenti detta compilazione mostrò che quella figura venne arbitrariamente aggiunta da amanuensi troppo intraprendenti, che attingevano ad altre fonti. Il Libro II della pretesa *Geometria* di Boezio consta di nozioni di agrimensura, concordanti, nelle verità e negli errori, con quanto si legge nel *Codice Arceriano*. Emerge da ciò che si è in presenza, non di un'opera organica, ma un indigesto raffazzonamento, a cui chi scrisse diede per autore Boezio, sia per una svista innocente, sia per porlo sotto la salvaguardia di un nome illustre, illudendosi che una bandiera immacolata tutelasse sufficientemente merce di contrabbando ed un'autorità indiscussa le conferisse l'importanza di cui manca.

Il lavoro di cui ci occupiamo possiede un valore intrinseco tanto scarso, che non avrebbe per fermo fissata a lungo l'attenzione degli storici, ove non fosse contenuta, al termine del I Libro, una pagina capace, se autentica, di fare risalire l'invenzione dei segni oggi in uso per indicare i numeri 1, 2,..., 9 (non lo 0), ai seguaci di Pitagora, non certo a quelli che si adunavano per ascoltarne la parola, ma ai più recenti seguaci delle sue massime, Ora (senza insistere sul fatto che quei caratteri possono essere stati aggiunti da qualche disinvolto amanuense posteriore) va notato essere possibile che le nostre cifre siano giunte dall'India in Europa pel tramite di viaggiatori e commercianti, grazie ai quali fra Oriente ed Occidente si mantennero sempre vive relazioni; ma siccome nella cosidetta *Geometria* di Boezio si allude invece ad un'azione spiegata da dotti studiosi, così nulla autorizza ad escludere che esse siano state inventate in Grecia, nei cenacoli dei Neo-Pitagorici e che di là siansi diffusi in tutte le direzioni, come le onde prodotte dalla caduta di una

pietra in acqua stagnante. In tal modo è possibile siano giunte a cognizione dei Persiani, che le avrebbero insegnate agli Indiani e poi agli Arabi dopo la conquista mussulmana; dagli Arabi orientali sarebbero passate ai Bizantini ed agli Arabi occidentali e per il tramite di questi sarebbero penetrate in Ispagna, ove le apprese Gerberto, che tanto si adoperò a diffonderle in Europa. Dalla stessa fonte le ha forse imparate Boezio? Nulla autorizza a negarlo, ma la *Geometria* che ne reca il nome non consente di affermarlo [1].

Sull'autenticità di questo documento si accese un lungo dibattito che viene di solito chiamato « questione boeziana ». Sceso nella tomba l'eminente matematico francese M. Chasles (1793-1880), il più strenuo paladino dell'autenticità, si può dire che detta questione sia ormai risoluta, ritenendosi da tutti che la pretesa *Geometria* di Boezio non ha diritto di portare il nome di chi scrisse la *Philosophiae consolatio;* e per convincere il lettore dell'assennatezza di tale conclusione citiamo il fatto che un volume scritto fra il 1163 ed il 1168 reca il titolo seguente: « In hoc libro continetur totum quadrivium, scilicet Boecii Arithmetica, Astronomia, Musica Boecii, Geometria Euclidis » (*Monatshefte f. Math. u. Phys.,* t. VIII, 1897, p. 194); ora se Boezio avesse scritta la progettata opera sul quadrivio, perchè mai da questo volume sarebbero state escluse le sezioni da lui dedicate alla geometria ed all'astronomia?... La cosidetta *Geometria* di Boezio deve, a nostro avviso, ritenersi una miscela, composta cinque secoli dopo la sua morte, da persona senza coscienza e di scarsa intelligenza, per la quale la scomparsa del nome è troppo lieve pena. Non è, quindi, il caso di arrestarci più oltre sull'opera di un falsario (secondo alcuni sarebbe un monaco lorenese del secolo XI), la cui azione può trovare qualche giustificazione soltanto ricorrendo alla considerazione che il rispetto per i prodotti dell'ingegno è un sentimento moderno.

Ma prima di abbandonarla giova notarvi la presenza dei nomi « digitus » e « articulus » ivi adoperati a designare rispettivamente un numero non superiore a 10 od un multiplo di 10, e quello di « mensa pythagorica » impiegato per designare l'abaco e che venne poi malamente interpretato come significante « tavola di moltiplicazione ». Nè va taciuto che, nel corso delle accennate discussioni sull'autenticità della *Geometria* attribuita a Boezio, apparve nella storia un nuovo personaggio, un Archita latino, inventore della procedura per costruire un triangolo rettangolo in numeri che noi attribuimmo a Platone (v. n. 87); ma non si tardò a ravvisare in lui un semplice travestimento del famoso tarentino, a cui forse deve farsi risalire la detta invenzione.

Va da ultimo rilevato come il nome di Boezio — come del resto anche quelli di Pitagora e di Gerberto — si trovi collegato ad un gioco aritmetico detto « battaglia di numeri » (ritmomachia), attorno a cui molto si

---

[1] Sulla questione delle origini dell'aritmetica oggi in uso scrisse dottamente N. Bubnow; la maggior parte delle sue pubblicazioni sull'argomento sono in russo; fa eccezione il volume intitolato *Arithmetische Selbstständigkeit der europäischen Kultur* (Berlin, 1914); i molti richiami ad altri lavori generalmente inaccessibili rendono difficile giudicare di quanto accettabile sia la tesi ivi sostenuta.

è scritto durante il Medio Evo; se la tradizione è conforme al vero Boezio avrebbe trovato, inventandolo ed eseguendolo, un po' di distrazione nelle lunghe ore di prigionia (¹).

109 - Lo studio degli scritti matematici di un personaggio di altissima fama qual è Boezio, la conseguente constatazione della completa assenza di considerazioni originali, produce una così profonda delusione, che si sarebbe tentati di ascrivere fra le fame usurpate quella della vittima di Teodorico. È un sentimento che spesso rinnovasi di fronte alle rare personalità che seppero interrompere la profondità delle tenebre medioevali e contro il quale è dovere di resistere, perchè esso è una conseguenza di una inesatta valutazione delle condizioni in cui svolgevasi la vita, nell'epoca più terribilmente oscura che ricordi la storia (²). Si rifletta, infatti, che allora il dedicarsi alla ricerca spassionata del vero era, non già seguire un indirizzo favorito dalla pubblica opinione e delle autorità costituite, ma navigare coraggiosamente contro corrente, onde coloro che sentivansi da natura chiamati alla investigazione scientifica dovevano essere titubanti nell'avventurarsi in una via che, non solo non avrebbe loro procurati onori e fama, ma che nemmeno avrebbe loro assicurato un pubblico di ascoltatori o lettori. Inoltre le incursioni di barbari, le guerre, i saccheggi « et similia » vietavano il formarsi di quell'ambiente tranquillo che sembra condizione indispensabile per una serena contemplazione del vero: e chi ai dì nostri è in grado di misurare i disastrosi effetti di una conflagrazione durata meno di un lustro non potrà stupirsi constatando le conseguenze non dissimili, ma in misura centuplicata, di una analoga condizione di cose durata per circa dieci secoli. Se poi si riflette che in allora il pensatore in mille occasioni si trovava inceppato dalla necessità di stabilire un accordo fra le conclusioni a cui era naturalmente tratto ed i principi che si dichiaravano rivelazioni divine, si vedrà come dovessero forzatamente essere poco numerose le persone aventi il coraggio di provocare qualche nuovo incidente dell'eterno conflitto fra la scienza e la fede. Ora, se si tien conto di tutte queste circostanze, si sarà astretti a concludere che Cassiodoro, Boezio e gli altri di cui ora ci occuperemo, con lo sforzarsi e riuscire a tener viva una fiammella che un terribile uragano minacciava incessantemente di spegnere, hanno ben meritato dalla civiltà, quanto, se non più, di molti grandi che, in tempi migliori, seppero accrescere di qualche vero il patrimonio scientifico dell'umanità (³).

---

(¹) Le opere di Boezio possono essere consultate con profitto da chi s'interessa della nomenclatura matematica in uso nella bassa Latinità; appunto con tale scopo l'*Aritmetica* del citato autore trovasi analizzata nel diligente scritto di B. VERATTI, *Sopra la terminologia matematica degli scrittori latini* (Mem. dell'Accademia di Modena, t. V, 1863).

(²) Uno dei più profondi conoscitori di questo periodo storico, il Michaud, dichiarava che i meriti di esso di fronte alla civiltà compendiansi in tre C: canzoni, cattedrali, crociate.

(³) Non è a credere che durante l'intero Medio-Evo nessuno s'interessasse agli studi; specialmente sopo il 1000, vinto il terrore per la fine del mondo, non mancarono gli studiosi; ma ciò che mancava era lo spirito e il metodo di ricerca. Innumerevoli sono le opere scritte in quell'epoca e tuttora esistenti manoscritte; ma tutte sono di versione

110 - Fra tali benemeriti incontriamo, tra il VI ed il VII secolo (l'epoca che in Europa contrassegna il Nadir della coltura), uno spagnuolo, Isidoro, nato a Cartagena o a Siviglia circa nel 560 e morto in quest'ultima città nel 636; essendo assurto al grado di vescovo di Siviglia sino dal 601, viene spesso indicato col nome di Isidoro da Siviglia, in conformità al costume medioevale di designare i più illustri personaggi ecclesiastici con la località in cui risiedettero all'apice della loro carriera. Di quest'uomo, famoso come pensatore e come educatore, assurto poi all'onore degli altari, esiste un'opera di carattere enciclopedico — *Origines* — analoga a quelle di M. Capella e Cassiodoro, ma dotata di un carattere suo proprio, il quale proviene dalla ricerca (più o meno felice) ivi tentata dell'etimologia dei termini in uso; e poichè sono ivi successivamente considerate tutte le discipline costituenti lo scibile del tempo, così vi fu ivi rifiutato un posto a quelle costituenti l'ordinario quadrivio. Benchè il dotto vescovo non rechi alcun contributo personale alla scienza del tempo, va rilevato a suo onore lo spirito filomatematico in cui scrisse e che è percepibile da frasi del tipo seguente: Tolle numerum rebus omnibus et omnia pereunt. Adime seculo computum et cuncta ignorantia coeca complectitur, nec differi potest a ceteris animalibus qui calculi nescit rationem ».

## Beda e Alcuino

111 - Non dissimili sentimenti verso l'aritmetica nutrì il venerabile Beda (n. in Irlanda circa nel 673 e m. ivi il 26 maggio 753 [1]), il quale oltre a scritti relativi alle scienze naturali ed alla misura del tempo (*De temporum ratione*), lasciò due lavori matematici. Uno (*De ratione unciarum*) tratta delle operazioni con le frazioni usate dai Romani, l'altro (*De computo vel loquela digitorum*) insegna un metodo per indicare i numeri, servendosi delle dita delle mani. È un sistema che ottenne vasta diffusione e grande rinomanza; a base di esso si trova nascostamente il numero 10, il che non deve recare meraviglia dal momento che si fonda sull'uso delle nostre dita. Per porgere un'idea di tale sistema diremo che Beda indica alcuni gesti da effettuarsi con la mano *sinistra* per indicare i numeri 1, 2,..., 10, 20,..., 90; se si eseguono invece con la *destra* i gesti proposti per rappresentare i numeri 10, 20,..., 90 si vengono a indicare i numeri 100, 200,..., 900, mentre quelli suggeriti per indicare i numeri 1, 2,..., 9 passando dalla sinistra alla destra permettono di designare i primi nove multipli di mille. Altri gesti della mano *sinistra* servono a indicare rispettivamente 10.000, 20.000,..., 90.000 e gli stessi

---

o commento di opere greche di scritti arabi giunte in Europa per il tramite degli Arabi; in nessuna gli autori mostrarono l'aspirazione e la forza di parlare in prima persona. Da consultare sull'importante questione: C. H. HASSCIUS, *Studies in the History of Medioeval Sciences* (Cambridge, 1924); L. THORNDIKE, *A History of magic and experimental Science during the first thirteen Centuries of our Era*, Vol. I e II (New York, 1923) e Vol. III e IV, *Fourteenth and Fifttenth Centuries* (Id. 1934).

[1] La sua tomba nella cattedrale di Durhama porta l'epigrafe: Hâc sunt in fossâ | Bedae venerabilis ossa.

effettuati con la *destra* compiono lo stesso ufficio riguardo ai primi nove multipli di 100.000. I multipli seguenti dello stesso esigono, per venire indicati, l'uso simultaneo delle due mani. Come si vede si tratta di una procedura del tipo di quelle in uso per corrispondere con i sordo-muti, l'utilità della quale evidentemente diminuisce rapidamente al crescere dell'entità dei numeri considerati.

112 - L'anno 735 in cui morì Beda è lo stesso in cui vide la luce, nella contea di York, un altro illustre anglosassone, Alcuino, il più eminente rappresentante della rinascita carolingia. Di lui va ricordato l'incontro — avvenuto a Parma nel 782 — con l'unico grande sovrano di quest'epoca che abbia saputo lasciare nella legislazione tracce durevoli e genialmente utili (alludiamo a Carlo Magno); questo colloquio non è certamente estraneo agli sforzi (che, per quanto infruttuosi, non sono meno meritori) del re dei Franchi per rendere nei suoi sudditi meno scarsa e meno torpida la passione per lo studio. Destinato più tardi all'abbazia di Tours, Alcuino si adoperò con grande impegno a vantaggio delle scuole e della biblioteca ivi esistenti; a Tours morì il 19 maggio 804.

Le *Propositiones ad acuendos iuvenes*, alle quali Alcuino deve il posto che occupa nella storia della matematica, quantunque non vi manchino gli errori e quantunque la paternità non ne sia indubbia, sono una multiforme raccolta di questioni, alcune puramente aritmetiche, altre aventi per iscopo la valutazione di aree; parte di indiscutibile sapore greco, altre di evidente origine romana; è una raccolta nella quale non mancano le questioni estranee alla matematica scientifica, sia perchè sono riflessi di antico misticismo, sia perchè appartengono alla classe di quei più o meno graziosi rompicapi che oggi ancora formano la delizia degli sfaccendati: limitiamoci a citare fra questi ultimi, il ben noto problema di trasbordare senza inconvenienti un lupo, una pecora ed un cavolo.

## Gerberto

113 - Un completo elenco dei personaggi che nel cuore dell'Evo Medio volsero il pensiero alle scienze esatte comprenderebbe i nomi di Remigio d'Auxerre (m. nel 908), di Odone di Cluny (n. 879, m. 942 o 943), di Abbo di Fleury (n. a Orleans, m. nel 1003 o 1004) i quali attestano come sino d'allora, cioè in una delle epoche più oscure di cui siasi serbato ricordo, la Francia avvertisse la necessità di promuovere la cultura scientifica e trovasse in sè la forza per cooperare al raggiungimento di tale nobile còmpito.

Se non ci arrestiamo a raccogliere le vestigia delle loro opere, gli è che nella seconda metà del x secolo apparve ivi una personalità di ben maggiore significato: Gerberto. Nato ed educato ad Aurillac, si dedicò alla carriera ecclesiastica; opinione diffusa, benchè scarsamente documentata, è che intorno al 967 egli percorresse la Spagna; tre anni appresso lo troviamo a Roma e nel decennio 972-982 nella diocesi di Reims. Incontratosi a Ravenna con l'imperatore Ottone II, destò in lui tale e tanta ammirazione che quell'imperatore lo pose alla testa della abbazia di

Bobbio, celebre per i tesori bibliografici racchiusi nella sua biblioteca: ivi prese certamente conoscenza del contenuto dei fogli costituenti attualmente il *Codice Arceriano* e forse scrisse quella *Geometria* che, in un codice del x secolo, reca il suo nome. Morto Ottone, fu restituito a Reims come capo di quella metropolitana. Nel 996 fu a Roma, consigliere di papa Gregorio V, per volere del quale divenne (998) vescovo di Ravenna. Elevato alla suprema carica ecclesiastica addì 2 aprile 999, assunse il nome di Silvestro II; morì il 12 maggio 1003. A dottrina, ritenuta sconfinata, seppe unire una illibatezza di costumi superiori ad ogni encomio, il che va rilevato perchè egli visse in un'epoca di tale disordine morale in tutti gli strati sociali, nessuno eccettuato, che con piena ragione fu detta l'èra della pornocrazia.

All'alta e generale considerazione che circondava Gerberto non corrisponde il livello che egli raggiunse come matematico; chè la *Geometria* attribuitagli non sorpassa il sapere di cui disponevano i contemporanei di Platone; essa è in gran parte modellata sugli scritti degli agrimensori romani, dei quali rispecchia l'andamento e non evita gli errori. Quanto agli scritti aritmetici recanti la sua firma, essi concernono esclusivamente la tecnica del calcolo, ramo certamente utile nella pratica della vita, ma di livello scientifico tanto modesto che, come già dicemmo, i Greci sdegnarono costantemente di farne oggetto di trattazioni scritte. Sicchè Gerberto — anche dopo consultata una lettera da lui diretta ad un certo Ardeboldo ed in cui alcuni storici credettero ravvisare un valore ed un'importanza che a parer nostro non possiede — ci fa l'impressione di un uomo superiore alle proprie opere scritte; fatto strano ma non raro in epoche oscure e travagliate, in cui le personalità più eminenti erano, per forza di cose, attratte ed assorbite da necessità più urgenti di quello dello scrivere, anche quando erano sospinte dalla nobile ambizione di assicurare un migliore avvenire all'umanità che procedeva incerta e barcollante nelle tenebre generali.

114 - Esorbita dal nostro programma il descrivere e misurare l'influenza culturale esercitata da Gerberto sopra i contemporanei e i posteri immediati; per quanto concerne la geometria si può farsene un concetto percorrendo un manuale di *Practica geometriae*, scritto nel sec. XII e di recente dato in luce, giacchè ivi interi capitoli sono trascritti dal congenere lavoro del futuro papa. Tale influenza dovette però esser ben lungi dal riuscire quale si sarebbe desiderato nell'interesse della scienza se due professori di teologia vissuti in principio del sec. XI rivelaronsi nel loro epistolario (da poco pubblicato da Tannery e Cleval) ignari dei fondamenti di detta scienza. E noti il lettore che si tratta di due persone colte, intelligenti, capaci di ben ragionare e non digiuni di cognizioni matematiche: ciò non ostante si mostrarono nella impossibilità di congegnare una soddisfacente dimostrazione matematica, cose che, come sappiamo, i Greci erano in grado di fare sino dal v sec. a. C.

È presumibile che migliori risultati abbiano dati gli insegnamenti di Gerberto riguardo all'aritmetica, dal momento che passa per suo discepolo quel Bernelino, che a Parigi scrisse un buon libro sull'abaco. Questo, al pari della generalità dei manuali scritti nel Medio Evo sopra la

logistica romana, non parla delle due prime operazioni aritmetiche, perchè la loro esecuzione non esigeva particolare astuzia, mentre tratta, con tutta la necessaria larghezza, della moltiplicazione e della divisione.

## Ermanno e Francone, Ben Esdra e Savasorda

115 - Questa condizione di torpore generale degli spiriti si prolungò anche nel secolo successivo, nel quale s'inizia la gloriosa età dei comuni italiani e nel quale il mondo assistè all'inconcepibile spettacolo di un sovrano tedesco, Arrigo IV, implorante, scalzo, il perdono da un papa di genio, Gregorio VII.

Fra le rare persone che allora si occuparono delle scienze esatte va ricordato anzitutto un conte svevo dal nome Ermanno (n. nel 1013, m. il 24 sett. 1054) soprannominato lo Storpio (*Hermannus Contrastus*) per la fisica imperfezione da cui era affetto; oltrechè sull'abaco, seguendo le orme di Boezio, egli scrisse sulla *Ritmomachia*. Ma ci aggiriamo sempre fra la grigia schiera dei compilatori, nella quale troviamo anche un Gerlando, nato a Besançon, poi Engelberto di Liegi, Gilberto di Lisieux, Raoul di Laon, fratello del celebre teologo Anselmo (1030-1117), inoltre quell'O'Creat che citammo parlando di Nicomaco (n. 88), e che un opuscolo tuttora esistente fa considerare discepolo di Adelardo di Bath, un Gerlando « Loteringiae oriundus » (secondo la designazione usata in parecchi manoscritti) ed altri ancor più insignificanti, che per brevità si tacciono. La loro presenza fa fede soltanto di quanto fosse diffuso nel mondo il sentimento della necessità di far conoscere al più grande numero di persone i rudimenti dell'arte del calcolo e le regole per determinare il contenuto di figure geometriche semplici.

Fra gli scritti del tempo giova arrestarsi un istante sopra un lavoretto di un contemporaneo dell'imperatore Ottone III, Francone di Liegi, direttore della scuola annessa alla Cattedrale di Saint-Lambert, non soltanto perchè esso concerne il più celebre problema della geometria, ma anche perchè serve a misurare quale profonda ignoranza continuasse ad ottenebrare le menti, anche di coloro che natura aveva provvisti di sufficiente intelligenza. Lo scritto in questione fu redatto nel periodo 1036-56, tratta della quadratura del cerchio, è diviso in sei libri ed ha come punto di partenza la proposizione che afferma essere il rapporto della circonferenza al diametro di qualunque circolo espresso *esattamente* da 22/7. Da questo principio segue che un cerchio avente per diametro 14 equivale a un rettangolo avente per lati 11 e 14; così il problema della quadratura del cerchio resta ridotto alla trasformazione di un tale rettangolo in un quadrato. È una questione la cui soluzione si trova in Euclide; ma Francone, che sembra ignorasse l'esistenza degli *Elementi*, vi spende attorno un considerevole numero di pagine; così, mentre prima aveva mostrato di non conoscere la fondamentale distinzione fra soluzioni esatte e soluzioni approssimate, ora mette in luce di ignorare il concetto di quantità irrazionali, col dichiarare che quella trasformazione di un rettangolo in un quadrato è « aritmeticamente impossibile ». A quali autori egli attingesse è ignoto, perchè egli non ne cita alcuno; in

conseguenza egli viene ad assumere la completa responsabilità degli errori che commette.

Molto superiore agli autori testè ricordati appare un ebreo spagnuolo, Abraham ben Esdra; nato a Toledo fra il 1089 e il 1092, visse in Ispagna sino al 1140, morì a Roma più che settantenne circa nel 1167; secondo alcuni fu il primo europeo che abbia esposto il sistema numerale a base 10 con l'intervento dello 0. Nelle molte opere filosofiche che recano la sua firma s'incontrano spesso notizie e considerazioni aritmetiche, le quali, benchè imbevute da fantasticherie cabalistiche, attestano la solida cultura matematica dell'autore. Si conosce poi di lui un libretto aritmetico scritto in ebraico, e la cui versione latina, intitolata *Liber aumenti et diminutionis*, fu pubblicata per le stampe da G. Libri (*Hist. des scienc. math, en Italie*, t. I, nota XIV); ma che, anche prima quest'opera sia stata giustamente apprezzata dai non correligionari dell'autore, risulta dalla citata traduzione latina di cui fu onorato e dalle numerose copie manoscritte che di questa si conoscono.

Della stessa stirpe è colui che, passato al Cristianesimo, assunse il nome di Johannes Hispalensis (o anche di Siviglia o di Luna); egli ha diritto ad una onorevole menzione da parte nostra come autore di un *Libro alghoarismi de practica arismetrice*, generalmente noto avendolo pubblicato B. Boncompagni.

Va finalmente ricordata con la debita considerazione l'opera di un altro israelita, la quale nella traduzione fattane da Platone da Tivoli nel 1116, forse col concorso dell'autore, porta il titolo *Liber Embadorum* (1) *Savasordae*. È un trattato di geometria pratica, il cui originale fu di recente (1913) dato alle stampe (2) e che ebbe larga diffusione nel Medio Evo latino (Leonardo Pisano stesso lo utilizzò per scrivere la sua *Practica geometriae*). Ivi s'incontra per la prima volta nel Medio Evo latino la risoluzione delle equazioni quadratiche; inoltre per quadrare il cerchio è usata un'ingegnosa argomentazione, di cui fu notata la somiglianza col metodo degli indivisibili che vedremo creato assai più tardi da B. Cavalieri. Il nome dell'autore era Abraham-Car Higgaha-Nasi; Savasorda era un semplice titolo onorifico: egli visse a Barcellona e un po' anche in Provenza e conseguì grande e ben meritata celebrità per avere intrapresa l'esposizione in ebraico di tutta la matematica del suo tempo, a vantaggio dei suoi correligionari, viventi allora in Provenza. Morì nel 1136 o poco dopo.

## Traduttori dall'arabo

116 - Nell'epoca di cui ci stiamo occupando, se pochi e mediocri furono gli autori degni di questo nome, numerosi e valorosi furono i traduttori, i quali riposero in circolazione idee e metodi dovuti ai grandi pensatori dell'antica Grecia e che essi impararono a conoscere nel corso delle peregrinazioni da essi intraprese in Oriente a scopo di studio.

---

(1) Termine tecnico ottenuto latinizzando il vocabolo ἐμβαδόν = area.

(2) L'originale contiene in più della traduzione, l'introduzione e l'ultimo capitolo, che parvero al Tiburtino interessanti soltanto i correligionari dell'autore.

Fra gli Italiani va ricordato Gherardo da Cremona; nato intorno al 1114, egli avvertì in sè stesso un'invincibile attrazione per l'astronomia, e appunto per conoscere la grande opera sull'argomento di Claudio Tolomeo si recò a Toledo, ove nel 1175 compì la versione dall'arabo in latino dell'*Almagesto*. Ma a ciò non si limita l'opera sua, chè a lui si è debitori di una analoga versione degli *Elementi* di Euclide (non esclusi i cosidetti Libri XIV e XV), dei *Dati* dello stesso autore, della *Sferica* di Teodosio, a cui vanno aggiunti altri scritti di cui parleremo nel Capitolo XI. Gherardo morì nel 1187; a lui l'espressione della nostra riconoscenza.

Contemporaneo di Gherardo fu l'erudito di Tivoli noto nella storia sotto il pseudonimo di Platone Tiburtino, ma il cui vero nome è forse destinato a restare perennemente ignoto. Egli visse a Barcellona e verso il 1120 tradusse dall'arabo la *Sferica* di Teodosio e alcuni scritti dovuti a seguici di Maometto, fra cui emerge Albategno (v. n. 148).

Lunghi viaggi intraprese e compì anche l'inglese Adelardo di Bath, il quale studiò e insegnò più tardi in Francia (rispettivamente a Tours e a Laon); spinto poi dalla sete di sapere visitò l'Egitto, l'Asia Minore e la Spagna camuffandosi da mussulmano. Gli si fa credito di avere diffuso in Europa la conoscenza degli *Elementi* di Euclide, da lui ammirati sotto veste araba e che egli presentò (1120 circa) in forma latina; non pago di ciò tradusse pure in latino anche qualche opera orientale.

Dello stesso sangue è l'erudito designato col nome latino di Robertus Retinensis, equivalente a Roberto di Chester. Egli visse a lungo in Ispagna, occupandovi la carica di arcidiacono di Pamplona, ma nel 1150 lo si ritrova in Inghilterra. Il posto onorevole che occupa nella storia della matematica è dovuto alla versione latina della più importante opera d'algebra di cui siasi serbata notizia: alludiamo a quella di Mohammed ibn Musa, o Al-Khowarizmi che dir si voglia.

Mentre poco o nulla si conosce dei casi della vita di questi benemeriti studiosi, è conosciuta con grande esattezza la biografia dell'ultimo, di cui dobbiamo occuparci in questo momento: Guglielmo di Moerbeke, così chiamato perchè nato nella piccola città belga Moerbeke-lez-Grammont, nel 1215 circa. Attratto dalla vita claustrale entrò nell'ordine dei Fratelli predicatori di Louvain; ma da questa città si trasferì poco dopo a Colonia per ascoltarvi le lezioni di Alberto Magno. Sembra che viaggiasse poi in Oriente fino al 1268, anno in cui lo si trova a Viterbo, cappellano e penitenziere del papa Clemente IV, cariche che egli conservò presso i successori di questo pontefice Gregorio X, Innocenzo V e Adriano V. Papa Giovanni XXI lo nominò (1276) arcivescovo di Corinto e tale dignità egli presumibilmente conservò sino al termine della sua vita, avvenuto poco prima del 1297. Più dell'opera assidua da lui dedicata al servizio della Chiesa, ci interessa il fatto che egli tradusse, sembra dal greco, buon numero di lavori di Archimede. Speciale importanza riveste la versione dei due libri *Sui galleggianti;* Nicolò Tartaglia la diede (Libro I, 1543; Libro II, 1565, postumo) come lavoro proprio, dichiarando di avere perduto di vista il testo greco su cui si fondava il proprio lavoro; ma il suo plagio fu messo in piena luce quando nel 1884 V. Rose scoperse nella Biblioteca Vaticana il manoscritto del frate

belga, primo abbozzo di una traduzione (compiuta nel dicembre 1269), che attendeva una diligente ripolitura. Malgrado le sue gravi imperfezioni, il lavoro di G. di Moerbeke possiede una indiscutibile importanza, chè esso servì a diffondere la conoscenza delle opere archimedee assai prima che l'Heiberg scoprisse l'originale dei *Galleggianti* in un palinsesto esistente a Costantinopoli.

## Le Università

117 - Mentre ancora duravano le tenebre medioevali, mentre soltanto nei chiostri qualche pensatore solitario meditava sulle opere di Aristotele, sorsero durante il secolo XII i sodalizi di indole economica, stretti fra maestri e discepoli residenti nella stessa città, non dissimili dalle moderne « trade unions » inglesi e che presero il nome di « universitas magistrorum et scholariorum » (le più antiche sono: Bologna 1100, Parigi 1150, Cambridge 1210, Padova 1222, Napoli 1224, Vienna 1365, ecc.). Era un piccolo germe che si sviluppò col tempo, perdendo il proprio carattere commerciale; era la forma embrionale degli odierni istituti di istruzione superiore. Svolgendosi in climi diversi, esso diede vita ad enti di indole, di struttura, di importanza differenti; così mentre in alcune città (per es. Parigi) il governo dell'associazione veniva affidato esclusivamente ai maestri, altrove (per es. Bologna) vi parteciparono eziandio gli scolari; così mentre alcune sedi, per l'influenza di insegnanti di grande fama, si specializzarono in determinate discipline (ad es. Bologna nella giurisprudenza, Salerno nella medicina) altre abbracciarono tutto lo scibile, epperò assunsero il nome di « studi generali ».

Costituitesi per spontaneo volere di liberi cittadini, queste associazioni assunsero in origine carattere laico e non ebbero alcun legame con le persone detentrici del potere; tuttavia i capi di esse giudicarono opportuno ricorrere alle autorità ecclesiastiche per avere sedi convenienti ed ai governanti per ottenere facilitazioni di varia specie e privilegi. Col tempo la Chiesa e lo Stato trovarono conveniente o meglio necessario intervenire per disciplinare forze preziose, da cui molto potevasi attendere e tutto temere.

Non entra nel nostro programma di seguire nelle varie sue fasi l'istituto universitario; ma c'incombeva il dovere di segnalarne l'apparizione, se non altro perchè la creazione delle università è il più importante contributo che il Medio Evo abbia saputo arrecare al progresso ed alla coltura. Però, pur riconoscendo l'indiscutibile benefica influenza esercitata dall'Università, è forza riconoscere che non è a questa che si deve se venne chiusa la tenebrosa parentesi rappresentata dalla barbarie medioevale. Tale importante risultato è dovuto piuttosto all'azione esercitata sulla nostra civiltà da altre stirpi, sia con lavori originali, sia riconducendo l'umanità a meditare sulle opere immortali dei sommi pensatori nati sul suolo dell'Ellade e che, per colpa dei Romani e dei barbari che invasero l'Italia, erano cadute in completo oblio.

Quali furono tali popoli, in qual modo ed in quale misura essi abbiano suscitate preziose energie nei pensatori occidentali — almeno per

quanto si riferisce alle scienze esatte — ci apprestiamo ora ad esporre; osserviamo però che i dati, specialmente cronologici, posti a nostra disposizione, sono così scarsi e malsicuri che è vano sperare si possa dedurne conclusioni certe intorno all'attendibilità della massima tanto cara agli ammiratori del sapere extra-europeo: *ex Oriente lux.*

## BIBLIOGRAFIA


A. M. T. Severini Boetii, *De institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque, accedit Geometria quae fertur Boetii. E libris manu scriptis edidit* G. Friedlein (Lipsiae, 1867).

P. Treutlein, *Intorno ad alcuni scritti inediti relativi al calcolo dell'abaco. Trattato di Gerlando « De Abaco »* (Bull. di bibl. e storia, t. X, 1877).

Migne, *Patrologiae latinae Cursus completas*, t. LXIX, LXX, LXXI, l. XXXIV (volumi contenenti le opere di Cassiodoro e Isidoro).

R. Piper, *Fortolfi Rythmimachie* (Abhand. zur Gesch. der Mathem., t. III, 1880).

Venerabilis Bedae, *Opera quae supersunt omnia*, 12 vol. (London, 1843-44).

*Monumenta Alcuiniana* (Berlin, 1873).

M. Curtze, *Die Handschrift No.* 14386 *der Khl. Hof-und Staat Bibl. zu München* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, t., VII, 1895).

Gerberti postea Silvestri II papae, *Opera matematica*, ed. Bubnow (Berlin, 1899).

C. Henry, *Prologus Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum. Fragment sur la multiplication et la division publié pour la première fois* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, III Heft, 1880).

M. Curtze, *Practica geometriae. Ein anonymer Tractat aus dem Ende des zwölften Jahrhunderts* (Monatshefte f. Math. u. Phys., t. VIII, 1897).

Tannery et Clerval, *Une correspondance d'ecolâtres du XI siècle* (Notices et extraits des manuscrits, t. XXXVI, 1900).

A. Nagl, *Der arithmetische Traktat von Rudolph von Laon* (Abh. zur Gesch. der Math., t. V, 1890).

M. Curtze, *Ein « Tractatus de abaco » aus der Wende des XII und XIII Jahrhunderst. Nach Codex Vindob. Palat.* 901 *fol.* 87-96 (Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. 43, 1898).

Winterberg, *Der Traktat Franco's von Lüttich « de quadratura circuli »* (Abh. zur Gesch. der Math., t. IV, 1882).

M. Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter* (Bibl. Matem., 3ª serie, vol. I, 1900; contiene estratti del *Liber Embadorum* del Savasorda).

M. Curtze, *Der Liber Embadorum des Abraham bar Chija Savasorda in der Ubersetzung des Plato von Tivoli* (Abh. zur. Gesch. der Mathematik, XII, Heft, 1902).

M. Guttmann, *Chibur ha Menschcha Tischbereth. Lehrbuch der Geometrie des Abraham bar Chija, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen* (Berlin, 1913). J. Millas Vallicrosa, *Abraham ben Hija, Libre de Geometrie, venio de l'hebreu* (Barcellona, 1931).

M. Silberman, *Sefer ha Mispar. Das Buch der Zahl. Ein hebraisch-arithmetisches Werk von R. Abraham ibn Esra* (Frankfurt a. M., 1895).

E. Müller, *Abraham ibn Esra. Buch der Einheit. Aus dem hebraischen übersetzt, nebst Parallelstellen und Erläuterungen zur Mahlematik Ibn Esraus* (Berlin, 1921).

Sanchez Perez, *San Isidoro* (Revista matem. hisp. americ., 1929).

F. Vera, *San Isidoro, matematico. La traduccion castellana del Libro III de sus « Etimologia »* (Erudiccion Ibero-Ultramontana, t. II, 1931).

B. Boncompagni, *Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath intitolato « Regulae abaci »* (Bull. di bibl. e storia, t. XIV, 1881).

F. *Bliemetz rieder,* Adelard von Bath (München, 1935).

## CAPITOLO IX

# L'ENIGMA CINESE

### Preliminari

118 - Volendo scoprire se qualche raggio di luce sia stato projettato dall'Asia sulla scienza europea è necessario prendere le mosse dall'immensa agglomerazione di popoli che vivono all'estremo Oriente del continente che noi stessi abitiamo, tanto più che si tratta di genti che vantano una civiltà risalente a non meno di trenta secoli or sono. Ora le prime informazioni intorno alle matematiche dei Cinesi furono offerte agli Europei dai missionari che importarono colà la dottrina di Cristo e ne esportarono notizie capaci di destare in tutti un'alta ammirazione per un popolo che pretende avere, assai prima di noi, inventati la bussola, la polvere da sparo ed i caratteri mobili da stampa. Da essi attinse a larga mano il Montucla (*Histoire des mathématiques*, t. 1, 2ª ed., Paris An VII, n. 448-480) il quale si compiacque nel descrivere le vaste cognizioni dei Cinesi sul corso degli astri, documentate, a tacer d'altro, dalla invenzione del ciclo cronologico designato di consueto col nome di Metone. Riguardo alle matematiche egli si limitò ad asserire che i Cinesi precorsero Pitagora nella scoperta della proprietà caratteristica del triangolo rettangolo (sul che è lecito nutrire dubbi assai fondati) e a ricordare che Leibniz, in una memoria presentata nel 1703 all'Accademia di Parigi (v. *Mathem. Schriften*, II Abth., t. III, Halle 1863, p. 223-7), applicò l'aritmetica binaria ad interpretare certe tabelle di segni misteriosi che si ritengono opera dell'imperatore cinese Fo-yi, vissuto più di quaranta secoli or sono. Ma il Montucla, dopo aver riconosciuto che « c'est de l'astronomie seule que les Chinois peuvent tirer quelque gloire [1] », con bonaria arguzia osserva: « Il faut, ce me semble, que le peuple Chinois ait été un peuple bien privilégié; car le progrès des sciences et de toutes les bonnes institutions y a une marche toute contraire à celle qu'elle a eu chez toutes les nations connues. Chez ces dernières, on voit des siècles nombreux de barbarie s'écouler, avant que l'on supçonne seulement qu'il existe des sciences... Chez les Chinois au contraire, on voit que les pre-

---

[1] Anche riguardo a quest'asserzione si deve fare qualche riserva, dopo che fu rilevato che la più antica eclisse che i Cinesi si vantano di avere predetta non era visibile nel Celeste Impero: cfr. K. Hirayama and S. Ogura, *On the eclipses recorded in the Shu Ching and Shih Ching* (Journ. of the phys. math. Soc. in Tokyo, 2ª serie, t. VIII, 1915, p. 2-8).

miers travaux pour l'établissement d'un peuple, et les premiers pas d'une science spéculative, comme l'astronomie, vont de pair... ».

Per più di mezzo secolo il Montucla ed i missionari suoi inspiratori furono le sole fonti a cui attinsero i curiosi di conoscere lo stato delle matematiche nel Celeste Impero. Nel 1856 K. L. Biernatzki pubblicò un articolo sull'argomento, compilazione di altro dato in luce quattro anni prima da Alessandro Wyllie, il quale articolo venne da allora in poi scelto come base da tutti coloro che si occuparono delle scienze esatte nell'Estremo Oriente; il Biernatzki è in generale tanto propenso a favorire i Cinesi che direbbesi essersi proposto di combattere la tesi enunciata dall'autore di una apprezzatissima opera sulla Cina (parliamo di John Davies) con le seguenti parole: « I Cinesi non posseggono alcuna vera scienza di cui siano i creatori; e che non ne abbiamo nemmeno ereditata dagli Indiani è provato dalla facilità con cui si assimilarono le scienze europee ». Ora, siccome ci sono totalmente ignoti gli scritti originali studiati dal Wyllie (epperò implicitamente utilizzati dal Biernatzki), si deve usare prudenza somma prima di accoglier le conseguenze a cui essi pervennero, tanto vero che parecchi anni più tardi un reputato orientalista francese — L. A. Sédillot — in una lettera diretta a B. Boncompagni ed avente per tema *De l'astronomie et des mathématiques chez les Chinois* (Bull. di bibl. e storia, ecc., t. I, 1868) si protestava completamente scettico intorno al valore dei pretesi contributi dati dai Cinesi alla scienza in generale.

Le nostre cognizioni sull'importante soggetto rimasero pressochè stazionarie sino al momento in cui ne apparvero, prima in un'opera di un giapponese, il Mikami ([1]), frutto di studi diretti, non soltanto sopra le opere dei matematici cinesi tuttora esistenti, ma anche su alcune grandi collezioni storiche e bibliografiche relative a pensatori fioriti nel Celeste Impero, e poi in una serie di articoli di un missionario belga, il Vanhée.

Benchè tali pubblicazioni non abbiano virtù di fugare le incertezze e i dubbi sorti in grande numero da tempo riguardo a l'antichità, l'originalità ed il valore intrinseco del sapere matematico del popolo che ci occupa, pure, soltanto dal momento in cui esse videro la luce, fu possibile accingersi a scrivere una storia della matematica in quella lontana e misteriosa terra.

Prima di entrare nel vivo dell'argomento giova premettere quanto segue:

I. Il popolo cinese ha due tendenze fondamentali che costituiscono per lo storico ostacoli pressochè insormontabili, cioè: *a*) una sconfinata boria nazionale, per effetto della quale esso magnifica costantemente i proprii meriti, giungendo persino ad appropriarsi ritrovati altrui ([2]); *b*) un culto per gli antenati ed una venerazione talmente esagerata per

([1]) I nomi di persona cinesi furono da noi scritti appunto seguendo il Mikami, la cui grafia non è sempre d'accordo con gli altri autori citati nella *Bibliografia* che chiude il presente Capitolo.

([2]) Che tale caratteristica siasi conservata in tempi moderni fu mostrato dal Vanhée (*Archeion*, t. XII, 1930 e t. XVII, 1935); però attualmente si nota un orientamento verso il pensiero europeo (v. C. H. Peake, *Isis*, N. 63, 1934).

quanto essi hanno pensato o scritto da indurre ogni buon cinese ad attribuire i propri pensieri agli avi o almeno a far apparire le proprie idee come semplici corollarii di verità ad essi attribuite.

Si aggiunga che i nomi europei sono talmente storpiati dai Cinesi da riuscire inintelligibili; chi infatti riconoscerebbe in un individuo indicato col nome Koling il celebre L. van Ceulen (Cap. XIX) e, peggio ancora, sotto quello di Tu-Te-Hei il ben noto Padre Jatroux?...

Altra difficoltà che s'incontra da chi si propone di narrare la storia del pensiero cinese deriva dal fatto che lo stesso personaggio è designato con nomi differenti; chè a un cinese viene dato al suo nascere un nome (« nome di latte »), un secondo ne riceve andando a scuola; uno doppio gli vien dato quando si ammoglia; più tardi può assumerne uno letterario, religioso o ufficiale a seconda della sua professione; finalmente, morto che sia, glie ne viene attribuito ancor uno, che può anche essere mutato.

Finalmente chi non è in grado di leggere le opere originali non sempre riesce a riconoscere uno stesso personaggio, essendone il nome differentemente riprodotto con i nostri caratteri, secondochè il trascrittore è italiano o francese, tedesco o inglese.

II. Nella storia del Celeste Impero s'incontrano alcune date certe che è opportuno avere costantemente presenti; ecco le principali:

*a*) Confucio, il grande moralista e legislatore, visse nel periodo 551-479, ond'è di poco anteriore a Pitagora.

*b*) Si assicura che nell'anno 213 a. C. l'imperatore Shih Hoang-ti, della IV dinastia, ordinò venissero gittati al rogo tutti i libri esistenti ed anche tutti i dotti, ma nessuno ci dice quale fosse la radice di tale odio per gl'intellettuali; però quella barbara deliberazione va ricordata perchè offerse un comodo « alibi » ai Cinesi richiesti di presentare le prove delle grandi scoperte da essi attribuiti ad antichissimi conterranei.

*c*) Nell'anno 65 dell'E. n. il Buddismo venne ufficialmente introdotto in Cina; tale fatto, mentre rese più intime le relazioni intellettuali fra questa e l'India, documenta l'esistenza di cordiali rapporti esistenti da tempo fra quelle grandi nazioni (tali rapporti sono confermati dalle preziose relazioni di viaggiatori cinesi che visitarono l'India nel corso dei secoli V, VII e XII); è dunque probabile che, anche nella matematica, siansi avvertite reciproche influenze; però nessuna è storicamente provata, nè si conosce la direzione in cui esse si manifestarono, cioè se da Oriente verso Occidente o viceversa.

*d*) Nel secondo sec. a. C. il commercio serico della Cina con l'Impero Romano divenne sempre più intenso.

*e*) Relazioni fra Arabi e Cinesi sono ufficialmente constatate a partire dalla dinastia Tang (618-907 dell'E. n.) e numerose sono le ambasciate inviate dall'Arabia in Cina (anni 615, 713, 726, 756, ecc.).

*f*) Nella seconda metà del sec. XII Marco Polo raggiunse la Cina; ma soltanto nel 1579 vi fu accolto il gesuita italiano M. Ruggiero, bentosto seguito dal celebre Matteo Ricci (n. a Macerata il 6 ottobre 1557,

**m. in Cina l'11 maggio 1610), che così efficacemente contribuì alla diffusione della scienza europea in quelle lontane contrade (1).**

## I primi documenti

119 - Prescindendo da informazioni vaghe e di apparenza fantastica, immeritevoli quindi di prendere posto in una storia degna di tal nome (2), il primo documento cinese relativo alla scienza che ci occupa è l'opera intitolata *Libro sacro d'aritmetica,* benchè tratti esclusivamente di argomenti collegati al calendario; essa riesce in molti punti così poco chiara ad intelletti europei che se ne conoscono parecchie versioni discordanti e che l'ultimo traduttore (G. Vacca, *Boll. di bibl. e storia,* ecc., t. VII, 1904) ad un certo punto del proprio lavoro dovette dichiarare l'impossibilità di riprodurre in linguaggio europeo le frasi che aveva sott'occhio. Di essa non soltanto è incerto l'autore, ma è anche controversa l'epoca in cui fu scritta; infatti alcuni sinologi la fanno risalire all'epoca in cui la Cina era governata dalla terza dinastia (1122-255 a. C.) ed altri invece a un po' prima del 1105; ma poichè fu commentata durante il periodo 200 a. C.-200 E. v. e fu ripubblicata nel 600, chi può farsi garante che il testo attuale sia identico a quello vergato quando i contatti del Celeste Impero con popoli occidentali non venivano ancora confessati?

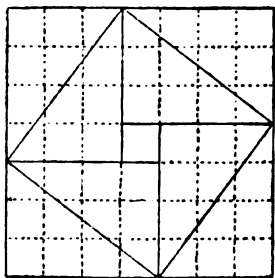



Fig. 16.

Quello che è certo si è che quel *Libro* offre la prova che il teorema di Pitagora era noto nel Celeste Impero almeno per il classico triangolo avente per lati $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ e che veniva colà applicato, come in Egitto, al tracciamento di angoli retti; uno dei diagrammi annessi al passo relativo mostra che, nell'anzidetto caso, i Cinesi sapevano dimostrare quella proposizione, col noto ragionamento (v. fig. 16) fondato sull'identità:

$$c^2 + 4 \frac{a\,b}{2} = (a - b)^2 + 4\,a\,b;$$

ma per poter con sicura coscienza asserire che essi sentirono prima dei Greci il bisogno di « dimostrare » una verità matematica e che essi ave-

(1) Da questo momento i più importanti lavori astronomici e geodetici del Celeste Impero furono affidati a membri della Compagnia del Gesù che occuparono posti direttivi nel cosidetto Tribunale delle matematiche, ente governativo avente per suo compito principale l'annuale compilazione del calendario.

(2) Due eccezioni possono farsi riguardo alla scoperta del quadrato magico

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

e del triangolo rettangolo 3, 4, 5, la conoscenza dei quali si è conservata per tradizione secolare, della quale sono prova i nomi *ho't'u* e *losha* con cui venivano indicati risp. quadrato e triangolo.

vano precorso Pitagora nella più popolare delle sue scoperte, bisognerebbe esser certi che quella figura non sia stata aggiunta dai più recenti manipolatori del testo in esame. Giova qui aggiungere come il teorema di Pitagora costituisca il midollo spinale di altri scritti nei quali sono risoluti molti problemi in cui si tratta di determinare un triangolo rettangolo in numeri, quando si conoscano due funzioni lineari dei lati; essi fanno credere che fossero state costruite sino da allora delle tavole di triangoli pitagorici. Se la frase « il cerchio deriva dal quadrato », inserita nel medesimo *Libro,* debbasi interpretare siccome prova che anche i Cinesi concepirono come noi il problema di trovare l'area del cerchio è molto probabile, mentre è indubitato che, durante lungo volger di secoli, essi si contentarono della rozza approssimazione corrispondente ad assumere $\pi = 3$.

120 - Nella letteratura matematica cinese allo scritto testè considerato segue in ordine cronologico l'*Aritmetica in nove parti* di autore ed epoca non noti; un commentatore vissuto nel III sec. dell'E. n. assicura che si tratta di una compilazione di opere antiche, ma già sappiamo qual credito si debba accordare a dichiarazioni di tal fatta; di più il testo attuale fu rimaneggiato da due matematici vissuti uno intorno al 150 a. C., l'altro un secolo dopo, ma ci è ignoto in quale senso ed in quale misura essi abbiano agito; onde, nell'impossibilità di determinare l'azione di ciascuno, a noi non resta che descrivere brevemente la materia trattata.

*I Parte*: Misura di campi, limitati da rette ed archi circolari. Nel caso di aree foggiate a triangoli o trapezi le regole date non differiscono dalle nostre; se si tratta d'un cerchio avente $d$ per diametro e $P$ per periferia, l'area ne è espressa nelle quattro maniere seguenti:

$$\frac{P}{2} \times \frac{d}{2}\,, \quad \frac{1}{4} P d\,, \quad \frac{3}{4} d^2\,, \quad \frac{1}{12} P^2;$$

di esse le due prime sono esatte, mentre le altre presuppongono l'uso di $\pi = 3$; per calcolare l'area di un settore si prescrive di moltiplicarne l'arco per la quarta parte del diametro, mentre per calcolare l'area di un segmento circolare s'insegna a fare il semiprodotto della saetta per la somma di questa e della corda; finalmente come espressione dell'area d'una corona circolare si assegna, con ragione, il prodotto della semisomma delle circonferenze per la differenza dei raggi.

Il resto di questa Parte I è dedicato al calcolo con frazioni o con numeri composti ciascuno di una parte intera e una frazione; la promiscuità di considerazioni aritmetiche e geometriche si può spiegare o ritenendo che queste fossero introdotte esclusivamente per dare occasione ad eseguire dei calcoli, oppure che pei Cinesi « aritmetica » fosse sinonimo di « matematica », analogamente a ciò che accade in Francia ove la « geometria » abbraccia tutti i rami della matematica.

La *II Parte* è dedicata a problemi relativi a proporzioni ed interessi e la *III* a questioni concernenti eredità. Nella *IV* si trovano problemi che esigono estrazioni di radici quadrate, operazione che s'insegna ad

eseguire con procedimento non disforme da quello oggi in uso: giova notare che ivi s'incontrano bensì numeri espressi mediante frazioni fondamentali, ma non frazioni decimali. Nella stessa Parte si mostra anche come estrarre le radici cubiche, per poter portare a termine le soluzioni di alcuni problemi della *Parte V*.

In questa si insegnano a calcolare i volumi di vari solidi col mezzo di regole esatte (quando si assuma $\pi = 3$) od approssimate: è notevole che per calcolare il volume di un tetraedro avente due spigoli opposti di lunghezze $a$, $b$ fra loro perpendicolari è insegnata una regola che equivale alla formola $\frac{1}{6} a\, b\, h$, ove $h$ è la lunghezza della perpendicolare comune a quei due spigoli, il che è tanto più notevole in quanto il concetto di perpendicolare comune a due rette sghembe appare in Europa soltanto alla fine del sec. XVIII, nella *Géométrie* di Legendre. Nella stessa *Parte V* si trovano problemi relativi a viaggi, lavori, ecc. mentre nella *VI* è largamente applicata la nostra « regola d'alligazione » e nella *VII* si risolvono problemi che oggi si enunciano mediante sistemi determinati di equazioni lineari: siccome nulla vien detto che giustifichi le procedure applicate, così è ignota la via che condusse a formularle, epperò non è escluso si tratti di metodi semplicemente importati dall'estero. La medesima osservazione è applicabile ad altri problemi determinati inseriti nella stessa *Parte* e nella seguente, nonchè riguardo alla distinzione ed all'uso di numeri positivi e negativi, coi quali ultimi i Cinesi sembra possedessero notevole famigliarità. La *IX Parte* contiene 24 problemi in gran parte basati sull'applicazione del teorema di Pitagora, noto all'autore in tutta la sua generalità. Segnaliamo il seguente che si incontra, sia pure con altri dati numerici, in opere indiane: « Un albero di bambù di data altezza viene abbattuto dal vento; conoscendo la distanza fra la cima e la radice dell'albero dopo il disastro, determinare in quale punto del tronco sia avvenuta la rottura »; la regola cinese per risolverlo essendo identica a quella data allo stesso scopo dagli Indiani, si è in presenza di un punto di contatto che è impossibile negare, un dubbio potendo sorgere soltanto riguardo alla direzione in cui si è manifestata l'influenza d'un popolo sull'altro. Più notevole e più originale è la questione seguente: « Una città quadrata di lato $x$ (Fig. 17) è attraversata da un strada che congiunge i centri dei lati esposti a Nord ed a Sud; alla distanza di 20 passi dalla prima è piantato un albero, visibile dal punto in cui si arriva facendo 14 passi dalla porta $S$ e poi 1775 verso Ovest; determinare $x$ ». Si trova, con una semplice considerazione di triangoli simili:

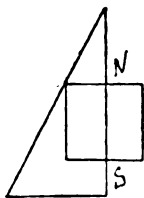



Fig. 17.

$$\frac{x/2}{20} = \frac{1775}{20 + x + 14}$$

donde $x = 250$. Sembra, a quanto ci viene riferito, che i Cinesi nella risoluzione di questo problema si siano fermati a mezza strada, essendosi limitati a scrivere la equazione del problema; ora, data la perizia dimo-

strata dalla scelta dei dati (¹), come vincere il sospetto si tratti di una questione semplicemente ed incompletamente trascritta da qualche manuale straniero, ma superiore alle forze di chi compose l'opera in esame?

## Opere posteriori

121 - Un secondo antico manuale cinese ha per titolo *Aritmetica classica* di Sun-Tsu (o Suan-Tse); è divisa in tre libri e va particolarmente raccomandata a chi intende studiare la logistica dei Cinesi. L'epoca in cui visse colui che la compose è incerta, chè alcuni ritengono che egli appartenesse al VI sec. a. C., mentre altri, fondandosi sopra considerazioni intrinseche, giudicano sia posteriore alla introduzione del Buddismo in Cina. Ivi i primi cinque numeri interi sono indicati con altrettanti tratti verticali (rappresentanti asticciuole di bambù) ed i quattro seguenti aggiungendo un tratto orizzontale sopra i simboli dei numeri 1, 2, 3, 4. Gli stessi caratteri fatti ruotare d'un angolo retto designano rispettivamente i numeri 10, 20,..., 90; come con questi simboli si potessero scrivere numeri più grandi risulta esaminando il simbolo $\overline{|}\ \overline{||}\ =\ \overline{|||}$ con cui veniva rappresentato il numero 6728; non è detto come si indicasse graficamente l'assenza di cifre di un determinato ordine, il che sarebbe stato di grande interesse perchè la presenza dello 0 in Cina non è accertata prima dell'anno 1250: e poichè sino dal 1271 i Mongoli avevano al loro servizio degli artiglieri arabi, è naturale supporre che gli adoratori di Maometto abbiano insegnato l'uso di quell'importante ausiliare aritmetico ai seguaci di Confucio.

Senza arrestarci sopra quanto porge esclusivamente conferme a notizie già da noi riferite dianzi, riportiamo l'enunciato di un problema di sapore prettamente cinese, ma di contenuto matematico, identico a quello di altri problemi che incontrammo od incontreremo in Egitto, in Grecia ed in India: « Una donna stava risciacquando dei piatti in un ruscello, quando un sorvegliante delle acque le domandò: Come mai avete tanti piatti? Perchè in casa vi fu un banchetto, rispose la donna. Il funzionario chiese allora il numero dei commensali. Non lo so, replicò la donna, so però che due a due usavano un piatto per il riso, tre a tre uno per il pane, quattro a quattro uno per le vivande e che i piatti erano in tutto 65 ». Si tratta quindi di ricavare il valore di $x$ dall'equazione

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65 ;$$

il nostro autore con piena ragione prescrive per ottenere il valore di $x$,

(¹) A meglio convincerne chi legge notiamo che scrivendo $a$, $b$, $c$ in luogo dei numeri 20, 14, 1775, la risoluzione del problema è espresso come segue:

$$x = \frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+8ac}}{2} = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2ac} ;$$

onde, per ottenere una soluzione intera, $a$ e $b$ devono essere scelti in modo che $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2ac$ sia un quadrato perfetto.

di moltiplicare 65 per 12 e poi dividere il risultato per 13 e così giunge al valore esatto 60.

Rileveremo ancora due questioni le quali presentano il più stridente contrasto, una essendo una vera gemma e l'altra costituendo, nell'epoca in esame, una desolante macchia.

La prima ha per iscopo la ricerca di un numero che diviso risp. per 3, 5, 7 dia per resti risp. 2, 3, 2; si tratta dunque di risolvere in numeri interi il sistema seguente: $x = 3y + 2$, $x = 5z + 3$, $x = 7u + 2$; la regola di calcolo in questo caso applicata dai Cinesi (e da essi detta *Tayen*) non differisce in sostanza da quella che fu poi data da Gauss ( *Disq. arithm.*, § § 32-36); per applicarla si determinano (per tentativi?) tre numeri $k, l, m$ tali che si abbia $5 . 7 . k \equiv 1$ (mod. 3), $7 . 3 . l \equiv 1$ (mod. 5), $3 . 5 . m \equiv 1$ (mod. 7); come tali si possono assumere i numeri $k = 2, l = 1, m = 1$; si formino poi i prodotti $5 . 7 . 2 = 70$, $7 . 3 . 1 = 21$, $3 . 5 . 1 = 15$, si moltiplichino rispettivamente per 2, 3, 2 e si addizionino i risultati; si ottiene così 233; togliendo da questa somma quante volte sia possibile il prodotto $3 . 5 . 7$ (cioè due volte) si giunge al numero cercato 23 (o meglio al minimo di essi).

L'altra questione ha il seguente ridicolo enunciato: « Una donna gestante di 29 anni aspetta un figlio nel nono mese del corrente anno; quale sarà il sesso del nascituro? ». Ad essa si risponde con imperturbabile serietà: « Prendi 49, aggiungi il mese del concepimento, togli l'età della madre e poi il cielo 1, la terra 2, l'uomo 3, le stagioni 4, gli elementi 5, le leggi 6, le stelle 7, i venti 8 e le provincie 9; se il resto risulta dispari nascerà un maschio, se pari una femmina ». Si noti che così si è aggiunto il mese del concepimento e si è tolta l'età della madre $49 - 45 = 4$ e si vedrà che questa pretesa regola non dice altro che, *nascerà un maschio od una femmina secondoché è dispari o pari la differenza tra l'età della madre ed il mese del concepimento.* Un pietoso biografo di Sun Tsu assevera si tratti di un'aggiunta arbitraria alla sua opera dovuta a mano ignota; accettiamo tale scusa se non altro come prova che quel neo fu avvertito da qualche cinese alcuni secoli prima di noi.

122 - Un altro scritto cinese tuttora esistente reca il titolo *Classico aritmetico dell'isola del mare* e fu scritto da Liu Hui nel 263 dell'E. v. Va subito notato che il titolo riferito non è quello appostovi dall'autore, ma fu aggiunto da un commentatore vissuto durante il VII secolo dell'E. n., in memoria di un problema ivi trattato, avente per scopo l'esecuzione di alcune misure in un'isola lontana; dell'originale non esiste più alcun esemplare; si ha a propria disposizione soltanto un rifacimento che risale al periodo 1403-1424 e che si legge in una trascrizione che porta la data 1775; si tratta dunque di un documento che non offre alcuna garanzia di autenticità, onde non possiamo seguire chi ne trasse lusinghiere conseguenze intorno all'antichità dell'algebra cinese.

Continuando la nostra rassegna rileveremo nella letteratura aritmetica dei Cinesi buon numero di trattati adottati ufficialmente per la preparazione degli impiegati civili dello Stato, i quali trattati, malgrado i tentativi per fare risalire la compilazione dei più antichi al tempo del-

l'« imperatore giallo » (XXVII sec. a. C.), non possono considerarsi anteriori al VI sec. dell'E. n.

Quello ritenuto di più venerabile data è di autore ignoto; sono ivi applicate le regole in parte errate, in parte inintelligibili ed in parte meno approssimate di quelle che incontrammo nell'*Aritmetica in nove Parti;* limitiamoci a notare che ivi è commesso l'errore di ritenere che un quadrilatero sia determinato dai suoi quattro lati consecutivi $a, b, c, d$ e che ne è calcolato il contenuto col mezzo della erronea espressione egiziana

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

L'*Aritmetica classica* di Hsia-hou Yang (è il secondo dei detti trattati) fu scritta nel 550 o poco più tardi; essa presenta molti punti di contatto con l'opera congenere di Sun-Tsu; i problemi ivi risoluti esigono soltanto si sappiano eseguire le operazioni aritmetiche sino all'estrazione delle radici quadrate inclusivamente; alcuni sono di natura geometrica, mentre altri hanno per scopo la ricerca dell'interesse di capitali.

Di poco posteriore è l'*Aritmetica classica* di Chang Ch'in Suan-ching, la quale fu commentata nel corso del VII sec. e ripubblicata nel 1084 per ordine del Governo. Sono ivi applicate regole aritmetiche non giustificate in alcun modo, ma che guidano a risultati esatti; a mo' di esempio è vero, come dice l'autore, che 1768 4/7 diviso per 27 3/5 dà per quoziente 64 38/483, ma come lo si giustifichi è ignoto. Benchè questa opera differisca poco da quelle anteriori, pure è la prima in cui s'incontrino la regola per dividere una frazione per un'altra, l'espressione della somma di un certo numero di termini di una progressione aritmetica ed inoltre problemi del tipo del seguente: « Un gallo costa 5 monete, una gallina 3, mentre tre polli si hanno per una moneta; mediante 100 monete si sono acquistati in tutto 100 bipedi; quanti di ciascuna specie furono comperati? ». Si tratta evidentemente di un problema di analisi indeterminata che equivale alla ricerca delle soluzioni intere e positive del seguente sistema:

$$x + y + z = 100 \quad , \quad 5\,x + 3\,y + \frac{1}{3}\,z = 100.$$

Chang Ch'in ne trova le tre soluzioni (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84), che sono realmente le uniche possibili. Ora quel problema offre una evidente analogia col seguente che incontreremo in una memoria di Abu Kamil (v. più avanti n. 147), scrittore arabo del IX sec. (fr. SUTER, *Bibl. mathem.*, III Ser., t. XI, p. 102): « Con 100 dramme si vogliono acquistare 100 volatili fra anitre, galli e passeri, sapendo che ogni anitra costa 5 dramme, mentre 20 passere si hanno per una dramma ed ogni gallo ne costa una ».

Questo problema è però più facile di quello cinese, perchè il sistema nel quale si traduce,

$$x + y + z = 100 \quad , \quad 5\,x + \frac{1}{20}\,y + z = 100,$$

ammette la sola soluzione (19, 80, 1).

Siccome del succitato scritto arabo non conosciamo che un frammento, così non è escluso che in origine contenesse anche quel problema cinese, e siccome in quello s'incontra un problema suscettibile di non meno di 2676 soluzioni, così è possibile che Abu Kamil abbia risoluto completamente anche il problema di Chang Ch'in. Se il surriferito problema si trovasse soltanto nell'edizione di quell'opera cinese fatta nel corso del x sec., sarebbe stabilita l'origine forestiera del problema stesso; ora che si tratti di un frutto esotico è ipotesi che sembra confermata dall'osservazione che chi nel 1689 ne curò l'edizione confessò di non riuscire a comprendere la risoluzione data da Chang Ch'in e la sostituì con altra ben poco soddisfacente; ma anche chi si rifiuta di ravvisare nel surriferito problema una derivazione araba, non può negare che esso svela un indiscutibile punto di contatto fra scienza araba e scienza cinese.

Va ancora notato che un problema dello stesso tipo s'incontra in un commento scritto nel VI sec. ad un'opera cinese che vuolsi risalga all'anno 200; esso infatti si traduce nelle due equazioni

$$5x + 4y + \frac{1}{4}z = 100 \quad , \quad x + y + z = 100,$$

la cui unica soluzione è, come afferma il citato commentatore, (15, 1, 84). In tutti questi problemi è notevole il frequente intervento del numero 100, preferito anche da Abu Kamil: donde la ragione del nome « Problema dei cento uccelli », con cui i Cinesi indicavano le questioni dell'indicato tipo.

Ci corre l'obbligo di aggiungere che nella letteratura cinese s'incontrano altri problemi di analisi indeterminata più complicati, ad esempio uno in cui si tratta di determinare 18 incognite legate da sette relazioni lineari; e siccome, data la natura del problema, per le incognite non sono ammissibili valori frazionari o negativi, così la ricerca viene condotta nell'identico senso in cui sarebbe intesa da un moderno matematico occidentale.

I trattati citati non sono gli unici che s'incontrano nella letteratura cinese posteriormente al VI secolo; ma gli altri, non essendosene serbati che i titoli, non possono servire che come attestazioni dell'attività matematica del popolo di cui ragioniamo.

## Quadratura del cerchio

123 - Prima di esaminare altre opere superstiti di eguale provenienza e di pertinenza dell'algebra, osserviamo che il popolo Cinese mostrò preferenza propensione, piuttosto per la scienza del numero, che per l'investigazione delle proprietà dell'estensione figurata: l'unico problema geometrico attorno al quale spese assidue fatiche fu quello della quadratura del cerchio. Nel render conto dei contributi arrecati dagli abitanti il Celeste Impero a questa celebre questione, passeremo sotto silenzio le notizie di carattere evidentemente leggendario e notiamo (lo dimostra

quanto stiamo per esporre) e che i primi che se ne occuparono con serii propositi non risalgono ad epoca anteriore all'E. v.

A Chang Heng (78-139) si attribuisce il merito di avere abbandonato il valore $\pi = 3$ per quello più esatto $\sqrt{10}$ ($= 3,1622777$), probabilmente appreso dagli Indiani che introdussero il Buddismo in Cina.

Al generale Wan-Fan (229-267) — ucciso dal suo imperatore per essersi presentato ad un consiglio della corona in istato di ubbriachezza — si attribuisce la scoperta del fatto che una circonferenza di diametro 45 ha per lunghezza 142, il che equivale ad assumere $\pi = 3.155$; è ignoto come egli abbia ottenuto questo risultato, che è poco più approssimato di $\sqrt{10}$.

Circa nello stesso tempo visse il matematico Liu Hui, a noi già noto (v. p. 152), il quale, per risolvere il famoso problema scelse la via battuta da Archimede, non meno di cinque secoli prima; partì, cioè, dall'esagono regolare inscritto e con bisezioni ripetute si illuse di conseguire lo scopo; ma, mentre il Siracusano nell'*Arenario* si arrestò al poligono di 96 lati, il cinese si spinse a quello di 192; tuttavia trovò soltanto un valore equivalente all'archimedeo $\pi = 3,14$. Che Liu Hui abbia concepito da sè questo schema di calcolo è certamente possibile, perchè si tratta di cosa che era germogliata cinquecento anni innanzi nella mente di altro mortale; però chi conosca le relazioni che l'India mantenne da una parte con la Grecia e dall'altra col Celeste Impero sente sorgere nel proprio animo forti dubbi sull'originalità del lavoro cinese, lamentando che nessun documento sia oggi capace di mostrarli infondati, tanto più che il surriferito valore di $\pi$ non fece bandire per sempre altri meno esatti (come 3 e 3,1432).

Gli studi testè riferiti resero possibile la comparsa due secoli più tardi di un altro eminente quadratore — l'astronomo Tsu Ch'ung-chih (430-501) — il quale operando sopra un cerchio avente per diametro $10^8$ (l'ottade di Archimede) trovò essere

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

e ne concluse, oltre il valore archimedeo $\pi = \frac{22}{7}$, che s'incontra nell'*Arenario*, l'altro più approssimato $\pi = \frac{355}{113}$ che vedemmo (n. 43) essere pure attribuito ad Archimede. Anche se questa conclusione non è originale, esso prova la superiorità di Tsu Ch'ung sui propri connazionali, chè questi non compresero l'entità del risultato ottenuto e ben presto lo dimenticarono. Da tale trascuranza colpevole trae probabilmente origine il fatto che il lavoro di Tsu Ch'ung ormai si considera come irremediabilmente perduto, che anzi ogni traccia del metodo da lui seguìto è ormai cancellata per sempre, il che, purtroppo, ci pone nell'assoluta impossibilità di determinarne le analogie e le differenze con i procedimenti usatī allo stesso scopo in Europa, prima e dopo.

## Trattati di algebra

124 - Ritornando ad occuparci degli scritti relativi all'algebra, osserveremo anzitutto che dai documenti tuttora esistenti sembra risultare che i Cinesi sino al I sec. a. C. erano in grado di risolvere le equazioni quadratiche e coefficienti numerici e che continuarono a trattare problemi che vi si riferiscono sino al VI sec. dell'E. n.; questioni di grado più elevato cominciano ad apparire nella prima metà del secolo seguente in un'opera di Wan Hs'iao-t'ung, in parte tuttora esistente. Fra i problemi ivi contenuti tre ci sono riferiti, attorno a cui è necessario spendere qualche parola.

I. « In un triangolo rettangolo il prodotto $P$ dei cateti vale 706 1/50 e l'ipotenusa supera il primo cateto di $s = 36\ 9/10$ [1]: determinarne i tre lati ».

Eliminando $y$ fra le due equazioni

$$x\,y = P \quad , \quad \sqrt{x^2 + y^2} - x = S,$$

si trova facilmente un'equazione di terzo grado e viene asserito che, per risolverla, si usava una procedura simile all'estrazione della radice cubica, ma essa doveva essere approssimata perchè la si dichiarava applicabile esclusivamente ad equazioni numeriche. Ciò non ostante essa doveva essere eccellente se diede per risultati i numeri 14 7/20, 49 1/5, 51 1/4, i quali soddisfano *esattamente* le condizioni del problema; così essendo le cose, come fugare il sospetto che il risolutore si vantasse di saper fare più di quanto le forze gli consentivano e che, in fatto, quei numeri gli fossero già noti prima d'intraprendere la soluzione del problema?

II. « In un triangolo rettangolo il prodotto $P$ del primo cateto per l'ipotenusa vale 1337 1/20, mentre la differenza tra l'ipotenusa ed il secondo cateto è eguale a $D = 1\ 1/10$; trovare quest'altro cateto ».

Detti $x$, $y$ i cateti, sussisteranno le relazioni

$$y\sqrt{x^2 + y^2} = P \quad , \quad \sqrt{x^2 + y^2} - x = D,$$

donde deducesi agevolmente l'equazione cubica in $x$

$$P^2 = (x + D)^2\ (2\,D\,x + D^2),$$

che, nelle ipotesi numeriche indicate nell'enunciato, diviene

$$(1337{,}05)^2 = (x + 0{,}10)\ (0{,}20\,x + 0{,}01);$$

secondo l'autore essa avrebbe per radice $x = 92\ 2/5$ il che evidentemente non è; in conseguenza, come lunghezza dell'ipotenusa si ottiene

$$\frac{1337\ 1/20}{92\ 2/5},$$

[1] Il Mikami scrive (p. 54) 9/60, per una svista.

cioè circa 14 9/20; si avrebbe pertanto un triangolo rettangolo con l'ipotenusa inferiore ad un cateto!

III. « Un granajo ha la forma di un tronco di piramide a base quadrata; la differenza $D$ fra i lati delle basi vale 6, mentre l'altezza supera di $G = 9$ il lato superiore; il granajo contiene $P = 187{,}2$ misure di grano, di cui vengono estratte $P' = 50{,}4$. Quali saranno le lunghezze dei lati superiori ed inferiore del granajo e la sua altezza, inoltre la profondità ed il lato della superficie superiore della figura costituïta dal grano residuo? ».

Limitiamoci per brevità alla prima parte del problema. Detto $x$ il lato della base superiore, $y$ quello della inferiore e $z$ l'altezza ed applicando la formola che esprime il volume di un tronco di piramide a basi parallele (formola che s'incontra nell'*Aritmetica in nove Parti*), si giunge al seguente sistema di equazioni:

$$y - x = D \quad , \quad z - x = G \quad , \quad \frac{1}{3} z\,(x^2 + x\,y + y^2) = P \, ,$$

donde, eliminando $y$ e $z$, si trova un'equazione cubica che per $D = 6$ e $G = 9$ diviene

$$x^3 + 15\,x^2 + 66\,x = 79{,}2.$$

Siccome il primo membro è una funzione crescente di $x$ che per $x = 1$ assume il valore 82, così è chiaro che l'equazione precedente non può avere radici superiori a 1; inoltre essa non può avere radici intere, perchè un intero non può essere eguale ad una frazione; in conseguenza è inammissibile il risultato $x = 3$ che viene dato come ottenuto in Cina.

Il mediocre successo ottenuto nei tentativi fatti dall'autore in esame per risolvere le equazioni cubiche relative ai problemi II e III rafforza i dubbi da noi manifestati intorno alla risoluzione che si dice da lui eseguita per quella a cui condusse il I.

125 - Natura differente da quanto testè riferimmo ha un passo matematico, che risale all'XI sec. e che venne di recente segnalato (G. Vacca). Ivi si considera una scacchiera composta di $n^2$ caselle, col mezzo della quale si fa un giuoco (detto dell'assedio), in cui ogni casella può essere lasciata vuota oppure venire occupata da un gettone bianco o nero; e si domanda in quanti modi questa operazione può venire eseguita. La risposta è evidentemente $3^{n^2}$. Si è qui in presenza di un problema di calcolo combinatorio? È lecito dubitarne, almeno se si attribuisce a questa denominazione il significato ordinario; ma ciò che è notevole si è che il numero delle soluzioni del problema sale con vertiginosa rapidità; infatti per $n = 6$ ascende a 150094635296999121, mentre per $n = 7$ l'autore dichiara di non disporre di caratteri sufficienti per esprimerlo e per ovviare a questo inconveniente egli propone artifici sostanzialmente identici a quelli usati da Archimede nell'*Arenario*: allora può trattare anche il caso $n = 19$, che corrisponde alle scacchiere in uso presso i propri conterranei. Nasce così la questione se ci si trovi in presenza di una coin-

cidenza fortuita o di una prova di relazioni fra la Cina e la Grecia, senza però che si abbia modo di rispondervi.

Allo stesso sec. XI appartengono alcuni *Ricordi* scritti dall'astronomo Ch'en Hus (1011-1075) nei quali si trova la seguente regola approssimata per rettificare un arco circolare:

$$arco = corda + \frac{2\, saetta^2}{diametro}.$$

126 - Per la Cina il sec. XIII fu uno dei più agitati e tribolati che ricordi la storia, chè, appunto al principio di esso, apparve sulla scena del mondo il famoso guerriero tartaro Gengis Kahn; ciò non ostante verso la metà di quel secolo — precisamente nel 1257 — vide la luce l'importante opera intitolata *Nove Sezioni di Matematica,* dovuta all'astronomo Ch'in Chiu-shao, ove lo zero è rappresentato mediante un cerchietto. Al pari delle opere dianzi esaminate, si tratta di una collezione di problemi risolti, distribuiti in diciotto capitoli; rileviamo in essa il passo inteso a giustificare la procedura, che già incontrammo, per determinare un numero che, diviso rispettivamente per 3, 5, 7, dia per resti 2, 3, 2; aggiungiamo che lo stesso metodo viene applicato ad altri problemi congeneri interessanti l'astronomia; anzi con ogni verosimiglianza, appunto le questioni di tal fatta furono quelle che indussero i Cinesi a studiare il « problema dei resti ». Nella stessa opera sono adoperati promiscuamente 3, 22/7, $\sqrt{10}$ come valori approssimati di $\pi$; ivi s'incontra poi un'espressione dell'area di un triangolo in funzione dei suoi lati $a, b, c,$ che oggi esprimerebbesi con la formola

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left\{a^2 c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right\}};$$

da quanto ci viene riferito non emerge se i Cinesi ne conoscessero l'equivalenza con l'espressione $\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, onde non si può con sicurezza affermare che si sia in presenza di un nuovo punto di contatto fra l'Estremo Oriente e l'Ellade antica, oppure di una coincidenza occasionale.

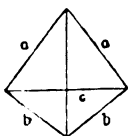



Fig. 18.

Fra i problemi risolti nell'opera in esame due ci sembrano meritevoli di arrestarci qualche momento.

I. Per calcolare l'area di un quadrilatero avente due coppie $a, b$ di lati consecutivi fra loro eguali (Fig. 18) e di cui si conosca la diagonale $c$ che unisce i vertici in cui concorrono lati fra loro diseguali, viene suggerito di risolvere la equazione

$$-(B-A)^2 + 2\,(A+B)\,x^2 - x^4 = 0,$$

ove si è posto:

$$A = \left[b_2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad B = \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Ora si direbbe che qui siasi voluto ad arte complicare inutilmente la

questione; infatti, siccome la figura mostra subito che la seconda diagonale è espressa da

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2},$$

così si ha subito

$$x = \frac{c}{2} \left\{ \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \right\}$$

e razionalizzando quest'espressione si ritrova la surriferita equazione, la quale naturalmente ha, oltre quella, altre radici estranee alla questione.

II. « Vi è un castello a base circolare (Fig. 19) avente quattro porte rivolte ai punti cardinali; alla distanza $a = 3$ della porta a Nord e piantato un albero $A$, visibile dal punto $B$, alla distanza $b = 9$ dalla porta a Sud; assumendo $\pi = 3$ determinare la lunghezza della periferia e del diametro del castello ».

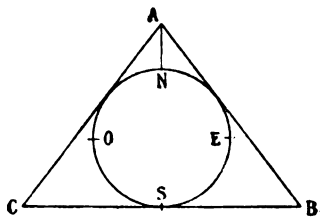



Fig. 19.

Lo storico a cui attingiamo asserisce che questo problema si risolve mediante l'equazione

$$1 \cdot x^{10} + 7\,a\,x^8 + 8\,a^2\,x^6 - 4\,(b^2 - a^2)\,x^2$$
$$- 2\,b^2 \times 8\,a^2\,x^2 - 2\,b^2 \times 8\,a^2 \times b = 0$$

« la quale viene trattata come un'equazione di 10° grado e che dà per il cercato diametro il valore 9 ». Facciamo per conto nostro alcune osservazioni: *a*) Nel quarto termine si deve certamente leggere $x^4$ invece di $x^2$ ed alcuni coefficienti si potrebbero facilmente semplificare; *b*) Quell'equazione si abbassa subito al 5° grado; d'altronde non è chiaro che cosa si voglia significare dicendo che la si suole « trattare come un'equazione di 10° grado » dal momento che nulla si conosce di particolare alla risoluzione delle equazioni di tal fatta; *c*) Si chiami $x$ il raggio del castello e si consideri il punto $C$ simmetrico di $B$ rispetto alla porta $S$, nasce così un triangolo $A\,B\,C$ in cui è inscritto il cerchio di raggio $x$; esprimendone l'area in due modi suggeriti dall'ispezione della figura si trova l'equazione

$$x\,(2\,b + \sqrt{a^2 + 2\,a\,x}) = b\,(2\,x + a),$$

ossia

$$2\,x^3 + a\,x^2 = a\,b^2.$$

Il problema, dunque, non esige che si assuma $\pi = 3$, nè dipende da un'equazione di decimo grado; questo non lieve errore conferma il fatto che Chi'n ebbe fama di abilità, piuttosto nel risolvere che nello stabilire le equazioni. Nel caso speciale $a = 3$, $b = 9$ la precedente equazione diviene

$$2\,x^3 + 3\,x^2 = 3^5.$$

Scrivendola sotto la forma

$$2\,x\,[(x+3)^2+18] = 9\,[(x+3)^2+18]$$

si vede che il problema ammette l'unica soluzione reale e positiva $x = \frac{9}{2}$ conformemente a quanto vedemmo essere asserito; invece l'equazione di 10° grado indicata dallo storico giapponese, non è soddisfatta, quando $a = 3$ e $b = 9$, da $x = 9$! Come conciliare queste notizie, così piene di contraddizioni? Altri più abile di noi si accinga a dipanare questa arruffatissima matassa; ciò su cui non può cadere dubbio è la bellezza del problema riferito e la non comune abilità spiegata nella scelta dei dati numerici. Ora, da quanto ci apprestiamo ad esporre (come, d'altronde, da altre cose che già dicemmo), risulta che tale importante qualità non è prerogativa esclusiva di Chi'n Chiu-shao, se egli fu autore del precedente problema, o di coloro che egli ebbe a maestri.

127 - Consideriamo, infatti, la seguente equazione assunta per illustrare il metodo usato dai Cinesi per risolvere le equazioni algebriche a coefficienti numerici:

$$x^4 - 763200\,x^2 - 40642560000 = 0. \tag{1}$$

Ne furono i coefficienti scelti a caso? Per rispondere a questa domanda notiamo anzitutto che, posto

$$x^2 = 100\,y \tag{2}$$

l'equazione proposta diviene

$$y^2 - 7632\,y + 4064256 = 0 \tag{3}$$

ossia

$$(y - 3816)^2 = 3240^2$$

dunque $y = 3816 \pm 3240$; emerge da ciò che le due radici della (3) sono $7056 = 84^2$ e $576 = 24^2$; in conseguenza le quattro radici dell'equazione proposta valgono rispettivamente $\pm 840$ e $\pm 240$; detta equazione venne dunque composta ad arte e, con ogni probabilità, il risolutore ne conosceva in antecipazione le radici.

Ora Chi'n Chiu non si giova in alcun modo della circostanza che essa si può abbassare al secondo grado, essendo suo unico scopo quello di illustrare una procedura generale, e comincia affermando: « si vede che la prima cifra della radice è 8 »; come « si veda » egli non dice, ond'è legittimo il sospetto che egli potesse affermarlo soltanto perchè l'equazione considerata era stata foggiata col suo concorso; comunque, nulla egli insegna intorno al modo in cui in altri casi si possa determinare la prima cifra di una radice, ed espone un algoritmo, di cui non svela la base dottrinale, ma che si palesa identico nella sostanza al metodo di Ruffini-Horner; esso conduce a trasformare la equazione (1) nella

seguente:

(3) $$z^4 + 3200\, z^3 + 3076800\, z^2 + 826830000\, z - 38205440000 = 0.$$

La prima cifra della radice di questa equazione è la seconda dell'equazione primitiva; di nuovo senza addurre alcuna ragione a sostegno, il nostro autore afferma che vale 4; e siccome trova che in conseguenza la (3) è soddisfatta, così conclude che la radice cercata è 840; perchè poi essa valga 84 o 8400 o ecc. non è detto e probabilmente il risolutore non era in grado di dirlo, non avendo previamente determinati i limiti delle radici della data equazione. Ora, se si paragona la procedura qui riassunta con quella oggi in uso, si nota fra esse una sorprendente rassomiglianza dal punto di vista algoritmico, ma nella prima un gran numero di gravi lacune, la cui presenza non si riesce a spiegare se non ammettendo che si tratti di un ritrovato altrui, di cui venne riprodotta esclusivamente la parte meccanica.

Sgraziatamente quelle lacune non si riesce a colmare neppure ricorrendo ad un'altra equazione biquadratica scelta dal Biernatzki come esempio dello stesso metodo di risoluzione di un'equazione a coefficienti numerici.

Si dice che Chi'n fosse anche capace di approssimare le radici non intere delle equazioni numeriche; infatti ci viene detto avere egli trovato che, supposto $a = 576$ e $b = 34$, l'equazione

$$(a + b)^3 \times 10 = \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] x + x^2$$

ha per radice $10871 \frac{5213}{63070}$ « ove forse il denominatore venne erroneamente dimezzato », senza aggiungere neppure una parola che spieghi la via che condusse a tale risultato, cosa estremamente deplorevole perchè lo schema Ruffini-Horner dà le radici non intere delle equazioni sotto forma di frazione decimale, non di frazione ordinaria.

Per verificare l'esattezza del valore trovato, notiamo che l'equazione risolvenda si può scrivere:

$$10^4 \cdot 61^3 = 61 \cdot 5 \cdot 271\, x + x^2;$$

per semplificarla si faccia $x = 61\, y$ e si otterrà per determinare la nuova incognita l'equazione:

$$y^2 + 5 \cdot 271\, y - 610000 = 0$$

donde si trae:

$$y = \frac{-5 \cdot 271 \pm \sqrt{5^2 \cdot 271^2 + 4 \cdot 610000}}{2}.$$

Ora il numero posto sotto il segno di radice vale $5^2 \,.\, 171041$; d'altronde il massimo quadrato inferiore a 171041 è $413^2$, onde, servendosi

della nota formola approssimativa $\sqrt{m^2 + n} = m + \frac{n}{2\,m}$, si conclude essere $171041 = 413 + \frac{236}{413}$, epperò la radice positiva dell'equazione in $y$ vale $356 + \frac{177}{413}$; ne consegue $x = 21742 + \frac{1}{7}$, che è circa il doppio del valore che si dice trovato dal matematico cinese, dal momento che

$$2\left(10871 + \frac{5231}{63070}\right) = 21742 + \frac{5231}{31535} = 21742 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{386}{5231}}.$$

L'errore commesso dal Chi'u è, dunque, di entità abbastanza considerevole, ma si tratta probabilmente di qualche svista perdonabile, la quale non c'impedisce di rimpiangere l'ignoranza di particolari intorno alla procedura da lui seguita per raggiungere il riferito risultato.

128 - Negli anni 1248 e 1259 apparvero parecchi lavori del famoso matematico Li Yeh o Li-ye (1178-1265), il primo de' quali reca il titolo *Specchio marittimo della misura del cerchio* ed è riguardato di grande importanza come annuncio dell'alba dell'algebra cinese. Ivi, quasi a completare una lacuna lasciata da Chi'u, vengono insegnati procedimenti sicuri per porre in equazione i problemi espressi in parole. Le equazioni trattate sono tutte quadratiche, hanno per secondo membro lo zero e vengono indicate simbolicamente scrivendo di seguito (dall'alto in basso, in conformità al modo in cui procede la scrittura cinese) i coefficienti delle potenze crescenti dell'incognita, in rosso quelli positivi, in nero quelli negativi (o, secondo il sistema adottato da Li Yeh per evitare la scrittura policroma) i negativi attraversati da una sbarra; lo zero è rappresentato da un cerchietto.

Importanza non minore possiede un altro lavoro dello stesso matematico, rifacimento di altro, poco pregevole per mancanza di chiarezza, da lui trovato nella Biblioteca Imperiale. È una collezione di 64 problemi ove l'algebra si trova applicata al calcolo degli elementi di alcune figure evidentemente incontrate durante operazioni di geometria pratica. Alcune di queste figure sono ben note dagli elementi della geometria: tali sono i quadrati, i rettangoli, i circoli e le corone circolari. Ma altre sono più complicate e si riconoscono per combinazioni di enti geometrici noti. Le principali sono: un quadrato od un rettangolo nel cui interno trovasi un cerchio concentrico; viceversa, quadrato o rettangolo situati entro un cerchio concentrico; quadrato entro cui è tracciato un quadrato od un rettangolo concentrico. I dati sono di varia specie: alcuni concernono aree, altri lunghezze; le nozioni teoriche applicate sono elementarissime; ogni soluzione è esposta per intero, con regolarità non esente da pedanteria, che ricorda l'andamento compassato degli *Elementi* di Euclide.

Mentre di Li Yeh ci sono riferiti i più minuti particolari biografici, nulla si conosce intorno a Yang Hui, il matematico che lo segue in ordine

di tempo e che viene assegnato alla seconda metà del sec. XIII. La sua *Analisi delle Regole aritmetiche* in nove Sezioni (1261), oltre ad applicazioni della formola che esprime la somma dei termini di una progressione aritmetica, insegna le notevoli relazioni seguenti:

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + \dots + n) =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

la prima delle quali fa così il suo ingresso nella letteratura matematica.

Per calcolare l'area del quadrilatero avente per lati consecutivi $a$, $b, c, d$ l'autore applica la vieta espressione $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$, ma tenta poi di correggere il consapevole errore, senza però mostrare di accorgersi di trovarsi di fronte ad un problema indeterminato, non essendo un quadrilatero individuato dai suoi lati, Yang Hui deve avere conosciuto qualche procedimento empirico per calcolare la corda $x$ di un segmento di area $A$ appartenente al cerchio di diametro $d$, dal momento che, supposto $A = 32$ e $d = 13$, si serve dell'equazione

$$-4096 + 128x^2 + 52x^3 - 5x^4 = 0,$$

la quale sembra provenire dalla regola generale espressa dalla seguente formola:

$$-4A^2 + 4Ax^2 + 4dx^3 - 5x^4 = 0,$$

e conduce, mediante certe considerazioni, al risultato $x = 4$ (¹); siccome a questa conclusione il matematico cinese giunge con stupefacente prontezza, così è legittimo il sospetto che egli stesso avesse fabbricata l'equazione con il vincolo che avesse quella radice; si è così di fronte ad un altro fatto che fa risorgere il sospetto d'insincerità nei matematici Cinesi che ci si è già affacciato: « qui semel mentitur, semper mentitur! »

129 - Incontriamo in seguito Chu Shih-Chieh (o Tchou Che-Kie), la cui biografia è del tutto ignota, ma di cui si hanno un'*Introduzione agli studi matematici* (1299) e un altro lavoro intitolato *Prezioso specchio dei quattro elementi* (1303) (²). In quella merita di venire rilevata

(¹) Quali fossero tali considerazioni non ci è noto: oggi il modo più diretto per giungere al riferito risultato consiste forse nel porre $x = 4\xi$ (trasformazione ispirata dall'esame della struttura aritmetica dei coefficienti della data equazione); chè così si ottiene l'equazione

$$-16 + 8\xi^2 + 13\xi^3 - 5\xi^4 = 0;$$

ora siccome in questa la somma dei coefficienti vale 0 così essa ha per radice $\xi = 1$; da ciò $x = 4$.

(²) Di quest'opera si era perduta ogni traccia durante lunghi anni. Yereson Yeune (1764-1849), quando cominciò la sua opera *Biografia dei matematici* non era riuscito a trovarla. Nel 1802 Lo Ming-Hang riuscì a procurarcene un vecchio esemplare che nel 1836 pubblicò con l'aiuto di Yuen-Yuen. Informazioni date dal Vanhée in un articolo inserito nel Vol. VII (1931) della rivista *Asia major*.

una tavola di divisione, la regola dei segni per le addizioni e le moltiplicazioni algebriche e molti problemi sul calcolo d'interessi; l'autore si mostra famigliare con le estrazioni di radici quadratiche e cubiche, ma tibutante nel risolvere le equazioni algebriche a coefficienti numerici.

Il *Prezioso specchio* è veramente degno del suo nome, perchè fornisce ampie informazioni intorno alla procedura, detta « T'ieu yen » e che costituisce la tecnica algebrica in uso nel Celeste Impero; essa era applicabile esclusivamente a problemi con quattro incognite, che i Cinesi rappresentavano con gli ideogrammi aventi per significati *cielo, terra, uomo, cosa* e col mezzo dei quali erano in grado di rappresentare tutte le espressioni algebriche considerate. Essi però non avvertirono la necessità di indicare con simboli appropriati l'eguaglianza e le operazioni aritmetiche; e si può ben dire che l'assenza di tali simboli costituisca l'inferiorità dell'algebra cinese rispetto a quella in uso in Europa.

Nella stessa opera merita di essere notato il « triangolo aritmetico », esteso sino a permettere il calcolo della potenza di un binomio di esponente non superiore a 8; eccone la disposizione:

1<br>
1 1<br>
1 2 1<br>
1 3 3 1<br>
1 4 6 4 1<br>
1 5 10 10 5 1<br>
1 6 15 20 15 6 1<br>
1 7 21 35 35 21 7 1<br>
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Aggiungiamo che si trova nel medesimo scritto la regola che serve alla elevazione a quadrato di qualunque polinomio.

Esso offre la conferma della propensione generale dei Cinesi al complicare le questioni per apparire più difficili di quanto siano; essa è documentata dal seguente problema: « Di un triangolo rettangolo l'area vale 30 e la somma dei cateti 17; trovare la somma del primo cateto e dell'ipotenusa. »

Per risolverlo il modo più ovvio consiste nell'osservare che dai dati risulta subito che i due cateti di quel triangolo valgono rispettivamente 15 e 2, onde l'ipotenusa è espressa da $\sqrt{229}$; perciò il problema ammette le due soluzioni $\sqrt{229} + 13$ e $\sqrt{229} + 2$. Invece il citato matematico per risolvere il problema stabilisce un'equazione di 4° grado a coefficienti razionali.

Nel *Prezioso specchio* s'incontra anche un problema a più incognite, il quale è interessante perchè offre qualche notizia intorno ai metodi di eliminazione usati dai Cinesi; se non che, siccome questi sono somministrati da un'opera che fu pubblicata molte volte (se ne conosce un

*Commento* con la data 1876), è legittimo il dubbio che essa si presenti ai nostri occhi molto diversa da ciò che era in origine, onde reputiamo non opportuno arrestarci ulteriormente su di essa.

130 - Con siffatte considerazioni poniamo termine alla nostra rassegna della letteratura matematica cinese; non già che questa non annoveri altri lavori di qualche importanza, ma perchè i rimanenti appartengono ad epoche in cui gli Arabi e gli Europei esercitavano nell'Estremo Oriente un'influenza preponderante ed indiscutibile; onde, se l'originalità dei lavori sinora discorsi è sospetta, come tentare di affermarla riguardo a quelli posteriori?...

E che molti ragionevoli dubbi si possano nutrire sulle origini cinesi dei lavori dianzi analizzati si vede notando che: 1°. Le opere che possediamo sono raccolte di problemi risolti con procedimenti che non vengono in alcun modo giustificati, cosicchè assomigliano piuttosto agli *Scritti* di Erone che agli *Elementi* di Euclide. 2°. Le proposizioni citate e le regole applicate, non essendo sempre usate a dovere, hanno tutto l'aspetto di risultati automaticamente trascritti da fonti esotiche. 3°. Intercalati fra risultati esatti, che fanno fede in chi li ottenne di un livello intellettuale assai alto, s'incontrano procedimenti grossolani (talvolta preferiti ad altri migliori già noti) e persino del tutto errati. Per conseguenza la matematica cinese offre degli urtanti chiaro-scuri, che rendono oggi vano ogni sforzo inteso a delinearne con qualche verosimiglianza lo svolgimento storico.

Molte delle difficoltà che noi incontrammo (e le segnalammo candidamente, convinti come siamo che il primo passo verso la risoluzione di un problema è mosso da chi lo enuncia con chiarezza) [1] si potrebbero forse vincere ove si avessero sott'occhio i testi nella loro forma originale, accompagnati da traduzioni in qualche lingua europea; nell'attesa, ogni tentativo al riguardo ha basi traballanti e dà risultanze di carattere provvisorio; per ciò noi auguriamo vivamente che il popolo di cui ci siamo testè occupati venga illustrato dal punto di vista matematico in modo non dissimile da quanto vedemmo fatto per gli Egiziani e da quello che ora vedremo essere stato fatto riguardo ad altri due grandi popoli extra-europei.

---

[1] Agli indicati punti interrogativi sparsi nella storia della matematica cinese possiamo aggiungerne un altro estremamente significativo (cfr. J. E. JEANS, *The converse of Fermat's Theorem*, The Messenger of Matematics, t. XXVII, 1897-98, p. 174): in un foglio trovato fra le carte relitte da Sir Th. Wade si trova il teorema:

$$2_n - 2 \equiv 0 \pmod{n},$$

se $n$ è un numero primo (caso particolare di un noto teorema di Fermat), con l'osservazione che il teorema non sussiste se $n$ è numero composto e che si tratta di un ritrovato cinese che risale all'epoca di Confucio. Ora che al teorema di Fermat siasi giunti empiricamente, non è impossibile; ma che per questa via siasi arrivati anche alla proposizione inversa, sembra poco probabile.

## BIBLIOGRAFIA

A. WYLLIE, *Jettings on the Science of the Chinese*. North China Herald, Shangai, 1852.

K. L. BIERNATZKI, *Die Arithmetik der Chinesen*, G. di Crelle, t. LII, 1856.

H. CORDIER, *L'imprimerie Sino-Européenne en Chine*, Paris, 1901.

G. VACCA, *Sulla matematica degli antichi Cinesi*. Boll. di bibl. e storia ecc., t. VIII, 1905.

YOSHIO MIKAMI, *The Developement of Mathematics in China and. Japan* (Abhand. zur Geschichte der Mathematik, XXX Heft, 1912); *The Ch-ou-Jen Chuau of Yüan Yuan* Isis, N. 35, 1927).

G. VACCA, *Note Cinesi: III. Un problema del matematico I. Hang*. Rivista di studi Orientali, vol. VI, 1913.

VANHÉE, *Problèmes chinois du second degré*, T'oung-Pao, t. XII, 1911, p. 557-562; *Algèbre chinoise*, ivi, t. XIII, 1914, p. 291-300; *Les cent volailles ou l'analyse indéterminée en Chine*, ivi, XIV, 1915, p. 11-26 e 203-210; *Li-Yé, mathématicien chinois du XIII Siècle*, Id. Id., p. 537-568; *Bibliotheca mathematica Sinensis, Pé-fou*, Id., t. XV, 1914; *La notation algébrique en Chine au XIII Siècle* (Revue des questions scientifiques, 3ª serie, t. XXIV, 1913, p. 574-587; *The Arithmetic Classic of Hoia-Hou Yaug* (The Amer. Monthly, t. XXXI, 1924, p. 235-7; *The Chéon. Jen Chuan of Yüan Yüan* (Isis, t. VIII, 1926, p. 103-118). *Le classique de l'île maritime, ouvrage chinois du III Siècle* (Quellen und Studien zur Gesch. der Math., t. II, 1932).

## CAPITOLO X

# NELLA TERRA DEL SANSCRITO [1]

### Preliminari

131 - Se, lasciando la Cina, ci avviamo verso Occidente per appressarci all'Europa, c'imbattiamo in un altro popolo, ricco di circa trecento milioni di componenti, ma spezzettato in mille parti; la penisola da lui occupata ha per confini al Nord la catena dell'Himalaya, ad Oriente il golfo del Bengala e quello Arabico ad Occidente. È l'India, la cui unità può dirsi documentata principalmente dalla sua letteratura, che conta non meno di venticinque secoli di esistenza e che ebbe origine quando il sanscrito, riuscendo vincitore sugli altri dialetti in uso, assurse alla dignità di lingua nazionale.

Relazioni storicamente provate fra l'Europa e la terra che si stende fra l'Indo e il Gange hanno principio soltanto con la celebre incursione compiuta da Alessandro Magno nel IV sec. a. C.; ma molti fatti (fra cui appunto tale spedizione) inducono a credere che l'India non fosse prima ignota alla Grecia.

Le sbalorditorie informazioni intorno al sapere dei Gimnosofisti che si leggono nella *Vita di Alessandro* scritta da Plutarco e le descrizioni, scritte appunto da commilitoni dell'audace conquistatore, delle tele finissime con cui gl'Indiani solevano avvolgersi il dorso e il capo, dei vivaci colori artificiali con cui amavano tingersi la barba, dei monili di cui andavano carichi, inducono a ritenere che mentre natura aveva dotato gli antichi Indiani di mente propensa al filosofare, presso di essi la scienza applicata all'industria era assurta a un cospicuo grado di sviluppo.

D'altra parte i *Poemi Vedici,* che si fanno risalire al periodo 2000-1400 a. C., fanno fede di eminenti attitudini letterarie, mentre il *Mahabarata* — scritto durante il v secolo dell'E. n. in base a tradizioni assai più antiche —, col far cenno dei seicento milioni di figli che avrebbero allietata la casa di Brahma, e dei 24 milioni di numi popolanti il

---

[1] Le prime notizie attendibili intorno alla matematica degli Indiani si ebbero in Europa in principio del Secolo scorso per merito di funzionari inglesi i quali, trasferitisi colà per dovere di ufficio, appresero la lingua indigena e se ne giovarono per studiare e poi tradurre e pubblicare le migliori opere relative alle scienze esatte. Soltanto nel corrente Secolo eruditi indigeni intrapresero degli studi sull'argomento e diedero notizia dei risultati per mezzo della stampa; le ricerche continuano.

cielo, attesta essere quello scritto opera di gente dotata di una psicologia ben diversa da quella dei Greci, dei quali rilevammo l'idiosincrasia per i grandi numeri. Che a tale popolo spetti un posto distinto nella storia della matematica risulta, a tacere di altri fatti di cui parleremo più avanti, dalla circostanza che ad esso si attribuisce, con maggiore o minore fondamento, l'invenzione del nostro sistema di numerazione (1), cioè di quel sistema che si fonda sull'impiego delle cifre 1, 2,..., 9 e dello 0, ente il quale, benchè privo di valore numerico costituisce la colonna vertebrale dell'aritmetica di posizione. E poichè, a quanto si ritiene generalmente, quel sistema giunse in Europa per il tramite degli Arabi, quei dieci caratteri portarono per lungo tempo il nome di « cifre arabiche », soltanto di recente sostituito da quello più appropriato di « cifre indo-arabiche » (2).

## Il "Sulvasutras"

132 - Chi voglia determinare con esattezza il livello a cui giunsero le scienze esatte sulle rive del sacro Gange non può ricorrere ad alcun documento di diretta pertinenza delle scienze stesse; chè in India aritmetica e geometria non riuscirono mai a togliersi completamente da una condizione di umiliante vassallaggio di fronte alla religione ed alla astrologia; ragione per cui chi proponesi di raccogliere dati concernenti il primo stadio di sviluppo della matematica indiana è costretto (analogamente a quanto accade per la più antica fase della matematica greca e la massima parte di quella romana) a cercarli penosamente in opere aventi argomenti estranei alla scienza pura.

La più antica ha per titolo *Sulvasutras* (regola della corda) e serve di complemento ad altra detta *Kalpasutras;* in essa sono adunate le regole da osservarsi nella costruzione degli altari destinati ai sacrifici, questione di fondamentale importanza perchè, dall'esser desse osservate o non, dipendeva l'accettazione od il rifiuto delle offerte fatte agli Dei. Quando il *Sulvasutras* sia stato scritto, non è noto con certezza; per fermo non risale ad un milione d'anni fa, come vorrebbe una tradizione paesana, ma ha un'età assai meno venerabile, essendo assai probabile che appartenga al periodo 200-400 a. C. Se ne conoscono tre redazioni, recanti come autori i nomi di Apastamba, Baudhayama e Katyayana; la seconda è la più perfetta e, come la prima, fu già data alle stampe.

Il *Sulvasutras* ha comune con tutte le altre opere a noi note appartenenti alla letteratura matematica indiana due importanti caratteri che vanno rilevati:

1°. È scritto in versi; ora la forma ritmica costituisce per il trat-

(1) La data di essa non è nota con esattezza; competenti in materia la fanno risalire ad un'epoca anteriore al V secolo dell'E. v.

(2) Il lettore desideroso di conoscere le varie forme sotto cui queste cifre s'incontrano in manoscritti dei secoli XIII-XIV, in monumenti architettonici e in oggetti d'uso comune, in antiche stampe e in medaglie, ricorra all'opera di G. F. Hill, *The developement of arabic numerals in Europa exhibited in sixty four Tables* (Oxford, 1915).

tatista una specie di letto di Procuste, perchè, mentre da un lato talora obbliga a disgressioni a cui la scienza è totalmente estranea, dall'altro costringe spesso a mutilazioni del pensiero che vanno tutte a scapito della chiarezza; ma, quasi per compenso, essa funzionò quale robusta corazza a difesa contro gli attentati di amanuensi poco scrupolosi, essendo la prosodia indiana governata da norme severe, che non ammettono transazioni.

2°. Non contiene alcuna metodica esposizione di qualche teoria matematica, ma consta di regole indimostrate ed applicate ad esempi numerici. Tale carattere fa sorgere la domanda: rimase ignoto agli Indiani (come sembra ai Cinesi) che la forma catechistica è inammissibile in una scienza di ragionamento? Oppure le dimostrazioni ivi taciute si trovavano in opere di più antica data, che noi non conosciamo, ma che essi dichiaravano di usare quali guide costanti?

A rispondere affermativamente alla prima domanda si è indotti osservando che i commentatori degli scrittori di cui ci giunsero gli scritti aggiungono bensì qua e là spiegazioni ed illustrazioni, ma nessuna vera e propria dimostrazione, quantunque un d'essi abbia dichiarato che gli è appunto la dimostrazione ciò che distingue l'algebra dall'aritmetica; ora se si riflette che gli scritti più cospicui della letteratura matematica indiana appartengono ad un'epoca posteriore a quella durante in cui il genio matematico greco illuminò il mondo e che le relazioni commerciali — e fors'anche intellettuali — fra l'Europa e l'Asia avevano certamente luogo da tempo immemorabile e furono attivissime e continue almeno dopo la storica incursione di Alessandro Magno, sorge spontanea l'ipotesi che gl'Indiani abbiano accettati senza discussione i risultati a cui guidarono le meritorie fatiche dei sommi matematici ellèni, tanto più che così sarebbero spiegate certe coincidenze che rileveremo fra breve e poste in evidenza le scaturigini di certe stupefacenti scoperte, registrate per la prima volta in opere indiane.

Ma sopra la fondamentale questione delle fonti della matematica indiana torneremo più avanti, dopo di aver completata la raccolta degli elementi necessari per tale ricerca.

133 - Scendendo ora da queste generalità a considerazioni più minute, osserveremo che l'autore del *Sulvasutras* conosceva il teorema di Pitagora in buon numero di casi speciali; infatti in questa opera s'incontrano, oltre al triangolo classico (3, 4, 5), questi altri: (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (12, 35, 37), forse scoperti mediante tentativi, ma che si possono ottenere direttamente applicando le regole che vedemmo insegnate da Pitagora e Platone; tali triangoli (nonchè alcuni altri che se ne ottengono prendendo multipli dei lati dei surriferiti) avevano per gli Indiani una notevole utilità pratica perchè abilitavano a costruire angoli retti mediante funicelle, applicando un concetto identico a quello che vedemmo in uso presso gli « arpedonatti » egiziani (v. n. 17); anzi l'importanza attribuita a siffatte costruzioni è attestata dal fatto che appunto da esse trae origine il titolo dell'opera di cui ci occupiamo.

Altri passi del *Sulvasutras* provano la famigliarità di chi scrisse quest'opera col concetto di rette perpendicolari; ma le pagine di maggiore importanza sono quelle consacrate alla trasformazione di un quadrato $A\,B\,C\,D$ in un cerchio equivalente. Il procedimento all'uopo indicato è il seguente: « Chiamasi (Fig. 20) $O$ il punto di incontro delle diagonali $A\,C$, $B\,D$ del dato quadrato; $E\,F$ la parallela condotta da $O$ ai lati $A\,D$, $B\,C$ e $G$ il punto nel quale il prolungamento di essa è incontrata dalla circonferenza circoscritta al dato quadrato; supposto $E\,M = 1/3\ E\,G$, il cerchio di centro $O$ e raggio $O\,M$ è equivalente al dato quadrato ». Per giudicare dell'esattezza di tale procedura osserviamo che, detta $l$ la lunghezza del lato del quadrato $A\,B\,C\,D$, si ha:

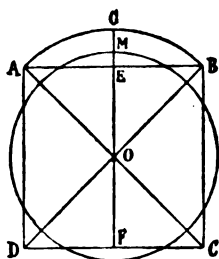



Fig. 20.

$$O\,A = O\,G = \frac{l}{\sqrt{2}};\ E\,G = \frac{l\,(\sqrt{2}-1)}{2},$$

$$E\,M = \frac{l\,(\sqrt{2}-1)}{6};\ O\,M = l\,\frac{\sqrt{2}+2}{6};$$

onde, indicando con $d$ il diametro del cerchio ottenuto si ha

$$d = l\,\frac{\sqrt{2}+2}{3} \text{ epperò } \frac{l}{d} = \frac{3\,(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Ora, supposto che il quadrato dato sia in realtà equivalente al cerchio di diametro $d$ si deve avere $l^2 = \frac{\pi\,d^2}{4}$ e quindi $\frac{\pi}{4} = \frac{9\,(2-\sqrt{2})^2}{4}$, cioè

$$\pi = 9\ (6 - 4\sqrt{2}). \tag{1}$$

Tale espressione riconduce il calcolo di $\pi$ a quello di $\sqrt{2}$; ora nel *Sulvasutras* è detto essere

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}. \tag{2}$$

E' questo un valore più esatto dei congeneri che dianzi incontrammo e che può intendersi ottenuto applicando più volte la formula approssimata $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2\,a}$, nella quale si deve prendere il segno $+$ o il segno $-$ secondochè $a$ è un valore approssimato per difetto o per eccesso del numero posto sotto il segno di radice. Infatti, essendo $2.9 = 16 + 2$, ossia $2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}$, applicando la formola citata, in cui

si prenda il segno $+$, si trova

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{17}{12}.$$

Ora, siccome è $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2 - \frac{1}{144}$, così usando la stessa formula, dopo avere scelto il segno —, si trova

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

come appunto è asserito nel *Sulvasutras*.

Sostituendo ora il valore (2) nella (1), si conclude

$$\pi = 3 + \frac{3}{34} = 3 + \frac{1}{11 + 1/3};$$

in decimali invece la (1) dà $= 3{,}0883$, valore mediocremente soddisfacente; perciò la costruzione suesposta non si presta bene alla ricerca di un valore approssimato di $\pi$. Probabilmente per tale ragione nel *Sulvasutras* si trovano altri tre metodi intesi a risolvere la medesima questione o la sua inversa: giova riferirli:

*a*) « Il diametro $d$ del cerchio equivalente al quadrato di lato $l$ è a 8/10 della diagonale di questo ». Ciò val quanto ammettere essere

$$l^2 = \pi\left(\frac{4}{10}\, l\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{cioè} \quad \pi = 3 + \frac{1}{8} = 3{,}125;$$

notevole è che tale valore s'incontra in Europa in un'opera geometrica del celebre pittore Alberto Dürer (v. n. 191);

*b*) « Il lato $l$ del quadrato equivalente al cerchio di diametro $d$ vale 7/8 $d$ ». Tradotta in formole questa relazione dà

$$\left(\frac{7}{8}\, d\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right), \quad \text{donde} \quad \pi = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} = 3{,}0625.$$

*c*) « Il lato $l$ del quadrato equivalente al cerchio di diametro $d$ vale 13/15 $d$ ». In altri termini

$$\left(\frac{13\,d}{15}\right) = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{cioè} \quad \pi = 3 + \frac{1}{225} = 3{,}0044.$$

È superfluo rilevare che tutti i valori di $\pi$ risultanti da queste varie costruzioni sono tutti fra loro differenti e assai poco approssimati.

## Aryabhata

134 - Il *Sulvasutras* contrassegna il primo periodo della matematica indiana; sembra però che quell'opera non abbia esercitata una notevole influenza sull'ulteriore sviluppo di questa disciplina, dal momento che non è ricordata da alcuno dei posteriori scrittori indiani, le cui opere si sottrassero all'ingiuria del tempo. I più noti sono Aryabhata (¹) (vissuto fra il v ed il vi secolo dell'E. v.), Brahmagupta (che appartiene al vii, essendo nato nel 598) e Bhascara (che nacque nel 1114 ed era ancora vivo nel 1178); vanno aggiunti l'anonimo autore di un frammento aritmetico, che gl'indianologi fanno risalire al iii od al iv sec. dell'E. n. e di cui una copia, scritta fra il 700 ed il 900, venne ritrovata a Baskhali (N-O dell'India), ed inoltre alcuni mediocri commentatori fioriti nei secoli xv-xvii; di quelli esamineremo accuratamente le opere, mentre a questi ricorreremo soltanto per agevolare l'intelligenza dei veri rappresentanti dell'anima matematica indiana.

135 - Da un distico di cui Aryabhata stesso è autore risulta che egli nacque nel 475 o 476 d. C. e che scriveva — e forse insegnava — a Kusumapura (la moderna Patua), capitale della più antica monarchia indiana di cui siasi serbata memoria. Riguardo alla fortuna che ebbero i suoi lavori, giova osservare che il celebre viaggiatore ed erudito arabo Al-Biruni (n. 150) ebbe a dichiarare — in una sua ben nota relazione di un viaggio in India, finita di scrivere il 18 o il 19 dicembre 1031 — di non essere riuscito a procurarsene alcuno e che una non dissimile dichiarazione ebbe a fare nella seconda decade del secolo scorso un benemerito studioso inglese, T. Colebrooke; per singolare ventura, avendo un dotto olandese, H. Kern, scoperte a Calcutta due copie di uno scritto di Aryabhata eseguite l'una nel 1820 e l'altra nel 1863, tale lavoro potè vedere la luce nel 1874.

L'*Aryabhatiyam* (tale è il titolo del lavoro in discorso) è la prima opera oggi nota in cui sia esposto il nostro sistema numerale. Essa consta di 108 strofe, ripartite in quattro capitoli, aventi i seguenti temi: I. Armonie celesti (si tratta di Tavole astronomiche); II. Elementi del calcolo; III. Il tempo e la sua misura; IV. Le sfere. È il secondo quello che ci offre il maggiore interesse, anzi un tale interesse che è debito dello storico il darne un riassunto.

Premessa un'invocazione a Brahma, la Terra, gli Astri e le Costellazioni, il nostro autore presenta un elenco dei nomi in uso per rappresentare l'unità e le prime nove potenze di 10; insegna poi a valutare l'area di un quadrato ed il volume di un cubo di dato lato, e finalmente (nell'intento evidente di porre in grado chi legge di risolvere i problemi inversi) fa conoscere la procedura che deve seguire chi voglia calcolare le radici quadratiche e cubiche dei numeri interi. Per calcolare l'area di un triangolo egli prescrive di eseguire il prodotto della base per *metà*

(¹) Questo matematico dà luogo ad un fenomeno imbarazzante, non dissimile de fatti che incontrammo nella storia di altri popoli, cioè uno sdoppiamento; chè di recante venne segnalato un secondo Aryabhata, vissuto nel secolo X dell' E.v.

dell'altezza e la *identica* regola insegna per calcolare il volume del tetraedro; ora siccome non è possibile ammettere sia qui incorso un errore di trascrizione, chè altrimenti risulterebbe violata una delle leggi della prosodia indiana, così si è in presenza di un indiscutibile e grave errore. Un altro si trova poco dopo; giacchè, mentre per calcolare l'area di un cerchio Aryabhata prescrive di moltiplicarne la circonferenza per metà del raggio, per determinare il volume della sfera impone di moltiplicare l'area di un suo cerchio massimo per la radice quadrata di tale area; in altri termini, invece di $\frac{4}{3} \pi r^3$ prende $\pi \sqrt{\pi r^3}$, espressione che coincide con la precedente soltanto assumendo $\pi = \frac{16}{9}$, gli errori testè rilevati dimostrano che chi li commise non conosceva i due libri *Su la sfera e il cilindro,* scritti da Archimede non meno di sette secoli prima.

Seguono regole esatte per calcolare l'area di un trapezio ed i segmenti determinati dal punto d'incontro delle diagonali sulla perpendicolare condotta dal punto stesso alle basi. Il primo verso della strofa successiva è di tale disperante concisione che non è possibile pronunciare un giudizio sulla bontà della regola ivi insegnata per calcolare l'area di un poligono piano; mentre il secondo afferma l'eguaglianza fra il lato dell'esagono regolare ed il raggio del cerchio circoscritto. In seguito si apprende che una circonferenza di diametro 2000 ha per lunghezza 62832; ciò val quanto supporre $\pi = 3{,}1416$, valore di notevole precisione già noto a Claudio Tolomeo (v. n. 72). Un'oscurità che sino ad oggi non si riuscì a dissipare circonda il senso della strofa successiva; essa ha lo scopo di guidare nella costruzione di una tavola di seni, argomento che troveremo ben presto trattato da altri autori indiani in modo più intelligibile. Sorvoliamo sulla strofa seguente perchè è un semplice esordio a problemi aventi per iscopo il calcolo di altezza mediante ombre; a questi sono dedicate alcune delle linee seguenti, che rievocano il ricordo di Pitagora (grazie alla presenza del teorema che ne porta il nome) e di Talete (per la misura dell'altezza di una piramide servendosi dell'ombra da essa projettata). In seguito si apprende essere l'altezza calata sull'ipotenusa dal vertice di un angolo retto media proporzionale fra i segmenti dell'ipotenusa e si trovano le espressioni di alcuni segmenti rettilinei collegati al sistema di due circonferenze che si tagliano, figura questa che viene investigata perchè s'incontra in astronomia. A questo punto Aryabhata passa ad esporre le formole fondamentali relative alle progressioni aritmetiche, di cui le principali si direbbero estratte dall'opuscolo di Diofanto *Sui numeri poligonati;* si apprendono poi le espressioni delle somme dei quadrati o dei cubi dei primi $n$ elementi della serie naturale dei numeri. Dopo tali considerazioni, che sono di ordine abbastanza elevato, si trovano le elementarissime identità seguenti

$$(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2\,a\,b,$$

$$\frac{\sqrt{4\,a\,b + (a - b)^2} \pm (a - b)}{2} = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

ed in seguito parecchi problemi relativi agli interessi semplici, alcuni dei quali esigono la risoluzione di equazioni quadratiche. Si legge poi la regola del tre semplice, il metodo per moltiplicare fra loro due frazioni, una regola che rientra nell'« epantema » di Timarida (v. p. 105) una che serve a risolvere ogni equazione della forma

$$ax + b = a'x + b'$$

e finalmente, in casi particolari, il notissimo « problema dei corrieri »: cose tutte che, come sappiamo, non superano il livello raggiunto dalla scienza del calcolo nell'antica Grecia. Ma qui s'incontra un risultato nuovo ed importantissimo: cioè la risoluzione in numeri interi e positivi delle equazioni di primo grado con due incognite; e, malgrado l'eccessiva stringatezza del dettato, si arriva con qualche studio a riconoscere che lo scopo viene raggiunto con una procedura sostanzialmente identica a una di quelle oggi in uso col medesimo scopo.

Da tutto ciò emerge che l'opera di Aryabhata è una compilazione non molto ordinata, fatta con l'idea di somministrare ai pratici le nozioni ed i procedimenti di uso più comune, la quale ricorda il *Manuale del calcolatore* di Ahmes ed alcuni squarci delle collezioni che vanno sotto il nome di Erone alessandrino; la totale assenza di ogni dimostrazione induce a credere che l'autore abbia attinto a fonti (nazionali o greche?) a noi sconosciute; ma gli errori in cui incorse portano a concludere o che egli fosse di così mediocre intelligenza da non essere in grado di distinguere il vero dal falso, o che non avesse sempre ricorso alle autorità più degne di fiducia.

## Brahmagupta e Bhascara

136 - Altri due scritti che deve consultare chiunque intenda formarsi un concetto esatto della matematica indiana sono rappresentati da capitoli tratti da opere destinate alla preparazione dei futuri astronomi, capitoli che vanno da noi sfruttati al modo stesso in cui alcuni capitoli dell'*Almagesto* ci servirono a rendere completo il quadro della matematica greca. Nel piano generale ed in alcuni particolari stilistici (limitiamoci a rilevare che ogni capitoletto contiene l'enunciazione in versi di una regola e poi l'applicazione di essa alla risoluzione di uno o più problemi numerici) ed anche dottrinali, essi presentano una profonda rassomiglianza, onde, per evitare tediose ripetizioni, ci limiteremo ad esporre quanto in essi si trova di essenziale, particolarmente nell'opera *Lilavati,* compilazione fatta da Bahscara di un'opera di Brahmagupta.

Brahmagupta, l'autore del *Lilavati* [1], il più antico di quegli scritti, dichiara, esordendo, che « colui che conosce distintamente e separatamente l'addizione, le altre venti operazioni e le otto determinazioni, non esclusa quella col mezzo delle ombre, può dirsi matematico »; le proce-

---

(1) È questo il nome di una donna a cui l'autore si rivolge negli enunciati delle varie questioni; così in una si legge: Vezzosa e cara Lilavati, i cui occhi somigliano a quelli di un giovane daino, dimmi qual è il numero che risulta dal moltiplicare 135 per 12.

dure a cui si fa ivi allusione, imprimendo alle matematiche indiane il loro più spiccato carattere, debbono venire qui enumerate:

*Operazioni*: 1. Addizione; 2. Sottrazione; 3. Moltiplicazione; 4. Divisione; 5. Elevazione a quadrato; 6. Estrazione di radice quadrata; 7. Elevazione al cubo; 8. Estrazione di radice cubica; 9-14. Operazioni sulle frazioni; 15-19. Proporzioni con tre, cinque, sette, nove ed undici termini; 20. Baratti.

*Determinazioni*: 1. Miscuglio; 2. Progressioni; 3. Figure piane; 4. Scavi; 5. Mucchi; 6. Seghe; 7. Rialzi di terre; 8. Ombre.

Quale sia la linea di demarcazione fra le operazioni e le determinazioni, non è chiaro; così, ove fra le seconde non s'incontrasse quanto concerne le progressioni, si dovrebbe ritenere che le prime appartengano all'aritmetica e le seconde alla geometria pratica; aggiungiamo che, come vedremo presto, operazioni e determinazioni non esauriscono tutti gli argomenti matematici considerati dagli Indiani.

Scendiamo a qualche più minuto particolare. Sorvoliamo sull'aritmetica pratica, solo rilevando che gli Indiani disponevano di nomi speciali per l'unità e le prime diciassette potenze di 10, ed arrestiamoci a caratterizzare la simbolica algebrica da essi usata, la quale può dirsi rappresenti una transizione fra la diofantea e l'odierna.

Per indicare l'eguaglianza di due quantità essi non usavano un segno speciale, ma si limitavano a scrivere le due quantità in questione in due linee consecutive; se le grandezze paragonate erano polinomi ad un'incognita ordinavano questi secondo le potenze decrescenti di quest'incognita: i relativi coefficienti, positivi e negativi, venivano preposti alla corrispondente potenza. Nemmeno per designare l'addizione avevano un segno particolare, ed il prodotto veniva indicato semplicemente scrivendone di seguito i fattori. Un punto premesso ad un numero serviva ad avvertire che questo doveva venir preso negativamente; una frazione era rappresentata con $\frac{a}{b}$ oppure con $\frac{a}{b}$; finalmente le potenze seconda e terza di una quantità venivano rappresentate preponendo al simbolo di questa quantità le iniziali delle parole « quadrato » e « cubo ». Mentre tale simbolica non si differenzia notevolmente da quella in uso in Grecia, vince questa nella possibliità di rappresentare parecchie incognite: tale importante risultato veniva raggiunto designando ciascuno dei numeri cercati col nome di un colore e rappresentandolo mediante l'iniziale di questo nome.

Nell'algebra indiana è caratteristica una sezione dedicata alle regole per operare con lo zero [1], la quale prova che, se essi affidarono a questo nuovo elemento della serie naturale un ufficio importantissimo nell'aritmetica di posizione, non ignoravano essere desso dotato di speciali prerogative. Così non soltanto sapevano essere $a \pm 0 = a$ e $a \times 0 = 0$, ma videro che, funzionando come denominatore di una frazione, dava luogo ad una entità di nuovo genere, dotata della curiosa proprietà di non

[1] La presenza dello 0 fu riscontrata in opere che vanno dal 200 a. C. al X Sec. dell'E. v.

mutare per l'aggiunta o la diminuzione di un numero qualsivoglia. Ad essi pertanto non sfuggì la proprietà più spiccata del numero infinito; nè mancarono di osservare che, al diminuire indefinitamente del denominatore di una frazione, il valore di questa cresce oltre ogni limite assegnabile: ond'è lecito asserire che con Brahmagupta facciano il loro ingresso nell'aritmetica razionale i numeri 0 e $\infty$.

Gli Indiani considerarono e trattarono con disinvoltura le quantità negative, con cui solevano rappresentare i debiti, solo escludendole dalle soluzioni dei problemi quando non ne era possibile un'interpretazione. Quantunque essi non siano assurti al concetto generale di numero irrazionale, ebbero cognizioni esatte intorno al calcolo con radicali: valgano a provarlo le identità seguenti:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{a\,b}},$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

le quali venivano da essi applicate quando erano realmente utili, cioè quando il prodotto $a\,b$ nella prima formola e la differenza $a^2 - b$ nella seconda sono quadrati perfetti. Ad essi non rimase ignota la duplicità di valore di una radice quadrata, e in presenza di un'espressione del tipo $\sqrt{-a}$, non a torto dichiaravano di trovarsi di fronte ad un'operazione ineseguibile.

Al pari di Aryabhata, Brahmagupta e Bhascara erano abbastanza famigliari con gli elementi della teoria delle progressioni aritmetiche e geometriche, inoltre sapevano calcolare la somma dei quadrati e dei cubi di un certo numero dei primi elementi della serie naturale e finalmente erano in grado di risolvere i più elementari problemi d'interesse semplice ed alcune questioni elementari di analisi combinatoria: anzi di quest'ultima disciplina gli Indiani possono ben dirsi i fondatori. Aggiungiamo che in tempi più recenti essi gettarono le basi della teoria dei quadrati magici (figure di cui almeno la più semplice era nota ai Cinesi), il che non recherà alcuna meraviglia a chi ricordi che si tratta del popolo a cui si attribuisce l'invenzione del giuoco degli scacchi.

137 - Disponendo di tutti gli elementi del calcolo algebrico, i matematici di cui parliamo poterono affrontare con successo la risoluzione delle equazioni dei primi gradi. Riguardo ai sistemi determinati di equazioni che sono lineari od a tali si possono ridurre, l'esame degli svariati problemi da essi trattati (alcuni dei quali non differiscono da quelli che s'incontrano nella letteratura greca, mentre altri si trovano nelle odierne collezioni ad uso scolastico) porta a concludere che essi non superavano in destrezza algebrica i Greci, ma che potevano più agevolmente vincere le difficoltà che incontravano disponendo, come dicemmo, di una simbolica migliore. Passando alle equazioni quadratiche va rilevato a merito degli Indiani l'essersi emancipati dalla considerazione costante dei tre casi

$$x^2 = a\,x + b \quad , \quad x^2 + a\,x = b \quad , \quad x^2 + b = a\,x\,,$$

che s'impongono soltanto a chi intende considerare esclusivamente coefficienti positivi; per risolverle percorrevano una via non dissimile da quella che seguiamo noi e non rifiutavano di considerare due radici quando la corrispondente equazione ne ammetteva due positive: onde la superiorità su tale argomento delle opere in questione sopra le anteriori a noi note deve venire francamente riconosciuta. Lo stesso può ripetersi riguardo alle equazioni di 3° e 4° grado; infatti, mentre Diofanto giunse soltanto a scoprire una radice di un'equazione numerica di 3° grado ($x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$), Bahascara fece altrettanto riguardo alle due seguenti:

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35 \quad , \quad x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999;$$

tale scopo venne raggiunto scrivendo quelle equazioni come segue

$$(x - 2)^3 = 3^3 \quad , \quad (x^2 + 1)^2 = (2x = 100)^2$$

e poi estraendone le radici cubica o quadratica, applicando, cioè, un artificio che condusse assai più tardi alla risoluzione di tutte le equazioni biquadratiche.

Ma la provincia matematica nella quale gl'Indiani, sino a prova contraria, possono accampare dei solidi diritti di possesso è l'analisi indeterminata: è quanto fu già rilevato parlando da Aryabhata riguardo alle equazioni della forma $ax + by = c$; ma gli altri due matematici di cui ci occupiamo autorizzano ad estendere tale osservazione alle equazioni dei seguenti tipi

$$ax^2 \pm 1 = y^2 \,,\; ax^2 \pm b = y^2 \,,\; xy + ax + by = c \,,\; ax + bx + c = y^2$$

e ad altre speciali, in cui le incognite salgono al terzo grado. Per dare un'idea approssimativa dei risultati a cui essi pervennero, noteremo che insegnarono un procedimento (detto « metodo ciclico ») per dedurre da una soluzione di un'equazione della forma $ax^2 \pm 1 = y^2$ infinite altre, quando esistono; è vero che nulla lasciarono scritto per agevolare la ricerca della soluzione di partenza, ma però avvertirono dei casi in cui non ne esiste alcuna. Molte delle conclusioni a cui essi pervennero riguardo all'analisi indeterminata di secondo grado furono ritrovate, indipendentemente, da insigni matematici dei secoli XVII e XVIII e così entrarono a far parte integrante della nostra scienza: basti ciò a stabilirne l'indiscutibile importanza.

138 - Se, come si è testè visto, è di cospicuo valore la parte aritmetico-algebrica delle opere costituenti il nocciolo della letteratura matematica degli Indiani, non ne sono certamente prive le pagine consacrate alla geometria, le quali, come ebbe a notare M. Chasles, costituiscono una completa teoria del triangolo e del quadrilatero, giacchè contengono la risoluzione dei seguenti fondamentali problemi:

I. Determinare in funzione dei lati l'area di un triangolo ed il raggio del cerchio ad esso circoscritto. II. Costruire un triangolo di cui i lati,

l'area ed il raggio del cerchio circoscritto siano espressi da numeri razionali. III. Di un quadrilatero inscritto in un cerchio esprime in funzione dei lati l'area, il raggio del cerchio circoscritto, le diagonali, ecc. IV. Costruire un quadrilatero inscrittibile del quale tutti i suindicati elementi siano espressi da numeri razionali.

Nel corso delle ricerche che guidarono alla risoluzione di questi problemi Bhascara incontrò, non soltanto la nota espressione eroniana dell'area di un triangolo in funzione dei lati

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,,$$

ma anche l'analoga relativa al quadrilatero

$$\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}\,,$$

ed osservò come quella da questa si possa dedurre supponendo nullo un lato del quadrilatero. Però nè l'una nè l'altra sono dimostrate; inoltre nell'enunciato della seconda si cerca indarno la condizione di applicabilità, il dovere, cioè, il quadrilatero essere inscrittibile; onde si è indotti a ritenersi in presenza di risultati materialmente trascritti da opere a noi ignote, forse di Archimede, a cui si attribuisce un lavoro sul quadrilatero inscritto.

Al II e al IV dei surriferiti problemi si collegano i metodi suggeriti nelle opere di cui ci occupiamo per costruire triangoli rettangoli in numeri razionali; essi possono esprimersi algebricamente mediante le formole

$$a\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$$

o con le equivalenti

$$a\ \frac{a^2-b^2}{2\,b}\ ,\quad \frac{a^2+b^2}{2\,b}\,,$$

le quali per $b=1,\ 2$ rientrano in quelle di Pitagora e Platone (od Archita). Siffatti metodi sono collegati al teorema di Pitagora, del quale Bhascara dà, quasi per incidenza e per triangoli particolari, due dimostrazioni: una è quella oggi notissima che si fonda sopra la similitudine dei due triangoli in cui un triangolo rettangolo è spezzato dalla perpendicolare abbassata sull'ipotenusa dal vertice dell'angolo retto; mentre l'altra consiste nell'esortazione di « guardare » la figura annessa (Figura 21) e nel dedurne che

$$c^2=(a-b)^2+4\,\frac{a\,b}{2}\,.$$

Alle stesse considerazioni si collega una notevole costruzione di un quadrangolo, non soltanto inscrittibile ed a lati razionali, ma anche con le diagonali fra loro perpendicolari. La costruzione di tale figura si direbbe inspirata da un passo dell'*Aritmetica* di Diofanto (Libro III,

Problema 19), come risulta da quanto ora diremo: si considerino due triangoli rettangoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma$, se $\gamma$ e $\gamma'$ ne sono le ipotenuse, si deducano da essi questi altri quattro triangoli pure rettangoli:

$$\alpha\alpha' \;,\; \beta\alpha' \;,\; \gamma\alpha' \;;\; \alpha'\alpha \;,\; \beta'\alpha \;,\; \gamma'\alpha \;;$$
$$\alpha\beta' \;,\; \beta\beta' \;,\; \gamma\beta' \;;\; \alpha'\beta \;,\; \beta'\beta \;,\; \gamma'\beta \;;$$

ora questi si possono disporre (v. Fig. 22) in modo da costituire un quadrilatero $A\ B\ C\ D$ della indicata specie; l'esame della figura mostra

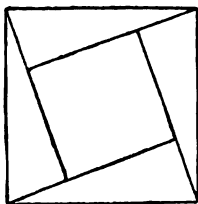



Fig. 21.

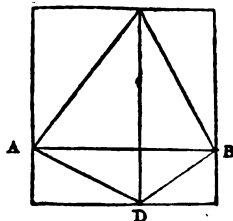



Fig. 22.

subito che la sua area si può esprimere così 1/2 $A\ B\ .\ C\ D$. Ora questa formola si può scrivere successivamente come segue:

$$\frac{(\alpha\alpha' + \beta\beta')\ (\alpha\beta' + \alpha'\beta)}{2} = \frac{\alpha'\beta'\,(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta\,(\alpha'^2 + \beta'^2)}{2} =$$
$$= \frac{\alpha'\gamma \cdot \beta'\gamma + \alpha\gamma' \cdot \beta\gamma'}{2}$$

donde emerge che l'area di quel quadrilatero è anche espressa da

$$\frac{A\,D \cdot B\,C + A\,B \cdot C\,D}{2}.$$

Eguagliandola alla precedente si conclude essere $A\ C\ .\ B\ D = A\ B\ .\ C\ D + A\ D\ .\ B\ C$, che esprime, nel caso speciale considerato, il teorema di Tolomeo sul quadrilatero inscritto. Si ha poi dalla stessa figura:

$$\frac{A\,B \cdot A\,D + B\,C \cdot C\,D}{A\,B \cdot B\,C + C\,D \cdot A\,D} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{A\,C}{B\,D},$$

altro teorema che sussiste per qualunque quadrilatero inscrittibile.

Di tali relazioni gl'Indiani (od i loro ispiratori) forse si servirono per giungere al « metodo ciclico » (p. 177) nell'analisi indeterminata di secondo grado e per esprimere cos $(x - y)$ in funzione dei seni e dei coseni degli archi $x$, $y$.

Bhascara sapeva calcolare l'area di un cerchio in funzione del raggio e, a differenza di Aryabhata, era anche in grado di risolvere lo stesso problema per la superficie ed il volume di una sfera; che ciò sia il pro-

dotto di una più intensa influenza di Archimede, è cosa probabile, ma non attestata da alcun documento. Nel corso di tali calcoli s'incontrano oltre i noti valori di $\pi$ 22/7 e 3,1416, un altro del tutto nuovo, cioè $\sqrt{10}$. Come sia stato ottenuto non è noto; è però molto verosimile l'ipotesi che vi si sia giunti come segue: i perimetri dei poligoni regolari di 12, 24, 48 e 96 lati inscritti nel cerchio di diametro 10 sono espressi rispettivamente da $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$, onde si sarà stati portati ad ammettere che, al limite, cioè per un poligono d'infiniti lati, si sarebbe ottenuto $\sqrt{1000}$ cioè $10\sqrt{10}$. Bhascara espone poi due notevoli formole (inverse l'una dell'altra) le quali legano un arco circolare $a$ alla sua corda $c$ nell'ipotesi che appartengano alla circonferenza di lunghezza $p$ e diametro $d$; sono le seguenti:

$$c = \frac{4\,d\,a\,(p - a)}{\frac{5\,p^2}{4} - a\,(p - a)}\,, \quad a = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}\,p^2\,c}{4\,d + c}}\,.$$

Come siano state ottenute è ignoto, giacchè il citato autore non fa che applicarle al calcolo dei lati di alcuni poligoni regolari, due dimostrazioni di esse, datene più tardi, a distanza di quasi un secolo (Servois, 1816; Suter, 1904), appaiono superiori al livello intellettuale dei matematici indiani.

Nelle opere che stiamo esaminando si trova finalmente e per la prima volta abbandonata la considerazione delle corde degli archi circolari a favore delle funzioni *seno, seno-verso* e *coseno*, onde, se fosse matematicamente provato di trovarsi in presenza di un'invenzione indiana, si dovrebbe porre sulle rive del Gange la culla della teoria delle funzioni circolari; e ciò con tanta maggior ragione perchè gli Indiani conobbero le relazioni seguenti:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = (\text{raggio})^2,$$

$$\left(2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)^2 = (\text{sen}\,x)^2 + (\text{sen ver}\,x)^2\,,$$

e possedevano una Tavola di valori dei seni degli archi in progressione aritmetica, costruita mediante la seguente formola d'interpolazione:

$$\text{sen}\,(\overline{x+1}\;225') - \text{sen}\,(225') =$$
$$= \text{sen}\,(x\,225') - \text{sen}\,(\overline{x-1}\;225') - \frac{\text{sen}\,(x\,225')}{225}\,.$$

Si osservi anche che in problemi relativi ad ombre portate s'intravvede il concetto di *tangente trigonometrica*.

Oltre alle formole e proposizioni esatte sinora riferite le opere di Brahmagupta e Bhascara ne contengono altre che la scienza ripudia; per esempio si trova applicata l'espressione $\frac{(a + b)\,(c + d)}{4}$ dell'area

di un quadrilatero avente $a, b, c, d$ per lati consecutivi, nonchè l'altra analoga $\frac{(a+b)c}{4}$ relativa ad un triangolo, le quali avevano corso in Egitto nel II sec. a. C.; ora la loro presenza produce in chi legge la più penosa meraviglia e spegne in gran parte l'entusiasmo sorto alla lettura delle pagine antecedentemente riassunte, facendo nascere il sospetto di trovarsi in presenza di indigeste compilazioni di lavori di varia specie e di vario valore... Ma di ciò a miglior tempo.

## Matematici posteriori

139 - Intanto importa rilevare che la grande estimazione in cui Brahmagupta fu tenuto nel corso dei secoli è documentata, tanto dai commentatori che ebbero le sue opere, quanto dagli imitatori che a lui non mancarono per un lungo periodo di tempo. Tale appare il compilatore Bhascara, di cui già parlammo, e tali sono due altri scrittori che soltanto di recente vennero conosciuti in Europa e che stanno a dimostrare come in India esistessero importanti centri di studi, non soltanto sulle rive del mare, ma anche molte miglia entro terra. Parliamo di Maharaviracarya, nato nell'850 e vissuto nella plaga oggi costituente il regno di Mysore, e Sridhara, nato nel 991 ed autore di un lavoro che, oltre al titolo *Ganitasara* (cioè « Compendio del calcolo » viene talora designato col nome di *Trisatika*, in memoria delle 300 strofe che lo formano [1].

Ora questi scritti hanno fra di loro e con quelli di più antica data rassomiglianze impressionanti: entrambi in versi, dànno informazioni esaurienti intorno ai pesi, le misure e le monete in uso allora in India; insegnano le stesse « operazioni » e « determinazioni » che incontrammo in Bhascara trattano le stesse questioni, investigano le medesime figure ed offrono le stesse incertezze d'interpretazione per l'assenza di definizioni. Siamo, pertanto, autorizzati a non addentrarci in un'analisi minuta di quanto essi contengono, solo notando che nell'andamento generale sembrano plasmati sopra qualche archetipo ignoto, al modo istesso che innumerevoli trattati di geometria apparsi in Europa hanno per modello, confessato o non, gli *Elementi* di Euclide.

## Epilogo

140 - Dalla rapida analisi testè compiuta degli scritti matematici degli Indiani sino ad oggi scoperti e pubblicati, emerge quali punti di contatto essi presentino con altri già noti e quali nuove verità essi insegnino. Alcune di queste hanno tale e tanta importanza che quando, nel primo ventennio del secolo decorso, se ne ebbe notizia in Europa,

---

[1] Maharaviracarya si presenta però non sotto l'umile veste del chiosatore, chè scrive: « Con l'ausilio dei santi Saggi io raccolgo dall'immenso oceano della scienza dei numeri una parte della sua essenza, nel modo stesso in cui le gemme traggonsi dal mare, l'oro dal macigno e la perla dalla conchiglia dell'ostrica ». Sembra avere egli attinto ad altro matematico dal nome Sridhara.

taluno ritenne giunto il momento per far discendere i matematici greci dall'alto posto in cui, per universale consenso, erano stati sino allora collocati; anzi, siccome da un lato gl'Indianisti inclinavano a far risalire alcune di quelle opere a centinaia d'anni prima dell'E. v. e siccome, d'altra parte, alcuni precetti religiosi osservati in India presentano una spiccata rassomiglianza con quelli imposti da Pitagora ai propri discepoli, così si giunse a fare del filosofo di Samo uno scolaro dei sacerdoti di Brahma e della matematica europea un riflesso di quella spontaneamente germogliata in India « ab immemorabili ». Ora (per non uscire dal campo proprio alla presente storia) la tesi secondo cui la matematica indiana sarebbe dotata di grande valore e spiccata originalità in paragone agli scritti congeneri provenienti da altra fonte, ha per fondamenti le considerazioni che seguono:

1. Il teorema di Pitagora s'incontra in forma generale nel *Sulvasutras.*

2. Nell'epoca in cui venne scritta quest'opera gl'Indiani erano famigliari col concetto di irrazionale.

3. Aryabhata conosce un valore di $\pi$ più approssimato di quelli usati prima.

4. Egli espone una Tavola di seni e ne insegna la costruzione.

5. A lui si deve la risoluzione in numeri interi positivi dell'equazione $a\,x + b\,y = c$, nonchè l'analoga dell'equazione $a\,x^2 + 1 = y^2$.

6. Brahmagupta insegna a calcolare l'area di un quadrangolo inscrittibile mediante la formola

$$\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}\,.$$

7. La nostra aritmetica di posizione è invenzione degli Indiani, come risulta: *a*) dall'essere usata in antiche inscrizioni; *b*) dalla testimonianza degli Arabi; *c*) dall'uso dell'« abaco » in epoche remotissime.

Ora contro siffatte presunte prove vengono mosse le seguenti obbiezioni:

1. L'epoca in cui fu scritto il *Sulvasutras* non è nota con precisione; di quest'opera esistono varie redazioni discordanti fra loro in punti importanti; ed in nessuna s'incontra il teorema di Pitagora sotto forma generale.

2. Il fatto che gl'Indiani conoscessero un eccellente valore approssimato di $\sqrt{2}$ (v. n. 133), non può in alcun modo servire come prova che essi avessero il concetto generale di irrazionale.

3. Il valore $\pi = 3{,}1416$ fu dato da C. Tolomeo prima di Aryabhata e questi era così poco in grado di misurarne il pregio da preferirgli il valore $\sqrt{10}$.

4. La Tavola di seni che si trova nello scritto dell'or citato matematico è effettivamente una riduzione di altra dovuta ad un astronomo alessandrino chiamato Pulisa (che i più reputati orientalisti identificano con C. Tolomeo), la quale, a sua volta, è una semplice metamorfosi della Tavola di corde registrata nell'*Almagesto.*

5. L'analisi indeterminata rappresenta un bellissimo capitolo della scienza indiana; ma i matematici a noi noti che lo scrissero sono senza discussione posteriori a Diofanto, le cui opere sono giunte a noi frammentarie e mutilate. Ora, per risolvere l'equazione $a x + b y = c$, Aryabhata espone una regola oscurissima, senza giustificarla od applicarla; la si ritrova in Bhascara sotto forma intelligibile, con qualche applicazione, ma senza dimostrazione alcuna. Inoltre l'equazione $a x^2 + 1 = y^2$ s'incontra per la prima volta in Bhascara; ma i metodi insegnati per risolverla non appartengono certamente al primo, perchè egli ne conosceva così poco il senso e la portata da applicarli spesso erroneamente; ad essi Bhascara fa qualche aggiunta, citando vagamente delle autorità anteriori a Brahmagupta; siccome intorno ad esse noi nulla sappiamo, così è possibile che appartenessero ad altre letterature.

6. La formola che dà l'area di un quadrilatero è applicata senza la condizione essenziale che il quadrilatero dev'essere inscrittibile in un cerchio.

7. Per quanto concerne il nostro sistema di numerazione bisogna osservare ciò che segue:

*a*) Parecchie epigrafi ritenute appartenenti al IV od al III sec. furono poi dimostrate falsificazioni moderne; l'unica su cui non può sorgere alcun dubbio appartiene all'anno 813.

*b*) La testimonianza degli Arabi non fu per lungo tempo interpretata a dovere; infatti il più antico testo arabo giunto a nostra conoscenza, ove si parla delle « cifre dell'hind », è un passo dell'opera *Del rotondo e del quadrato* dovuta al filosofo ed erudito Djàhiz (m. 869), nella quale è vantata la facilità con cui, servendosi delle cifre, si possono esprimere grandi numeri; ora sembra che alla lettura *hind* si debba preferire l'altra *end,* avente i significati di misura di aritmetica o di geometria; onde invece di *cifre indiane* si dovrebbe intendere *cifre matematiche.* È pertanto da credersi di trovarsi, per quanto concerne l'invenzione del nostro sistema numerale, in presenza di un dato prettamente leggendario di marchio persiano. Aggiungasi che, per quanto concerne i caratteri adoperati per indicare i numeri, sembra da escludere che derivino da lettere; pare, invece, assai più probabile che si tratti di caratteri *ad hoc,* proposti forse da Neo-Pitagorici, nati in Persia prima della conquista musulmana; ivi li trovarono gli Arabi e di là si diffusero in India.

*c*) L'uso dell'abaco presso gli Indiani è estremamente dubbio, perchè gli argomenti addotti sinora non possiedono vero valore probatorio.

A questi argomenti contro l'originalità della matematica indiana si possono aggiungere quelli offerti dalle regole grossolanamente errate ivi applicate, dalla mancanza totale di dimostrazioni di quanto è affermato e di concatenazione logica fra le varie parti di una stessa opera e finalmente dal fatto che in astronomia gl'Indiani furono discepoli dei Greci e forse dei Cinesi (si tenga presente che la loro principale opera astronomica — *Surya Siddhanta* o *Scienza del sole* — non è anteriore

al IV sec. dell'E. n.). Se si osserva ancora che Brahmagupta e Bhascara spesso si appoggiano ad autorità più antiche, che in India la matematica si presenta sempre come ausiliare della religione, dell'astronomia e persino delle transazioni commerciali, e che il periodo 400-650 di sua massima floridezza coincide con l'epoca in cui furono più vive le relazioni di ogni specie fra l'Oriente e l'Occidente, si giungerà alla ineluttabile conclusione che la matematica degli Indiani [1], a differenza della loro civiltà, non si svolse con coerente continuità ed in modo autonomo. In conseguenza oggi non si può ritenere come stabilita la tesi secondo cui la matematica sarebbe fiorita in India spontaneamente e con floridezza veramente meridionale; all'avvenire il dimostrarla e, in caso d'insuccesso, determinare da chi, quando e come il popolo di cui ci siamo testè occupati abbia attinte le verità che ne rendono indubbiamente pregevole la letteratura matematica.

---

[1] La difficoltà di questo problema storico è aumentato dall'esistenza in India di vari centri di studi governati da differenti sette politico-religiose. Uno di essi, sino ad ora sfuggito agli storici, fu segnalato da B. DATTA (Bull. of the Calcutta math. Society, t. XXI, 1929). Da quanto è ivi esposto si trae una conferma della passione degli Indiani per i grandi numeri; infatti ivi il numero degli esseri umani esistenti sulla terra è espresso dal numero $2^{96} = 79\,288\,162\,514\,264\,337\,593\,543\,950\,336$, che supera di gran lunga quello $(2^{64} - 1)$ a cui conduce la nota questione relativa al giuoco degli scacchi.

Aggiungiamo che gli scienziati di quel centro applicavano le formole seguenti:

$$C = \sqrt{10\,d^2}\ ,\quad A = \frac{1}{4} C\,d\ ,\quad c = \sqrt{4\,h\,(d - h)}\ ,\quad h = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - c^2}\right)\ ,$$

$$a = \sqrt{6\,h^2 + c^2}\ ,\quad d = \frac{1}{h}\left(h^2 + \frac{c^2}{4}\right)\ ,$$

nelle quali $C$ rappresenta la circonferenza ed $A$ l'area del cerchio di diametro $d$; mentre $a$ è la lunghezza dell'area avente $c$ per corda e $h$ per altezza; la prima è esatta assumendo $\pi = \sqrt{10}$, mentre la penultima è approssimata; le altre sono tuttora inciso e mostrano la conoscenza da parte di quegli studiosi del teorema di Pitagora.

## BIBLIOGRAFIA

*Corpus inscriptionum Indicarum* (London, 1888).

*Epigraphia Indica*, t. I-IX (pubblicazione ufficiale del Governo inglese).

E. STRACHEY, *Bija ganita or the Algebra of the Hindus* (London, 1813).

J. TAYLOR, *Lilavati or a Treatise of Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya* (Bombay, 1816).

H. T. COLEBROOKE, *Algebra with Arithmetic and Mensuration* (London, 1817).

E. BURGESS and G. WHITNEY, *The Surya Siddhanta* (Journ. of the American Orientalist Society, t. VI, 1855).

*Translation of the Surya Siddhanta by* BAPU DEVA SASTRI *and of the Siddhanta Siromani by the late* L. WINKINSON *revised by* BAPU DEVA SASTRI (Calcutta, 1861).

H. KERN, *The Aryabhatiya edited with Commentary* (Leiden, 1874).

G. THIBAUT, *On the Sulvasutras* (Journ. of the Asiatic Society of Bengal, 1875).

*Sulvasutra of Baudhayana with the Commentary of Dvarakana thanayva, traslated into English by* G. THIBAUT (The Pandit, t. IX-X, Benares, 1875).

R. HOERNLE, *The Bakshali Manuscript* (The Indian *Antiquary*, vol. XIII, 1888).

*Pancasiddhantaka of Varaha-Mihira trans. by* G. THIBAUT and M. S. DVIVEDI (Benares, 1889).

A. BÜRK, *Das Apastamba-Sulba-Sutra* (Zeitschr. der deutschen morgenland. Ges., vol. LV e LVI).

*The Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with english translation and notes by* M. RANGACAYRA (Madras, 1912).

D. E. SMITH, *The Ganita-Sara-Sangraha of Mahara-viracarya* (Bibl. mathem. 3ª serie, t. IX, 1909).

N. RAMANUJACHAIRA, and G. KAYE, *The Trisatika of Sridharacarya* (Biblioteca mathemathica, 3ª serie, t. XIII, 1912-13).

G. R. KAYE, *The Bakhshali Manuscript. A study in mediaeval Mathematics* (Calcutta, 1927) (1).

WALSHEN E. CLARK, *The Aryab hatiya of Aryabhata* (Chicago, 1930).

B. DATTA and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics. A source Book.* Parte I (Lahore, 1935), Parte II (id., 1938), *The science of the Sulba. A Study of earby Hindu Geometry,* (Calcutta, 1932).

---

(1) Questo volume contiene il più recente documento giunto in dominio del pubblico relativo alla matematica degli Indiani. I dati che essa offre non esigono sostanziali modificazioni a quanto si espose nel presente capitolo. Il detto documento fu trovato a Baskhali, località poco nota, situata a N. O. dell'India inglese, a circa 150 miglia da Kabul, capitale dell'Afganistan. Esso consta di un buon numero di frammenti scritti in sanscrito un po' irregolare, sopra scorza di betulla (sistema largamente usato prima dell'invenzione della carta). Ammesso che si riferiscano ad un'opera unica (e la cosa non è certa) si sarebbe in presenza di una collezione di problemi analoga a molte opere antiche e medioevali ben note a chi ci ha seguito sin qui; essi sono risolti in base a regole non dimostrate, ma enunciate in versi; ottenuti i risultati, la loro esattezza è verificata mediante opportune prove. La forma in cui l'opera è redatta la mostra essenzialmente indiana; ma è evidente che l'autore ha subìto influenze straniere. Le questioni trattate sono di aritmetica, algebra (equazioni determinate o indeterminate, di 1° e 2° grado) e geometria; alcune hanno carattere esclusivamente teorico, mentre altre sono d'indole commerciale, onde porgono molti dati relativi ai pesi, alle misure, alle monete in uso. Oltre alle proposizioni che si leggono in altre opere indiane, vi si trova per la prima volta, largamente applicata, la formola

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} .$$

L'autore conosce la formola

$$s = t\left(a + \frac{t-1}{2} d\right)$$

che dà la somma di $t$ termini di una progressione aritmetica di cui $a$ è il primo termine e $d$ la differenza costante; conosce anche l'inversa

$$1 = \frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8sd} - (2a-d)}{2d}$$

ma l'applica senza avvertire che ha senso soltanto quando $t$ risulta razionale, intero e positivo, onde, quando $(2a-d)^2 + 8sd$ non è un quadrato, egli si attarda a calcolare per $t$ valori approssimativi. Ragioni intrinseche, storiche o linguistiche portano il Kaye a far risalire al sec. XII la composizione di quest'opera.

CAPITOLO XI

# IL MIRACOLO ARABO [1]

## Preliminari

141 - Tra i fenomeni che s'incontrano nella storia universale nessuno è più meraviglioso ed impressionante di quello offerto dal popolo arabo, vera meteora che, apparsa all'improvviso fra il VI secolo e il VII, brillò di luce abbagliante, ma, dopo pochi secoli si spense quasi avesse esaurita tutta l'energia latente, di cui la natura avevala dotata. Questa stirpe che, sino allora, non aveva esercitata alcuna influenza percepibile sopra lo svolgersi degli eventi umani, alla voce irresistibile di Maometto (571-632) scoprì in sè stessa mirabili qualità nascoste, grazie a cui potè, durante parecchie centinaja d'anni, dominare sui corpi e sugli spiriti. Infatti, a partire dal VII secolo, la scimitarra procedette vittoriosa di terra in terra, con impeto talmente travolgente che, nel breve giro di circa cento anni, assoggettò l'India, la Persia, la Mesopotamia, la Siria, l'Egitto, l'Africa settentrionale e finalmente buona parte della Spagna. Ma, per effetto delle insormontabili discordie manifestatesi fra i credenti di Allah, quell'immenso impero si frantumò in tanti regni, prima fra loro rivali e poi apertamente nemici.

I novelli dominatori di tanta parte del mondo conosciuti imposero ai popoli soggiogati l'uso della propria lingua; però, di quelli che vantavano più antica e raffinata civiltà, studiarono le opere dell'ingegno e finirono per assimilarne perfettamente il contenuto. Non paghi della gloria militare, a partire dalla dinastia degli Abassidi, i califfi aspirarono ad emulare i Lagidi e gli Attalidi, quali sovrani protettori delle scienze e delle arti; cosicchè Bagdad — che a partire dal 762 era sede del governo centrale — divenne punto di confluenza di due grandi civiltà, la greca e l'indiana. Per gli efficaci e incessanti incoraggiamenti a lavori di traduzione e commento (anche se eseguiti da persone non professanti la religione di Maometto) vanno in modo particolare ricordati i califfi Al Mansur (che regnò nel periodo 754-775), Harun al Rascid (786-809) e Al Mamun (813-833) (l'ultimo dei quali va altresì ricordato con onore, perchè, durante il suo regno, venne eseguita una pregevole misura di un arco di meridiano, la prima dopo quella che diede fama a

[1] Come scrittori arabi vengono da noi considerati quelli che scrissero nella lingua del Corano; la determinazione caso per caso della razza a cui appartennero è questione irta di difficoltà che non furono peranco superate.

Eratostene (v. n. 53) ([1]). Così — per parlare esclusivamente delle opere di nostra pertinenza — non soltanto Euclide, Archimede, Apollonio e Tolomeo, ma anche geometri e astronomi di second'ordine, poterono venire letti dagli Arabi ignoranti la lingua di Omero. In conseguenza gli Arabi, che in origine chiesero lumi agli Indiani per procurarsi nozioni sopra quei fenomeni celesti la cui conoscenza è indispensabile a chi voglia uniformarsi ai precetti del Corano (si ricordi, ad esempio, che le orazioni dovevano venire pronunciate col viso rivolto alla Mecca e le abluzioni purificatrici essere compiute in determinate ore del giorno), finirono col seguire fedelmente i dettami forniti da Ipparco e dai suoi più eminenti discepoli; in tal modo gli Arabi diffusero in immensi territori una scienza sicura, non senza apportarvi migliorie di indiscutibile pregio.

Questa benefica azione esercitata dal popolo di cui ragioniamo si protrasse per non meno di cinque secoli e riuscì sommamente giovevole anche agli Europei, quando questi vennero in contatto con gli Orientali, anzitutto all'epoca delle prime crociate e poi allorchè, divenuta buona parte della Spagna una provincia maomettana, Cordova si trasformò in un centro di studi non meno importante di quanto fosse Bagdad. Ma, dopo la perdita di questa città (1236) e della vicina Siviglia (1248), i sovrani arabi si ritirarono a Granata, subendo la sorte dei vinti. Allora Alfonso X, re di Castiglia, celebre tanto come saggio reggitore di stati, quanto come dotto astronomo, col far tradurre in latino i più cospicui elementi della letteratura scientifica moresca, ricondusse gli Europei alle pure fonti di ogni nostro sapere, iniziando in tal modo l'emancipazione degli intelletti occidentali dall'umiliante soggezione nella quale trovavansi precedentemente. Tuttavia l'influenza esercitata dagli Arabi sullo sviluppo del pensiero scientifico europeo è talmente profonda che lo studio delle loro opere relative ad un ramo qualunque dello scibile è un cómpito al quale nessun storico si può sottrarre. Esso è reso oggi relativamente agevole grazie al numero ragguardevole di opere che, a partire dall'ultimo secolo, furono date alle stampe nell'originale e tradotte in qualche lingua europea: tuttavia, se si istituisce un paragone del loro numero con la massa di quelle che sono tuttora inedite, si giunge alla sconfortante conclusione che quanto oggi si può dire sull'argomento è soltanto un frammento di quanto insegnerà l'avvenire. Quante e quali siano le opere pubblicate risulta dalla Bibliografia che chiude il presente Capitolo; quante e quali siano le esistenti, ma tuttora inedite, si apprende da un coscienzioso lavoro di un matematico-orientalista ([2]), il quale, redigendolo, aggiunse un nuovo titolo di benemerenza a quelli che erasi acquistati traducendo [26] ([3]) i dati relativi alle matematiche

---

([1]) L'incendio della biblioteca d'Alessandria, di cui si fa colpa al califfo Omar, sembra una leggenda.

([2]) H. Suter, *Die Mathematiker und Astronome der Araber und ihre Werke* (Abhand. zur Gesch, der Mathem., X Heft, 1900). Analogo, ma di più limitata portata, è lo scritto di J. A. Sanchez Perez, *Biografias de matematicos Arabes que florecieron en España* (Mem. de la R. Acad. de Madrid, 2ª serie, t. I, 1921).

([3]) I numeri posti in parentesi quadrata servono di richiamo alle opere elencate nella chiusa del presente Capitolo.

offerti da un esteso elenco bibliografico, compilato da un dotto arabo nel 987 dell'E. v. [1].

142 - Prima di esporre in compendio quanto di matematica appresero e insegnarono gli Arabi è opportuno premettere un particolare linguistico che li riguarda. Essi disponevano di un numero assai limitato di nomi propri; in conseguenza, per evitare deplorevoli equivoci, ricorrevano al sistema di indicare, per ogni personaggio, di chi era figlio (« ibn »); e poichè ciò non era sempre sufficiente allo scopo, ne indicavano anche il nonno, il bisnonno, ecc.; che se si trattava di persona la cui rinomanza fosse maggiore di quella raggiunta dal genitore, questo veniva designato come padre (« abu ») di quello. Inoltre per maggiore chiarezza veniva spesso dichiarata la patria di ogni persona nominata. I nomi così risultanti sono assai lunghi e complessi, onde non sempre vengono riferiti per intero; e poichè la decurtazione non venne eseguita con metodo costante, non sempre riesce agevole lo stabilire l'identità di due persone. Per chi non è in grado di consultare le opere arabe nell'originale tale difficoltà è accresciuta dalla varietà dei sistemi usati, da studiosi di differenti nazionalità, per riprodurre con caratteri latini i suoni dell'alfabeto arabo [2], e si accrebbe perchè coloro che primi volsero in latino opere arabe, uniformandosi a un deplorevole sistema del tempo, tradussero anche i nomi propri, ispirandosi più al concetto di ottenere combinazioni fonetiche armoniose, che a quello, ben più ragionevole, di arrecare ai nomi originali i minimi mutamenti possibili.

Questo fatto si è riprodotto, in senso inverso, quando le opere greche furono tradotte in arabo; di più, anche allorquando i primi traduttori non si permisero alterazioni troppo considerevoli, i ricopiatori ignoranti, che spesso omisero o spostarono i punti diacritici, e poi gli Europei che tradussero dall'arabo in latino, accentuarono siffattamente il distacco dai suoni primitivi, che ebbero origine vocaboli quali Yrinus, Asamithes, Milleius, Aganis, Sambelichus nei quali non riesce certamente facile ravvisare i nomi di Erone, Archimede, Menelao, Gemino e Simplicio.

Giova ancora rilevare, a titolo di lode pel popolo di cui ci occupiamo, che, mentre il concetto di proprietà riguardo alle opere dell'ingegno sembra essere stato ignoto ai Cinesi e agli Indiani (e, vedremo, anche nel Medio Evo europeo), gli Arabi dichiararono sempre, con per-

---

(1) Alcuni particolari sopra le prime traduzioni arabe di opere scientifiche sono somministrate dall'Introduzione alla versione araba fatta da Ben Esdra di un'opera che esamineremo più avanti [48]; il lettore ne troverà una traduzione inglese nell'articolo di D. E. Smith e J. Ginsburg, *Rabbi Ben Ezra and the Hindu-Arabian Problem* (Amer. math. Monthly, t. XXV, 1918). Chi poi voglia formarsi un'idea generale delle cognizioni matematiche degli Arabi, delle discipline da essi conosciute e degli autori greci e arabi da essi riguardati come classici, può ricorrere ai prolegomeni [14] di un'estesa opera storica scritta da Ibn Kahldun, tunisino vissuto dal maggio 1332 al marzo 1406 e che passa per il massimo storico della filosofia islamitica.

(2) Ad esempio di uno scrittore di cui tratteremo nel n. 145, il nome fu riprodotto in Europa in non meno di venti maniere differenti. Nel presente volume i nomi furono scritti nel modo adottato nella succitata opera del Suter, omettendo però, per ragioni tipografiche, gli accenti, gli apostrofi e le sottolineazioni.

fetta onestà, le sorgenti a cui attinsero; sistema lodevole, non soltanto dal punto di vista della morale, ma anche per le agevolazioni che arreca all'opera dello storico.

## Generalità sull'aritmetica araba

143 - Per scrivere i numeri interi non superiori a 400 gli Arabi (a somiglianza dei Greci e degli Ebrei) si servirono da principio delle lettere del loro alfabeto e, per eseguire le più semplici operazioni aritmetiche, ricorrevano alle dita delle mani, con espedienti i cui particolari si apprendono da un poemetto arabo, nel quale le regole del calcolo digitale sono esposte ad uso dei funzionari dello stato [17]. Sembra però che, venuti in contatto con gli Indiani, abbiano compreso la superiorità del sistema di numerazione avente per cardine la 0; allora si affrettarono a adottarlo e diffonderlo in tutte le terre conquistate. È vero che col tempo i caratteri numerati adoperati dagli Arabi finirono per assumere forme ben differenti da quelle che avevano negli scritti indiani; non solo, fra le cifre vergate dagli Arabi viventi attorno a Bagdad e quelli usati dai Mori di Spagna si manifestarono differenze così profonde che queste ricevettero un nome speciale (cifre « gobar »). Ma che in origine fossero identiche alle indiane è affermato senza reticenza da un testimonio degno di assoluta fede, cioè da quell'Al-biruni che già ricordammo (p. 172) e che fra poco (n. 150) incontreremo nuovamente sui nostri passi.

I limiti che ci sono imposti non ci consentono di descrivere le piccole differenze esistenti fra la logistica araba e quella oggi in uso; la cagione del distacco va ricercata nel fatto che gli Arabi per calcolare, non si servivano di papiro o pergamena, ma di una tavoletta quadrata (col lato di lunghezza di cm. 30 circa) ricoperta di polvere rossa, e usavano, scambio della penna, di un semplice bastoncino; donde la necessità di scrivere il meno possibile, affidando alla memoria molti calcoli intermedi. Se poi essi abbiano usati altri ausiliari, è questione tuttora controversa, ma che oggi s'inclina a risolvere affermativamente.

Le regole relative erano semplicemente enunciate e spesso erano seguite dalla tranquillante affermazione: Dio conosce la verità meglio di noi!

Fra le frazioni, per gli Arabi come anche per noi, occupavano una posizione privilegiata quelle aventi per numeratore 1 e per denominatore 2, 3,..., 9, le quali si esprimevano oralmente con vocaboli analoghi ai nostri « un mezzo », « un terzo », ecc., mentre per le altre conveniva ricorrere a circonlocuzioni. A siffatta caratteristica fonetica è senza dubbio collegata l'abitudine di trasformare qualunque frazione in una somma del tipo seguente

$$a + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta\gamma} + \frac{d}{\beta\gamma\delta} + \dots ;$$

l'operare una siffatta metamorfosi dà luogo ad un problema aritmetico

non privo d'interesse e che ha occupato in tempi a noi vicini scienziati eminenti; è chiaro che il risultato può scriversi sotto forma di una « frazione continua ascendente », come segue:

$$a + \cfrac{b + \cfrac{c + \cfrac{d + \dots}{\delta}}{\gamma}}{\beta}.$$

## I traduttori dal Greco

**144** - Siccome — già lo dicemmo — gli Arabi, prima di parlare in nome proprio, studiarono a fondo le opere dei grandi matematici dell'antica Grecia, incombe a noi l'obbligo di citare i più benemeriti fra i traduttori e commentatori appartenenti a quella nazione.

Fra questi merita di venire anzitutto ricordato Al-Haggag ibn Jusuf ibn Matar (870-920 circa) al quale devesi la prima versione araba degli *Elementi* di Euclide e un analogo lavoro sopra l'*Almagesto* di Tolomeo. Un suo contemporaneo è Abu Othman al Dimashki, medico di Damasco al quale devesi quella versione del Commento di Pappo al Libro X degli *Elementi,* che ha salvata (v. n. 61; cfr. [12]) (1) da completa scomparsa questo lavoro del geniale commentatore alessandrino.

Va poi ricordato un cristiano, morto nel 912 o 913, il quale nel tradurre dal greco e commentare fu di un'assiduità veramente meravigliosa: è Qosta ibn Luqa al Balbecki, al quale debbonsi versioni tuttora esistenti di opere di Teodosio, Autolico, Ipsicle, Aristarco ed Erone [35], nonchè commenti all'*Aritmetica* di Diofanto e i due Libri di Archimede *Sopra la sfera ed il cilindro.* Debito di giustizia c'impone di osservare che altri scritti del medesimo autore provano che egli non fu privo di originalità: ricorderemo fra essi l'unico che abbia visto la luce [39]; esso è il più antico lavoro arabo in cui sia esposto in modo soddisfacente il metodo della doppia falsa posizione.

A Qosta ibn Luqa tiene dietro in ordine di tempo un astronomo ben quotato dai suoi connazionali, il quale prestò di recente ottimi servigi agli storici della matematica: è Abul Abbas al-Fard ibn Hatim al Nairizi, vulgo Anarizio (cfr. p. 91 e 96), nato a Nairiz e morto nel 922 o 923; egli è autore di un prezioso commento agli *Elementi* di Euclide, dato di recente alle stampe tanto nell'originale [27] quanto in in una antica versione latina [30]; sono ivi riferite un grande numero di osservazioni fatte sul massimo codice geometrico dell'antichità da pensatori dell'Ellade antica ed esposte in opere che non giunsero sino a noi.

Nè va dimenticato Abu'l Fath Muhammed ibn Muhammed ibn Quasim ibn Fadl al Isfahani, il quale, traducendo verso la fine del x secolo i primi sette Libri delle *Coniche* di Apollonio (cfr. n. 50) salvo gli ultimi tre dalla dispersione che li minacciava, il che, come vedremo (n. 326), permise a G. A. Borelli di diffonderli in veste latina.

---

(1) I numeri in parentesi servono di richiamo alla Bibliografia in fine del capitolo.

Si può anche rilevare che al X Libro degli *Elementi* gli Arabi si sono particolarmente interessati; infatti verso il 1100 un altro matematico, Abu Bekr Muhammed ibn Abdelbaqui al Bagdad, ne scrisse un nuovo commento [36], il quale prende un posto onorevole nella collezione degli studi dei Mori sulle opere del grande alessandrino (v. anche [7]).

Di altri traduttori, meritevoli di essere anche ricordati fra i pensatori originali, si parlerà altrove nel corso di questo Capitolo (1).

## Muhammed ibn Musa e i suoi contemporanei

145 - Per dichiarazione di un'autorità alla quale tutti s'inchinano, Ibn Khaldun (v. nota a p. 189), la letteratura matematica dei Maomettani s'inizia con gli scritti di Murammed ibn Musa al Khowarizmi, nato a Khowarezm ( la moderna Khima) e fiorito nel periodo 813-833, durante il quale regnò il califfo Al Manmun, alla cui corte egli visse, riverito e onorato. Coltivò l'astronomia e lasciò una collezione di Tavole astronomiche, tratte dalle congeneri calcolate dagli Indiani, delle quali esiste tuttora un rifacimento compiuto due secoli più tardi da un arabo di Spagna, Maslema ibn Ahmed Al Madgriti [48], tavole alle quali il matematico deve prestare la debita attenzione grazie alle relazioni trigonometriche che vi disimpegnano un ufficio importante; in Europa si diffusero per merito di Adelarlo di Bath (1120 circa), che le tradusse in Latino (2).

Ma ciò che a noi maggiormente interessa nell'opera matematica di Muhammed ibn Musa è rappresentato da due trattati, uno di aritmetica, di cui oggi si conosce soltanto [13] una versione latina intitolata *Algoritmi de numero Indorum;* l'altro di algebra, del quale possediamo l'originale in un manoscritto (3) che risale al 1342 e fa parte della Biblioteca Universitaria di Oxford [2], nonchè alcune versioni parziali o totali [49]

Mentre il primo va citato perchè porge le più antiche informazioni intorno all'uso da parte degli Arabi dell'aritmetica decimale o di posizione (ivi lo zero è designato con la perifrasi « circulum parvulum »), il secondo è dotato di importanza somma perchè con esso s'inizia la letteratura algebrica, giunta ormai ad una ricchezza che sfugge ad ogni cal-

---

(1) Per maggiori particolari vedi Bibliografia [64].

(2) Secondo alcuni egli fu un fedele discepolo dei Greci; ma questa opinione venne combattuta [68] in base alla rassomiglianza che la parte geometrica delle sue opere presenta con un lavoro ebraico che risale al 150 dell'Era nostra (è il più antico lavoro matematico ebraico oggi noto); senza poter affermare che il matematico arabo l'abbia conosciuto nell'originale, si propende a ritenere che egli abbia attinto ad una versione persiana o siriaca di esso; si opina persino che egli sia stato l'esponente di una reazione contro la soverchiante influenza greca esercitata nell'Università di Bagdad.

(3) Sembra che in questo scritto si trovi il primo cenno dell'artificio che riduce la determinazione della radice quadrata di un intero alla ricerca di un quadrato prossimo ad un numero non quadrato, come risulta dal seguente esempio:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} = \frac{1414}{1000} = 1{,}414$$

colo. Giova subito osservare che si tratta di un lavoro, non originale, ma inspirato dagli Indiani, e nemmeno di un'esposizione esauriente della scienza del tempo, con intenti prettamente teorici, giacchè (è l'autore stesso che lo dichiara) venne composto dietro eccitamento del califfo Al Mansur, il quale giudicò necessario che tutti i propri sudditi fossero in grado di servirsi dei procedimenti aritmetici indiani, nei casi di eredità e legati, di divisioni di beni, di liti e transazioni commerciali, per misurare terreni, costruire dighe « et similia ».

La venerazione tributata dagli Arabi al matematico in parola è dimostrata dall'avere la sua opera trovati ben presto non meno di tre commentatori; l'influenza che essa esercitò in Europa è la più potente che siasi manifestata nel periodo interposto fra l'epoca greca e Regiomontano (v. nn. 183-86); essa è documentata da due fatti che vanno qui registrati.

In primo luogo dal nome Al Khowarizmi, con cui da molti fu ed è designato assai spesso l'autore di cui parliamo, trae origine il vocabolo « algoritmo », il quale, dopo di avere subite svariate vicende e avere disimpegnati parecchi uffici, ha finito per venire usato per esprimere una costante procedura di calcolo. Inoltre da quell'opera si traggono gli elementi per fissare l'etimologia del termine « algebra »; chè con i vocaboli « al gebr » (lat. « restauratio ») e « al mukabala » (lat. « oppositio ») trovansi ivi designate le due operazioni, fondamentali nel maneggio delle equazioni, cioè il « trasporto » di un termine da un membro all'altro con cambiamento di segno e la « riduzione » dei termini simili.

Muhammed ibn Musa non si serve della nostra simbolica nè di altra congenere, onde la sua è un'algebra retorica (cfr. n. 91) come quella di Diofanto; per designare l'incognita si serve della parola « schai », donde « cosa » che durante tanti secoli ebbe corso in tutto il mondo civile. Rifuggendo dall'abitudine indiana di servirsi indifferentemente di quantità positive e negative, egli considerava separatamente sei tipi di equazioni quadratiche; sono quelle che oggi scrivonsi come segue:

$$a x^2 = b x \quad , \quad a x^2 = c \quad , \quad b x = c \; ,$$
$$x^2 + b x = a \quad , \quad x^2 + a = b x \quad , \quad x^2 = a + b x \; ,$$

$a, b, c$ essendo numeri positivi, sistema che fu poi seguito sino al termine del secolo XVI. Non solo: gli esempi da lui addotti per gli ultimi tre tipi

$$x^2 + 10 x = 39 \quad , \quad x^2 + 21 = 10 x \quad , \quad x^2 = 3 x + 4 \; ,$$

benchè non godano di doti speciali, si ritrovano durante parecchi secoli nella letteratura algebrica e possono utilmente servire per dimostrare qualche figliazione non confessata [1]. Per risolvere le equazioni degli indicati tipi, Muhammed segue una via che, nel fondo, non differisce

[1] V. ad es. la versione fatta da Gherardo da Cremona di un frammento di una opera algebrica anonima e pubblicata (su un codice Vaticano) da B. BONCOMPAGNI nella memoria che tratta *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* (Atti dell'Accad. Pont. dei Nuovi Lincei, t. IV, 1850-51).

dalla nostra (¹) e che egli illustra ricorrendo a considerazioni geometriche ispirategli, forse attraverso gl'Indiani, dai sommi matematici della Grecia. La influenza greca si percepisce ancora più chiaramente nella parte prettamente geometrica del trattato in esame; ivi, infatti, si legge una dimostrazione del teorema di Pitagora per triangoli isosceli rettangoli, di cui sembra difficile negare la connessione con un celebre passo del *Menone* di Platone; inoltre la classificazione che vi si legge dei quadrilateri piani non differisce da quella esposta da Euclide; finalmente il valore 22/7 usato da Muhammed per il rapporto della circonferenza al diametro è quello scoperto da Archimede; però la presenza di altri valori $\left(\sqrt{10}, \frac{62832}{2000}\right)$ è prova che l'ammirazione per l'Occidente non lo rendeva sordo agli ammaestramenti provenienti dall'Oriente.

Fra i problemi risoluti da Muhammed ibn Musa notiamo quello, che può dirsi classico, del calcolo del volume di una piramide tronca a base quadrata, nonchè una bella raccolta di questioni appartenenti all'aritmetica commerciale e legale, scelte affinchè l'opera raggiungesse lo scopo per cui, come dicemmo, fu architettata e composta. Si tratta in gran parte di problemi concernenti la ripartizione di una sostanza fra parecchi eredi aventi col testatore differenti gradi di parentela, tenendo conto anche di somme dovute a terzi. Il primo editore europeo di quest'opera [2] ritenne che nel risolvere i relativi problemi l'autore fosse incorso in gravi errori; ma fu poi dimostrato [67] che tale critica dipende da una imperfetta conoscenza, da parte di chi la mosse, delle norme relative alle eredità fissate dal Corano. Le equazioni corrispondenti sono tutte di primo grado e si risolvono mediante il concetto della falsa posizione, ossia servendosi di ben regolati tentativi. Ad esempio, uno dei problemi anzidetti condurrebbe oggi all'equazione

$$k - \left(\frac{k}{5} - x\right) - \left(\frac{k}{4} - 2x\right) = 13x ;$$

ora, per risolverla in numero interi, si supponga $k = 20$ e si avrà $11 = 10x$; ma così per l'incognita si ottiene un valore frazionario 11/10; si assuma invece $k = 200$ e si avrà $x = 11$. Similmente per risolvere la equazione

$$k - \left(\frac{k}{3} - 3x\right) - \left(\frac{k}{4} - 2x\right) - \left(\frac{k}{5} - x\right) = 13x$$

si assuma $k = 60$; l'equazione precedente diverrà

$$13 + 6x = 13x$$

donde $x = 13/7$; per ottenere valori interi si moltiplichi per 7 e si giun-

(¹) Alludiamo qui alla trasformazione p. es. dell'equazione $x^2 + bx = a$ in

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = a + \frac{b^2}{4}.$$

gerà a $k = 420$, $x = 13$, che è appunto la soluzione data dal matematico di cui ci occupiamo.

146 - L'attitudine e lo zelo per la matematica di cui diede prova Muhammed ibn Musa si ritrovano nei tre fratelli Muhammed, Ahmed e Al Hasan, ai quali si attribuisce la descrizione con moto continuo di un'ellisse individuata dai fuochi e dall'asse maggiore. Essi spesero somme ingenti nell'acquisto di opere greche e delle loro versioni in arabo, intraprendendo a tale scopo lunghi viaggi e incaricando dell'acquisto persone esperte. Il più intelligente di essi sembra sia stato il primo, al quale veniva attribuita una speciale competenza in logica ed astronomia; il secondo si dedicò di preferenza alla meccanica; mentre l'ultimo mostrò una spiccata propensione per la geometria. Delle molte opere attribuite a questa nobile triade una soltanto fu posta in circolazione in Europa, prima nella versione latina fattane da Gherardo Cremonese [22], e poi in parziale versione tedesca [33], sopra una riduzione dovuta presumibilmente al matematico Nasir ed din (v. n. 154). Il *Liber Trium Fratrum* (così designato perchè comincia con le parole « Verba filiorum Moysii filii Sacker, Mahumeti, Hameti, Hasan ») è una collezione di proposizioni geometriche elementari, di scarsa originalità perchè attinte a fonti greche, nella quale ci basti segnalare l'espressione dell'area di un triangolo in funzione dei lati, dimostrata con un ragionamento differente da quello usato da Erone.

Coetaneo a questi scrittori è Abu'l Hasan Tabit ibn Qorra ibn Merwan al Harrani, nato ad Harran (città della Mesopotamia settentrionale, nei pressi di Edessa) nell'836 (o nell'835 secondo altri) e morto a Safar il 18 febbraio 901. Dopo di avere esercitata per qualche tempo in patria la professione di cambia-valute, spinto dalla sete di sapere, si trasferì a Bagdad, ove allora splendeva la gigantesca fiaccola che illuminava tutte le terre che si stendono dalle colonne d'Ercole all'estremo Oriente; ivi venne a contatto con Muhammed ibn Musa, il quale, apprezzandone l'acuto ingegno e la vasta coltura, lo accolse sotto il proprio tetto e lo esortò a sfruttare le proprie cognizioni filologiche e scientifiche nel tradurre scritti matematici greci e nel rivedere le versioni che erano già state fatte. Un lavoro di tal genere compiuto da Tabit sulle *Coniche* di Apollonio [23] e il fatto che gli è a lui che si deve in gran parte la conservazione dei *Lemmi* di Archimede e della memoria sull'*Ettagono nel cerchio* (v. n. 51) stanno a provare che quel saggio consiglio non rimase inascoltato. Resosi padrone dei metodi e dei risultati recanti la firma dei legislatori della geometria e dei loro commentatori, egli fu in grado di completarli in qualche punto importante, come risulta da ciò che ora diremo (¹).

Anarizio ha serbata memoria di una dimostrazione da lui ideata per il teorema di Pitagora; essa è espressa dalla fig. 23, ove la porzione tratteggiata, la quale risulta dall'insieme dei quadrati dei cateti, si può trasformare nel quadrato dell'ipotenusa aggiungendo e sottraendo due

(¹) Noi ci occupiamo soltanto degli scritti matematici di Tabit, ma i suoi biografi ne ricordano altri, donde emerge che egli seppe abbracciare tutte le scienze del suo tempo.

triangoli eguali al dato. Sorvolando sopra un lavoro relativo alla leva ([47] e [54]), frutto di meditazioni sugli scritti congeneri di Euclide, Archimede ed Erone, merita più lungo discorso il metodo ideato da Tabit per costruire coppie di numeri amici [8]. Come è noto, tal nome fu dato da Pitagora a due numeri ognuno dei quali è uguale alla somma dei divisori dell'altro; ora il citato matematico ha scoperto che, supposto essere primi i tre numeri $3 . 2^n - 1$, $3 . 2^{n-1} - 1$ e $9 . 2^{2n-1} - 1$, i due $2^n (3 . 2^n - 1) (3 . 2^{n-1} - 1)$ e $2^n (9 . 2^{2n-1} - 1)$ (essendo un $n$ intero positivo) sono numeri godenti dell'anzidetta prerogativa: così per $n = 2$ si ha la coppia 220 e 284. Il cospicuo valore di questo risultato (che fu riscoperto molto più tardi in Europa) deriva dal fatto che quello or riferito è l'unico metodo che ancor oggi si conosca per trovare coppie di numeri amici.

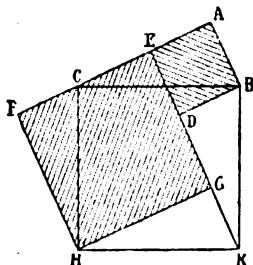



Fig. 23.

Si è debitori allo stesso matematico di uno scritto, che conosciamo attraverso la traduzione latina fattane da Gherardo Cremonese [58]. Esso ha per tema il teorema di Menelao, la cui fondamentale importanza era stata ravvisata dagli antichi Greci, come ben sanno i nostri lettori che ricordano che Tolomeo ne trasse nell'*Almagesto* la risoluzione dei triangoli sferici (v. n. 72). E appunto (e soltanto) al grande astronomo antico si riferisce il matematico arabo, il che prova che allora non era stata peranco compiuta (o non era nota a Tabit) la versione araba della *Sferica* di Teodosio. Della succitata proposizione egli dà una nuova dimostrazione e quindi — con la verbosità caratteristica dello stile del tempo — si attarda a enumerare non meno di 18 casi che può presentare la relativa figura; importa notare che egli qui si mostra discepolo piuttosto dei Greci che degli Indiani, giacchè usa costantemente *corde* e non *seni* (¹).

In altro diversissimo campo Tabit impresse tracce profonde ([50] e [51]), cioè col migliorare e completare le proposizioni archimedee relative alla quadratura della parabola e con l'investigare la cubatura dei solidi che essa genera rotando attorno al proprio asse, il che è tanto più degno di menzione perchè tutto fa credere che gli Arabi non abbiano conosciuti fondamentali i lavori di Archimede *Sopra gli sferoidi e i conoidi*. Tali ricerche furono condotte con la scorta di considerazioni infinitesimali che gli Arabi avevano appresi da Euclide e Archimede.

Questo campo di ricerche si manifestò talmente ubertoso che altri matematici si affrettarono a coltivarlo: di due va fatto qui cenno, mentre di un terzo parleremo più avanti (n. 149).

Uno di essi è un nipote di Tabit medesimo: Abu Ishaq Ibrahim ibn Sinah ibn Tabit ibn Qorra, nato nel 908 o 909 e morto nel 946; a lui devesi un nuovo procedimento per giungere alla quadratura della para-

(¹) Gli si deve pure qualche complemento alla teoria dei poliedri semiregolari archimedei; ciò risulta da un lavoro [71] egli ha studiato quello limitato da 6 quadrati e 8 esagoni regolari, dimostrando che i suoi spigoli sono eguali al raggio della sfera circoscritta.

bola [53], mentre di Abu Said Gabir Ibrahim Al Sabi, che passa per suo figlio, ci sono rimaste alcune pagine sul metodo di falsa posizione [39].

L'altro è Abu Sahl Wigan ibn Rustem Al Kuhi, nato a Kuh nel Tabaristan e vissuto alla corte di Bagdad nella seconda metà del x sec. Egli è autore di parecchi scritti matematici e astronomici; uno di essi [61], trattando della delineazione delle curve projettate sul terreno da uno stilo, mostra la famigliarità che l'autore aveva colle coniche; un altro, noto in Europa soltanto in base a un parziale commento [56], tratta geometricamente alcune questioni cubiche (fra l'altro la trisezione dell'angolo), mentre un terzo, ben più importante, ha per tema la cubatura del paraboloide ellittico [50] ed anche di quella dei solidi generati dalla rotazione di una parametra attorno ad una retta perpendicolare o parallela all'asse. Se questo e gli altri congeneri lavori compiuti dagli Arabi fossero stati conosciuti e compresi dagli Europei nel momento in cui furono scritti, l'esumazione da parte di questi del sommo siracusano sarebbe avvenuta qualche secolo prima e sarebbe stata certamente affrettata la metamorfosi dei metodi infinitesimali di Eudosso e Archimede nella moderna analisi infinitesimale.

## Abu Kamil

147 - Nella storia dell'algebra presso gli Arabi a Muhammed ibn Musa sembra doversi far seguire l'egiziano Abu Kamil Sega ibn Aslam ibn Muhammed ibn Sega, fiorito intorno all'anno 900. Egli fu assai ammirato dai suoi compagni di fede per uno scritto notoci attraverso una versione latina [45], ove alla risoluzione delle equazioni sono applicati i metodi d'algebra geometrica ben noti a chi conosce gli *Elementi* di Euclide; ivi l'autore fra l'altro mostra di conoscere d'identità

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

particolarmente utile nell'ipotesi che $a\,b$ sia un quadrato perfetto; a Leonardo Pisano egli ha suggeriti parecchi problemi da questo esposti nel *Liber Abbaci*. L'influenza esercitata in Europa da Abu Kamil è confermata da un frammento [43] il quale è tutto consacrato a una categoria di problemi aritmetici che incontrammo tanto nella letteratura cinese, sotto il nome di « problema dei cento uccelli » (v. n. 122), quanto nelle *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino (v. n. 111); essi si risolvono con un procedimento costante, che durante il Medio Evo veniva designato coi nomi di « regula virginum », o « regula potatorum » o anche « regula coeci ». Quei problemi traduconsi oggi in sistemi di equazioni del seguente tipo

$$x + y + z + \ldots = m \quad , \quad a x + b y + c z \ldots = n \quad ,$$

e vengono risoluti sostituendo nella seconda il valore di una delle incognite dedotto dalla prima e poi cercando tutte le soluzioni intere e positive della risultante equazione indeterminata; l'abilità spiegata, applicando questo concetto, da Abu Kamil, è dimostrata dal fatto che per

il sistema

$$x + y + z + u + v = 100 \quad , \quad 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}u + v = 100$$

egli determina le 2676 soluzioni di cui esso è suscettibile.

Un terzo lavoro, del medesimo matematico, si conosce soltanto attraverso una versione ebraica, compiuta verso il 1460, sopra una traduzione spagnuola, dal mantovano Mardocheo Finzi: i non orientalisti possono prenderne oggi cognizione ricorrendo ad una versione italiana [28] oppure ad una tedesca [42]. Si tratta di una collezione di problemi geometrici risoluti algebricamente ed aventi come precipuo scopo l'inscrizione e la circoscrizione di poligoni regolari di 5, 10 o 15 lati; le equazioni risolutrici sono quadratiche o riducibili al secondo grado; quando si presentano sotto forma non razionale, vengono opportunamente razionalizzate. Anche fra questo scritto e le opere del Fibonacci furono notate delle indiscutibili coincidenze.

Finalmente ad Abu Kamil è attribuita una monografia sopra quella procedura che molti scrittori del Medio Evo designano, con parola di origine orientale, col nome di « regula al-chataim »; è la « regula falsorum »; di Abraham ben Esdra (v. n. 115) e di altri scrittori medioevali. Quello scritto è forse l'originale di altro noto in Europa da circa un secolo grazie a una versione latina intitolata *Liber augmenti et diminutionis* [4]. Ammessa tale interdipendenza, scopo del lavoro di Abu Kamil sarebbe stato di insegnare come, mediante due tentativi, si possa risolvere qualunque equazione della forma $a x = b$. A tal fine si faccia successivamente $x = a_1$ e $x = a_2$ e si ponga $a\, a_1 = b - e_1$, e $a_2 = b - e_2$, onde $e_1$ e $e_2$ sono gli errori commessi assumendo per l'incognita i valori $a_1$ e $a_2$. Ora dalle posizioni fatte si trae:

$$a = -\frac{e_1 - e_2}{a_1 - a_2} \quad , \quad b = -\frac{e_1 a_2 - e_2 a_1}{a_1 - a_2}$$

e finalmente

$$x = \frac{e_1 a_2 - e_2 a_1}{e_1 - e_2}$$

conformemente alla regola araba; aggiungiamo che questa si enunciava diversamente secondo i segni che hanno gli errori $e_1$ e $e_2$, e veniva applicata automaticamente servendosi di uno schema grafico. Ciò risulta chiaramente dagli esempi seguenti che ci sono offerti da scrittori posteriori (Al Qalsadi, n. 157; Beda Eddin, n. 158):

I. « Trovare un numero che aumentato dei suoi 2/3 e di 1 dia per somma 10. » La equazione da risolvere è evidentemente $x + 2/3\, x + 1 = 10$; i valori sostituiti siano 9 e 6; gli errori commessi sono $+6$ e $+1$; essi conducono al valore $5 + 2/5$; lo schema corrispondente è dato dalla fig. 24.

II. « Trovare un numero di cui il sestuplo e il settuplo formino 25 ». L'equazione del problema è $6x + 7x = 25$. Facendo successiva-

mente $x = 6$ e $x = 1$ si commettono gli errori $+ 53$ e $- 12$, donde $x = 1 + 12/13$. Si vegga la fig. 25.

III, « Trovare un numero di cui la terza parte e la quarta diano in somma 21 ». Si deve risolvere l'equazione $x/3 + x/4 = 21$; facendo successivamente $x = 12$ e 24 si commettono gli errori — 14 e — 7; da ciò $x = 36$. Lo schema corrispondente è dato dalla fig. 26.

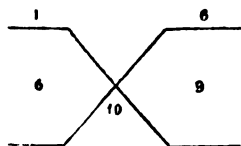
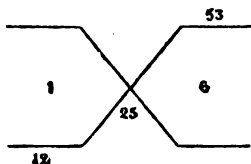
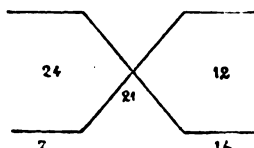



Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26.

Notisi che i numeri posti alla prova sono sempre scelti in modo da evitare, durante il calcolo, le frazioni.

Abu Kamil ha esercitata una notevole influenza sulla scienza europea; misurarla con precisione sarà possibile solo quando la sua opera scientifica sarà nota in tutta la sua interezza, anche a chi non ha la possibilità di leggerne gli scritti nella loro forma originale.

## Albategno e Abu'l Wafa

148 - L'ordine cronologico porta ora al nostro cospetto un astronomo di grande valore e di fama mondiale, Abu'Abdallah Muhammed ibn Gabir ibn Sinan Al Battani, *vulgo* Albategno, nato verso l'858 e morto nel 929. Le sue osservazioni sopra i fenomeni celesti abbracciano il lungo periodo 878-919; una sua grande opera astronomica fu tradotta in latino da Platone Tiburtino e ricevette recentemente una edizione che soddisfa pienamente le esigenze dell'odierna critica [32]. Quella versione contribuì efficacemente alla diffusione in Europa del vocabolo « seno », sulla cui etimologia da tanto tempo si discute, senza raggiungere una conclusione definitiva.

Gli è nel III capitolo di detta opera che quella funzione trovasi ampiamente applicata con evidente utilizzazione di scritti greci e indiani, ma non senza originalità, chè ivi si leggono per la prima volta « il teorema del coseno » per triangoli sferici qualunque e le seguenti relazioni che hanno luogo per un triangolo sferico $A\ B\ C$ rettangolo in $B$:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}, \quad \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} C}, \quad \cos A = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}.$$

Non è però Albategno che determina l'apogeo dell'astronomia araba; gli storici della scienza del cielo ritengono che esso sia contrassegnato dalla comparsa di Muhammed ibn Muhammed ibn Jahja ibn Ismail Al Abbas Abu'l Wafa, designato d'ordinario con l'abbreviazione

Abu'l Wafa [1]. Nato nella provincia di Nisabur, nel mese di giugno 940, da una famiglia di dotti, morì a Bagdad nel 997 o nell'anno seguente. Di lui vengono citati commenti agli *Elementi* di Euclide e allo scritto dello stesso autore *Sulla divisione delle figure*, nonchè altri congeneri lavori riguardo a Diofanto e Muhammed ibn Musa; finalmente si pretende che egli abbia commentato anche un'algebra (?) di Ipparco, lavoro che, se tuttora esistente e reso di pubblica ragione, servirebbe a meglio fissare gli incerti lineamenti del massimo astronomo greco.

Abu'l Wafa viene detto autore di molti scritti geometrici originali, in generale ancora ignoti in Europa. Fa eccezione un *Libro di costruzioni geometriche*, di cui almeno si conosce un rifacimento in persiano dovuto ad un discepolo [56]. Un gruppo di problemi ivi risoluti comprende costruzioni aventi lo scopo di riconoscere se un dato angolo sia o non retto; un secondo insegna operazioni con una sola apertura di compasso; un terzo la determinazione di quadrati equivalenti alla somma di altri; un ultimo riunisce costruzioni di poliedri regolari in base a concetti che si avvicinano piuttosto a quelli di Pappo (v. n. 60) che a quelli usati da Euclide al medesimo scopo: si tratta dunque di sviluppi e complementi relativi alla geometria classica, ancor oggi non privi di interesse. Egual carattere hanno una costruzione approssimata dell'ettagono regolare, una dell'ennagono, fondata sopra uno dei *Lemmi* di Archimede, e finalmente due costruzioni per punti di una parabola.

A meglio caratterizzare l'opera in discorso possono servire le due questioni seguenti:

I. Con una sola apertura di compasso inscrivere un quadrato in un cerchio.

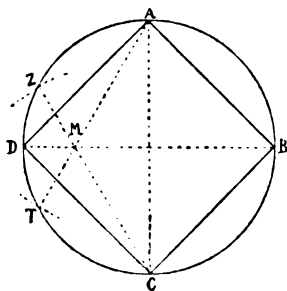
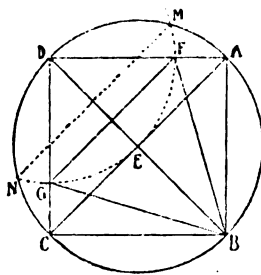



Fig. 27. Fig. 28.

*Soluzione* (Fig. 27): Presi come centri due punti $A, C$ diametralmente opposti nel circolo dato, con la data apertura di compasso si determinino i punti $T, Z$; le rette $AT$ e $CZ$ si taglino in $M$; gli estremi $B, D$ del diametro passante per $M$ del dato cerchio sono gli altri due vertici del cercato quadrato.

II. Inscrivere un triangolo equilatero in un quadrato dato $ABCD$ (Fig. 28).

[1] A scanso di equivoci notiamo che si è serbata memoria di un altro scrittore dello stesso nome; uomo di scarsa levatura, vissuto poco prima del 1570, ha legato il proprio nome ad un mediocre lavoro aritmetico [13].

*Soluzione*: Sia $E$ il centro del dato quadrato, epperò anche del cerchio ad esso circoscritto. Centro $D$ e raggio $D\,E$ si descriva con raggio eguale al raggio del dato cerchio, un arco circolare che incontro in $M$, $N$ il cerchio circoscritto; se le rette $B\,M$ e $B\,N$ incontrano in $F$ e $G$ i lati $D\,A$ e $D\,C$ del dato quadrato, sarà $B\,F\,G$ il triangolo cercato.

Mentre non è peranco risolta la questione se Abu'l Wafa abbia scoperto l'importante fenomeno della « variazione della luna », a lui viene da tutti accordato un posto eminente nella storia della trigonometria, grazie a quanto leggesi nel suo *Almagesto* [25]. Tale giudizio si giustifica osservando che in quest'opera si trovano valori talmente approssimati per i seni degli angoli costituenti una progressione aritmetica che, per esempio, *sen* 30' è dato con un'approssimazione equivalente a dodici cifre decimali esatte. Inoltre vi si leggono le seguenti fondamentali relazioni:

$$\text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,, \quad \frac{\text{tg}\, x}{r} = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\,,$$

$$\frac{\text{cotg}\, x}{r} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\,, \quad \frac{\text{tg}\, x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\, x}{r}$$

$$\frac{\text{tg}\, x}{r} = \frac{r}{\text{cotg}\, x}\,, \quad \sec x = \sqrt{r^2 + tg^2\, x}\,,$$

$$\text{cosec}\, x = \sqrt{r^2 + \text{cotg}^2\, x}\,,$$

nelle quali $r$ rappresenta il raggio del cerchio su cui si ragiona. Da ultimo il grande astronomo osservò che queste formole si semplificano notevolmente supponendo $r = 1$, osservazione di grande importanza, che rimase sterile sino al giorno in cui fu spontaneamente fatta da matematici europei del secolo XVIII.

Devesi da ultimo rilevare che, nella sua esposizione della trigonometria sferica, Abu'l Wafa prese le mosse dal triangolo rettangolo per risolvere i problemi che s'incontrano in astronomia, senza ricorrere al teorema di Menelao; si tratta di un'innovazione rispetto a Tolomeo, ma non è indiscutibile si tratti di un progresso. Che però il nostro astronomo fosse in possesso, si può ben dire, dell'intera trigonometria della sfera è provato dalle dimostrazioni che gli sono attribuite del teorema dei seni, proposizione che molti fanno risalire ad Abn Nasr Mansur ibn Ali ibn Iraq [40], morto poco dopo il 1000 e che fu maestro a quell'Al Biruni che già abbiamo incidentalmente citato, ma di cui presto (numero 150) ci occuperemo di proposito.

## Ibn Haitam e Al Biruni

149 - Un altro arabo, coltivando le applicazioni della matematica alla fisica, divenne un'autorità indiscussa durante l'intero Medio Evo in fatto di ottica; dalla sua grande opera — *Opticae Thesaurus Libris Septem* (Basileae, 1622) — trassero istruzione e ispirazione scienziati di grande nome, quali R. Bacone, Vitellione e Kepler. Parliamo di colui

da cui s'intitola il notissimo « problema di Alhazen », ma che oggi si designa col nome di Ibn Haitam, tratto dal suo nome completo che è Al Hasan ibn Al Hasan ibn Al Haitam Abu Ali. Nato a Basra, circa nel 965, morì al Cairo sul finire del 1039. Rinomato fra i suoi conterranei come erudito, come filosofo e come medico, si recò in Egitto, fidando di giungere alla scoperta di un metodo per regolare le periodiche inondazioni del Nilo; il sovrano del luogo, a cui manifestò oralmente questo superbo proposito, gli fu largo d'incoraggiamenti e di ajuti; se non che Al Haitam, giunto in cospetto dei giganteschi monumenti architettonici che ammiransi nell'Alto Egitto, misurando l'altissimo livello raggiunto colà dalla tecnica sino dalla più remota antichità, riconobbe di avere troppo presunto delle proprie forze e, scoraggiato, riprese la via verso Settentrione. Tuttavia, prima di abbandonare definitivamente la partita, fece qualche esperienza nelle vicinanze della cateratta sita al Sud di Assuan; ma, non avendo ottenuto alcun risultato, perdette il favore reale; anzi, lo scredito in cui cadde fu tale che egli sentì in pericolo persino la propria esistenza e riuscì a sfuggire da certo supplizio fingendosi pazzo; alla morte del sovrano egiziano riacquistò la perduta libertà e potè così finire tranquillamente la propria vita sulle rive del fiume che non era riuscito a soggiogare.

Ibn Haitam lasciò una quantità di scritti di matematica, astronomia e filosofia in generale, il cui numero si valuta a non meno di 130, la maggior parte dei quali è tuttora inedita o fu data alle stampe soltanto in compendio.

La prima eccezione è rappresentata da una memoria sopra gli specchi ustori di forma parabolica [41], utile a coloro che intendono ricostruire la teoria delle coniche presso gli Arabi [1] e procurarsi informazioni sopra i risultati ottenuti su tale argomento da Archimede e Diocle. Dello stesso autore è poi nota una memoria [31] sulla quadratura del circolo, la quale, essendo un semplice rifacimento delle vecchie osservazioni sull'argomento dovute a Ippocrate da Chio (v. n. 27), nulla aggiunge a quanto sappiamo sul famoso problema e vale piuttosto ad oscurare che ad accrescere la rinomanza dell'autore. Due libri dello stesso matematico *Sopra i dati* [3] furono scritti, per confessione dell'autore, sotto l'ispirazione della nota opera euclidea; egli però utilizzò anche i *Porismi* dello stesso autore e i *Luoghi piani* di Apollonio, onde egli si mostra, al pari di tanti altri suoi conterranei, discepolo, se non continuatore, dei grandi geometri della Grecia: apprezzamento che riceve qualche conferma da alcune pagine che egli dedicò ad una questione pratica, che rientra nella categoria della ricerca delle altezze di edifici [38].

Si conoscono ancora [63] parecchie soluzioni da lui indicate del problema « costruire un triangolo di cui siano dati l'area, un lato e la somma degli altri due. »

Fra i lavori a noi noti di Al Haitam quello dotato di maggiore originalità è dedicato alla cubatura del solido generato dalla rotazione di

---

(1) Ancora più utile riuscirebbe un altro scritto sullo stesso argomento e del medesimo autore, che sembra esistere in una Biblioteca di Costantinopoli.

una parabola attorno a una retta parallela o perpendicolare all'asse [46] ([1]); tutto fa credere che neppur lui conoscesse l'opera archimedea *Su i conoidi e gli sferoidi,* mentre gli erano note le indagini congeneri di Tabit e Al Kuhi (v. n. 146). Nelle sue ricerche egli scelse come guida Euclide e riuscì a calcolare le somme $1^n + 2^n + 3^n + \ldots$, non soltanto per i valori 1, 2, 3 dell'esponente, come era stato fatto prima di lui, ma anche per $n = 4$. Questo scritto, vera gemma di recente dissepolta, fa sorgere la speranza che l'avvenire riserbi altre scoperte consimili, e consiglia il massimo riserbo nel pronunciare oggi un giudizio attendibile non solo su Al Haitam, ma anche in generale, intorno al contributo dato alle scienze esatte dai seguaci di Maometto.

150 - Circa contemporaneo di Al Haitam è Muhammed ibn Ahmed Abu'l Rihan Al Biruni, che già citammo con l'abbreviazione Al Biruni che continueremo a usare; egli nacque a Khowarezm (Khiwa) nel 973 e morì a Gazna (Afganistan) nel 1048. Non le sue opere filosofiche e storiche, non i suoi preziosi resoconti di viaggi (quantunque siavi ivi una nuova volta calcolata la somma dei termini di una progressione geometrica di 64 termini, di cui il prima sia 1 e la ragione 2), non le informazioni da lui date sugli strumenti usati ai suoi tempi dagli astronomi e nemmeno un suo breve scritto [55] sopra uno speciale procedimento per rappresentare una sfera su di un piano, sono le opere che fanno accordare a lui un posto in una storia delle matematiche. L'accesso gli è accordato anzituto per una sua compilazione sul calcolo delle corde di un cerchio [44], scopo della quale è di esporre le proposizioni che sono necessarie e sufficienti per la costruzione di tavole delle relative corde.

L'impiego di queste invece dei seni sembra essere un sintomo di un ritorno all'antico, e le numerose citazioni di teoremi e dimostrazioni tratte da opere (perdute) di Apollonio e Archimede provano che Al Biruni attinse a larga mano ai classici greci, senza però escludere autori arabi da lui onestamente citati. Da quanto egli dice risulta che ai suoi tempi esistevano ancora gli *Elementi di geometria* di Menelao, che Proclo sfruttò commentando Euclide. Va ancora notato che egli dimostra in modo originale, *attribuendola ad Archimede,* l'espressione dell'area di un triangolo in funzione dei lati, che incontrammo per la prima volta in Erone, il quale (giova qui ricordarlo) non se ne attribuisce la scoperta; inoltre Al Biruni dimostra (senza vantarsi di averla scoperta) l'analoga formola relativa al quadrilatero con l'*esplicita dichiarazione che essa è applicabile esclusivamente a quadrangoli inscrittibili in un cerchio* (condizione essenziale che sembra sia sfuggita agli Indiani che la usarono). Se ora si tiene conto del fatto che Archimede nell'XI dei suoi *Lemmi* cita un proprio lavoro *Sulle figure quadrilatere,* del quale si è perduta ogni traccia, nasce spontanea la supposizione che ivi appunto si trovasse per la prima volta l'espressione dell'area di un quadrangolo inscrittibile in funzione dei lati e, in particolare, l'analoga relativa al triangolo.

Ritorniamo ad Al Biruni per notare che egli, nello scritto citato,

([1]) Si noti che le risultanti sono in generale, non di secondo, ma di superficie di quarto ordine.

si arresta sopra alcune considerazioni, ispirategli senza dubbio da Brahmagupta o Bhascara sulla figura costituita da due circonferenze ed espone alcuni calcoli relativi al pentagono e al decagono regolari inscritti in un cerchio, desumendoli da uno scritto a noi già noto di Abu Kamil (v. n. 147).

Volendo rendere più perfetto il quadro del sapere trigonometrico del matematico di cui ci occupiamo, si può utilmente ricorrere a un manuale di geografia astronomica, l'*Al Qanun Al Masudi* ([60]; cfr. anche [59]), perchè alcuni dei capitoli che lo formano sono tratti appunto da un lavoro di Al Biruni. Nel primo di detti capitoli sono calcolati i lati dei poligoni regolari inscritti in un cerchio, nell'ipotesi che abbiano 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lati; l'importanza dei risultati ottenuti è resa manifesta dal nome di « madri » attribuito ad essi dall'autore. Per calcolare il lato dell'ettagono regolare egli ricorre a quel teorema che Archimede aveva esposto nel lavoro perduto *Sul cerchio* e che noi riferimmo parlando di questo grande (n. 41); per generalizzare poi le formole « madri », Al Biruni stabilisce parecchie relazioni di natura generale, che equivalgono alle nostre formole di duplicazione e bisezione degli archi, in perfetto accordo con quanto leggesi nell'*Almagesto* di Tolomeo. Maggiore novità presenta il capitolo successivo, il cui scopo è la determinazione del lato dell'ennagono regolare inscritto in un cerchio; è sommamente notevole il fatto che la ricerca viene ricondotta alla risoluzione dell'equazione $x^3 = 1 + 3x$ e che l'autore afferma che ne è radice il numero che, in frazioni sessagesimali, è espresso da $1 . 52^{I}. 45^{II}. 47^{III}. 13^{IV}$. Siccome non è indicata la via che condusse a questo risultato, così è evidente che si trattava dell'applicazione di un metodo in quel tempo a tutti famigliare, ma che noi non conosciamo; del che sommamente ci rammarichiamo perchè in decimali quel valore si scrive 1,8793852468, di cui le prime sette cifre sono quelle a cui conduce il metodo di Ruffini-Horner. Seguono le determinazioni delle corde di altri archi notevoli, che finalmente portano a quelle della corda di 1°. Da rilevarsi nel Cap. V una nuova determinazione del rapporto della circonferenza al diametro, la quale dà per $\pi$ un valore espresso come segue in frazioni sessagesimali $3 . 8^{I} . 30^{II} . 17^{III} . 16^{IV} . 46^{V} . 30^{VI}$, donde si trae per il detto rapporto un valore con tre decimali esatte. Seguono tabelle e altre ricerche le quali pongono in evidenza la costante aspirazione dell'autore a raggiungere una grande esattezza, per potersene servire in ricerche astronomiche. Nei due ultimi Capitoli si trova l'applicazione del teorema di Menelao alla determinazione delle relazioni che intercedono fra gli elementi di un triangolo sferico: Al Biruni, qui meglio che altrove, si rivela per un fedele discepolo di Tolomeo (1).

Commetteremmo un'ingiustizia verso di lui non rilevando che egli si rese benemerito della scienza anche sospingendo altri ad occuparsene;

(1) È opportuno rilevare qui, sia pure incidentalmente, che volendo redigere un catalogo completo della letteratura trigonometrica degli Arabi, non deve dimenticarsi quanto scrisse il celebre astronomo del X secolo Ibn Yunis (cfr. DUHEM, *Le système du monde*, t. II, Paris, 1914, p. 210).

frutto di tali esortazioni è uno scritto [38] ove un suo discepolo, Muhammed ibn Al Leit Abu'l Gud, ha trattate alcune questioni geometriche *superiori,* in quanto non sono risolubili con riga e compasso.

## Ibn Sina e Al Nasawi

151 - Alla medesima epoca appartiene Al Hosein ibn Abdallah ibn Al Husain ibn Ali as-Saich ar Rais ibn Sina, sotto il quale complicatissimo nome il lettore riconoscerà a mala pena il celebre Avicenna che Dante ricorda (*Inferno,* IV, 143) fra coloro che « non peccaro » ma « non ebber battesmo », come uno dei più grandi spiriti vissuti sino al tempo suo. Nato a Safer, nelle vicinanze di Buhara, il 16 agosto 980, sin dall'infanzia apprese e ammirò il metodo di calcolo degli Indiani, in giovane età apprese quanto di matematica sapevasi al suo tempo, viaggiò a lungo in Oriente e morì ad Hamadan (o ad Ispahan) il 18 giugno 1037, carico di tanta gloria che un poeta del tempo non si peritò di affermare che, in tutti i soggetti a cui si dedicò, seppe scoprire qualche cosa. La maggior parte dei suoi scritti entra in una vasta opera enciclopedica intitolata *La liberazione* (cioè « dell'anima dai ceppi dell'ignoranza »); quattro sezioni di essa trattano del quadrivio, cioè Geometria, Astronomia, Aritmetica e Musica. La parte relativa alla scienza dell'estensione è un *Commento* o meglio un *Compendio degli « Elementi »* di Euclide [62], che non può dirsi superiore agli scritti congeneri che gli Orientali dedicarono al sommo alessandrino. Invece la parte aritmetica sembra un rifacimento dell'opera di Nicomaco Geraseno (v. n. 88); questi però non è citato. Vi si trova poi un brano di evidente derivazione indiana, giacchè concerne l'applicazione della prova per 9 alla elevazione al quadrato o al cubo di un numero intero; due redazioni, non perfettamente concordanti nella forma, ne furono date alle stampe, in versione francese dal Montferrier (*Dictionnaire des sciences mathématiques,* t. I, Paris, 1843, p. 141) e dal Woepcke (*Journal Asiatique,* ser. VI, t. I, 1863, p. 502 e 504). Vale la pena di riferirne compendiosamente il contenuto: « Se un numero diviso per 9 dà per resto 1 o 8, il suo quadrato diviso per 9 darà per resto 1; se diviso per 9 dà per resto 2 o 7, il suo quadrato darà per resto 4; se diviso per 9 dà per resto 4 o 5, il suo quadrato darà per resto 7; finalmente se diviso per 9 dà per resto 3, 6 o 9, il suo quadrato darà per resto 9. Se un numero diviso per 9 dà per resto 1, 4 o 7, il suo cubo pure diviso per 9 darà per resto 1; se dà per resto 2, 5 o 8, il suo cubo darà per resto 8; se dà per resto 3, 6 o 9, il suo cubo darà per resto 9 ».

L'epoca in cui visse Ali ibn Ahmed Abu'l Hasan al Nasawi si desume dal fatto che egli scrisse (in persiano) un'*Esposizione del calcolo mediante cifre indiane* nel periodo 997-1029; essa fu tradotta in arabo nel 1030. Più tardi egli la sottopose a una revisione « ab imis fundamentis » e fu talmente contento dello scritto così risultante che lo intitolò *Trattato soddisfacente.* Devesi a lui anche un commento al teorema sulle trasversali di Menelao [57], nel quale si trova una nuova procedura per risolvere il problema della trisezione dell'angolo che reputiamo conveniente di riferire: Supposto (fig. 29) che sia $A B C$ il dato angolo,

si conduca $A D$ perpendicolare a $B C$, poi si prolunghi $B D$ sino in $C$ per modo che sia $D C = B D$. Si conduca poi per $C$ una trasversale $C L M$ tale che risultino fra loro eguali i segmenti $B M$ e $M L$. La retta $B L$ dividerà il dato angolo in due parti, una delle quali è doppia dell'altra.

Benchè quanto abbiamo riferito di puramente geometrico della produzione araba concerna nella massima parte la geometria elementare, non bisogna credere che il popolo di cui ci occupiamo non siasi interessato anche della parte superiore della scienza dell'estensione. Infatti esso volse pure la propria attenzione alla teoria delle sezioni coniche, sia pure indottovi dalle applicazioni che queste ricevono alla gnomonica. Ciò è dimostrato da tre memorie [19] dedicate alla teoria e alla costruzione di uno strumento destinato a tracciare quelle curve con moto continuo. Gli autori di esse appartengono due al fecondissimo secolo x, il terzo al xii; il dotto che curò la pubblicazione dei loro lavori scrisse i loro nomi come segue: Mohammed Ibn el Hosein (v. p. 210); Abou Sohl Pouidjon ibn Queston el Kohui; Ahmed Ibn Mohammed Ibn Abd el-Djelil Sidjzi. Da quanto essi dicono non risulta chiaro se « gli antichi » a cui attribuiscono l'invenzione del cosidetto « compasso perfetto » fossero greci o arabi; quello che a noi importa rilevare è che essi, oltre a una minuta descrizione dell'apparecchio in questione, esposero alcune proprietà delle coniche, curve con cui si mostrarono famigliari.

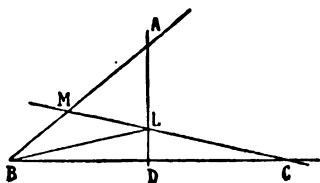



Fig. 29.

## Nel Secolo XI

152 - Presso tutti i popoli accade d'incontrare uomini indipendenti che si rifiutano di seguire la corrente dominante e si adoperano, se non a far trionfare vedute del tutto originali, a riporre in onore metodi e autori ingiustamente dimenticati: così vedemmo, presso i Greci, Domnino di Larissa (n. 90) opporsi all'uso delle sfiaccolate procedure adottate dai rinnovatori del Pitagorismo e del Platonismo, a favore della logica stringente insegnata con l'esempio da Euclide. Orbene un'attitudine di tal genere assunse Muhammed ibn Al Hasan abu Bokr Al Karchi, *vulgo* Alkarchi, morto nel 1029 in fama di eccellente matematico. Il suo valore può venire misurato mediante due opere oggi accessibili anche a chi non conosce l'arabo e che lo caratterizzano quale fautore dei metodi greci e preferenza di quelli indiani, che egli affetta di ignorare e che informano invece un'opera coeva [37] del matematico Al Nasawi, a noi già noto (v. n. precedente).

Dei due citati scritti di Alkarchi il più elementare [20] è un trattato di aritmetica nel quale l'influenza greca è documentata dalla presenza di interi squarci letteralmente tradotti da Euclide, nonchè da procedure aritmetiche e proposizioni geometriche tolte dalle opere di Erone,

Tolomeo e Teone d'Alessandria; però la presenza della prova per 9 mostra che l'autore non si sottrasse totalmente all'influsso degli Indiani.

Ma l'altezza del sapere di Alkarchi deve desumersi, non da questo modesto manuale per l'insegnamento elementare, ma da un libro [9] che gli piacque intitolare *Al-Fachri,* dal nomignolo « Fachr Al Mulk » (gloria dell'impero) dato ad Abu Gabil, che in quel tempo era visir dei visir. È un'opera completa, modellata sopra l'*Aritmetica* di Diofanto, che non oltrepassa le equazioni, determinate o non, di secondo grado, ma ove è tenuto il debito conto dei risultati nel frattempo conseguiti dagli Indiani o che nelle opere indiane trovansi esposti. Fra le aggiunte fatte da Alkarchi ai succitati scritti notiamo la determinazione delle somme delle potenze prime, seconde e terze dei primi $n$ numeri della serie naturale; segnaliamo particolarmente il metodo usato per giungere all'ultima, il quale è di così perfetta eleganza che, se è parto del suo ingegno, dimostra che Alkarchi era degno di prendere un posto onorevole fra i discepoli dei sommi matematici della Grecia. Giova notare che il matematico di cui è parola, dell'equazione $x^2 + 21 = 10\,x$ trova le due radici 3 e 7, « secondo Diofanto », mentre, come vedemmo a suo tempo, nulla autorizza ad attribuire all'aritmetico alessandrino la conoscenza di due radici nelle equazioni quadratiche. Altro fatto impressionante è che alcuni problemi di analisi indeterminata risoluti da Alkarchi sono dichiarati da un commentatore « tolti da Diofanto », mentre non si leggono nell'originale greco in nostro possesso; ciò fa credere che dell'*Aritmetica* di Diofanto gli Arabi possedessero un testo più completo del nostro, che è sperabile un giorno venga scoperto e posto a disposizione degli studiosi. Un'altra osservazione: in presenza di un problema a due incognite, egli chiama una di esse, al solito, « cosa », mentre designa l'altra una volta col nome di « misura », un'altra con quello di « parte ». Un ultimo dato: a lui, sino a prova contraria, appartiene la riduzione a quadratiche (epperò la risoluzione) di tutte le equazioni della forma seguente:

$$a\,x^{2n} + b\,x^n = c \quad , \quad a\,x^{2n} + c = b\,x^n \quad , \quad b\,x^n + c = a\,x^{2n} ,$$

153 - Grande fama come astronomo e matematico, come filosofo e poeta possiede il persiano Omar Ibrahim al Khayjami Gijat ad-Din Abu'l Fath, nato nel decennio 1038-48 e morto nel 1023 o 24. Si deve a lui una riforma del calendario, la quale consiste nell'intercalare, a partire dall'anno 1079, un anno di 366 giorni *al termine* di ciascun quadriennio, il che dà per la durata media dell'anno solare un valore molto più prossimo al vero di quella dianzi raggiunta. Un *Commento ai postulati di Euclide,* che gli è attribuito, è tuttora inedito, mentre vide la luce un suo trattato d'algebra [6] che passa per una delle migliori opere della letteratura matematica araba ed al quale egli dovette il posto di direttore dell'osservatorio astronomico di Bagdad. In esso è proposta una distribuzione in 25 classi di tutte le equazioni dei primi quattro gradi; in particolare vi è iniziato lo studio metodico delle equazioni cubiche e proposta la loro ripartizione in tre classi che oggi si indicherebbero come

segue:

$$x^3 + b^2 x = b^2 c \quad , \quad x^3 + a x^2 = c^3 \quad , \quad x^3 + a x^2 + b^2 x = b^2 c \quad ;$$

l'autore riteneva a torto che siffatte equazioni non si potessero risolvere per mezzo del calcolo e mostrò come tale scopo potevasi invece conseguire geometricamente ricorrendo a sezioni coniche (¹); finalmente egli vantavasi di conoscere il teorema del binomio per esponenti interi e positivi.

Nell'xi secolo visse pure un arabo di Spagna a cui la trigonometria sferica è debitrice di qualche perfezionamento. Il suo nome completo è secondo alcuni Gabir ibn Al Flah abu Muhammed, secondo altri Abn Mohammed Chéber Bersaflahal Ixbili; ma gli Europei, che primi ne conobbero e ne apprezzarono le fatiche, lo chiamarono Geber (dando così origine ad una cervellotica etimologia del vocabolo « algebra »), mentre dagli Orientali veniva designato col nome di Alschibili, per ricordare che egli era nato a Siviglia. Un suo trattato di astronomia fu tradotto in latino da Gherardo da Cremona; ivi si legge la relazione $\cos B = \cos b . \operatorname{sen} A$, che passa fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo in $C$, la quale oggi ancora reca il nome di « teorema di Geber ». L'importanza di questo risultato fa nascere la speranza che altri siano sepolti nelle molte sue opere che esistono tuttora manoscritte.

## Nasir ed Din

154 - Un contributo di ancor maggiore importanza diede alla trigonometria, un secolo e mezzo più tardi, il persiano Muhammed ibn Muhammed ibn al Hasan abu Gafur al Tusi, generalmente conosciuto col nomignolo Nasir ed Din, cioè « difensore della fede ». Nato a Tus (Korasan) nel febbrajo del 1201, passò a Bagdad gran parte della sua vita, raggiungendo alta e meritata fama come filosofo, come astronomo e come matematico, grazie alle sue numerose scritture, alcune di semplice commento, ma altre dotate d'indiscutibile originalità; calcolò reputatissime tavole astronomiche ed eresse un grande osservatorio che corredò di una biblioteca la quale, a quanto dicesi, conteneva non meno di 400 mila volumi; morì a Bagdad nel giugno 1274.

Nasir ed Din conseguì in Europa una certa notorietà per un tentativo da lui fatto di stabilire la teoria delle parallele in modo più soddisfacente di quanto abbia fatto Euclide, che G. Wallis (v. n. 362) pubblicò nelle proprie *Opere;* ma il suo grande valore potè essere esattamente misurato soltanto circa quarant'anni fa, quando venne pubblicato un suo trattato di trigonometria riboccante di vedute originali e di risultati importanti [24]. Il titolo scelto (*Sulle figure delle secanti*) proviene dal fatto che la colonna vertebrale di tutto l'organismo è costituita dal teorema di Menelao; gli è quanto risulta dalla breve analisi seguente.

(¹) Emerge fra quelle citate l'equazione cubica in cui traducesi il problema archimedeo di dividere una sfera in due parti i cui volumi abbiano un dato rapporto; furono appunto alcuni matematici arabi ricordati da Omar che scrissero per primi l'equazione di questo problema.

Senza arrestarci sul I Libro, perchè consta soltanto di osservazioni relative al calcolo per mezzo di rapporti, rileveremo nel II uno studio minuto del quadrilatero completo, figura di cui vengono distinti 48 casi, numero non spregevole, ma che sembra insignificante di fronte a quello (497664) che Nasir ed Din distingue nella figura costituita da un triangolo piano segato da una trasversale. Il Libro seguente contiene, in primo luogo, alcune generalità sul quadrilatero sferico completo, poi le relazioni fondamentali che esistono fra gli elementi di un triangolo sferico, rettangolo o non, enunciate prima (seguendo Tolomeo) servendosi delle *corde* e poi mediante *seni*. Dal IV Libro si apprende il teorema di Menelao, stabilito anzitutto con l'argomentazione tolemaica e poi con un ragionamento originale. Nel V Libro si trova, per usare la terminologia moderna, la risoluzione dei triangoli sferici, nei consueti casi fondamentali; Nasir ed Din si serve perciò del teorema dei seni per triangoli obliquangoli, dimostrandolo prima in non meno di otto maniere differenti, alcune di sua invenzione, altre suggerite da Abu'l Wafa, Anarizio, Al Biruni ed altri. Nel corso di tali importanti svolgimenti il nostro autore stabilisce tutte le relazioni che intercedono fra gli elementi di un triangolo sferico $A\,B\,C$ rettangolo in $C$; riferiamo le più essenziali:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad , \quad \cos A = \cos a \cdot \operatorname{sen} B \quad ,$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{tg} B \;,$$

$$\cos A = \frac{\operatorname{cotg} c}{\operatorname{cotg} b} \quad , \quad \cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B \quad , \quad \frac{\operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} b} = \frac{\cos c}{\operatorname{sen} a} \,.$$

Va ancora notato, a titolo di onore per Nasir ed Din, che il suo trattato mostra che egli era in possesso del concetto di triangolo sferico supplementare o polare di un dato ed era in grado di sfruttarlo abilmente.

Emerge da tutto ciò che egli, per primo forse, ha riguardata e trattata la trigonometria sferica come disciplina autonoma, non come un semplice capitolo dell'astronomia matematica. Di più ha investigata la trigonometria rettilinea parallelamente alla sferica e l'una e l'altra ha svolte col sussidio costante delle funzioni circolari; perciò egli fece compiere a quella disciplina alcuni essenziali progressi, che in Europa furono conseguiti soltanto alcuni secoli più tardi; se anche per circostanze di carattere generale, delle quali egli non è responsabile — Nasir ed Din non esercitò sul progresso delle scienze esatte la benefica influenza a cui da natura sembrava predestinato, il suo valore, come pensatore originale, non è in alcun modo menomato e va proclamato senza esitazione e senza reticenze.

## Altri matematici arabi

155 - La letteratura matematica araba è oggi incompletamente conosciuta. Non soltanto il numero delle opere poste a disposizione dei nonorietalisti è straodinariamente esiguo di fronte ai moltissimi scritti che ancora attendono l'onore di traduzioni e commenti, ma la scelta di quelle che tale onore conseguirono fu fatta, senza criteri costanti, in base ai

gusti dell'investigatore e ancora più spesso alla possibilità di avere a propria disposizione preziosi manoscritti. In conseguenza il quadro che tentammo delineare nelle pagine precedenti offre certamente un grande numero d'imperfezioni e lacune; è però possibile di colmare alcune di queste; appunto a ciò sono dedicate le ultime pagine del presente Capitolo, le quali sono consacrate ad alcuni matematici minori.

Muhammed ibn Muhammed al Bagdadi — di epoca incerta, ma che s'inclina a considerare come appartenente al x secolo — è autore di uno scritto *Sulla divisione delle figure* ([1], v. anche [7]) da tempo tradotto in latino e onorato di stampa; l'importanza di esso risiede nell'essere un rifacimento dell'opera omonima di Euclide (v. n. 40), l'unico lavoro anzi a cui si può ricorrere per notizie attendibili intorno a quello scritto del sommo alessandrino.

Ad Abu Mahmud ibn al Khidr al Khujaudi, morto verso il 1000, si attribuisce il primo tentativo per dimostrare l'impossibilità di risolvere in numeri interi la celebre equazione $x^3 + y^3 = z^3$.

Muhammed ibn al Hosein (v. p. 206), nella stessa gloriosa epoca, diede qualche complemento [29] alla soluzione del problema di Delo fondata sull'uso della concoide di Nicomede. Di lui si conosce poi una memoria relativa ai triangoli rettangoli in numeri, importante teoria che fu coltivata con successo da altri matematici della medesima stirpe. Ne è prova un manoscritto [14], che risale circa all'anno 972, ma che è copia di un lavoro anteriore di ignoto autore; lo scopo del quale è stabilire un gruppo di teoremi appunto sopra i triangoli rettangoli in numeri, che conducono a metodi per costruire quelli fra di essi che sono « primitivi » (cioè i cui lati sono esenti da fattori comuni).

Contrariamente a quanto accade nella generalità degli scritti arabi, mancano le dimostrazioni, ma nulla autorizza ad escludere che la colpa sia da attribuirsi all'autore della copia, al quale forse non interessavano che i risultati.

Dalle prime pagine di quel lavoro si apprende che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo in numeri è sempre di una delle forme $12\,m + 1$, $12\,m + 5$, ma che, viceversa, non ogni numero di una di queste forme misura l'ipotenusa di un triangolo rettangolo; nel corso dell'esposizione s'incontrano poi le note regole di costruzione che vanno sotto i nomi di Pitagora e Platone. L'incognito matematico osserva poi che se $x$, $y$, $z$ sono i lati di un triangolo rettangolo, si avrà $z^2 \pm 2\,x\,y = (x \pm y)^2$, il che svela lo stretto legame che esiste fra la costruzione dei triangoli rettangoli in numeri e la ricerca dei « numeri congrui », cioè dei numeri $k$ soddisfacenti a due equazioni della forma $x^2 \pm k = \square$ (ove col segno $\square$ indichiamo qui e in seguito che il secondo membro dev'essere il quadrato di un numero intero). Tale questione s'incontra già in Diofanto (cfr. Libro V, propr. 9), al quale non è sfuggito che ogni triangolo rettangolo in numeri guida ad una soluzione del problema. In più gli Arabi pervennero alla seguente espressione generale dei numeri congrui:

$$\frac{p^2}{q^2}\, 4\, a\, b\, (a + b)\, (a - b).$$

Vedremo fra breve (n. 170) che della stessa questione s'interessò un eminente matematico europeo, qui va notato che la tabella di triangoli rettangoli in numeri, con cui chiudesi il lavoro in questione, è presentata appunto come ausiliare per la ricerca dei numeri congrui; essa rivela una *forma mentis* del popolo di cui ci occupiamo, della quale esistono numerose conferme, ma di cui andava segnalata la prima manifestazione.

Ora è appunto l'intervento dei triangoli rettangoli in numeri nella ricerca dei numeri congrui che spinse, circa nella stessa epoca, il già citato Muhammed ibn al Hosein a comporre un'esposizione [14] (non priva di pregi, benchè non esente da errori) della teoria dei triangoli rettangoli. Vi si incontrano anzitutto alcune considerazioni utili alla costruzione d'una tabella dei numeri che sono ciascuno la somma di due quadrati; una siffatta tabella può aiutare nella costruzione di triangoli rettangoli dal momento che si ha $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2\,a\,b)^2$. Allo stesso scopo servono altri metodi; alcuni si fondano sulla considerazione di *due* numeri consecutivi, altri di *tre*, altri di un *numero qualunque n*; in formole sono rappresentabili come segue:

$$m + (m+1) \quad , \quad 2\,m\,(m+1) \quad , \quad m^2 + (m+1)^2$$

$$m\,(m+2) \quad , \quad 2\,(m+1) \quad , \quad (m+1)^2 + 1$$

$$(m+n) + (m+1) \quad , \quad 2\,(m+n)\,(m+n+1) \; ,$$

$$(m+n)^2 + (m+n+1)^2.$$

Ora per i triangoli ottenuti con i due primi metodi l'autore trova che il rapporto dell'area al perimetro è dato da $\frac{m}{2}$; per quelli che nascono col terzo metodo detto rapporto vale $\frac{m+n}{2}$, il che non deve stupire perchè il preteso terzo metodo nasce dal primo col semplice mutamento di $m$ in $m + n$. L'autore dimostra poi con considerazioni geometriche che, se $x^2 + y^2 = z^2$, sarà $z^2 \pm 2\,x\,y - (x \pm y)^2$; così è condotto alla considerazione dei numeri congrui e, per agevolarne la determinazione, espone, finendo, una tabella di 34 triangoli rettangoli in numeri.

Chiuderemo queste notizie osservando quanto segue: 1°. I ragionamenti geometrici esposti da al Hosein sono del tipo preferito dai matematici indiani; 2°. Questi si dedicarono con impegno alla ricerca di figure i cui lati fossero misurati da numeri interi; 3°. Nulla prova che gli Arabi abbiano conosciuto Diofanto prima che Abu'l Wafa ne facesse una versione sullo scorcio del x secolo; 4°. Le comunicazioni degli Arabi con gli Indiani risalgono alla seconda metà del secolo VIII. Emerge da tutto ciò come appaja probabile che gli Arabi siano stati condotti ad occuparsi dei triangoli rettangoli in numeri e dei numeri congrui, non sotto l'influenza diretta di Diofanto, ma seguendo gli esempi dati dagli Indiani.

156 - Abu Zakarija al Hasser, matematico del secolo XII, è autore di manuale d'aritmetica, del quale esiste, oltre l'originale, una versione in ebraico; un riassunto di esso [34] sta a provare che ad esso attinse a larga mano Ibn Benna, matematico di cui diremo fra un momento.

Kemal ed Din ibn Yunis (nato a Mosul il 30 marzo 1156) viene ricordato con onore dai suoi conterranei perchè a lui si rivolse l'imperatore Federico II per conoscere la soluzione di alcuni problemi aritmetici e geometrici; gli si attribuisce un procedimento, indubbiamente approssimato, per ottenere il lato di un quadrato equivalente a un segmento circolare, nonchè qualche ricerca sui quadrati magici, ma oggi non si conoscono i suoi scritti sopra tale argomento.

Ahmed ibn Muhammed ibn Otman al Azdi Abu'l Abbas, volgarmente designato col nomignolo di Ibn al Benna (cioè « figlio dell'architetto ») visse all'incirca negli anni 1258-1340 e scrisse un pregevole manuale di aritmetica [16], nel quale noteremo la decomposizione in fattori dei primi numeri della forma $10^n - 1$, nonchè alcune considerazioni giovevoli a chi voglia costruire una tavola di numeri primi e alcune migliorie al metodo della falsa posizione doppia. Finalmente vi si trovano le « curiosità aritmetiche » espresse dalle seguenti identità:

$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Gemsid ibn Mesud ibn Mehud Gijat ed Din al Kasi (morto nel 1436) con gli scritti resi sinora di pubblica ragione [10] da un lato manifesta la persistenza fra gli Arabi del diffusissimo pregiudizio che le equazioni cubiche letterali fossero risolubili soltanto ricorrendo a costruzioni geometriche; ma è per lui titolo d'onore l'avere fatto conoscere (se non inventato) un procedimento per approssimare le radici di un'equazione della forma $P x = Q + x^3$, il quale non sarebbe indegno di figurare nei moderni manuali di algebra.

Musa ibn Muhmud, volgarmente chiamato Qadizadeh al Rumi (cioè « figlio del giudice dell'Asia minore ») è un astronomo vissuto circa fra il 1390 e il 1450; egli merita un ricordo da parte nostra, non per lavori originali, ma per una *Biografia di Euclide* « su fonti greche », che tuttora esiste, e che sarebbe opportuno, ed è vivamente desiderato, venga tratta dall'inedito per rendere meno incerti i lineamenti del famoso autore degli *Elementi*.

157 - Ali ibn Muhammed ibn Muhammed ibn Ali al Qeresi al Basti al Qalasadi (cioè « il pio ») visse negli anni 1423-1486 (o 1495) e passa per l'ultimo matematico di qualche valore che abbia prodotto la razza araba.

Si conosce di lui un trattato di aritmetica [14] scritto, come dice l'autore, in uno stile « egualmente lontano dalla deficienza e dall'oscurità », estratto da un'opera di maggior lena dal titolo prettamente orientale *Sollevamento della veste della scienza del calcolo*. Consta di una Introduzione, di quattro Parti e di una Conclusione. La I Parte tratta delle operazioni sui numeri interi (Cap. I-IV); nel V Cap. viene insegnato

quanto concerne la divisibilità per 3, 6 o 9; dal seguente apprendesi a decomporre una frazione ordinaria $M/N$ in una somma di un intero (che può mancare) e di frazioni della forma

$$n + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\alpha\beta} + \frac{c}{\alpha\beta\gamma} + \ldots$$

Nel VII s'insegna il modo di decomporre un intero in parti proporzionali a numeri dati e nel seguente la « prova per 7 ». La II Parte svolge in modo analogo la teoria dei numeri frazionari e le regole per operare su di essi; con criteri analoghi nella III Parte si espone la teoria degli irrazionali quadratici. Ivi, dopo di avere trattato dell'estrazione delle radici quadrate dei numeri interi che siano quadrati, l'autore si occupa dell'approssimazione delle radici quadrate dei numeri interi che non sono in tale condizione; si volge poi a trattare le questioni analoghe per le frazioni, per passare poi alle operazioni con radicali; qui, benchè l'autore non lo dichiari, egli deve essersi in qualche misura inspirato al X Libro degli *Elementi* di Euclide, chè vi si trovano applicate formole di trasformazione del seguente tipo:

$$\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 - n}{4}}} + \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 - n}{4}}},$$

utili quando $m^2 - n$ è un quadrato.

La IV Parte, sotto il titolo « Della determinazione dell'incognita », espone gli elementi dell'algebra. Si apre con un capitolo relativo alle proporzioni, a cui ne segue un altro sulla risoluzione di un'equazione lineare mediante doppia falsa posizione (nel caso che l'equazione data sia $mx = a$, posto $m\zeta = a + \alpha$, $m\zeta' = a + \alpha'$, si conclude

$$x = \frac{\xi\alpha - \xi'\alpha}{\alpha' - \alpha}\Big).$$

Nel capitolo successivo l'autore entra nel vivo dell'algebra (*restaurazione* e *opposizione*), limitando le proprie considerazioni alle equazioni di 1° e 2° grado (notisi che di queste l'autore non considera che una radice). Nell'Epilogo troviamo applicate delle formole interessanti; somma dei primi $n$ numeri naturali, dei loro quadrati e dei loro cubi, e le analoghe relative all'ipotesi in cui si considerano soltanto i numeri dispari o i numeri pari.

L'opera mantiene realmente quanto l'autore si era impegnato di dare ai proprii lettori; ne abbiamo esposto un riassunto affinchè chi ci segue possa formarsi un concetto dell'altezza a cui giunse la scienza del calcolo di cui ci occupiamo.

158 - Ci si presenta ancora Muhammed ibn Al-Hosein Beha Eddin al Amili; è un persiano vissuto nel periodo 1547-1622, a cui si attribuisce la prima dimostrazione conclusiva dell'impossibilità in numeri interi dell'equazione $x^3 + y^3 = z^3$; egli è poi autore di un manuale d'aritmetica

che una versione tedesca [5] pose a disposizione dei non-orientalisti. E da ultimo Ahmed ibn Omar al Karabisi, di epoca incerta [70] di cui si ricordano un commento a Euclide e una memoria relativa al foro o anello, di cui egli dà un'espressione di forma nuova, ma che in sostanza coincide con quella scoperta da Dionisidoro.

Potremmo aggiungere un certo Abendeber, arabo di Spagna, autore di un mediocre trattato di algebra [52]; ma l'ignoranza completa dell'epoca in cui è vissuto rende impossibile assegnare il posto che gli spetta nella storia del pensiero matematico fra i credenti nel Corano. Probabilmente egli appartiene all'epoca in cui l'Europa, essendosi finalmente scossa dal lungo letargo medioevale, da alunna di popoli orientali, stava per divenire maestra riverita ed ascoltata: l'epoca in cui essa attendeva di essere istruita dai benemeriti traduttori che rispondono ai nomi di Gherardo da Cremona, Platone Tiburtino, Roberto di Chester era ormai e per sempre tramontata.

Ora se, prima di prendere congedo dai matematici arabi medioevali, noi gettiamo uno sguardo all'opera da essi compiuta, dovremo riconoscerne le alte e indiscutibili benemerenze. Non soltanto essi seppero apprezzare e assimilare le scoperte dei Greci e degli Indiani, ma trovarono in sè stessi la forza per far compiere alla trigonometria, alla teoria dei numeri e all'antica geometria infinitesimale progressi cospicui, che è altamente deplorevole siano stati conosciuti in Europa parzialmente e soltanto dopo che avevano ormai perduto ogni profumo di novità e anche ogni forza fecondatrice. Dimodochè, se anche la scienza araba non può, come quelle dei Greci, equipararsi ad un sole perennemente fecondatore, richiama invece alla nostra mente l'immagine del tranquillo satellite della terra, dal momento che essa, raccogliendo, riflettendo e spargendo la luce ricevuta, fu per l'umanità pensante guida veramente provvidenziale durante la caligine medioevale e, come vedremo, le additò la via che condusse alla scoperta di nuovi veri.

## BIBLIOGRAFIA

[1] *De superficierum divisionibus Liber Machometo Bagdedino adscriptus nunc prim u n* JOANNIS DEE *et* FEDERICI COMMANDINI URBINATE *opera in lucem aditus* (Pisauri, 1570).

[2] F. ROSEN, *The algebra of Mohammed ben Musa* (London, 1831; alcune modificazioni a questa versione trovansi suggerite nella importante memoria di F. RUSKA, *Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst*, Sitzungsber. der Akad. zu Heidelberg, 1917).

[3] L. A. SÉDILLOT, *Traité des connues géométriques d'Ibn Al-Haitham* (Journ. asiatique, t. XIII, 1834; cfr. dello stesso autore *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, Paris, 1845, t. I, p. 379-400).

[4] G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. I, (Paris, 1843). Note XII: *Liber Maumeti filii Moysii alchoarismi de algebra et almuchabala*. Note XIV: *Liber augmenti et diminutionis*.

[5] G. H. L. NESSELMANN, *Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutsch* (Berlin, 1843).

[6] F. WOEPCKE, *L'algèbre de Omar Alkayyami publiée, traduite et accompagnée de manuscrits inédits* (Paris, 1851).

[7] F. WOEPCKE, *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide* (Journ. asiatique, 4ª serie, t. XVII, 1851).
[8] F. WOEPCKE, *Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs* (Id., t. XX, 1852).
[9] F. WOEPCKE, *Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par Abou Bekr Mohamed Ben Alhaçon Alkarkhi* (Paris, 1853).
[10] F. WOEPCKE, *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux d'après des manuscrits inédits arabes et persans. I. Article: Notice sur les notations algébriques employées par les Arabes* (Journ. Asiatique, 5ª serie, t. IV, 1854).
[11] F. WOEPCKE, *Recherches sur l'histoire. etc. II Article: Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques d'Aboul Wafa* (Id., 5ª serie, t. V, 1855).
[12] F. WOEPCKE, *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'aprés les indications tirées d'un manuscrit arabe* (Mém. prés. par divers savant, t. XIV, Paris, 1856).
[13] B. BONCOMPAGNI, *Trattati d'aritmetica*. Fasc. I: *Algoritmi de numero Indorum* (Roma, 1857).
[14] F. WOEPCKE, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise*. I. *Traduction d'un chapitre des Prolégoménes d'Ibn Khaldum relatif aux sciences mathématiques* (Atti Accad. Nuovi Lincei, t. X, 1856-57). II. *Traduction du traité d'arithmétique d'Aboul Hacan Ali Ben Mohammed Alkalçadi* (Id., t. XII, 1858-59). III. *Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le meme sujet de Abou Dja'far Mohammed ben Aloçain* (Id., t. XIV, 1860-61).
[15] A. MARRE, *Le Mossahat de Mohammed ben Moussa al Kharezmi. Extrait de son algèbre* (Annali di matematica, t. VII, 1865).
[16] A. MARRE, *Le Talkhis d'Ibn Albanna* (Atti Accad. Nuovi Lincei, t. XVII, 1864-65).
[17] A. MARRE, *Manière de compter des anciens avec les doigh de la main, d'après le petit poème arabe de Choms-Eddin el Massouli et le Tratado de matématicas de Juan Perez de Moya imprimé à Alcala de Henares en* 1573 (Bull. di bibl. e storia, t. I, 1868).
[18] A. MARRE, *Extrait du Kitab al Mobarek d'Abu'l Wafa al Djencini, transcrit d'après le ms.* 1912 *du supplement arabe de la Bibliothèque nationale de Paris et traduit pour la première fois en français* (Id., t. VII, 1874).
[19] F. WOEPCKE, *Trois traités arabes sur le compas parfait* (Notices et extraits des manuscrits etc., t. XXII, 1874).
[20] A. HOCHHEIM, *Kafi fil Hisab des Abu Bekr Mohammed ben Alhusein Alkarchi* (Halle, 1879-80).
[21] H. ZOTENBERG, *Traduction arabe du Traité des corps flottants d'Archimède* (Journal asiatique, 7ª serie, t. XIII, 1879).
[22] M. CURTZE, *Liber trium fratrum de geometria* (Nova Acta k. Leopold. Akad., t. XLIX, 1885).
[23] L. NIX, *Das fünfte Buch der Conica des Apollonius in der arabischen Uebersetzung des Thabit ibn Corrah* (Leipzig, 1889).
[24] A. KARATHÉODORY, *Traité du quadrilatère attribué à Nassireddin el-Toussy* (Constantinople, 1892).
[25] CARRA DE VAUX, *L'Almageste d'Abu'l Wefa al-Buzdjani* (Journal asiatique 8ª serie, t. XIX, 1892).
[26] H. SUTER, *Das Mathematiker-Verzeichniss in Fihrist des Ibn Jakub an-Nadim* (Abhandl. zur Gesch. der Mathem., t. VI, 1892).
[27] R. O. BESTORN e J. L. HEIBERG, *Codex Leidensis* 399, *I Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum interpretatione Al-Narizii* (Hauniae, 1893-1910-1932).
[28] G. SACERDOTE, *Il trattato del pentagono e del decagono per la prima volta pubblicato in Italiano* (Steinschneider's Festschrift, Leipzig, 1896).
[29] CARRA DE WAUX, *Une solution du problème de deux moyennes proportionnelles entre deux droites* (Bibl. mathem., 1898).

[30] M. CURTZE, *Anaritii in decem Libros priores Elementorum Euclidis Commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi* 569 *servata* (Lipsiae, 1899).

[31] H. SUTER, *Die Kreisquadratur des Ibn al-Haitam. Zum ersten Mal nach den Manuskripten in Berlin und des Vatikans herausgegeben und übersetzt* (Zeitsch. f. Math. u. Phys., t. XLIV, 1899, hist-lit. Abtheil.).

[32] C. A. NALLINO, *Al-Battani sive Albatenii Opus astronomicum. Ad fedem Codicis Escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationinibus instructum* (Mediolani: t. I, 1903; t. II, 1907; t. III, 1899).

[33] H. SUTER, *Ueber die Geometrie der Söhne des Musa ben Schakri* (Bibl. mathem., 3ª serie, t. III, 1902).

[34] H. SUTER, *Das Rechenbuch des Abu Zakarjia al Hassan* (Id., t. II, 1901).

[35] CARRA DE VAUX, *Les Mécaniques ou l'Elévateur de Héron d'Aléxandrie publiées pour la première fois sur la version arabe de Qosta ibn Luqa et traduites en français* (Journ. Asiatique, ser. 9ª, t. I-II, 1904).

[36] H. SUTER, *Ueber den Kommentar des Muhammed ben Abdelaqui zum zehnten Buche des Eukleides* (Bibl. mathem., ser. 3ª, t. VII, 1906-07).

[37] H. SUTER, *Ueber das Rechenbuch des Ali ben Ahmed al-Nasawi* (Id.).

[38] H. SUTER, *Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern*) Id., t. VIII, 1907-08).

[39] H. SUTER, *Die Abhandlung Qosta ben Lucas und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angennomen Zahl* (Id., t. IX, 1908-09).

[40] H. SUTER, *Zur Trigonometrie der Arabern* (Id., t. X, 1909-10).

[41] J. L. HEIBERG und E. WIEDEMANN, *Ibn Haitans Schrift über parabolische Hohlspiegel* (Ivi).

[42] H. SUTER, *Die Abhandlung des Abu Kamil Shoga b. Aslam über das fünfeck und Zehneck* (Ivi).

[43] H. SUTER, *Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el-Misri* (Id., t. XI, 1910-11).

[44] H. SUTER, *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreis von Abu'l Raihan Muhammed el-Biruni* (Ivi).

[45] L. C. KARPINSKI, *The algebra of Abu Kamil Shoja* (Id., t. XII, 1911-12).

[46] H. SUTER, *Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloids von el-Hasan b. el-Haitham* (Ivi).

[47] E. WIEDEMANN, *Die Schrift über den Quarastum* (Ivi).

[48] H. SUTER, *Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Musa al-Khowarizmi in der Bearbeitung des Maslema ibn Ahmed al-Madriti und der latein. Uebersetzung des Adelard of Bath und auf Grund der Vorarbeiten von* A. BJÖRNBO *und* R. BESTHORN (Mém. de l'Académie de Danemark, Sctc de Lettres, ser. 7ª, t. III, 1914).

[49] L. C. KARPINSKI, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* (New York, 1915).

[50] H. SUTER, *Die Abhandlung Thabit b. Kurras und Abu Sahl al-Kuhis über die Ausmessung der Paraboloide* (Erlanger Sitzunsber., t. XLVIII, 1916).

[51] H. SUTER, *Ueber die Ausmmessung der Parabel von Thabit B. Kurra al-Harrani* (Ivi).

[52] J. SANCHEZ PEREZ, *Compendio de algebra de Abenbeder* (Madrid, 1916).

[53] H. SUTER, *Abhandlungen über die Ausmessung der Parabel von Ibrahim b. Sinan b. Thabit. Aus dem arabischen übersetzt und kommentiert* (Zürcher Vierteljahrschr, t. XLIII, 1918).

[54] F. BUCHNER, *Die Schrift über den Quarastun von Thabit b. Qurra* (Erlangener Sitzungsber. 1922, t. LII, 1920).

[55] H. SUTER, *Ueber die Projektion der Sternbilder und der Länder von Al-Biruni* (Abhandl. zur Gesch. der Naturw. und Medizin, IV Heft, 1922).

[56] H. SUTER, *Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l Wefa* (Ivi).

[57] K. KOHL, *Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels* (Erlangener Sitzungsber., t. LIV, 1922).

[58] A. Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore). Mit Bemerkungen* H. Suter (Abhandl. zur Gesch. der Naturw. und der Medizin, Heft, VII, 1924).
[59] C. Schoy, *Beiträge zur arabischen Trigonometrie* (Isis, vol. V, 1923).
[60] C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abu'l Raihan Muh. ibn Ahmed al-Biruni, dargestellt nach al-Quanum al-Masudi. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von* L. Ruska *und* H. Wieleitner (Hannover, 1927).
[61] E. Wiedemann und J. Frank, *Uber die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra* (Kgl. Danske Videnskabernes Selkab. Mathem. fys Meddelelser, 4ª serie, t. IX, 1922).
[62] K. Lokotsch, *Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Avicenna als Mathematiker, besonders die planimetrischen Bücher seiner Euklidübersetzung*. Inaug. Diss. Bonn, 1912.
[63] C. Schoy, *Behandlung einiger geometrischen Fragepunkte durch muslimische Mathematicker* (Iris, t. VIII, 1926).
[64] A. G. Kapp, *Arabische uebersetzer und Kommentatorem Euklids* (Isis, nn. 22, 23, 24).
[65] J. Weinberg, *Die Algebra des Abn Kamil Soga ben Aslam.* (München, 1935).
[66] J. Ruska, *Zur Geschichte der Schachbrettaufgaben* (Zeitschr. f. math. und naturw. Unterrichts, t. 47, 1916).
[67] S. Gaudz, *The algebra of the Inheritance* (Osiris, t. V).
[68] S. Gaudz, *The Misuatha Middot and the Geometry of Muhammed ibn Musa al Khowarizmi* (Berlin, 1935).
[69] H. Suter, *Die Kreis quadratur des Ibn el Hitham* (Zeitschr. f. Math. und Physik, t. 44, 1899).
[70] E. Bessel-Hagen und O. Spiess, *Das Buch über die Ausmessung des Kreisringes des Ahmad ibn Omar al Karabisi* (Quellen und Studien zur Gesch. d. Math., t. I, 1931).
[71] E. Bessel-Hagen und O. Spiess, *Tabit l. Qurra's Abhandlung über eine halbrezul wässingen Vierzehuflächner* (Id., t. II, 1932).
[72] E. Wiedemann, *Ueber die Konstruktion der Ellipse* (Zeitsch. f. math. u. naturw. Unsterricht, t. 50, 1919).

## CAPITOLO XII

# LA RINASCITA IN ITALIA: LEONARDO FIBONACCI

### Biografia

159 - Durante le tenebre medioevali, i popoli d'Europa giacevano tuttora in profondo letargo, solo destandosi per dedicare sterili fatiche a commentare opere di carattere filosofico o per organizzare le spedizioni intese a togliere agli infedeli il Santo Sepolcro, quando dal centro della nostra penisola si sprigionarono abbaglianti scintille che valsero a preparare da lungi la luce che oggi innonda l'intera umanità. E infatti Pisa, come erigendo nel corso dei secoli XI e XII il Duomo, il Battistero e la Torre pendente divenne culla dell'architettura, anzi dell'arte italiana tutta, così, dando i natali a colui che era destinato a ricondurre i pensatori europei alla contemplazione dei numeri e delle figure, assicurò a sè stessa, nel campo scientifico, benemerenze paragonabili a quelle che vanta altra gentile città della Toscana per avere visto nascere il sommo Poeta di nostra gente.

Intorno all'uomo che ha la gloria di avere determinata la rinascita in Europa delle scienze esatte, circa un secolo prima che Dante avesse fissati per sempre i lineamenti del volgare eloquio, scarse e malsicure sono le notizie biografiche. È certo che la famiglia a cui egli appartenne esisteva a Pisa sino dall'XI secolo, ma è controversa la questione se il Bonaccio — donde trae origine il nome di essa — sia o non stato il padre di Leonardo, il matematico delle cui opere imprendiamo lo studio; chè, mentre le frasi « filio Bonacj » o « de filijs Bonacij », che leggonsi in testa ai manoscritti delle sue opere, indussero la generalità degli storici a concludere essere egli stato figlio d'un tal Bonaccio (donde Fibonacci, come comunemente ne suona il cognome). B. Boncompagni, in seguito a profondi studi intorno a documenti medioevali, assodò essere frequente il caso di famiglie che presero nome dal più illustre dei loro membri e ne concluse essere possibile che Leonardo Pisano fosse discendente e non già figlio di quel Bonaccio dal quale si denomina; ipotesi che riceve qualche conferma da altri documenti donde sembra risultare che il padre di Leonardo si chiamava Guglielmo.

Nuovi dati, riguardo a cui non venne sollevato alcun dubbio perchè offerti dal nostro matematico, sono che egli nacque verso il 1170 e che suo padre copriva l'ufficio di scriba della Repubblica in Pisa. In tale qualità, verso il 1192, fu inviato in missione alla dogana di Bugia (città

di Barberia, situata sulla costa africana, nei pressi di Algeri); di là invitò suo figlio a raggiungerlo, affinchè si addentrasse nell'uso dei procedimenti aritmetici che gli Arabi avevano forse appresi dagli Indiani e che diffondevano in tutte le terre in cui imperava la Mezzaluna. Certo però è che il giovane Leonardo, oltrepassando il programma paterno, spinse i propri studi sino alla parte più elevata della scienza del calcolo, subendo il fascino che emanava dalle opere dei matematici che durante i secoli IX-XI resero famosa nel mondo degli studiosi la stirpe araba, uomini che (non è fuor di luogo ricordarlo) rispondono ai nomi di Muhammed ibn Musa, Tabit ibn Qorra, Abu Kamil, Albategno. Ibn Haitham Al-Biruni, Al-Nasawi, Al-Karchi, Omar al Khajami. Probabilmente per usufruire degli insegnamenti dei successori e discepoli di questi sommi, Leonardo abbandonò Bugia, certamente più per desiderio di sapere che per brama di ricchezze, e percorse l'intero bacino mediterraneo, spingendosi sino a Costantinopoli, alternando l'esercizio della mercatura con gli studi matematici. E che dappertutto egli abbia fatto rifulgere il proprio genio risulta dalle questioni che gli furono proposte e le cui soluzioni egli registrò nelle proprie opere.

Sullo scorcio del XII secolo si restituì in patria e al principio del successivo (1202) licenziò la fondamentale sua opera, il *Liber Abbaci,* a cui arrise tale successo che ben presto si manifestò il desiderio di una nuova stesura (che infatti fu ultimata nel 1228) per eccitamento dell'amico

> Michele Scotto... che veramente
> Delle magiche frode seppe il gioco
> (*Inf.* XX, 116-7).

Non è fuor di luogo notare subito che tale opera, per la sostanza e la forma, per il rigore e la chiarezza dello stile non direbbesi certamente scritta da un negoziante ad uso dei suoi colleghi, ma sembra piuttosto rispecchiare un corso di lezioni, onde porgerebbe un valido argomento intrinseco a sostegno della tesi che Leonardo abbia occupato una cattedra nella sua patria (1). Nel 1223, aderendo alle esortazioni di altro amico, diede in luce una seconda opera con carattere didattico — la *Practica geometriae* — mentre recano la data 1225 gli altri due scritti superstiti di Leonardo, di cui dovremo occuparci (1).

Benchè il successo incontrastato che ebbero tali lavori e il favore accordato a Leonardo dall'imperatore Federico II — in presenza del quale egli seppe risolvere alcune importanti questioni, che troveremo registrate nelle sue opere — documentino in modo indiscutibile la stima che gli accordavano i suoi concittadini, pure la generalità degli storici

(1) A conforto di questa congettura milita il fatto che in Germania e in Olanda il *Rechenmeister* era un pubblico ufficiale simile a nostri ragionieri, che godeva del monopolio dell'istruzione commerciale: cfr. L. C. Karpinski, *The History of Arithmetic* (Chicago, 1925, p. 271).

(2) È necessario osservare che riguardo alle date relative al periodo leonardiano fra gli storici non ha sempre luogo un accordo perfetto; le discrepanze traggono origine dal fatto che, sino al 1° gennaio 1750, l'anno cominciava a Pisa ai 25 di marzo e ritardava di un anno sul computo attuale; ora del conseguente ritardo di un anno, due mesi e venticinque giorni non sempre venne tenuto il debito conto.

della matematica, attribuendo un significato spregiativo all'epiteto « bigollo » (riguardato come sinonimo di « bighellone ») di cui egli fu decorato in vita, lo dipinsero come un genio incompreso dai contemporanei, i quali lo avrebbero dileggiato per le ore da lui spese in occupazioni puramente scientifiche. Ma un decreto emanato dal Comune di Pisa verso il 1240, ed inciso in un marmo tuttora esistente, mostra invece in quanto pregio Leonardo fosse tenuto in patria ed escude che quel vocabolo avesse un significato insultante per la persona a cui veniva attribuito; chè, come ammettere che il nostro matematico fosse trattato da fannullone dal momento che la suprema magistratura pisana, per non perderne i servigi, assegnava un compenso pecuniario all'opera di contabile governativo sino a quel giorno da lui prestata gratuitamente? È questa l'ultima informazione degna di fede che ci giunse intorno al Fibonacci, tutte le altre asserzioni consistendo in semplici induzioni di storici che ricorsero alla loro fantasia per non lasciare nei propri racconti antiestetiche lacune.

Le molte copie manoscritte delle opere del Fibonacci mostrano quanto esse siano state apprezzate e studiate dai contemporanei e dai posteri immediati, i quali non sempre dichiararono le fonti a cui attingevano. Più tardi vennero neglette, tanto che N. Tartaglia nel secolo xvi e P. Cossali nel xviii ne conobbero soltanto quanto ne riferì uno scrittore del secolo xv, Luca Pacioli; ciò spiega come l'Heilbronner, nella sua *Historia Mathescos Universae* (1742) sia caduto nell'equivoco di scambiare Leonardo con Giovanni Pisano, autore di una *Perspectiva communis*. È merito di parecchi eruditi italiani del secolo xviii l'avere richiamato l'attenzione degli studiosi sopra questo importante personaggio, di G. Libri di avere pubblicati alcuni frammenti delle sue opere e finalmente di B. Boncompagni di avere curata, con la sua nota diligenza, un'edizione veramente degna di tutti i suoi *Scritti*, grazie alla quale il Grande di cui ci occupiamo ottenne nella storia della matematica il posto a cui ha diritto.

## Il " Liber Abaci „

160 - Il titolo dato da Leonardo Pisano al suo « opus magnum » sembra dimostrare che sino dal secolo xii il vocabolario « abbaco » aveva perduto il primitivo suo significato di strumento ausiliare nei calcoli numerici, per assumere quello di « aritmetica » e spesso quello più particolare di aritmetica basata sull'uso di cifre indo-arabiche. Detta opera si apre con un interessante esordio di natura auto-biografica, nel quale giova rilevare la dichiarazione che Leonardo fu spinto a scrivere quel volume dal desiderio di far conoscere la natura e l'uso di queste cifre; non già che esse fossero allora del tutto sconosciute in Europa, ma non era generale la convinzione che da esse tragga origine una tecnica superiore a quella fondata sul sistema numerale dei Romani. Quanto egli abbia appreso da scrittori che conobbe nel corso dei suoi viaggi, quanto abbia aggiunto del proprio, non si apprende da lui; ma molta luce al riguardo venne proiettata dalle recenti esplorazioni compiute nella letteratura orientale. Ad esempio è ormai accertato che Mohammed

ibn Musa, Abu Kamil, Alkarchi, Al Biruni non sono rimasti a lui sconosciuti, senza escludere che egli siasi giovato di qualche lavoro più antico a noi ignoto, a cui forse ricorsero anche gli scrittori testè nominati: onde si può dire che la determinazione delle fonti del *Liber Abaci* sia un problema storico che attende una soluzione completa.

Più volte fu scritto che il Fibonacci è il primo algebrista europeo. Se a tale conclusione si giunse osservando che egli si serve di lettere per designare numeri generali, si può obbiettare che questa non è che una applicazione di un artificio famigliare ai pensatori greci, fra cui emerge Aristotele. Se invece si considera come caratteristica dell'algebra l'uso di una simbolica regolare e costante basata sull'uso di segni speciali per designare le quantità considerate e le operazioni da eseguirsi su di esse, è dovere nostro dichiarare che essa cercasi indarno nel *Liber Abaci*. Che se finalmente a quell'affermazione portò la considerazione che Leonardo ha risolti con svariati artifici questioni che oggi si sogliono trattare applicando i metodi di risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado, si può rispondere che in ciò egli fu precorso da Diofanto, il quale a sua volta è il più eminente rappresentante di una successione di studiosi, di cui i primi a noi noti sono coloro che somministrarono i materiali di cui è composto il Papiro Rhind. Per tali ragioni, ricordando una distinzione da noi esposta nel n. 91, possiamo dire che, se si vuole parlare di algebra a proposito del *Liber Abaci*, è forza aggiungere a questo nome l'epiteto « retorica ».

161 - Dei quindici estesi Capitoli di cui consta l'opera in questione, il I tratta delle nove cifre dette dal Fibonacci « indiane »; in realtà queste sono dieci, perchè va aggiunto lo zero « quod arabice zephirum apellatur »; per mostrare *ad oculum* l'utilità del nuovo sistema, egli pone sotto gli occhi del lettore la seguente tabella comparativa di numeri scritti nei due sistemi romano e indiano:

| | | |
|---|---|---|
| MI<br>1001 | MMMXX<br>3020 | MCXI<br>1111 |
| MMXXIII<br>2023 | MMMMMDC<br>5600 | MCCXXXIIII<br>1234 |
| MMMXXII<br>3022 | MMM<br>3000 | MMMMCCCXXI<br>4321 |

Per agevolare l'esecuzione effettiva delle più semplici operazioni aritmetiche Leonardo, oltre porgere nozioni sufficienti sul calcolo digitale, pone a disposizione dei propri lettori alcune Tavole di addizione e di moltiplicazione e mostra come esse servano a eseguire le quattro operazioni su numeri anche di considerevole grandezza (lo prova l'esempio del prodotto di due numeri di otto cifre ciascuno); devesi osservare che dette operazioni vengono trattate nell'ordine seguente: moltiplicazione, addizione, sottrazione, divisione e che i risultati vengono verificati mediante le prove per 9, 7 o 11. Al fondamentale problema di decom-

porre un numero nei suoi fattori primi Leonardo presta la debita attenzione, facendo conoscere i criteri di divisibilità per 2, 3,..., 13 e raccogliendo in apposita tabella i risultati della divisione per 2, 3,..., 13 di alcuni interi non superiori a 200: da notarsi alcuni calcoli con monete allora in uso (lire, soldi, denari).

Tutto ciò si apprende dai Capitoli II-V del *Liber Abaci*. I due successivi trattano di frazioni, e vi s'incontrano, oltre il concetto e l'applicazione di « minimo multiplo comune » di più numeri dati, altre Tavole di conti fatti: merita un cenno particolare la « Tabula disgregations » che, insegnando la scomposizione in fondamentali di buon numero di frazioni ordinarie, mostra la persistenza della logistica egiziana; citiamo ad esempio le seguenti identità:

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{60} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

In qual modo e in quale misura si applichino le dottrine esposte alle transazioni commerciali si apprende dai Capitoli VIII-IX, il cui studio va raccomandato anche ai cultori della metrologia: il matematico vi trova poi, sotto lo strano nome di « figura cata » o « chata » un'applicazione della regola del tre composta, in relazione al teorema di Menelao sopra un triangolo tagliato da una trasversale (è la stessa procedura che in altre opere medioevali viene designata col nome di « regula sex quantitatum »). Ai problemi aventi per intento la ripartizione fra due o più soci del guadagno ottenuto lucrando su un capitale, alla cui costituzione essi contribuirono in misura differente, è dedicato il Cap. X, l'essenza del quale ritrovasi negli odierni trattati d'aritmetica sotto il nome di « problemi di società ». Pure all'aritmetica commerciale si riferisce il Cap. XI, nel quale il nostro autore risolve parecchi problemi originati dal cambio delle monete in uso ai suoi tempi, nonchè altri che appartengono a un tipo che già segnalammo in opere cinesi (v. n. 122) e arabe (v. n. 147) e che, a partire da questo momento, si incontrano regolarmente nella letteratura matematica europea. Il primo di essi che si trova nel *Liber Abaci* si enuncia come segue:

« Un tale acquista per 30 denari 30 uccelli fra pernici, colombi e passeri; trovare quanti acquistò di ciascuna specie, sapendo che ogni pernice costò 3 denari, ogni colombo 2 e ogni passero 1/2 ».

Benchè indeterminato, questo problema ammette l'unica soluzione intera positiva 3, 5, 22 a cui giunge il matematico pisano. Di un analogo problema Leonardo indica due delle diciassette soluzioni che esso ammette. Giova aggiungere che problemi dello stesso genere s'incontrano in altro lavoro di Leonardo (parliamo dell'*Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum*) di cui diremo più avanti (n. 170).

162 - Nel Cap. XII dell'opera in esame sono riunite svariate (« erraticae ») questioni dai cui enunciati sprigionasi talora un profumo del lontano Oriente; alcune sono determinate, altre non, e altre ancora

(come nota l'autore) impossibili; oggi si risolverebbero mediante equazioni lineari; Leonardo le scioglie con svariati artifici del genere di quelli che aveva usato Diofanto. Detto Capitolo apresi con alcune generalità sulle progressioni aritmetiche, le quali abilitano a risolvere questioni della seguente specie: « Di due viandanti uno percorre 20 miglia al giorno, l'altro fa un miglio il primo giorno di viaggio, due il secondo, tre il terzo, ecc.; si vuol sapere dopo quanti giorni avranno percorso il medesimo cammino ». Leonardo trova giustamente 39. Un'altra vasta categoria di questioni si riferisce alle proporzioni e viene trattata da Leonardo applicando la regola del tre. Meno comunemente noto è un gruppo di problemi, per caratterizzare i quali può servire il seguente enunciato: « Un albero ha infissa nel terreno la porzione 1/4 + + 1/3 della sua lunghezza; questa porzione è lunga 21 palmi; trovare la lunghezza dell'albero ».

Segue una serie di questioni che, nel fondo, non differiscono dal notissimo « problema dei corrieri »; eccone una come esempio:

« In una torre alta 100 palmi hanno dimora due serpenti; quello che trovasi alla base sale ogni giorno 1/2 palmo e ne discende 1/4, mentre quello che abita in alto discende di 1/5 palmo e sale di 1/6; in quale punto della torre si incontreranno? ». La risposta si ottiene applicando il metodo di falsa posizione.

Analogamente il nostro autore procede per scomporre un numero in parti costituenti una progressione geometrica; è una questione indeterminata di cui egli si limita a trovare una soluzione. Il metodo di falsa posizione gli serve anche per scomporre un dato numero in parti proporzionali a numeri conosciuti, questione che si incontra quando vogliasi determinare il tempo in cui vuoterebbesi una botte munita di parecchi fori, conoscendo i tempi in cui vuoterebbesi lasciandone aperto uno solo per volta. Maggiore difficoltà e interesse presenta il seguente problema:

« Tre uomini, ognuno dei quali è provvisto di denaro, trovano una borsa ben fornita. Disse il primo: se consegnate a me la borsa io avrò tanto denaro quanto il doppio del secondo e del terzo presi insieme. Analoghe dichiarazioni fecero gli altri due, con la sola differenza che, invece del doppio, dissero il triplo e il quadruplo. Trovare quanto possedevano quei tre uomini e quanto conteneva la borsa ». Leonardo trovò la soluzione 7, 17, 23, 73, ma è chiaro che infinite altre se ne hanno moltiplicando questi numeri per un fattore arbitrario. Nel *Liber Abaci* s'incontrano poi molte altre questioni analoghe alla precedente. nelle quali il numero degli attori sono più di tre e le borse trovate sono più d'una.

In un passo della sua opera, Leonardo dà la seguente regola per indovinare un numero da altri pensato, suppostolo minore di 315: lo si divida successivamente per 5, 7, 9 e si prenda nota dei resti ottenuti; questi si moltiplichino ordinatamente per 126, 225, 280; il resto della divisione della somma dei risultati prodotti per 315 è il numero cercato. Non è difficile ravvisare in questo procedimento la regola *tayen* dei Cinesi.

Citiamo anche il seguente problema, pure indeterminato, che rie-

voca il ricordo di uno che, nell'*Antologia greca*, reca il nome di Euclide (v. n. 97): « Se alle monete possedute da $A$ si aggiunge un terzo di quelle possedute da $B$, se a quelle di $B$ si aggiunge un quarto di quelle di $C$, o se finalmente a quelle di $C$ si aggiungono un quinto di quelle di cui è ricco $A$, si ottengono risultati fra loro eguali; quanto possiedono $A$, $B$, $C$? ». Leonardo trova 45, 48, 52. Altre questioni trattate nella stessa opera equivalgono alla ricerca di un multiplo di 7 che diviso successivamente per 2, 3, 4, 5, 6 dia sempre per resto 1, oppure dia per resti rispettivamente i numeri 1, 2, 3, 4, 5: noti qui il lettore un altro punto di contatto con le questioni risolte dai Cinesi con la regola *Ta-yen* (v. n. 121) [1].

163 - Di natura differente è il passo dello stesso Capitolo ove è applicato il metodo di Euclide per trovare dei numeri perfetti; il geometra greco non è citato e Leonardo si lascia andare all'imprudente affermazione « poteris in infinitum perfectos numeros reperire ». In un successivo problema Leonardo applica la serie ricorrente definita dall'essere $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$; è noto che venne poi incontrata in molte occasioni (per es. nel calcolo delle ridotte successive della frazione continua

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

e che il suo termine generale può scriversi sotto la forma seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\};$$

essa a ragione porta oggi il nome di « serie di Fibonacci ».

Operazioni analoghe a quelle necessarie per calcolare i successivi numeri perfetti si esigono per risolvere il problema che d'ordinario collegasi all'invenzione del giuoco degli scacchi, cioè il calcolo della totalità dei grani di frumento che si ottiene ponendo un grano nella prima casella della scacchiera, 2 nella seconda, 4 nella terza e così via: è appena necessario avvertire che Leonardo, anche con numeri così grandi come quello richiesto procede con disinvoltura e sicurezza.

Parecchi problemi inseriti nel seguente Cap. XIII sono applicazioni di quella procedura chiamata dagli Arabi « el chatajm » e che il geometra Pisano chiama a ragione « duarum falsarum positionum regula ». A qual genere di questioni venga applicata risulta dai due enunciati seguenti:

« Un operajo convenne col proprio principale di ricevere 7 lire per ogni giorno in cui avrebbe lavorato e di sborsarne 4 per ogni giorno

[1] Alcuni di questi problemi si ritrovano in un anonimo Codice Vaticano intitolato *Libro de praticha darismetrica* scoperto dal Boncompagni e da lui pubblicato nello scritto *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* (Roma, 1856).

di ozio; alla fine del mese (di 30 giorni) riscosse una lira; quanti giorni lavorò? ».

« Se A si fa dare da B 1/2 di quanto possiede, da C 1/3 e da D 1/4; oppure se B chiede a C 1/4 di quanto possiede, a D 1/5 e a A 1/6; oppure se C riscuote da D 1/6 della sua sostanza, 1/7 da A e 1/8 da B; o finalmente se B incassa 1/8 dell'avere di A, 1/9 di quello di B e 1/10 di quello di C; risultano somme eguali; trovare questo comune valore ». È interessante rilevare che Leonardo trova l'enorme numero 35 839 901.

164 - Nel Cap. XIV del *Liber Abaci* si apprendono le regole per calcolare mediante radicali quadratici e cubici: punti di contatto col X Libro di Euclide sono evidenti, ma non dichiarati dall'autore, sempre parco di citazioni.

Varietà maggiore si nota nelle questioni trattate nell'ultimo Capitolo. Alcune si risolvono applicando la proprietà caratteristica del triangolo rettangolo; riferiamo la seguente, di cui è palese l'identità sostanziale con altra relativa allo spezzamento di un albero che s'incontra nella letteratura indiana: « Sopra una torre è infissa un'asta alta 20 piedi; se questa si rovescia, il suo estremo cade alla distanza di 12 piedi dalla base della torre; trovare l'altezza di questa ». Notisi che i dati sono scelti in modo da ottenere un risultato razionale, certamente fondandosi sulla proprietà di essere rettangolo, posseduto da ogni triangolo avente i suoi lati proporzionali ai numeri 3, 4, 5.

Maggiore difficoltà presenta la ricerca del punto in cui deve collocarsi una fontana sopra la congiungente delle basi di due torri affinchè riesca equidistante dalle cime di queste, note essendone le altezze e la distanza: oggi essa riducesi alla risoluzione di un'equazione di primo grado.

Al teorema di Pitagora si connette la risoluzione in numeri razionali dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$; il Fibonacci l'esegue partendo da una soluzione nota $a, b, c$ e notando che essa ne genera infinite altre mediante le seguenti posizioni: $x = \frac{a\,l}{c}$ , $y = \frac{b\,l}{c}$ , $z = l$, qualunque sia $l$. Di più elevate cognizioni geometriche egli dà prova determinando l'innalzamento che subisce il livello dell'acqua in una data cisterna parallelepipeda, per la caduta di una pietra di dato volume e conformata a cubo, a doppia piramide o sferica.

In margine ad una delle ultime pagine del *Liber Abaci* leggesi la parola « Mahumet », come confessione dell'avere il nostro autore ricorso ai lumi di Muhammed ibn Musa. E infatti, sotto il titolo « de Resolutione quarundam quaestionum secundum modum algebrae et almucabalae, scilicet ad oppositionem et restaurationem » sono ivi trattate le equazioni quadratiche dei sei noti tipi seguenti:

$$a\,x^2 = b\,x \quad , \quad a\,x^2 = c \quad , \quad b\,x = c \; ,$$
$$a\,x^2 + b\,x = c \quad , \quad b\,x + c = a\,x^2 \quad , \quad a\,x^2 + c = b\,x$$

ove $a, b, c$ sono numeri positivi; come esempio si incontra l'equazione

$x^2 + 10x = 30$, già scelta dal citato matematico arabo. Quelle equazioni sono risolute applicando ragionamenti geometrici del genere di quelli usati da Euclide nel II Libro dei suoi *Elementi,* onde spesso le grandezze considerate sono rappresentate mediante segmenti rettilinei; l'incognita viene chiamata « radix » (mentre nel Cap. XII è usato allo stesso scopo la parola « res »), « census » il suo quadrato e la costante $c$ « numerus ». I problemi risoluti hanno generalmente enunciati astratti, ma non mancano fra essi questioni commerciali; fra i primi riferiamo il seguente come esempio: « Spezzare il numero 10 in due parti tali che, se si divide il sestuplo della prima per la seconda e alla terza parte del risultato si aggiunge il sestuplo della prima parte si ottenga 39 »; essa dà luogo all'equazione

$$\frac{1}{3} \frac{6x}{10-x} + 6x = 39$$

che, scritta sotto la forma $6x^2 + 390 = 101x$ — palesasi come appartenente a uno dei tipi considerati sopra: notisi che i dati furono scelti in modo da giungere a radici razionali.

Molte altre cose importanti s'incontrano nel *Liber Abaci,* ma la ristrettezza dello spazio ci vieta di riferirle [esso, fra l'altro, offre la prova che il Fibonacci, ben prima di Bachet de Méziriac, insegnò a risolvere (op. cit. Cap. XII) in numeri interi le equazioni di primo grado con due incognite]; dovremmo anzi scusarci presso i lettori dell'insolita lunghezza assunta dalla presente analisi, ove a nostra scusa non militasse il fatto che si tratta dell'opera che reca il N. 1 nel Catalogo dei lavori costituenti la letteratura algebrica dell'epoca nostra ([1]).

## La “ Practica geometriae „

165 - Mentre nello scrivere il *Liber Abaci* Leonardo trasse certamente ispirazione da matematici orientali, nel comporre la sua *Practica Geometriae* (dedicata all'amico che lo esortò a compiere tale lavoro) attinse a larga mano ai Greci, direttamente o pel tramite di coloro che, prima di lui, eransi abbeverati alle fonti di ogni nostro sapere geometrico ([2]), giacchè tutta l'esposizione è permeata dallo spirito e modellata sullo stile degli *Elementi* di Euclide. Però l'essersi il matematico

([1]) Il Boncompagni per pubblicare il *Liber Abaci* si servì di Codice Magliabechiano e per la *Practica geometriae* di uno Vaticano; questo osserviamo perchè sembra non esistere un accordo perfetto fra i vari manoscritti delle opere del Fibonacci; lo prova il seguente passo della *Practica geometriae* che non si trova nell'edizione del Boncompagni e che è riferito da G. B. Guglielmini nel suo *Elogio di Lionardo Pisano* (Bologna, 1813, p. 174): « Finis embadum, vel embadorum a Savasorda Iudeo in Ebraico composi et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translat., anno Arabum DX, mense saphar, et die XV ejusdem mensis, hora tertia, sole in XX gradu et XV minuto leonis. Luna in XII gradu et XX minuto piscium. Saturno in VIII gradu et LVII minuto tauri. Jove in Arietis XXVI gradu et LII minuto. Marte in Libra XXVII, XV. Venere in Libra XXI, XVIII. Mercurio in Leone XIV, LV ».

([2]) Ci esprimiamo così in conseguenza dei molti punti di contatto esistenti fra l'opera citata e il *Liber Embadorum* (v. n. 115) del Savasorda; anche in quella un'area è designata col vocabolo di origine greca *embadus.*

pisano proposto di insegnare i procedimenti da seguire ogniqualvolta si voglia valutare il contenuto di una superficie o di un volume o dividere una tale figura in parti soggette a determinate condizioni, induce naturalmente a paragonare il suo lavoro ai *Metrica* di Erone o all'opera *Sulla divisione delle figure* di Euclide, scritto questo che gli Arabi conobbero, almeno nelle sue linee generali.

Seguendo l'esempio datogli dai Greci suoi maestri, Leonardo esordisce definendo i termini tecnici da lui usati ed enuncia i principii applicati in seguito; e poichè spesso nei problemi trattati i dati sono espressi in numeri (generalmente complessi), premette un elenco delle misure in uso allora in Pisa ( l'unità lineare era la pertica, divisa in 6 piedi di 18 punti ciascuno). Entra poi nel vivo del suo tema (*Distinctio I*) insegnando come si calcolino le aree dei quadrati e dei rettangoli, non omettendo i particolari di calcolo utili specialmente quando si deve operare con numeri complessi. Il problema inverso (calcolo del lato di un quadrato di area data) esige per essere risolto l'estrazione di una radice quadrata, e a tale operazione è consacrata la *Distinct. II*: notiamo ivi la costruzione della radice quadrata di un numero $n$, ossia della media geometrica fra 1 e $n$, come applicazione delle proprietà delle trasversali nel cerchio, e la dimostrazione del teorema di Pitagora mediante la somiglianza del triangolo considerato con i due nascenti dall'abbassare la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sopra l'ipotenusa, fatto che conferma la supposizione che sia stato questo il ragionamento che guidò alla scoperta di quel teorema. Al calcolo di aree di altra forma è dedicata le seguente *Distinctio*. Leonardo si occupa anzitutto di triangoli determinati dai propri lati; siccome la loro area è data dal semiprodotto di un lato per la corrispondente altezza, così il calcolo non presenta difficoltà se si tratta di triangoli rettangoli, equilateri o isosceli. Nel caso generale il Fibonacci calcola una delle altezze ricorrendo ai segmenti che essa determina sul lato corrispondente. Da ciò, è agevole dedurre la espressione dell'area in funzione dei lati, ma egli non la espone; notevole invece è la presenza del noto triangolo rettangolo di lati 13, 14, 15, la cui area è espressa da un numero razionale. Seguono alcune considerazioni sulle trasversali in un triangolo, dopo le quali il geometra pisano insegna a calcolare il contenuto di alcuni speciali quadrangoli: rombi, romboidi (cioè parallelogrammi obliquangoli), trapezi (isosceli, rettangoli o scaleni), non esclusi quadrangoli non convessi (figure barbate). Le pagine seguenti si riferiscono ai pentagoni e poi al cerchio e sue parti: notevole la limitazione

$$\frac{1440}{458\,\frac{1}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\,\frac{1}{5}},$$

la quale, convenientemente manipolata, porta ad assumere come rapporto della circonferenza al diametro $\pi = 3{,}141818...$ Leonardo non trascura il calcolo delle corde d'un cerchio, riferendosi però a quanto lasciò scritto Tolomeo nell'*Almagesto*, opera che certamente egli aveva imparato a conoscere per merito degli Arabi. Volendo, come aveva già fatto

Erone, adattare le considerazioni teoriche alle esigenze della pratica, il nostro matematico s'imbattè nella questione di calcolare la superficie di un'area non piana (problema che egli enuncia parlando della « dimensio camporum qui in montibus iacent ») e lo risolve con una procedura abbastanza grossolana, su cui non giova arrestarsi.

166 - Esaurite così le questioni riflettenti le aree, Leonardo passa (*Distinct. IV*) a quelle concernenti la ripartizione di un appezzamento di terreno mediante rette, queste e le parti dovendo soddisfare a condizioni assegnate: si tratta una provincia geometrica già abilmente coltivata da Euclide e Erone, e Leonardo aveva probabilmente sott'occhio il rifacimento arabo a noi già noto (v. n. 155) dell'opera del primo *Sulla divisione delle figure*. Dei problemi da lui risolti 14 si riferiscono a triangoli, 8 a parallelogrammi, 13 a trapezi, 6 a quadrilateri di altra specie, 2 al pentagono regolare, 12 al cerchio e al semicerchio, finalmente uno a una figura compresa fra un arco di cerchio e due corde.

Nella *Distinct. V* si legge una teoria dei radicali cubici modellata su quella dei radicali quadratici esposta nella *II,* nonchè un metodo per estrarre la radice cubica di un dato numero; non senza qualche meraviglia vi si ritrovano anche i procedimenti ideati da Archita, Platone e Erone per duplicare il cubo; seguono le norme per combinare i radicali cubici mediante moltiplicazione e divisione, addizione e sottrazione.

Questo intermezzo aritmetico costituisce una preparazione utilissima alla *Distinct. VI,* che tratta del calcolo dei volumi dei solidi. Prima di entrare in materia, Leonardo espone quanto di essenziale conoscevasi ai suoi tempi sui fondamenti della geometria dello spazio, e poi propone una divisione in tre classi dei solidi da calcolare, collocando nella prima i poliedri a facce parallele, nella seconda le piramidi e i loro tronchi, nell'ultima la sfera e i poliedri regolari: per esempio Leonardo insegna a calcolare il volume di un tronco di piramide di cui si conoscono le basi e l'altezza, problema già risolto da Erone.

Carattere più elementare ed esclusivamente pratico ha la *Distinct. VII,* ove s'insegna a determinare distanze o altezze, ricorrendo a triangoli simili e giovandosi di un apposito strumento (detto « quadrante geometrico »). All'opposto possiedono carattere teorico le « sottigliezze geometriche » raccolte nelle ultime pagine della *Practica Geometriae*. Alcune delle questioni trattate si riferiscono al pentagono e al decagono regolari, altre ai rettangoli inscritti in un triangolo rettangolo con la condizione di avere un lato steso sopra un lato del triangolo dato. S'incontra da ultimo il problema di risolvere in numeri razionali l'equazione $x^2 + 5 = y^2$, la quale serve di anello di congiunzione fra l'opera testè analizzata e altri lavori di Leonardo di cui ora ci occuperemo.

## Scritti minori

167 - Non ci dilunghiamo a sottolineare l'importanza e il valore della *Practica Geometriae,* l'una e l'altro risultando da quanto abbiamo testè esposto; e passiamo ad occuparci di altri scritti, minori per mole ma

forse maggiori per originalità, e che, usando un termine oggi in uso, sarebbero da designarsi come memorie scientifiche.

Ci si presenta anzitutto il lavoro intitolato: *Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium.* Dei problemi ivi risolti due furono proposti da Maestro Giovanni Palermitano, filosofo dell'imperatore Federico II. Uno di essi (risoluzione dell'equazione $x^2 + 5 = y^2$) già incontrammo nella chiusa della *Practica geometriae* e vi torneremo fra breve. Altro consiste nella risoluzione dell'equazione

$$x^3 + 2\,x^2 + 10\,x = 20\ ;$$

se la si scrive sotto la forma $(x\,[(x + 1)^2 + 9] = 20$ si vede che non può avere radici negative; Leonardo dimostra lungamente che l'unica sua radice non appartiene alla categoria d'irrazionali studiati nel X Libro degli *Elementi* di Euclide e poi asserisce che, in frazioni sessagesimali, è espressa come segue:

$$1 \cdot 22^{\text{I}} \cdot 7^{\text{II}} \cdot 42^{\text{III}} \cdot 33^{\text{IV}} \cdot 4^{\text{V}} \cdot 40^{\text{VI}}.$$

Il fatto che egli non dà alcuna indicazione sul metodo da lui seguito per raggiungere questo risultato fa credere che si tratti di una procedura ai suoi tempi di dominio generale, probabilmente quella stessa che vedemmo applicata da Al-Biruni, pure tacitamente (cfr. n. 150), per trovare una radice di un'equazione cubica: ciò non toglie che ci si trovi qui di fronte ad un nuovo problema tuttora irresoluto, che offre la storia della matematica.

Le altre questioni trattate nel *Flos* sono di primo grado; alcune sono determinate; altre, traducendosi in sistemi di equazioni lineari omogenee, ammettono infinite soluzioni; le une e le altre sono simili ad alcune che s'incontrano nel *Liber Abaci.* Per meglio caratterizzarle trascegliamo quella intitolata « De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta » e che traducesi oggi nel seguente sistema:

$$t + x = 2\,(y + z)\quad,\quad t + y = 3\,(z + u)\ ,$$
$$t + z = 4\,(u + x)\quad,\quad t + u = 5\,(x + y)\ .$$

Questo ammette infinite soluzioni, ma nessuna costituita da numeri tutti positivi; di fronte a tale difficoltà Leonardo, considerando che le incognite hanno il significato di somme di denaro possedute da cinque persone, per superarla dice « concedatur primum hominem habere debitum ». Incontriamo, così, per la prima volta nella letteratura l'interpretazione dei numeri negativi come debiti, che Luca Pacioli fece più tardi adottare da molti trattatisti italiani e ultramontani e che non è ancora scomparsa dalla letteratura matematica.

168 - Analogo ai surriferiti è un problema che, forse per colpa di qualche imperito amanuense, trovasi al termine dell'*Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum Phylosophum domini Imperatoris,* chè esso

traducesi in un sistema di equazioni della forma seguente:

$$x_1 + \frac{a}{\alpha} x_2 = A \quad , \quad x_2 + \frac{b}{\beta} x_3 = B \quad , \quad x_3 + \frac{c}{\gamma} x_4 = C \, ,$$
$$x_4 + \frac{d}{\delta} x_5 = D \quad , \quad x_5 + \frac{e}{\varepsilon} x_6 = E \, ,$$

le lettere rappresentando numeri interi; il metodo usato dal nostro matematico per risolverlo è applicabile anche nei casi analoghi in cui le incognite siano più di sei.

Nella stessa *Epistola* si trovano problemi del genere di quello dei « cento uccelli » che incontrammo nel *Liber Abaci*; si tratta sempre dell'acquisto di passeri, tortore e colombi nell'ipotesi che ognuno costi rispettivamente 1/3, 1/2 o 2 denari, il numero degli uccelli acquistati differisca o non da quello delle monete sborsate; per esempio, se entrambi sono 30, Leonardo trova la soluzione 9, 10, 11; se invece con 30 denari si acquistano soltanto 29 animali, si hanno due soluzioni; che se con la stessa somma se ne vogliono 15, si ha un problema irresolubile in numeri interi e positivi. Più complicata è la congenere questione, traducentesi nel sistema

$$x + y + z + t = 24 \quad , \quad \frac{1}{5} x + \frac{1}{3} y + 2z + 3t = 24 \, ;$$

Leonardo la scioglie, come la precedente, con ben regolati tentativi, ottenendo le due soluzioni 10, 6, 4, 4 e 5, 12, 2, 5.

Nella medesima *Epistola* si legge un problema di genere del tutto diverso, appartenendo esso alla geometria: si tratta infatti di inscrivere in un triangolo isoscele *A B C* (fig. 30) un pentagono equilatero *A D E F G*, con un lato *E F* steso sulla base del triangolo e due altri *A D*, *A G* sui lati *A B*, *A C*. Applicando la considerazione di triangoli simili e del teorema di Pitagora, Leonardo trova, nell'ipotesi che sia *A B* = 10 e *B C* = 12, la seguente equazione:

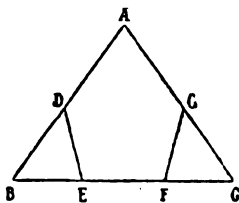
Fig. 30.

$$x^2 + 36 \frac{4}{7} x = 182 \frac{6}{7} \, ,$$

$x$ essendo la lunghezza di *B D*; « et sic » (scrive), « est reducta quaestio ad unam ex regulis algebrae »; quell'equazione non ha radici razionali, possiede invece una sola radice positiva, di cui egli assegna il seguente valore

$$x = 4 \cdot 27^{\mathrm{I}} \cdot 24^{\mathrm{II}} \cdot 40^{\mathrm{III}} \cdot 50^{\mathrm{IV}} \, ,$$

senza però dire se per trovarla si è limitato ad applicare le note regole per estrarre le radici quadrate o se è invece ricorso a qualche altro espediente.

169 - Giovanni da Palermo propose al nostro Leonardo la questione di rendere quadrati le due espressioni $x^2 \pm 5$, ed egli, dopo averne data

la soluzione $x = \frac{41}{12}$, seguitò ad occuparsene; dagli studi sull'argomento ebbe origine l'altra sua memoria dal titolo *Liber Quadratorum*. Ivi egli esordisce ricordando la nota proposizione che esprimesi oggi mediante la formola

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

e ne trae due metodi per risolvere le cosidette « equazioni pitagoriche », cioè per trovare coppie di quadrati aventi per somme dei quadrati; giova riferirli:

I. Sia $a$ un numero dispari, si considerino le somme $1 + 3 + ... + (a^2 - 2)$, $1 + 3 + ... + (a^2 - 2) + a^2$; la prima è un quadrato $b^2$, la seconda un altro quadrato $c^2$ e siccome $c^2 = b^2 + a^2$, il problema è risolto.

II. Sia invece $a$ un numero pari; $\frac{a^2}{2} \pm 1$ saranno evidentemente numeri dispari, epperò le somme

$$1 + 3 + ... + \left(\frac{a^2}{2} - 3\right),$$

$$1 + 3 + ... + \left(\frac{a^2}{2} - 3\right) + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)$$

saranno due quadrati $b^2$, $c^2$ e siccome si ha ancora $c^2 = a^2 + b^2$ la questione è risolta.

Una terza soluzione viene da Leonardo ottenuta osservando che, se $a$ è un numero dispari, posto

$$b^2 = 1 + 3 + ... + (3a^2 - 4) \quad , \quad c^2 = 1 + 3 + ... + (3a^2 + 2)$$

si ha $c^2 - b^2 = (3a)^2$. Più generalmente, se $m, p, q$ sono tre numeri interi, si ponga

$$a = 2mpq \quad , \quad r = 2mp^2 \quad , \quad s = 2mq^2$$

onde $a^2 = rs$, e si considerino le due seguenti serie di numeri dispari consecutivi:

$$r + 1 \; , \; r + 3 \; , \; ... \; , \; r + s - 1 \; ; \; r - 1 \; , \; r - 3 \; , \; ... \; , \; r - s + 1 \; ;$$

siccome la somma di due termini omologhi delle due serie è $2r$ e ciascuna serie comprende $s/2$ termini così la somma di tutti i numeri testè scritti vale $rs$ cioè $a^2$. Perciò, unendovi la somma

$$1 + 3 + ... + (r - s - 1),$$

che è un quadrato perfetto $b^2$, si ottiene un nuovo quadrato $c^2$; dunque $b^2 + a^2 = c^2$, come volevasi ottenere. Si noti che, essendo per le posizioni fatte

$$\frac{r - s}{2} = mp^2 - mq^2 \quad , \quad c = \frac{r + s}{2} = mp^2 + mq^2 \; ,$$

il risultato ottenuto equivale al teorema espresso dalla identità

$$(2\,m\,p\,q)^2 + (m\,p^2 - m\,q^2)^2 = (m\,p^2 + m\,q^2)^2 \ ,$$

la quale porge tutte le soluzioni dell'equazione pitagorica, come era già noto a Euclide.

Non pago di questi contributi dati al problema di spezzare un quadrato nella somma di due altri, il nostro matematico mostrò come da due soluzioni di esso, infinite altre razionali se ne possano ottenere procedendo come segue: siano $a, m, n, p, q, r,$ sei numeri tali che si abbia $m^2 + n^2 = a^2$, $p^2 + q^2 = r^2$; supposto $r = a$, si determinino due numeri $m'$, $n'$ tali che sia $a/r = p/m' = q/n'$; sarà in conseguenza

$$m' = \frac{a\,p}{r} \quad , \quad n' = \frac{a\,q}{r}$$

epperò

$$m'^2 + n'^2 = \frac{a^2\,(p^2 + q^2)}{r^2} = a^2 \ ,$$

donde emerge che $m'$, $n'$ costituiscono una soluzione, diversa dalla $m$, $n$, dell'equazione $x^2 + y^2 = a^2$. Va ancora rilevato che il nostro matematico stabilisce la doppia identità

$$(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2) = (a\,c + b\,d)^2 + (b\,c - a\,d)^2 = (a\,d + b\,c)^2 + (b\,d - ac)^2$$

ritrovata da Bachet de Méziriac, fu aplicata da Viète, Cauchy e da molti altri, ma, in memoria di chi per primo la scoperse, meriterebbe di recare il nome di *Teorema di Fibonacci.* Egli ne deduce una duplice scomposizione in due quadrati di un numero che sia il prodotto di due numeri, ciascuno somma di due quadrati $(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)$, quando $a, b, c, d$ non formino una proporzione; aggiunge che un terzo spezzamento si ha quando $a^2 + b^2$ sia un quadrato, e un quarto se lo è $c^2 + d^2$: da ciò egli trae una nuova soluzione dell'equazione pitagorica, che per brevità non riferiremo. Indichiamo invece un procedimento da lui ideato per dedurre da una soluzione $c, d$ dell'equazione $x^2 + y^2 = k,$ un'altra soluzione. Si scelgano per ciò due quadrati $a^2$, $b^2$, interi o frazionari, aventi per somma un quadrato $f^2$ e tali che si abbia $a/b = c/d$; sia poi

$$i = (a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2) = p^2 + q^2 \quad \text{ossia} \quad i = k\,f^2 \ ;$$

sarà quindi

$$\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{k}} = f$$

e se i numeri $x, y$ si scelgono con le seguenti condizioni

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{k}} ,$$

si avrà $x^2 + y^2 = k,$ come volevasi.

Per risolvere altri problemi relativi ai numeri quadrati il matematico di Pisa calcola la somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ basandosi sull'identità seguente

$$(m + 1)\ (m + 2)\ (2\,m + 3) = m\,(m + 1)\ (2\,m + 1) + 6\,(m + 1)^2\ ;$$

facendo ivi successivamente $m = 1, 2, \ldots, n$ e addizionando i risultati risulta

$$n\,(n + 1)\ (2\,n + 1) = 6\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\,,$$

come era già noto almeno sino dai tempi di Archimede. Fibonacci ne deduce il valore della somma dei quadrati dei primi $n$ numeri pari o dispari.

170 - Se sembra difficile negare che alle ricerche testè compendiate il Pisano sia stato indotto dall'esempio di Muhammed ibn Hosein (v. n. 155), la sua dipendenza da questo si mostra ancor meno dubbia riguardo alla sezione seguente del *Liber Quadratorum*, la quale tratta dei « numeri congrui ». Tale nome viene da lui dato ai numeri delle seguenti forme: $a\,b\,(a + b)\,(a - b)$ supposto $a + b$ pari, $4\,a\,b\,(a + b)\,(a - b)$ quando $a + b$ è dispari, $a$ essendo sempre un numero intero maggiore di $b$; da Leonardo viene subito dimostrato che un numero congruo è sempre divisibile per 24. Questa classe di numeri s'incontra risolvendo la doppia equazione

$$(1) \qquad x^2 \pm m = \square\,,$$

$m$ essendo un numero dato, la quale per $m = 5$ si identifica con altra che già incontrammo (v. n. precedente). Leonardo mostra che affinchè quella doppia equazione sia risolubile in numeri interi, $m$ deve essere un numero congruo; il minimo valore di $m$ è 24, onde per $m = 5$ (¹) non ammette una tale soluzione: egli ne trova invece la soluzione fratta $x = 41/12$. Segue un procedimento per dedurre da un numero congruo infiniti altri e i teoremi: nessun numero congruo è quadrato; moltiplicando un numero congruo per un quadrato si ottiene un nuovo numero congruo. Incidentalmente Leonardo stabilisce (benchè in modo non perfetto) una proposizione di sommo valore, inquantochè equivale al teorema dovuto a Fermat che l'area di un triangolo rettangolo a lati interi non può essere espresso da un numero quadrato. S'incontrano poi alcuni criteri per decidere se un numero dato sia o non congruo.

Oltre a queste pagine di carattere dottrinale, il *Liber Quadratorum* contiene le soluzioni di difficili problemi relativi all'analisi indeterminata di secondo grado; limitiamoci a riferirne gli enunciati in linguaggio algebrico:

$$x^2 \pm x = \square$$

$$x^2 \pm m\,x = \square$$

$$z^2 - y^2 = \frac{b}{a}\,(y^2 - x^2)$$

(¹) A questo punto Leonardo rimanda a un suo *Libro minoris guise* di cui non si è sinora trovata alcuna traccia.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = \square \quad , \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \square \quad , \quad \dots \quad , \\ \qquad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \square \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + x^2 = \square \quad , \quad x + y + z + x^2 + y^2 = \square \quad , \\ \qquad x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = \square \end{array} \right.$$

(quest'ultimo proposto al Fibonacci dal già citato Maestro Teodoro, filosofo dell'imperatore); è probabile che altri si trovassero nell'originale dell'opera in esame, ma si cercano indarno nei codici mutili che ci sono pervenuti.

È necessario rilevare esplicitamente che il *Liber Quadratorum* assicura a Leonardo Pisano un posto distinto fra i pionieri dell'odierna teoria dei numeri? Se quell'opera non fosse rimasta durante più di sei secoli sepolta in immeritato oblio, questa nobile parte della matematica non avrebbe atteso che Fermat le imprimesse quella spinta a cui essa deve la vita.

## Epigoni di Leonardo in Italia

171 - Quale sia stata la fortuna che ebbero e l'influenza che esercitarono in Italia le opere del Fibonacci non è agevole determinare, chè, mentre la sua fama non sembra essersi molto diffusa oltre le mura di Pisa, circa tre secoli scorsero prima che apparisse un personaggio che a ragione sia da riguardare come continuatore dell'eminente computista toscano. Giova però notare che l'uso delle cifre di nuovo conio fu disapprovato e osteggiato da chi allora deteneva il potere, sia perchè, essendo invenzione di popoli infedeli, la sua adozione sembrava equivalere a una offesa alla religione dominante, sia perchè i nuovi caratteri, non essendo di forma ben definita come le cifre romane, si prestavano all'inganno e alla frode. Siffatta opposizione è documentata da un articolo dello *Statuto dell'arte del cambio*, promulgato a Firenze nel 1299 e tuttora esistente nell'Archivio delle Riformazioni di questa città, articolo che vieta ai mercanti di tenere i loro registri « in abbaco » e prescrive invece l'uso delle cifre romane oppure la completa scritturazione dei nomi dei numeri [1].

Tuttavia nell'anzidetto periodo di oscura incubazione si possono indicare alcuni italiani che, benchè di statura di gran lunga inferiore a Leonardo, meritano un cenno in ogni storia delle matematiche, per avere contribuito, alla diffusione, se non al perfezionamento, di alcuni capitoli della scienza del numero secondo le nuove vedute [2]. Tale è forse Guglielmo de Lunis, il quale nel corso del XIII sec. scrisse in latino un libro

---

[1] M. TABARRINI, *Cenno illustrativo di alcune tavolette scritte in cera* (Appendice all'Archivio Storico Italiano, t. III, Firenze, p. 528).

[2] Altri verranno certamente in luce quando saranno compiute le ricerche fra i mss. fiorentini consigliate da G. LIBRI, nell'*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. III, *Nota* XXXI (Paris, 1840).

Intanto, come frutti di tali ricerche ricordiamo gli scritti di C. L. KARPINSKI, *An Italian Algebra of the fifteen Century* (Bibl. mathem. t. XI, 1910-11), *Au early printed Italian arithmetical Treatise* (Arch. t. XI, 1929), *The Italian Arithmetic and Algebra of Master Jacob of Florence* (Ivi).

d'algebra, utilizzando largamente materiali forniti dagli Arabi; non venne sinora pubblicato, ma da esso trasse profitto Raffaele Canacci, il quale nel seguente secolo scrisse in italiano un libro d'algebra tuttora inedito, benchè un giudice competente — il Libri — dopo averlo esaminato, non esitasse a proclamarlo meritevole di stampa.

Notiamo incidentalmente che contemporaneo di Leonardo fu Giovanni Campano da Novara, cappellano di Urbano IV (questi occupò la cattedra di S. Pietro nel ventennio 1261-1281), il quale tradusse dall'arabo in latino gli *Elementi* di Euclide (compresi i cosidetti Libri XIV e XV), aggiungendovi del suo commenti importanti che vanno ricordati per la presenza fra essi del pentagono stellato e dell'angolo di contingenza, concetti che così fecero il loro ingresso nella scienza; ed è certo oggetto di meraviglia il fatto che egli ritenne aggiungere ai postulati euclidei il seguente: « ogni gruppo di numeri ammette un minimo ». Però il Campano, meglio che fra gli epigoni del Fibonacci va annoverato fra i seguaci dell'indirizzo umanistico, che cominciava a trionfare grazie agli sforzi di Petrarca e Boccaccio.

172 - Meglio dei matematici or citati è noto Paolo dell'Abbaco — secondo alcuni di cognome Dagomari, secondo altri Ficozzi — (nato a Prato verso il 1282, morto a Firenze circa nel 1372), autore di alcune *Regoluzze* più volte onorate di stampa. La sua fama quale profondo conoscitore dell'arte del calcolo, della geometria e del moto degli astri è provata dai nomignoli « arismetra », « geometra », « astrologo », coi quali lo vediamo designato da contemporanei o posteri immediati; fra i quali ci piace citare il noto novelliere Franco Sacchetti, il quale, in una canzone scritta in onore del Boccaccio, scrisse:

> Paolo Arismetra et Astrologo solo
> Chè di veder giammai non fu satollo
> Come le stelle, e li pianeti vanno,
> Ci venne men per gire al sommo polo.

Non sono questi gli unici versi che egli ha inspirati; giacchè in un sonetto in sua lode che leggesi in alcuni codici manoscritti, viene posto in bocca sua il proprio elogio con i seguenti versi:

> I' fu' lo specchio della Astrologia,
> Pagol chiamato: e non trovai ma' pari,
> Ch'ho fatto già *diecimila* scolari
> Ottimi e buoni nella geometria.

A merito suo va anche ricordato che, morendo, lasciò per testamento i molti libri e strumenti astronomici da lui posseduti a quello studioso fiorentino, la cui valentia fosse riconosciuta e proclamata da quattro professori della materia; dopo molto disputare questo lascito toccò ad Antonio de Mazzinghi da Peretola, il quale, quantunque morto nel 1390 a soli trent'anni, raggiunse grande rinomanza come insegnante e come scienziato, grazie ad alcuni libri favorevolmente nòti ai contemporanei, ma a noi completamente sconosciuti.

Rinomanza non minore di Paolo dell'Abbaco conseguì il parmigiano

Biagio Pelacani, il quale, conseguita a Pavia nel 1374 la laurea dottorale. insegnò con plauso in parecchie università, non esclusa — a quanto si dice — quella di Parigi; lo troviamo infatti a Bologna negli anni 1378-84 come titolare, prima della cattedra di astrologia, poi di quella di filosofia; di là si trasferì a Padova, ove ebbe dissensi con la scolaresca, in conseguenza dei quali si restituì a Bologna (1388); negli anni 1404, 1406, 1407 lasciò memoria di sè a Pavia, donde passò nuovamente a Padova (1408), ove rimase sino al 15 ottobre 1411; si trasferì allora a Parma, sua città natale, ove morì il 23 aprile 1416. Si occupò di statica e di prospettiva, senza lasciare scritti che giustificassero l'alta fama di cui godette in vita [1].

Non dissimili lineamenti scientifici possiede Prosdocimo de' Beldomandi; nato a Padova nel decennio 1370-80, discepolo del patrio Ateneo e di quello di Bologna, insegnante a Padova a partire dal 20 novembre 1422, si spense sei anni dopo nella sua città natale. Il suo *Algorismus Demonstratus,* benchè mediocremente originale, è ricordato nelle opere del Pacioli, del Tartaglia e del Wallis. Nel suo *Canon in quo docetur modus componendi et operandi tabulam quandam*, va notata una tavola di moltiplicazione estendentesi sino al prodotto 22 × 22 (soltanto la limitata ampiezza del foglio non concesse all'autore di estenderla maggiormente). A torto fu a lui attribuito un trattato di geometria; lasciò invece molte scritture astronomiche, basate sopra la *Sphaera* del Sacrobosco, autore di cui ci occuperemo nel venturo Capitolo. B. Lami, dotto direttore della Biblioteca Riccardiana di Firenze, sin dal 1754 segnalò come importante un nostro matematico che risale al 1307, così inducendo il Boncompagni a esaminarlo (1883). È uno dei pochi lavori dell'epoca che porta il nome dell'autore, Jacopo da Firenze. Giova riferirne il titolo completo: *Incipit Tractatus Algorismi, Huius autem artis novem sunt species, scilicet, Numeratio, Addictio, Substractio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progrexio, Et radicum extractio. Compilatus a Magistro Jacobo de Florentia apud mentem Phesulanum. Ano domini MCCC°.VII° in mensis Septembris.*

Va subito avvertito che in realtà sono considerate soltanto le operazioni numerazione, moltiplicazione e divisione, seguite dagli elementi dell'algebra nella misura in cui questa è trattata nel *Liber Abaci*. Il lavoro in questione non segna alcun progresso su quest'opera, ma merita un ricordo da parte nostra come testimonianza dello studio sopra Leonardo Fibonacci ed anche come nuova prova dell'influenza che allora esercitavano gli Arabi sui matematici della nostra terra.

Fra gli epigoni del Fibonacci non figura Dante Alighieri (1265-1321); sembra che il grande poeta abbia ignorata l'esistenza del modesto ragioniere pisano, a meno che il silenzio da lui serbato riguardo all'amico di Michele Scotto non provenga dal non avere egli voluto in alcun modo contribuire alla gloria della città « vituperio delle genti ». Del resto va

[1] I biografi di Vittorino da Feltre biasimano l'avarizia del Pelacani che gli tolse la gloria di annoverare il loro eroe fra i propri discepoli. Sulla fondatezza di tale colpa, dubbi di natura cronologica furono sollevati dal Thorndike (*History of magical science*, t. IV, p. 70-77).

notato che, ad onta di certe asserzioni ingiustificate di ciechi ammiratori dell'autore della *Divina Commedia,* tutto induce a credere che le cognizioni matematiche di Dante si riducessero a quelle attinte alle opere di Aristotele e dagli scritti di Boezio. Le allusioni aritmetiche da lui fatte lo designano come un tardo aderente al misticismo neo-pitagorico, caratteristica mentale che si manifesta anche dalla ripartizione del grande poema in 1 + 33 + 33 + 33 = 100 canti; e quanto alle sue cognizioni geometriche le uniche prove certe di esse traggonsi dai seguenti versi del *Paradiso*:

O se del mezzo cerchio far si puote
Triangol sì, ch'un retto non avesse
(*Canto* XIII, 101-2)

Non capere in triangolo du' ottusi
(*Canto* XVII, 15).

Qual è 'l geometra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova
Pensando, quel principio ond'egli indige
(*Canto* XXXIII, 133-5).

Notiamo da ultimo che forse tra gli epigoni di Leonardo Pisano dovrebbe porsi quel Leonardo Mainardi da Cremona, autore di un *Artis metrice pratice*; ma l'oscurità che avvolge l'autore e la mediocrità dell'opera sua ci sconsiglia dall'intrattenerci sopra l'uno e l'altra [1].

---

[1] Al secolo XIII appartiene pure uno scolio relativo al triangolo aritmetico ove dei numeri figurati è data la legge di formazione che oggi esprimiamo con la formola

$$\binom{m}{p} = \binom{m-p+1}{1}\binom{m}{p-1}.$$

v. Heiberg, *Encl. Opera omnia,* t. VIII, 1916, p. 290).

## BIBLIOGRAFIA

G. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* t. II (Paris, 1838), Note I-III.

*Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da* B. Boncompagni, vol. I (Roma, 1857), vol. II (Id., 1862).

G. Eneström, *Bibliotheca mathematica,* 3ª Ser., t. IX (1908-09), p. 73-74 [notizia su un manoscritto di G. de Lunis)].

G. Frizzo, *Le regoluzze di mastro Paolo dall'Abbaco,* matematico del secolo XIV (Venezia. 1883).

Prosdocimo de Beldamandis, *Algorismi tractatus perutilis et necessarius* (Padua 1483). [La grafia Beld-Amandis ha indotto alcuni (P. Riccardi e D. E. Smith) a modificare il nome del nostro matematico: che egli però debba chiamarsi Beldomandi risulta dai numerosissimi documenti a lui relativi, pubblicati dal Favaro].

M. Curtze, *Die « Practica geometriae » des Leonardo Mainardi aus Cremona* (Abnand. zur Gesch. der Mathematik, XIII Heft. 1902).

## CAPITOLO XIII

# LA RINASCITA AL DI LÀ DELLE ALPI

### Nel Secolo XIII

173 - Mentre i conterranei di Leonardo Fibonacci mostravano con i fatti piuttosto il desiderio che la forza di calcarne le orme gloriose, anche nel resto d'Europa accennava a diradarsi la sovraincombente secolare caligine, grazie all'azione di persone che vanno giudicate tenendo conto della tristizia dei tempi in cui vissero.

Primo ci si presenta una di quelle personalità enigmatiche che, a somiglianza di Erone Alessandrino, formano il tormento degli storici; parliamo dell'autore degli scritti di cui molte copie furono segnalate nelle principali biblioteche europee, di colui che viene designato col nome latino di Jordanus Nemorarius (abitante dei boschi o nativo di Nemours?) Deve costui identificarsi con Jordanus Saxo, che nel 1221 succedette a Domingo Saxo, fondatore e primo generale dell'ordine dei Domenicani, e morì nel 1236? È egli l'autore di un *Algoritmus Demonstratus,* ovvero questo fu scritto da un nuovo personaggio chiamato Magister Genardus o Gernandus e che alcuni propendono a identificare con Gherardo Cremonese, a noi già noto (v. n. 116) come dotto traduttore? Ed un frammento intitolato *Demonstration Jordani de Algorismo* è forse un estratto da un *Opus Numerorum* che gli viene attribuito?

Ci basti enunciare questi problemi storici, i quali attendono soddisfacenti questioni da nuove ricerche archivistiche, e notiamo che Giordano Nemorario ha un posto:

I. Nella storia della meccanica per un brano intitolato *De Ponderibus;*

II. Nella storia della cosmografia per un opuscolo intitolato *Planisphaerium,* nel quale è dimostrato in generale che nella proiezione stereografica della sfera ai cerchi corrispondono cerchi, proprietà che Tolomeo non aveva riscontrata che in alcuni casi particolari;

III. Nella storia dell'aritmetica per un manuale dato due volte alle stampe (1496, 1514) per cura del celebre Giacomo Lefèvre d'Etaples (lat. Faber Stapulensis) (1455-1537), maestro di Renata di Francia, duchessa di Ferrara ai tempi dell'Ariosto; inoltre per un trattato *De Numeris datis,* indubbiamente pregevole, ma a cui fu ben presto preferito, perchè più intelligibile, altro di Giovanna de Meurs (1310-1360) o de Muris, che nel 1515 ebbe l'onore della stampa. Il citato trattato è modellato sopra le

opere di Nicomaco e Boezio, ma contiene qualche cosa di più sulle varie specie di numeri, sui rapporti e sulle proporzioni. Nello scriverlo l'autore si è indubbiamente inspirato all'opera *Dati* di Euclide, chè lo stile in cui è redatto è prettamente euclideo; però, mentre l'antico geometra ragionava sempre sopra segmenti rettilinei designati con lettere, Giordano si esonerò dalla rappresentazione geometrica quando essa non era assolutamente indispensabile, avviandosi così in una direzione che doveva sfociare nell'algebra simbolica. Nel I Libro l'autore dimostra in sostanza che « data un'equazione di 2° grado, ne sono date in conseguenza le radici », mentre nel II campeggia l'osservazione che una proporzione è data quando se ne conoscono tre termini. Di proporzioni si discorre anche nel III Libro, mentre nel IV sono trattate, nel linguaggio dell'algebra retorica, le equazioni dei consueti tre tipi $x^2+b\,x=c$, $x^2+c=b\,x$, $b\,x^2+c=x$, $a$, $b$, $c$ essendo numeri positivi; Giordano nota che le equazioni della seconda forma possono avere due radici;

IV. Nella storia della geometria per un pregevole trattato intitolato comunemente *De Triangulis,* il quale si propende oggi a identificare con quello dal titolo un po' misterioso *Philotechnes,* che per lungo tempo venne annoverato fra le opere irremissibilmente perdute. Su di esso è nostro dovere di arrestarci.

174 - Dei quattro Libri che lo costituiscono due si riferiscono a figure rettilinee, gli altri al cerchio e ai poligoni in esso inscritti o ad esso circoscritti; tutta l'opera è notevole per i ragionamenti rigorosi; quanto all'originalità del contenuto non è agevole il misurarla, ignote essendo le opere (arabe forse) sfruttate dall'autore. Senza addentrarci in una analisi esauriente di quest'opera estrarremo dal Libro IV di essa i seguenti notevoli enunciati: Siano $s_n$, $S_n$, le aree dei poligoni regolari di $n$ lati inscritti e circoscritti al cerchio di raggio $r$; $p_n$, $P_n$ i loro perimetri; si ha in generale $s_n : s_{2n} = s_{2n} : S_n$ e, se $n>m$. Si avrà $s_n : s_m > p_n : p_m$, $S_n : S_m = P_n : P_m$, $S_m > S_n$.

Notiamo nello stesso Libro una soluzione del problema della trisezione dell'angolo, a base della quale si percepisce una concoide del cerchio. Del problema della duplicazione del cubo, l'autore si limita a esporre le soluzioni note ai geometri greci. Rileviamo finalmente la seguente formola determinatrice (secondo l'autore) del lato $l_n$ del poligono regolare di $n$ lati inscritto nel cerchio di raggio $r$:

$$l_n^2 = \frac{18\,n^2}{\dfrac{(n-1)\,n}{2} + 3},$$

è una formola semplicemente approssimata, chè porta ad assumere

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{3}{\sqrt{n\,(n-1)+6}};$$

questa non è vera in generale, ma è notevole che conduce a risultati matematicamente esatti per $n=3$, 4, 6; mentre per $n=7$ guida alla relazione

$l_7 = r/2\ \sqrt{3}$ cioè $l_7 = 1/2\ l_3$, già nota a Abu 'l Wafa e che Giordano chiama « regola indiana », facendo così nascere il sospetto che, per comporre la sua opera, egli abbia attinto a fonti orientali. Emerge da questi cenni che Giordano fu un matematico, certamente non della levatura del Fibonacci, ma edotto della scienza del suo tempo e in grado di fare qualche aggiunta a quanto i suoi maestri gli avevano appreso.

175 - Durante il secolo di cui ci stiamo occupando apparve in Inghilterra una personalità di primo ordine che, ove circostanze avverse non l'avessero ostacolata, avrebbe potuto imprimere alle scienze naturali l'indirizzo, basato sopra l'esperienza e l'osservazione, che solo poteva condurle a conclusioni sotto ogni riguardo soddisfacenti: parliamo di Ruggiero Bacone. Nato nel 1214 circa, nella Contea di Sommerset, morì a Oxford il 12 giugno 1294. Compiti i suoi primi studi a Oxford, passò qualche tempo a Parigi e, ritornato in questa città, entrò nell'ordine francescano; tale scelta doveva riuscirgli fatale, perchè di tutte le congregazioni religiose nessuna era meno propensa allo studio di quella che prende nome dal poverello d'Assisi; ben diversa sarebbe stata la sua sorte ove egli avesse prescelto l'ordine domenicano, il quale va superbo di avere avuto nelle sue fila pensatori quali Alberto Magno e Tommaso d'Aquino. Profondo conoscitore delle lingue classiche e in grado di comprendere un'opera araba, fu a lui dato di prendere cognizione dell'intera letteratura scientifica del suo tempo; ma, spirito indipendente, prese posizione contro la tendenza esclusivamente « livresque » della coltura del tempo suo; fu questa la fonte di tutte le sue sciagure, sui particolari delle quali a noi non è concesso addentrarci.

Benchè nelle opere di Bacone si cerchi indarno qualche contributo alle nostre cognizioni matematiche, pure vi si leggono alcune considerazioni le quali non sono estranee al tema della presente storia. Così la dichiarazione da lui fatta nel celebre *Opus Tertium* della mancanza d'insegnanti di matematica e di essere egli in grado di apprendere da solo, nel corso di una mezza settimana, tutta la geometria, mostra quanto basso fosse il livello delle cognizioni geometriche nel sec. XIII. Di ciò si ha una conferma in un passo della medesima opera che si riferisce alla questione, già sollevata prima di lui, di riempire lo spazio con poliedri regolari, passo dal quale emerge una completa ignoranza della differenza fra facce e diedri di un angolo solido. Ivi, infatti, l'autore nota la possibilità di scomporre tutto lo spazio in celle di forma cubica; allora in ogni punto dello spazio confluiscono otto siffatti poliedri, epperò attorno a ogni punto si trovano otto triedri trirettangoli, le cui facce dànno in somma 24 angoli retti. Ora (così ragiona Bacone) siccome le facce dell'angolo solido di un tetraedro dànno invece per somma due retti, così riunendone 12 si ottengono appunto 24 retti, donde, secondo lui, risulta la possibilità di decomporre lo spazio in tetraedri regolari; similmente, siccome le facce dell'angoloide di un ottaedro regolare dànno per somma 8/3 di un angolo retto, unendone 9 si giunge — sempre secondo Bacone — al risultato voluto. Strano che il pensatore giustamente celebre come fautore del metodo sperimentale, non abbia pensato di ricorrere a una

esperienza facilmente concepibile, che lo avrebbe confermato nella verità delle sue conclusioni o gli avrebbe rivelato il proprio errore!

176 - Più direttamente interessa le scienze esatte un altro inglese, John Holywood, noto sul continente sotto il nome di Giovanni Sacrobosco (corrotto in Sacrobusto); discepolo dell'Università di Oxford e maestro in quella di Parigi, si spense in questa città (1244 o 1256), affidando la propria fama a un trattato di astronomia elementare intitolato *De Sphaera Mundi* — dato alle stampe a Ferrara, nel 1472, per cura del Lefévre (v. n. 173) — che funzionò come libro di testo in tutta Europa, durante l'intero Medio Evo, epperò ebbe numerose edizioni e non meno numerosi commenti ([1]).

Reca la firma del Sacrobosco anche un *Tractatus* in versi *de Arte Numerandi,* collezione di regole pratiche semplicemente enunciate, alle quali dovevasi allora ricorrere da chiunque intendesse eseguire le operazioni seguenti: numeratio, additio, subtractio, mediatio, duplatio, multiplicatio, divisio, progressio (cioè calcolo della somma di un certo numero di termini consecutivi della serie dei numeri naturali), extractio. Che a questo lavoretto aritmetico abbia arriso un successo non inferiore a quello che ebbe il manuale astronomico dello stesso autore, è documentato dall'enorme di copie e di commenti che se ne trovano nelle principali biblioteche tedesche. Di tali commenti ottenne sino ad oggi l'onore della stampa quello compiuto nel luglio 1291 dal domenicano Pietro Filomeno di Dacia. Si tratta di un lavoro di tipo scolastico, destinato al frequentatori delle università danesi, il quale segue passo passo il testo, che gli scolari erano tenuti ad avere sott'occhio; ivi le regole esposte sono illustrate sopra esempi opportuni. Rileviamo in esso la spiegazione datavi per il vocabolo *teca* usato dal Sacrobosco per designare lo zero e fondata sulla considerazione che detta parola serviva ad indicare quel ferro rotondo con cui, in certi paesi, bollavansi sulla fronte o sulla guancia i ladri e i masnadieri.

Durante il medesimo secolo furono composti altri due mediocri lavori, uno sull'algoritmo, l'altro sulla geometria, che C. Henry pubblicò nel 1882 e che vanno ricordati, meno per il loro intrinseco valore, che per essere i primi, sinora noti, che siano scritti in francese. Nella medesima epoca, pure in Francia, visse il famoso Vincenzo di Beauvais (in latino Vincentius Bellovacensis); egli, infatti, nacque nel decennio 1184-94 e morì poco dopo il 1260. Conoscendo il latino e il greco, l'arabo e l'ebraico, egli era in grado di leggere quanto era stato scritto ai suoi tempi; membro dell'ordine domenicano e preposto alla Biblioteca di Luigi IX, dovette occuparsi dell'educazione dei figli di questo sovrano; ciò lo indusse a comporre una colossale enciclopedia che, nei molti esemplari che se ne conoscono, reca differenti nomi, quali *Bibliotheca Mundi*, *Speculum Majus*, *Speculum Triplex*. Si riferisce alla materia di cui ragioniamo la parte intitolata *Speculum Doctrinale*, perchè con-

([1]) Fra i chiosatori ricordiamo Francesco Stabili generalmente noto sotto il nome di Cecco d'Ascoli (n. verso il 1250, m. a Firenze sul rogo il 15 settembre 1327), il cui commento fu stampato a Basilea nel 1485.

tiene un compendio della matematica del tempo; scritta nello stile che caratterizza la scolastica, non contiene alcuna novità degna di menzione da parte nostra. Un entusiasta biografo di Vincenzo esortava con calde parole i propri lettori allo studio degli imponenti in-folio costituenti lo *Speculum Majus;* a noi manca il coraggio di dare un simile consiglio ai nostri lettori, anche limitandolo allo *Speculum Doctrinale!*

## Nel Secolo XIV

177 - Il secolo XIV presenta, dal punto di vista culturale, una fisonomia non dissimile da quella che aveva il precedente, non foss'altro perchè in entrambi è Parigi che si presenta come capitale del mondo dei pensatori; però, da quanto stiamo per esporre risulterà che anche altri paesi diedero manifeste prove d'interesse per i numeri e le figure.

Ed invero in Inghilterra attrae la nostra attenzione Tommaso Bradwardine, sia grazie al suo sapere, che per l'alta posizione raggiunta nella gerarchia ecclesiastica. Nato a Hartfield (nelle vicinanze di Chichester) nel 1290, a trentacinque anni ottenne la carica di « proctor » dell'Università di Oxford e grazie alle dotte lezioni ivi impartite conseguì tale e tanta estimazione da meritare il lusinghiero nomignolo « doctor profundus » che porta ancor oggi. Dodici anni dopo fu nominato cancelliere della chiesa di S. Paolo di Londra e forse anche fu scelto quale confessore del re. Arcidiacono a Norwich nel 1347, fu richiamato l'anno seguente a Londra come arcivescovo di Canterbury; ma, poco dopo averne ricevuto la solenne investitura, morì di peste (26 agosto 1347). Nella storia della matematica il Bradwardine va ricordato per un *Tractatus de proportionibus,* per una memoria *De quadratura circuli,* e per due trattati uno di *Arithmetica speculativa,* l'altro di *Geometria speculativa,* tutti stampati a Parigi, i primi due nel 1495 e gli altri due negli anni 1502 e 1530. Tuttora inedito è un suo *Tractatus de continuo,* ove leggonsi alcune considerazioni sull'angolo di contingenza, ispirategli forse da Giovanni Campano e Giordano Nemorario, nonchè un primo saggio di classificazione degli infiniti dei vari ordini, la quale fa apparire il Bradswardine come un lontano precursore di chi creò la teoria dei numeri transfiniti, Giorgio Cantor (1845-1921).

Delle opere a stampa di questo prelato scienziato quella che si presenta come dotata di più spiccata originalità è la *Geometria speculativa.* Dei quattro Libri, di cui consta quest'opera, il I tratta dei poligoni stellati (« de figuris angulorum egredientibus »), configurazione già considerate dal Campano, che il nostro autore genera prolungando i lati di un poligono convesso e ne propone una sensata classificazione, iniziando poi la ricerca della somma dei loro angoli, che L. Poinsot (1777-1859) doveva recare a termine all'alba del sec. XIX. Alla teoria degli isoperimetri secondo il geometra greco Zenodoro (v. n. 57) è dedicato il II Libro; nel III, concernente i rapporti e le proporzioni, oltre a considerazioni sugli irrazionali geometrici, troviamo una trattazione del problema della quadratura del cerchio, inspirata alla congenere memoria archimedea. Alla sfera, ai circoli che possono tracciarsi su di essa e ai poliedri regolari

che vi si possono inscrivere si riferisce l'ultimo Libro della medesima opera [1], la quale per riassumere l'impressione che produce nei lettori — fa apparire il Bradwardine come tardo, ma non indegno discepolo dei sommi geometri della Grecia.

Suoi conterranei e contemporanei sono Riccardo Suissett (Swinehead) e Giovanni Mauduith. Quello fu insegnante nell'Università di Oxford e poi (1350) appartenne all'Ordine dei Cistercensi; una sua opera dal titolo *Calculationes* ebbe larga diffusione ed ebbe per conseguenza il nomignolo di *calcolatore* con cui viene di frequente designato; pure ad Oxford insegnò il Manduith. Il Suisset lasciò memoria di sè anche per i suoi contributi all'astronomia calcolatrice, mentre i lavori del Mauduith si riferiscono alla trigonometria, riguardata, non come scienza autonoma e indipendente, ma piuttosto come ancella della astronomia.

Da questo trasse ispirazione Riccardo Wallingford, il quale nacque nel 1292, e, benchè di umili natali, fu elevato al grado di abate di S. Albano; colpito dalla lebbra, che lo privò della vista, morì il 23 maggio 1335. Uno solo dei suoi scritti ebbe sinora l'onore della stampa, il *Quadripartitum de sinibus demonstratis;* è un lavoro di piccola mole, ma notevole perchè rappresenta la prima trattazione della trigonometria che abbia vista la luce nell'Europa cristiana; di tale materia viene ivi esposto con chiarezza e rigore quanto è necessario per eseguire i calcoli che servono alle esplorazioni celesti.

178 - Vero è che sino dal 1321 era apparsa un'opera dello stesso genere; ma era scritta in ebraico e venne tradotta in latino soltanto sette anni dopo la morte del Wallingford, onde i punti di contatto fra essa e il *Quadripartitum* devono considerarsi, sino a prova contraria, del tutto accidentali.

Autore di quest'altra opera è quel Levi ben Gerson, che Pico della Mirandola non esitò a proclamare « vir insignis et celeber matematicus, quasi veteribus parum fidens excogitavit novum instrumentum, cujus vidimus canones mathematica subtilitate praecellentes ».

Nato in Provenza nel 1288 da una famiglia già nota per meriti letterari, egli visse nel mezzo secolo in cui furono tradotte in ebraico le principali opere scientifiche greche e arabe (Euclide, Tolomeo, Avicenna, ecc.), cosicchè, benchè digiuno di latino e poco famigliare con l'arabo, conobbe nella sua totalità la letteratura scientifica del suo tempo. I papi, che risiedevano allora in Avignone, nutrirono per lui altissima stima, epperò gli accordarono la loro protezione e si giovarono della sua abilità come astronomo e fors'anche come astrologo; ma, verso il termine della sua esistenza (Avignone, 1344) ebbe a risentire dolorosamente delle persecuzioni scatenatesi allora contro i suoi correligionari. Tuttavia, tale mutato orientamento politico non diminuì l'alta considerazione di cui egli godette presso i contemporanei e i posteri immediati, della quale

(1) Ivi è fra l'altro rilevato l'errore commesso da R. Bacone (v. p. 241) relativamente alla possibilità di riempire lo spazio con tetraedri regolari; ma ne è commesso un altro con l'affermazione che lo spazio attorno a un punto si può riempire, non con 12 ma con 20 tetraedri regolari.

sono prove indiscutibili le versioni latine di cui furono onorati i suoi scritti. Strano però che, dopo la sua morte, egli cadde in completa dimenticanza, sicchè, a partire dal sec. XVII, il suo nome scompare dalla letteratura scientifica: è merito di alcuni dotti tedeschi del tempo nostro (Steinschneider, Curtze, Günther, Carlebach) l'avere posto in luce di quanto al geniale israelita siano debitrici le scienze pure e applicate.

Allora venne tolto dagli scaffali di antiche biblioteche un trattato d'aritmetica (*Manuale del calcolatore pensante*) il quale, se non conseguì al suo apparire un grande successo, è perchè era intessuto di rigorosi ragionamenti, invece che essere scritto nella forma catechistica usata dagli scrittori medioevali: vi si trovano, fra l'altro, alcuni problemi identici ad altri che leggonsi nel *Liber Abaci*, il che osserviamo senza decidere se il Levi abbia attinto al Fibonacci o se entrambi siansi giovati di altri più antichi scritti orientali.

Per la materia che tratta si avvicina al citato *Manuale una memoria* scritta nel 1342 e che, nella versione latina conservata nella Biblioteca della città di Basilea, reca il titolo *Leo Hebreus de numeris harmonicis*. Essa ha per iscopo di provare che la differenza fra due numeri armonici (cioè della forma $2^m$, $3^n$) è sempre superiore a 1, esclusi per i numeri $m$, $n$ le coppie di valori 1, 2; 2, 3; 3, 4; 8, 9; è una proposizione enunciata un secolo prima da Giacomo Filippo di Vitry, che fu vescovo di Meaux nel decennio 1351-1361, e che il nostro matematico stabilisce con pieno rigore.

179 - Come geometra Levi ben Gerson prende un posto onorevole fra i commentatori di Euclide; gli *Elementi* del celebre alessandrino erano stati tradotti in ebraico da Moses ibn Tibbon (1270) e poi da Jacob ibn Machir (1277); il Nostro, pure ammirando le Pandette della geometria, pensatore indipendente quale si manifestò in ogni occasione, le giudicò meno soddisfacenti per il grande numero di postulati introdotti, onde si propose di dimostrarne almeno alcuni, a ragione facendo convergere tutta la forza del suo gagliardo intelletto a render meno imperfetta la teoria delle parallele. È superfluo dichiarare che egli non raggiunse il fine a cui mirava; ma le pagine che egli scrisse sotto la veste di commentatore e critico dell'immortale alessandrino gli assicurano un posto onorevole nella storia delle lotte secolari che portarono finalmente alla creazione della geometria non-euclidea.

Ancora più originali e importanti sono i contributi dati dal Levi alla trigonometria. Nell'esporla metodicamente egli tenne conto tanto del sistema greco, di determinare un arco col mezzo della sua corda, quanto di quello orientale, di individuarlo col seno (semicorda dell'arco doppio); in conseguenza di ogni arco considerò corda e saetta, seno e coseno, e stabilì le relazioni che intercedono fra tali quantità; delle relazioni risultanti egli trasse profitto per calcolare una tavola di seni, espressi in funzione del diametro (supposto di 120 parti, come fece Tolomeo) mediante frazioni sessagesimali. Nel corso dei suoi studi sulla trigonometria egli giunse a un risultato della più alta importanza, cioè alla proporzionalità dei lati di un triangolo rettilineo ai seni degli angoli opposti; benchè a lui sia stata negata la legittima soddisfazione di farlo cono-

scere agli Europei, pure giustizia vorrebbe che quella proposizione venisse chiamata *teorema di Levi ben Gerson.*

Un quadro completo dell'opera scientifica del matematico di cui ci occupiamo conterrebbe notizie intorno a quanto a lui deve l'astronomia; benchè a noi sia vietato di addentrarci in questo campo, pure non possiamo esimerci dal citare le sue ottime *Tavole lunari,* e dal rilevare che egli ha per primo notato che gli apogei dei pianeti sono punti mobili. Egli è finalmente il vero inventore del « baculus astronomicus », erroneamente attribuito ad altri, e il primo che abbia ideata la camera oscura. Ben pochi uomini scesero nella tomba lasciando una così cospicua e variopinta eredità scientifica!

180 *a* - La sorte toccata al geniale ebreo provenzale, di cadere in completo oblio durante parecchi secoli e di essere onorevolmente riesumato per opera di storici tedeschi, e assai simile a quella che ebbe un prelato francese suo contemporaneo: Nicola Oresme [1]. Nato, a quanto pare, nel 1323 a Caen (o nei pressi di questa città), nel 1348 si trasferì a Parigi ed entrò nel Collegio di Navarra (Parigi) e vi rimase, dopo di avere ottenuto l'ambito titolo di « docteur de Paris », in qualità di docente sino al 4 ottobre 1356, giorno nel quale fu elevato al grado di « grand maître » di quell'istituto. Tale carica dovette lasciare essendo stato nominato, addì 4 dicembre 1361, decano a Rouen. Il 16 novembre 1377 fu innalzato al grado di vescovo di Lisieux, probabilmente come premio decretatogli dal re di Francia per la traduzione da lui fatta di alcune opere di Aristotele, benchè, nei commenti di cui le corredò, abbia proceduto in modo così poco ortodosso da apparire ai nostri occhi per un precursore di Copernico; morì, sempre rivestito da quella dignità episcopale, l'11 luglio 1382.

Il suo *Tractatus de latitudinibus formarum* [2] fu scritto nel 1361, stampato più volte (1482, 1486, 1505, 1515) scelto come libro di testo nelle Università di Colonia, Vienna e Ingolstadt; per noi la sua importanza risiede nel fatto che è la prima opera oggi nota ove trovisi, sia pure sotto forma embrionale, il concetto di rappresentazione grafica delle funzioni, mediante coordinate rettangolari [3]. Per porre in luce tale significato del citato volume, noteremo che col nome « forma » (tratto dall'aristotelico ευδος, che significa « contrapposto della materia » ossia « principio

[1] Circa alla stessa epoca appartiene il parigino Domenico di Clavasio, il quale, nella seconda metà del secolo xiv, coprì la carica di astrologo del re di Francia; ma la sua *Practica geometriae* non merita più di una fugace menzione, benchè le molte copie manoscritte che se ne conoscono provino che nel Medio Evo egli ha goduta notevole rinomanza e grande diffusione.

Pure in Francia e precisamente in Provenza (Tarascon) visse nel periodo 1340-1377 Immanuel Ben Jacob Bonfilo; va ricordato perchè da un suo ms. recentemente tradotto dall'ebraico e commentato risulta che egli precorse la Storia (v. più avanti, n. 249) nell'introduzione metodica delle frazioni decimali.

[2] È un estratto di un'opera di maggior lena esistente nella Biblioteca nazionale di Parigi.

[3] Che lo si trovasse anche in scritti di più antica data emerge dal fatto che l'Oresme non si atteggia a creatore delle cose esposte, ma sembra attribuirle a personaggi antichi (« veteres »), non definiti con precisione.

atto a dare forma al mondo ») l'Oresme designa qualsiasi fenomeno dipendente da una variabile; in questo si presentano due grandezze dette una « longitudo », l'altra « latitudo »; graficamente si rappresenta quel concetto applicando la stessa procedura pratica a cui oggi si ricorre per rendere palese « ad oculos » l'andamento della temperatura o della pressione atmosferica in un determinato periodo o le variazioni di prezzo subite da un titolo commerciale ; si è, dunque, in presenza del sistema cartesiano nella sua forma primordiale, in cui le quantità considerate assumono esclusivamente valori positivi. La « latitudo » può essere « uniforme » o « difforme »: nel primo caso il grafico corrispondente è una retta parallela all'asse scelto; l'altro caso si suddivide in due: si può avere una « latitudo secondum se totam difformis », quando il grafico è costituito da una linea unica, ovvero una « latitudo secondum partem difformis » quando essa consta di porzioni distinte, alcune delle quali sono segmenti di rette parallele all'asse. L'Oresme ha eziando considerate le latitudini « difformiter difformes », le quali sono rappresentate da linee di andamento capriccioso; finalmente ha notato, prima di Keplero, che in prossimità di un punto di massimo, l'incremento che subisce una variabile è nullo. Nella sua opera fu anche segnalato un cenno dello spazio a quattro dimensioni. Emerge da tutto ciò che lo scritto dell'Oresme, anche se non ha esercitata alcuna tangibile influenza sulla costituzione della geometria analitica, merita il posto nella storia della matematica che ha finalmente ottenuto.

L'Oresme si è mostrato come pensatore ancora più originale nell'opera intitolata *Algorismus proportionum*, che, per vera sciagura, è rimasta sepolta in biblioteche poco esplorate sino al 1868, anno in cui conseguì l'onore della stampa. Ci esprimiamo in tal modo perchè ivi (per parlare esclusivamente di quanto è di maggior rilievo) è esposta per la prima volta una teoria generale delle quantità irrazionali fondata sull'uso metodico degli esponenti frazionari. Per dimostrare che a tanto l'autore è giunto bastano le regole da lui all'uopo stabilite, che, per maggiore brevità e migliore intelligenza, riferiamo servendoci dei simboli moderni:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ , \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ , \quad a^{m/n} = (a^m)^{1/n}\ , \quad a^{1/m} = (a^{p/m})^{1/p}\ ,$$

$$(a^{1/p})^{p/m} = a^{1/m}\ , \quad (a^m)^{p/q} = (a^{mp/n})^{1/q:n}\ ,$$

$$(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q}\ , \quad a\, b^{1/n} = (a^n\, b)^{1/n}\ ,$$

$$\frac{b^{1/n}}{a} = \left(\frac{b}{a^n}\right)^{1/n}, \quad \frac{a}{b^{1/n}} = \left(\frac{a^n}{b}\right)^{1/n}, \quad \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}, \quad a^{1/m} = a^{p/mp}$$

$$a^{1/m}\, b^{1/n} = (a^n\, b^m)^{1/mn}\ , \quad \frac{a^{1/m}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{1/mn}, \quad a^{1/n}\, b^{1/n} = (a\, b)^{1/n}\ ,$$

$$\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\ , \quad a^m \cdot a^{1/n} = a^{m+1/n}\ , \quad \frac{a^m}{a^{1/n}} = a^{m-1/n}.$$

Riteniamo superflua qualunque nostra parola per esaltare l'importanza di questi risultati; essi erano forse di troppo superiori alla menta-

lità degli scienziati del tempo per venire apprezzati e utilizzati durante il secolo XIV.

Della teoria delle proporzioni esposta nelle prime due parti del suo scritto, l'Oresme fa nella terza applicazioni alla ricerca dei rapporti che passano fra le aree dei poligoni regolari inscritti o circoscritti ad un cerchio e aventi 3, 4, 6, o 8 lati, tema che già aveva occupato Giordano Nemorario. Citiamo soltanto la proposizione: « l'area dell'ottagono regolare inscritto in un cerchio è media proporzionale fra quelle dei quadrati inscritto e circoscritto allo stesso cerchio », per osservare come in un manoscritto dell'opera in discorso sia aggiunta l'osservazione che un analogo teorema sussiste per tutti i poligoni, la quale era già stata fatta dall'or citato Giordano. Emerge da ciò che, per novità e intrinseco valore, la parte geometrica dell'*Algorismo* è di molto inferiore a quanto questo contiene di relativo alla scienza del numero.

180 *b* - Lasciando per il momento la Francia [1], oltrepassiamo il Reno per osservare che nel 1365 Rodolfo IV, duca d'Austria, divisando di fondare a Vienna una grande università, vi chiamò in qualità di rettore Alberto di Sassonia; non basta ciò a provare l'alta rinomanza di cui questi godeva? Nato a Riggensdorf (Sassonia), studiò prima a Praga, poi a Parigi; non occupò mai l'ufficio a cui avevalo chiamato il principe austriaco, avendo preferita la dignità di vescovo di Halberstadt, che conservò sino alla morte (1390). Ebbe l'onore della stampa un suo *Tractatus de latitudinibus formarum* (1505) e un *Liber proportionum* (1482 e nove altre edizioni) [2]. Come scrittore originale ci si presenta in due lavori semi-filosofici, uno sulla *Quadratura del circolo,* l'altro *Sopra il rapporto fra il lato e la diagonale di un quadrato.*

Povero lavoro il primo, ove è lungamente discusso se il cerchio possa o non venire trasformato in un quadrato; fra le rarità che vi si leggono riferiamo la seguente. Se il circolo si può quadrare, la sfera si potrà cubare e viceversa; ora travasando in un cubo l'acqua contenuta in un recipiente sferico, si riconosce che il secondo problema è risolubile, onde lo stesso deve dirsi del primo; l'autore però omette di dire quale sia la lunghezza dello spigolo del cubo equivalente alla sfera, onde il suo preteso ragionamento manca totalmente di base. Da notarsi che per lui, come per il Campano e tutti gli scrittori medioevali, 3 1/7 è un valore, non approssimato ma esatto, del rapporto fra la circonferenza e il diametro.

In modo somigliante procede nel secondo dei succitati lavori, prendendo le mosse dall'opinione, da lui combattuta, che la diagonale di un

---

(1) A complemento delle precedenti informazioni sugli studi compiuti nell'epoca di cui ragioniamo, va notato come alcuni scritti anonimi di autori francesi, sono stati di recente pubblicati da MORTET (*Bibl. mathem.* t, III, 1926), KARPINSKI (*Iris*, t. XXXV, 1928 e *Atti del Congr. intern.* 1928) e WATERS (*Iris*, t. XXXVIII, 1929).

(2) L'Aschbach nella sua *Geschichte der Wiener Universität* attribuisce ad Alberto di Sassonia, sia pure sotto forma dubitativa, una memoria intitolata *De maximo et minimo* che sarebbe esistita a Venezia; ma informazioni assunte presso la direzione della Biblioteca di S. Marco conducono alla conclusione che si tratta di un equivoco; chè in detta Biblioteca esiste il manoscritto del *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia, al quale è allegato un *Tractatus de maximo et minimo*, ma questo senza indicazione di autore.

quadrato sia doppia del lato; dimostra poi, come gli antichi avevano riconosciuto sino dai tempi di Pitagora, che il rapporto fra l'una e l'altro non può essere razionale. Non lo seguiremo nelle molte sue digressioni, o divagazioni, che ben poco hanno a che vedere con la matematica degna di questo nome, solo notando che egli non giunge a una vera conclusione: si tratta dunque di una sterile esercitazione dialettica, frutto non nutriente dell'insegnamento scolastico e che (al pari dello scritto sul cerchio) va ricordato come prova della perniciosa influenza che certi indirizzi filosofici possono esercitare anche sopra le menti più elette.

Per l'onore della Germania fortuna volle che circa nello stesso tempo apparisse sulla scena del mondo una schiera di pensatori dai quali si può dire prenda inizio la partecipazione di quella nazione al progresso delle scienze esatte.

## Nel Secolo XV

181 - Ed in vero Giovanni di Gemunden (così denominato dalla località in cui vide la luce nel 1380) scrisse, sotto il titolo *Tractatus de minutiis physicis,* una trattazione metodica del calcolo con frazioni sessagesimali che, grazie all'utilità sua per chi intendeva addestrarsi nei calcoli astronomici, funzionò durante molti decenni come libro di testo per studenti universitari.

Più alta è la rinomanza di cui giustamente gode Giorgio Peuerbach, specialmente grazie ai contributi da lui dati allo studio dell'astronomia. Nato nei pressi di Linz, nel villaggio da cui prese nome, addì 30 maggio 1423, dopo avere viaggiato a lungo in Italia, ove strinse amichevoli rapporti con l'astronomo Giovanni Bianchini, nel 1454 fu elevato alla carica di astronomo di corte da Ladislao re d'Ungheria. Poco dopo però lasciò questa carica per occupare una cattedra nell'Università di Vienna. La morte immatura che lo colse l'8 di aprile del 1461, gli vietò di portare a compimento alcuni importanti lavori intrapresi, fra i quali ci corre l'obbligo di citare la versione dell'*Almagesto* di Tolomeo dall'originale greco in latino. Di lui ci rimane un trattato di aritmetica dal curioso titolo *Opus Algorismi jucundissimum*; è una raccolta di regole semplicemente enunciate la quale riuscì a prendere il posto dell'analogo manuale del Sacrobosco (v. n. 176), benchè non si possa dichiarare a questo superiore. Agli investigatori dei movimenti degli astri il Peuerbach rese un importante servigio calcolando una tavola di seni, della quale si faceva sentire sempre più il bisogno, di mano in mano che il metodo orientale di determinazione degli archi prendeva il posto del sistema greco di servirsi all'uopo delle corde relative.

182 - Colui che, avendo ottenuta nel 1448 la porpora cardinalizia, fu generalmente chiamato Nicolò cardinale di Cusa era nato nel 1401, da un povero pescatore, nel villaggio di Cues, sulla riva sinistra della Mosella. Esauriti gli studi elementari a Deventer, fu immatricolato nel 1416 nell'Università di Heidelberg; lo troviamo poi all'Università di Padova, condiscepolo del futuro geografo Paolo Toscanelli; conseguita la laurea

« in utroque », si dedicò all'avvocatura; ma il dolore provato per avere perduta la prima causa che difese, lo indusse ad abbandonare i codici per consacrarsi alla teologia, ove non tardò a illustrarsi, partecipando alle dispute che in quel tempo (eravamo nell'epoca che preludeva alla Riforma) erano incessanti e vivacissime; morì a Todi l'11 agosto 1464. Nella storia della cronologia egli ha un posto per la parte da lui presa ai lavori che condussero alla riforma del calendario.

Come cultore della filosofia matematica lo raccomandano alla nostra attenzione l'opuscolo *De Beryllo* e il celebre scritto *De docta ignorantia*. Il miraggio di risolvere il problema della quadratura del cerchio (veggasi l'opuscolo appunto intitolato *De quadratura circuli*) lo trasse a conclusioni la cui erroneità avrebbe potuto essergli segnalata dall'opuscolo archimedeo sulla *Misura del cerchio,* appunto allora posto in circolazione da benemeriti eruditi italiani. Tuttavia, incidentalmente, quasi a documentare il genio matematico che le circostanze della vita gli vietarono di sfruttare a vantaggio della scienza, egli insegnò la seguente elegante procedura per rettificare un arco $A\ M = \varphi$ minore di 30° del cerchio di centro $O$: Si prolunghi (Fig. 31) $A\ O$ in modo che risulti $A\ B$ eguale al triplo del raggio $r$ e si chiami $P$ il punto nel quale la tangente in $A$ al dato cerchio incontra la retta $R\ M$; il segmento $A\ P$ risulta approssimativamente eguale all'arco $A\ M$. Per giudicare della bontà di questa approssimazione si noti che la esposta costruzione guida alla seguente espressione della lunghezza dell'arco $\varphi$:

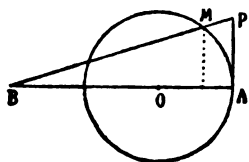



Fig. 31.

$$\varphi = \frac{3 \operatorname{sen} \varphi}{2 + \cos \varphi} = \varphi \left(1 - \frac{\varphi^4}{180} + \ldots\right);$$

e questa prova che l'approssimazione raggiunta porta sulla quinta potenza dell'arco considerato [1].

Allo stesso matematico devesi un procedimento originale per calcolare $\pi$. Si parta da un poligono regolare di dato perimetro e di un numero conosciuto $n$ di lato e si costruisca una serie di poligoni regolari di 2 m 4 m, ecc. lati e si calcoli per ciascuno i raggi dei cerchi inscritti e circoscritti; nascono così due serie infinite, una crescente e l'altra decrescente aventi per limite comune $\pi$.

183 - Che l'errore commesso da Nicolò di Cusa nei suoi conati per quadrare il cerchio fosse reso palese dal fatto che il valore da lui trovato per $\pi$ non è compreso fra 3 1/7 e 3 10/71, rilevò, poco prima della morte di quel dotto prelato, uno scienziato a cui i metodi di calcolo utili in astronomia vanno debitori di notevoli miglioramenti, ma che ha anche diritto a un posto eminente nella storia della matematica pura. È desso Giovanni Müller, nato addì 6 giugno 1436 a Königsberg (località del du-

---

[1] Questo procedimento eseguito in ordine inverso permette, inversamente, di determinare un arco circolare di data lunghezza.

cato di Coburgo), e designato talora sotto il nome di Johannes Germanus o Francus, più spesso chiamato Johannes de Monte Regio e generalmente dagli Italiani Regiomontano. Appena dodicenne fu immatricolato nel l'Università di Lipsia; passò poco dopo in quella di Vienna, attrattovi dall'alta fama del Peuerbach, di cui non tardò a divenire il discepolo prediletto e poi l'erede scientifico, chè a lui il Peuerbach affidò la missione di portare a compimento l'edizione di Tolomeo a cui egli erasi accinto per suggerimento del noto letterato greco Bessarione. Ed appunto per porsi a contatto con questo erudito, il Regiomontano si recò a Roma; peregrinò poi per l'Italia; così soggiornò a Ferrara per giovarsi degli ammaestramenti dell'astronomo Bianchini, e a Padova, nella cui Università tenne una prolusione di carattere storico, della quale parleremo fra breve. In Italia alternò le ricerche prettamente scientifiche con le investigazioni in biblioteche e archivi, ove fece scoperte della massima importanza: fra tutte citiamo quella di Diofanto in greco, ritrovato in una biblioteca di Venezia e grazie a cui il principe degli aritmetici greci, dopo secoli di dimenticanza, venne riposto in circolazone [1]. Nel 1468 troviamo il Regiomontano a Vienna, ove riceve da Matteo Corvino l'invito di recarsi a Ofen (l'odierna Budapest) in qualità di astronomo di corte. Egli accettò tale carica, ma nel 1471 abbandonò l'Ungheria per stabilirsi a Norimberga; però anche qui non rimase a lungo, chè papa Sisto IV nel 1475 lo chiamò a Roma onde dirigere i lavori per la riforma del calendario, la quale manifestavasi d'improrogabile urgenza. Ed a Roma il Regiomontano morì appena quarantenne (6 giugno 1476), secondo alcuni di peste, secondo altri per effetto del veleno propinatogli da Giorgio di Trebisonda, di cui egli aveva aspramente criticati gli studi sopra Claudio Tolomeo e Teone Alessandrino.

184 - La somma di lavoro compiuta dal Regiomontano durante la sua breve esistenza è veramente meravigliosa. Sia pure che l'elenco degli scritti da lui redatti comprenda scritti puramente abbozzati, tuttavia non v'ha dubbio che il campo da lui abbracciato presentasi talmente vasto che, anche il solo percorrerlo fugacemente, avrebbe occupato parecchie vite di mediocre laboriosità; e se egli potè vagheggiare di condurre a termine versioni latine di Tolomeo, Euclide, Archimede, Apollonio e altri geometri greci minori e inoltre curare edizioni migliorate degli scritti recanti la firma di Giordano Nemorario, segno è che egli ne conosceva il valore, per averli studiati a fondo.

Tale induzione indiretta riceve una preziosa conferma dalla Prolusione sulla storia della matematica, che già citammo, e di cui ci corre l'obbligo di indicare il contenuto, specialmente nell'intento di offrire al lettore i mezzi per venire a conoscere quali fossero le antiche opere che, grazie alle meritorie fatiche degli umanisti, erano conosciute dai dotti europei del secolo XV.

« Da più di due anni », così disse esordendo il Regiomontano « tac-

[1] In una lettera scritta al Bianchini nel 1464, ove è annunciata tale scoperta, è rilevata la circostanza che, mentre nella prefazione si parla di tredici libri, il manoscritto veneto ne contiene soltanto sei.

ciono nell'Ateneo patavino le lezioni d'Astronomia »; perciò nell'intento di agevolare ai propri ascoltatori l'intelligenza delle teorie dovute all'astronomo arabo Alfergani [1], egli ritenne opportuno di gettare uno sguardo sulla totalità delle scienze matematiche. Per lui questa è la scienza delle grandezze e comprende Geometria e Aritmetica, discipline di cui la prima si occupa di enti continui, mentre la seconda tratta di enti discreti. La geometria sorse in Egitto per dirimere le questioni nascenti in conseguenza delle periodiche innondazioni del Nilo e molti scienziati se ne occuparono; Euclide da Megara (*sic*) riunì in 13 Libri tutto quanto sapevasi ai suoi tempi. Ipsicle vi aggiunse due Libri, Boezio, ne tradusse in latino tutti i 15 Libri, mentre Atelardo, Alfredo [2] e finalmente Campano rimaneggiarono il tutto. Seguirono Apollonio con le sue *Coniche* non ancora tradotte, e Archimede le cui opere lo furono da Gherardo Cremonese. Nello scritto di Archimede sulle spirali è fatto il tentativo di rappresentare una circonferenza con una retta nell'intento di quadrare il cerchio, problema che attende tuttora il proprio risolutore; Archimede ha anche scritto sulla misura del cerchio ed altro. Regiomontano ricorda poi Eutocio come commentatore di Archimede, Teodosio e Menelao. Riguardo all'aritmetica egli riconosce essere difficile dire come nacque, ma è indubitato che Pitagora s'immortalò per le sue conoscenze sui numeri; all'aritmetica Euclide dedicò i Libri VII-IX dei suoi *Elementi,* a cui s'inspirò Giordano nello scrivere i suoi dieci libri sullo stesso argomento; Giordano ne scrisse poi altri 3, intitolati *De numeris datis*. I tredici Libri di Diofanto non furono ancora tradotti dal greco; ivi, afferma il nostro matematico, si trova tutto il fiore dell'aritmetica, cioè l'« ars rei et census » detta « algebra » con vocabolo arabo. Fra i latini intenditori di tali cose egli cita soltanto il Bianchini [3], mentre ricorda Barlaam perchè scrisse sei libri d'aritmetica in greco [4]. Egli passa poi all'astronomia, campo in cui noi non lo seguiremo, finendo con un commosso elogio del suo maestro Peuerbach.

185 - Quella scienza fu il campo alla cui coltivazione il Nostro dedicò il meglio delle sue forze: è appunto in servigio di essa che, verso il 1464, compose la famosa opera *De triangulis omnimodis libri V* (stampata nel 1533), primo trattato di trigonometria recante la firma di un europeo; nel comporlo egli si giovò degli scritti congeneri di Nasir ed din (v. n. 154), mentre nulla prova che egli abbia conosciuti quelli di Levi ben Gerson (v. n. 178-9), autore col quale però egli manifesta notevoli punti di contatto.

Le cinquantasette proposizioni che compongono il I Libro di quel-

---

(1) Si tratta dello scienziato (morto nell'833 o 844) il cui nome completo è Ahmed ben Muhammed ben Muhammed ben Ketir al Fargani; sulle sue opere si vegga il II volume dell'opera di P. DUHEM, *Le système du monde* (Paris, 1914).

(2) Accennasi forse ad una versione compiuta all'epoca di un re inglese di tal nome?

(3) Si allude qui al noto (e già citato) astronomo Giovanni Bianchini, nato a Bologna ma vissuto a Ferrara durante il secolo XV. Non si comprende questa citazione del Regiomontano dal momento che, come dice il Tiraboschi (*Storia delle lett. ital.*, t. VI, p. I, pagg. 253-5), l'unico suo scritto matematico che si conosca (ed è tuttora inedito) reca il titolo *De sinibus*.

(4) Noti il lettore l'assenza del nome Fibonacci e degli algebristi italieni posteriori.

l'opera hanno carattere propedeutico; alcune direbbersi scritte da un matematico greco del periodo aureo (da notare che per la dimostrazione del teorema delle tre altezze, l'autore rinvia ad altro suo scritto), mentre altre servono di base ad un'esposizione metodica della trigonometria, fondata sull'uso dei seni degli angoli o dei loro complementi.

Nel II Libro, che comprende trentatrè proposizioni, incontriamo il teorema dei seni per triangoli rettilinei, circostanza che indusse la generalità degli storici ad attribuirne a lui la paternità, mentre oggi sappiamo (v. n. 179) che egli era stato preceduto dal Levi ben Gerson. Nello stesso si trovano molti problemi concerenti i triangoli, risoluti mediante l'algebra retorica, anche nei casi in cui la soluzione geometrica non offriva alcuna difficoltà. Citiamo come esempio la costruzione di un triangolo (fig. 32) di cui si conosca la base $BC = a$ la corrispondente altezza $AD = h$ e il rapporto $\mu$ degli altri due lati. Questo problema si risolve graficamente senza alcun stento da chi ricordi che è una circonferenza il luogo dei punti le cui distanze fra due punti fissi formano un rapporto costante; il Regiomontano lo tratta invece col calcolo, assumendo come incognite la metà del segmento $EC$, avendo antecipatamente preso $DE = DB$; allora con semplici applicazioni del teorema di Pitagora giunge a un risultato equivalente alla seguente equazione di secondo grado:

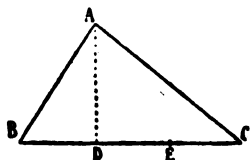



Fig. 32.

$$x^2 + \frac{a^2}{4} + h^2 = \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} a x.$$

Le cinquantasei proposizioni del III Libro e le prime quindici (fra le trentaquattro) del IV riproducono la sostanza della Sferica degli antichi; per scriverle il nostro autore ha senza dubbio tratto gran profitto da Teodosio e ancor più da Menelao. Notiamo nel III Libro il teorema dei seni per triangoli sferici qualisivogliano, nonchè le relazioni che passano fra gli elementi di un triangolo sferico $ABC$, rettangolo in $C$, che oggi si esprimono con le seguenti formole:

$$\text{sen}\, A \cdot \cos b = \cos B, \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

La seconda rientra evidentemente come caso speciale nel cosidetto « teorema del coseno », il quale s'incontra nel IV Libro dell'opera in esame sotto la forma:

$$\frac{\text{sen ver}\, C}{\text{sen ver}\, c - \text{sen ver}\, (a - b)} = \frac{1}{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b};$$

il resto di detto Libro (nel quale si trovano quindici proposizioni) si riferisce a costruzioni di triangoli sferici, in base a svariati sistemi di dati numerici.

Quest'opera del Regiomontano, essendo stata data alle stampe circa più di mezzo secolo dopo che il suo autore era sceso nella tomba, ci si presenta in una forma che probabilmente non è quale l'autore l'aveva

vagheggiata. Servono ad essa di complementi una *Tabula primi mobilis* e una *Tabula directionum*; la prima è una tavola a doppia entrata per calcolare gli elementi di un triangolo sferico rettangolo in $C$ mediante la formola

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, c \cdot \text{sen}\, A;$$

la seconda serve al calcolo di tangenti, senza però che queste nuove linee trigonometriche siano designate con un nome speciale.

In uno scritto *Contra commentatorem Aristotelis Averroem*, il cui titolo leggesi nell'elenco delle sue opere ma che non è noto, egli probabilmente ha per primo stabilito, contro l'opinione di Aristotele, R. Bacone e Bradwardine, l'impossibilità di riempire lo spazio con poliedri regolari che non siano cubi.

186 - Mentre i lavori testè brevemente analizzati cadono sul ponte che congiunge la geometria all'astronomia, altri documenti porgono la prova dell'interesse e delle attitudini del Regiomontano per le ricerche esclusivamente teoriche. Come tali ci si presentano alcune *Aggiunte agli Elementi di Euclide*, fra le quali spiccano le considerazioni sopra la somma degli angoli di un poligono stellato, naturale proseguimento di quelle, a noi già note, del Campano e del Bradwardine.

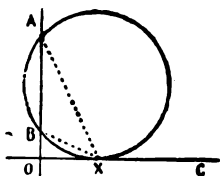



Fig. 33.

Di altre ricerche matematiche del Regiomontano dà notizia il carteggio che egli tenne con scienziati del suo tempo. Citiamo anzitutto il seguente problema di massimo. Data (fig. 33) un'asta verticale $A\,B$, determinare sul terreno $O\,C$ un punto $X$ dal quale essa sia vista sotto l'angolo massimo. È il primo problema del genere che appaia nella letteratura matematica dopo Apollonio; esso risolvesi agevolmente determinando il punto di contatto della retta $O\,C$ con la circonferenza ad essa tangente che passa per i punti $A$ e $B$.

Non meno notevole è quest'altra questione proposta dal Regiomontano al Bianchini: In un triangolo $A\,B\,C$ di lati $A\,B = 18$, $A\,C = 25$, $B\,C = 29$ condurre una retta $A\,D$ dal vertice alla base per modo che risulti $B\,D^2 + A\,D . A\,B = A\,B^2$. Ora alcune considerazioni elementari provano che la si risolve mediante un'equazione biquadratica che si abbassa immediatamente al terzo grado. Regiomontano non era in grado di risolvere questa, ma si accorse che la risoluzione di essa equivale alla ricerca della corda di 1° supponendo nota la corda di 3°; perciò il nostro matematico potè con ragione scrivere all'amico: dammi la retta $B\,D$ e io ti trovo la corda dell'arco di 1°. Al lettore non sfuggirà la relazione strettissima che passa fra l'equazione di Regiomontano e quella a cui Al Biruni ridusse (v. n. 150) la ricerca del lato dell'ennagono regolare inscritto in un dato cerchio; non possiamo però tacere che, mentre lo scienziato arabo seppe calcolarne per approssimazione la radice positiva, il Regiomontano si arresta di fronte a quella trovata; si direbbe dunque che il metodo orientale per risolvere le equazioni numeriche, che Leo-

nardo Pisano ben conosceva (v. n. 168), non giunse in generale dominio degli scienziati europei.

Tra gli altri problemi che s'incontrano nella corrispondenza epistolare del Regiomontano, citiamo quelli che si enunciano algebricamente come segue:

1. $x+y+z=240$; $97x+56y+3z=16047$.

2. $17x+15=13y+11=10z+3$.

3. $23x+12=17y+7=10z+3$.

4. $x+y+z=116$, $x^2+y^2+z^2=4624$.

5. Trovare tre numeri in progressione armonica il minimo dei quali superi 500.000.

6. Trovare tre quadrati in progressione armonica.

7. Trovare tre quadrati in progressione aritmetica, di cui il più piccolo superi 20.000.

8. Trovare tre interi di somma 214, i cui quadrati siano in progressione aritmetica.

9. Trovare quattro quadrati la cui somma sia un quadrato.

10. Trovare venti quadrati la cui somma sia un quadrato superiore a 300.000.

I primi tre appartengono a tipi da tempo conosciuti; infatti il primo rientra nella categoria dei « problemi dei cento uccelli » che trovammo in Cina, fra gli Arabi e anche nel *Liber Abaci;* mentre il secondo e terzo riduconsi alla ricerca di un numero conoscendo i resti che esso dà dividendolo per numeri assegnati (regola *ta yen* dei Cinesi, n. 121). Alcuni altri direbbersi ispirati dal *Liber quadratorum* del Fibonacci. I problemi 9 e 10 mostrano che il Regiomontano ignorava la decomponibilità di qualunque numero in quattro quadrati, che era già stata intuita da Diofanto. Che Regiomontano sapesse risolvere tutti quei problemi non è certo; però egli si esprime in modo da far credere che egli era in grado di farlo; comunque è merito suo di avere richiamato l'attenzione degli studiosi sopra questioni che l'esumazione dell'opera di Diofanto doveva ben presto riporre all'ordine del giorno.

Se volgiamo uno sguardo all'opera matematica compiuta durante i tre secoli che seguirono l'apparizione delle opere di Leonardo Fibonacci, non tarderemo a riconoscere che le rosee speranze che queste potevano ragionevolmente far sorgere, furono in gran parte deluse, malgrado l'impegno con cui cominciarono allora ad essere studiate le opere matematiche [1]. Due soli capitoli della matematica subirono allora rile-

---

[1] Una prova di questo impegno è offerta da un gruppo di studiosi Ebrei, vissuti nel Lombardo-Veneto durante il secolo XV, e che cercavano nella serena contemplazione delle verità scientifiche qualche sollievo alle persecuzioni di cui erano vittime essi ed i loro correligionari. Come rappresentante di esso possiamo citare l'unico del quale si è serbata memoria, Simone Motot, della cui vita nulla si conosce e di cui due opere ebbero l'onore di traduzione e di stampa, cioè: I. *Un trattato di algebra,* basata sulla letteratura italiana post-leonardiana, ma non privo di originalità nelle dimostrazioni e in qualche risultato; II. *Un'opera sugli asintoti,* inspirata alla massima del celebre filosofo

vanti migliorie: l'arte del calcolo, o logistica che dir si voglia, grazie alla vittoria che finirono per ottenere le cifre indo-arabiche su quelle che il Medio Evo latino aveva ereditato dai Romani; e la trigonometria, per effetto di un'altra ventata vivificatrice giuntaci dall'Oriente, cioè la sostituzione metodica dei seni alle corde degli archi circolari: grazie a siffatta innovazione quella disciplina acquistò la forza necessaria per disimpegnare i molteplici uffici a cui viene destinata dalle matematiche pure e applicate.

Invece la geometria rimase stazionaria, appare fors'anche a un livello più basso di quello che era stato raggiunto dai Greci e dagli Arabi; a toglierla da questo stato d'indolente torpore valsero, non considerazioni puramente teoriche, ma il miraggio di nuove importanti applicazioni, dei cui inizi terremo parola nel seguente Capitolo.

---

Maimonide «tutto quanto si può immaginare è possibile, tutto quello che non si riesce ad immaginare è impossibile», inteso a stabilirne la fondatezza sull'esempio offerto dagli asintoti di un iperbole e atta dimostrare come, sin dal secolo xv, le dottrine apolloniane cominciassero a essere nuovamente conosciute in Europa.

Il Giusburg (*Scripta mathem.*, t. I, 1932) ha poi fatto notare che nel periodo 1361-1440, visse nell'isola di Majorca, En Bellstram Efraim Gerouds al quale sembra doversi attribuire la formola $S = 2 \pi r h$, che esprime l'area del segmento sferico (raggio $r$ e altezza $h$), la quale non compare nella letteratura matematica che in principio del Sec. xix.

## BIBLIOGRAFIA


M. Curtze, *Kommentar zum «Tractatus de numeris datis» des Jordanus Nemorarius* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. XXXVI, 1891).

M. Curtze, *Jordani Nemorarii Geometria vel de Triangulis*, Libri IV (Mitth. des Coppernicus-Verein, t. VI, 1887).

J. O. Halliwel, *Rara mathematica* (London, 1839). (I Cap., Johannis de Sacrobosco, *Tractatus de arte numerandi*).

M. Curtze, *Petri Philomeni de Dacia, in algorismo vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius* (Nauniae, 1897).

C. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie* (Bull. di bibl. e storia, t. XV, 1882).

Vincentis Bellovacensis, *Speculum doctrinale* (1ª ed., Strassburg, 1468; 2ª, Douai, 1624).

J. D. Bond, *Quadripartitum Ricardi Walynforde de sinibus demonstratis* (Isis, vol. V, n. 13, 1923).

G. Lange, *Sefer Maassei Choscheb. Die Praxis des Rechners. Ein hebräisch arithmetisches Werk des Levi ben Gerson aus dem Jahre* 1321 (Frankfurt a. M., 1909).

J. Carlebach, *Lewi ben Gerson als Mathematiker* (Berlin, 1910).

*Tractatus* Georgii Purbachii *super Propositiones Ptolemaci de sinibus et chordis* (Norimbergae, 1541).

Nicolo' de Cusa, *Opera omnia* (1ª ed., Parisiis, 1514; 2ª ed. Basilae, 1565).

I. de Monte Regio, *De triangulis planis et sphaericis*, I. V. (Venetiis, 1533).

C. T. de Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et Universitatis Altdorfinae*, parte I (Norimberga, 1786; carteggio del Regiomontano).

M. Curtze, *Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder* (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, XII Heft, 1902).

S. Magrini, *Joannes de Blanchinis Ferrariensis e il suo carteggio scientifico col Regiomontano* (1463-64) (Ferrara, 1916).

N. Oresme, *Tractatus de latitudinibus formarum* (Padova, 1482).

M. Curtze, *Der Algorismus Proportionum des Nicolaus Oresme* (Berlin, 1868).

M. Curtze, *Ueber die Handschrift R. 4°-2 der K. Gymnasialbibliothek zu Thorn* (Zeitsch. für Math. u. Phys., t. XIII, 1868).

G. Sacerdote, *Le Livre d'Algèbre et le Problème des asymptotes de Simon Motot* (Revue des études juives, 1893-94).

R. Steale, *Roger Bacon. A student Notes* (Isis, t. XXX, 1933) (ivi è pubblicato per la prima volta un ms. esistente a Parigi).

E. Stamm, *Tractatus de Continuo von Thomas Bradwardine* (Id., t. XXXVI, 1936).

S. Gaudz, *The invention of decimal Fractions and the exponential Calculus by Immanuel Bonfilo of Tarascon* (Id., id.).

## CAPITOLO XIV

# LA GEOMETRIA IN AIUTO DELLA PITTURA

187 - Il desiderio di distinguere l'apparenza dalla realtà nei fenomeni celesti spronò i Greci (e forse qualche popolo di più antica civiltà) allo studio dei fenomeni luminosi; da ciò trasse origine un gruppo di osservazioni e ricerche i cui risultati costituiscono l'ottica degli antichi, disciplina la cui più autentica esposizione superstite è dovuta ad Euclide. Nell'opera del grande alessandrino che concerne questa disciplina, partendo dal fatto che la luce si propaga in linea retta, vengono stabiliti parecchi teoremi che ancora si riguardano quali ingredienti indispensabili di qualunque trattazione matematica della luce: fra le proposizioni dimostrate da Euclide limitiamoci a citare quella che porge una spiegazione del fatto che rette parallele appaiono concorrenti. Un potente stimolo a queste ricerche si ebbe quando i Greci s'imbatterono nel problema di dipingere le scene dei teatri, per modo da produrre negli spettatori l'illusione della realtà; ed infatti si è serbata memoria di tentativi intesi a risolvere siffatto problema che risalgono all'epoca (v sec. a. C.) in cui cominciarono a rappresentarsi le tragedie di Eschilo.

Ricerche nell'indicata direzione furono proseguite anche durante l'epoca Romana e persino durante il tenebroso Medio-Evo. Allora fu costituita la disciplina detta in Europa « Prospettiva » sino dal giorno in cui fu tradotto nella lingua di Cicerone un trattato sulla materia di Ibn Hitham (v. n. 149) o Alhazen secondo la grafia adottata sin d'allora in Europa. Questa versione, probabilmente dovuta a Gherardo Cremonese, ebbe grande diffusione perchè stampata (1572) per cura del matematico francese P. de la Ramée (v. n. 244). Ivi trovasi per la prima volta adottato il fecondo concetto secondo cui l'occhio dell'osservatore è centro di una stella di raggi luminosi giuntivi dai vari punti degli oggetti osservati.

L'importanza, anche puramente teorica, della prospettiva, andò poi gradatamente affermandosi; lo prova il fatto che essa si trova sempre nel quadro delle materie insegnate nelle Università medioevali. Giovanni Peckham (1242-1292), arcivescovo di Canterbury, giudicò opportuno scriverne una nuova trattazione ad uso delle scuole inglesi, la quale subiva poco dopo una trasfigurazione per opera di un suo conterraneo a noi già noto, T. Bradwardine. A concetti congeneri è informata la *Perspectiva Vitellionis*, dovuta a uno studioso polacco del sec. XIV, Witelo, forse originario della Turingia e vissuto qualche tempo a Viterbo; essa ebbe un

grande successo, benchè meglio che un'opera originale sia un rifacimento di quella di Alhazen.

188 - Con l'andare del tempo e l'evolversi dell'umanità il vocabolo « Prospettiva » andò gradatamente mutando significato. Essendo ormai ammesso da tutti che la visione si compie mediante raggi luminosi uscenti da tutti i punti dello spazio e concorrenti nell'occhio dell'osservatore, ogni pupilla fu considerata come centro di un « cono visuale » o « cono prospettico » (oggi direbbesi « stella » con maggiore precisione); s'immagini ora che fra l'occhio e l'oggetto contemplato venga interposta una superficie, supposta per semplicità piana, detta « quadro », che si determini il punto in cui essa viene incontrata da ciascun raggio luminoso e che tale punto sia colorato con la stessa tinta che ha quel raggio; nascerà in conseguenza sul quadro un complesso variopinto di punti fisici, il quale produrrà sull'osservatore la stessa impressione dell'oggetto considerato. Ora gli è appunto la delineazione di siffatta figura che oggi riguardasi come compito della prospettiva. Emerge da ciò che questa rappresenta il fondamento teorico della pittura; niuna meraviglia pertanto se furono sommi pittori italiani che se ne occuparono con maggior impegno; di essi furono discepoli coloro che, al di là dell'Alpi, maneggiarono il pennello con incontrastato successo; dei principali fra gli uni e gli altri è debito nostro occuparci.

Spetta a Filippo Brunelleschi, il sommo architetto dell'epoca del Rinascimento (n. a Firenze nel 1377, m. ivi nel 1446), il merito di avere coltivata la prospettiva e in particolare introdotta la costante considerazione dell'« occhio » e del « quadro »; un congenere *forma mentis* si ritrova nel suo discepolo Paolo di Doni detto Uccello (1397-1472). Poco dopo Leon Battista Alberti (n. a Genova il 14 o il 18 febbraio 1404, m. a Roma nel 1472) introduceva il concetto fondamentale di « prospettiva di un corpo », come intersezione del quadro col cono visuale, e il primo cenno delle linee di eguale illuminazione, la cui metodica considerazione costituisce il fondamento della moderna teoria delle ombre e del chiaroscuro.

Ma l'Alberti non fu esclusivamente un grande artista; egli fu uno dei sommi pensatori del Rinascimento che seppero abbracciare l'intero scibile. La sua opera *Della statua* ce lo presenta come provetto nell'arte dello scalpello, *Gli elementi di pittura* fanno fede degli studi da lui compiuti sopra un'altra delle arti maggiori, e la grande opera *De arte aedificatoria* (Firenze, 1485) gli procurò tale rinomanza che un poeta cantò

> Nec minor Euclide est Albertus: vincit et ipsum
> Vitruvium; quisquis celsas extollere moles
> Affectat, nostri relegat munumenta Batistae.

Non basta. Del suo interesse per la geometria pura fa fede la raccolta intitolata *Ludi matematici*, dedicata al principe Meladusio, fratello di Leonello d'Este marchese di Ferrara, il quale aveva manifestato il desiderio di conoscere le norme da applicarsi per misurare gli appezzamenti di terreno. Le regole esposte dall'Alberti non sono esatte nè tampoco originali, ma fanno fede del sapere dell'autore; notiamo fra esse un metodo

per calcolare l'area di un segmento circolare mediante la sua corda $2\,a$ e la sua freccia $b$, la quale oggi si esprime mediante la seguente formola:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2\,b}-b\right)a. \text{ (1)}$$

Altrove l'Alberti insegna a misurare l'altezza di una torre o la larghezza di un fiume o la profondità di un pozzo o il circuito di un campo; l'ultimo dei *Ludi* è dedicato al problema della corona d'Archimede, onde si direbbe che, nello scrivere, l'eminente artista abbia scelto come propria guida piuttosto Erone che Euclide. Una breve appendice alla stessa opera contiene la quadratura della prima delle lunule d'Ipocrate; l'autore l'espone per confutare l'opinione di coloro che giudicano impossibile quadrare aree limitate da archi circolari; e sin qui ha ragione; ma cessa di averla quando aggiunge che, come si è trovato il modo di quadrare quest'area lunare, similmente è possibile quadrare il circolo.

189 - In ordine cronologico a L. B. Alberti segue Pier de Franceschi o, come ordinariamente si scrive, della Francesca (n. a S. Sepolcro nel 1406 o 1416, m. il 13 ottobre 1492) « monarcha ali tempi nostri de la pictura » (come chiamollo Luca Pacioli); egli scrisse, probabilmente nel decennio 1470-1480, un trattato completo di prospettiva sotto il titolo *De perspectiva pingendi*, il primo che venisse composto, non soltanto in Italia, ma in tutto il mondo, il quale ai dì nostri, conseguì l'onore della stampa, ma, manoscritto, venne ampiamente sfruttato da alcuni e spudoratamente saccheggiato da altri. A comporre un'opera di tal fatta il celebre pittore era meravigliosamente preparato, avendo da giovinetto atteso assiduamente allo studio della geometria, tanto che il Vasari non esitò a dirlo « raro nelle difficoltà dei corpi regolari, nell'aritmetica e nella geometria », aggiungendo che « i libri certamente gli hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi ».

Nell'opera succitata l'autore applicò e svolse il concetto albertiano di « prospettiva di un corpo »; si servì, sia pure sotto forma embrionale, di alcuni procedimenti che soltanto nell'odierna geometria descrittiva trovarono il loro completo svolgimento (ci basti addurre come esempio l'uso di rotazioni delle figure obiettive per agevolare la delineazione delle loro prospettive), e finalmente — forse per primo — sfruttò, nel tracciare la prospettiva di un solido, le corrispondenti proiezioni di una serie di sezioni piane. In conseguenza, prima che venisse stabilito il concetto generale d'inviluppo di un sistema di line piane, vide che tutte le curve così risultanti riescono tangenti a una determinata linea, che fu poi riconosciuta come la proiezione del contorno apparente del dato solido.

A stabilire quanto conforme al vero fosse il giudizio pronunciato dal

(1) Volendo giudicare dell'approssimazione che si raggiunge applicando questa formola, giova tener presente che l'espressione esatta dell'area del segmento definito nel testo è:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2\,b}\right)^2 \text{arc sen}\,\frac{2\,a\,b}{a^2+b^2}-\frac{a\,(a^2-b^2)}{2\,b}.$$

Vasari sull'abilità matematica di Pier della Francesca, sta l'opera *De Corporibus regularibus* che, rimasta inedita sino al 1915, fu tradotta in italiano da Luca Pacioli e pubblicata come cosa sua, sotto il titolo di *Divina proportione.* I problemi ivi trattati concernono poligoni e poliedri, figure piane contornate da rette e circoli, e figure solide limitate da piani e sfere; scopo di essi è di effettuare il calcolo di lunghezze, di aree e di volumi, nella supposizione che i dati siano assegnati in numeri; siamo dunque nuovamente in presenza di un imitatore di Erone piuttosto che di un discepolo di Euclide. Per sciogliere tali quesiti bastano spesso, oltre a considerazioni geomitriche, semplici operazioni aritmetiche, ma in buon numero di casi fa d'uopo ricorrere a equazioni lineari o quadratiche. Nessuna citazione permette di rintracciare le fonti a cui attinse l'autore, chè, all'infuori di Euclide, non è ricordato alcuno. Tuttavia un'attenta lettura conduce alla conclusione che non gli erano ignoti alcuni scritti d'Archimede; stanno a provarlo le considerazioni da lui svolte sopra cinque dei tredici poliedri semiregolari. Va ancora notata la presenza del solido che nasce come intersezione di due cilindri circolari retti fra loro perpendicolari, di cui la cubatura trovasi nel *Metodo* di Archimede (v. n. 45): altri giudichi se si tratti o non di una coincidenza fortuita. Non possiamo nè dobbiamo tacere che l'ordinamento della materia lascia molto a desiderare, tanto che sembrerebbe di trovarsi in presenza di una raccolta di problemi suggeriti casualmente al risolutore e di cui questi si è limitato a prendere nota per propria memoria; anticipando su quanto diremo nel prossimo Capitolo, notiamo che Luca Pacioli, traducendo, non ha creduto o non ha saputo addivenire a un riordinamento razionale della materia.

190 - Ultimo in ordine di tempo, ma primo per celebrità e altezza d'intelletto in questa schiera di artisti scienziati italiani, si trova Leonardo da Vinci (n. in Toscana nel 1452, m. ad Amboise [1] il 2 maggio 1519).

Il *Trattato della pittura* pubblicato col suo nome non è opera organica composta da lui, ma risulta da materiali adunati senza applicare alcun criterio direttivo e la cui paternità vuolsi appartenga al pittore della Gioconda. Una cosa però risulta ed è l'idea di Leonardo della necessità che il pittore disponesse di un cospicuo corredo di cognizioni scientifiche. « Studia prima la scienza e poi seguita la pratica nata da essa scienza », egli ammoniva al futuro pittore; e rinforzando aggiungeva: « Quelli che s'innamorano della pratica senza la diligenza, ovvero scienza per dir meglio, sono come i nocchieri ch'entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino ».

---

[1] Ivi fu sepolto per ordine del re di Francia, di cui era ospite; dove si trovin precisamente i suoi resti mortali non è noto con certezza; una pietra sepolcrale esistente in una chiesa del luogo reca la seguente scritta.

Sous cette pierre | reposent las ossements | receuillis dans les | fouilles de l'aucienne | Chapelle Royale d'Amboise | parmi les quels ou suppose | qui se trouvent la dèpoiulles mortelle | de Lèonard de Vinci.

In particolare: « Sempre la pratica deve essere edificata sopra la buona teorica della quale la prospettiva è guida e porta. La prospettiva è briglia e timone della pittura ».

Certamente nessuno avrebbe potuto meglio di Leonardo scrivere un trattato di prospettiva in cui fossero egualmente rispettate le esigenze della teoria e quelle della pratica; ma l'irrequietezza sua, caratteristica che lo portò a gettare meravigliosi sprazzi di luce abbagliante senza portare a compimento opera alcuna, fu a ciò ostacolo insormontabile.

All'infuori della prospettiva che studiò con impegno, all'infuori della meccanica, da lui proclamata « il paradiso delle matematiche », si è Leonardo occupato con frutto delle scienze di cui noi tracciamo la storia? Una risposta definitiva al riguardo non può oggi darsi; la cosa sarà possibile soltanto quando sarà completa la stampa dei manoscritti da lui vergati; oggi ciò può sembrare dubbio, chè le considerazioni geometriche e le costruzioni geometriche ésatte o approssimate che furono sinora rilevate nel famoso *Codice Atlantico* e negli altri manoscritti dati sinora alle stampe non bastano, anche se tutto quanto vi si legge fosse originale, a collocare Leonardo fra coloro che seppero aggiungere qualche pagina alla geometria ereditata dei Greci (l'unica nota ai suoi tempi). Inoltre l'idea da lui manifestata di ottenere la rettificazione della circonferenza facendo scorrere una ruota sopra una asta rettilinea, conferma nell'opinione che egli s'interessasse di geometria solo in quanto questa scienza può riuscire utile ai pittori e agli architetti. È una conclusione che viene confermata dalle applicazioni da lui fatte di alcune lunule d'Ipocrate (v. n. 27) alla quadratura di figure complicate, esteticamente ammirande ma esenti da valore scientifico [1].

191 - L'alta rinomanza raggiunta in tutta Europa da pittori italiani del sec. XV contribuì nel modo più efficace a mostrare quanto utile fosse la cooperazione costante della scienza e dell'arte; in conseguenza la patria nostra divenne allora mèta costante dei pellegrinaggi di coloro cui infiammava la nobile ambizione di emularli. Fra i primi che furono ospiti nostri troviamo Alberto Dürer, della cui morte ricorre il quarto centenario appunto nel giorno in cui è scritta questa pagina. Nato a Norimberga il 20 maggio 1471, nell'officina paterna apprese l'arte dell'orefice e i rudimenti del disegno; ottenne poi dal padre il permesso di dedicarsi completamente alla pittura; a trentacinque anni venne in Italia e nell'ambiente veneziano subì una tale influenza che mai più si cancellò; morì nella sua città nativa il 6 aprile 1528.

Il Dürer va ricordato in una storia della matematica anzitutto perchè passa a ragione per il primo tedesco che abbia mostrato di conoscere i quadrati magici; tale fatto è documentato da una celebre incisione

---

[1] Ad orientare Leonardo verso la geometria influì senza dubbio Luca Pacioli, col quale egli convisse qualche anno alla corte di Lodovico il Moro. Egli si è poi grandemente giovato dei due splendidi volumi in-f. del dotto e battagliero filologo Giorgio Valla (1406-1457), pubblicati postumi a Venezia nel 1501 col titolo *De Expetendis, et fugiendis rebus opus*; chè ivi si trovano importanti squarci di scienziati latini e greci (quali Boezio, Erone, Ippocrate da Chio, ecc.) che sino a quel giorno non avevano avuto l'onore della stampa.

intitolata *Melancholie,* che risale all'anno 1514 e in un angolo della quale si trovano, entro una cornice, i numeri seguenti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

essi costituiscono un quadrato magico, che si trova in Moscopulo (v. n. 100), con la sola differenza che le verticali seconda e terza sono fra loro scambiate ([1]).

L'anno stesso della morte del Dürer fu pubblicata un'opera, di cui a noi sta sott'occhio una versione italiana, destinata agli artisti, ma che va ricordata perchè ha per iscopo di determinare numericamente le dimensioni del corpo umano: gli Italiani avevano stabilita un'alleanza dell'arte con la geometria; il famoso pittore tedesco, procedendo in analoga direzione, estese il patto all'aritmetica!

Ma l'opera che documenta nel modo più chiaro il valore di lui come matematico è quella (pubblicata nel 1525) che nella versione latina che ci sta presente è intitolata *Institutionem geometricarum Libri quatuor.* È una trattazione della geometria del tutto differente da quella che leggesi negli *Elementi* di Euclide, chè scopo di essa è rendere famigliari gli artisti con le considerazioni e le costruzioni geometriche. Dei quattro Libri di cui consta il I è dedicato alle curve, il II alle superficie, il III ai solidi, mentre nel IV sono riunite svariate questioni. Rileviamo nel I molte costruzioni, esatte o sufficientemente approssimate, di poligoni e di figure ornamentali; vi si incontra poi la definizione di una nuova concoide e la descrizione di un apparato per descriverla meccanicamente ([2]). Non sono escluse le coniche e l'elica cilindrica, e vi si trova anche qualche altra curva sghemba più complicata. Ma ciò che va rilevato con meraviglia e grande lode per l'autore è la disinvoltura con cui egli si serve della pianta e dell'alzato per costruire e rappresentare queste linee; perciò con lui si può dire che questo procedimento perda l'aspetto semplicemente statico che aveva in Vitruvio, per acquistare quella forza grazie a cui divenne in grado, non soltanto di rappresentare le figure, ma anche di eseguire su di esse le operazioni geometriche: se quindi il Dürer fu proclamato ([3]) il primo tedesco che

([1]) Una riproduzione della citata incisione si trova nel vol. XVI delle *Opere* di G. Carducci, come illustrazione di un passo del suo lavoro *Degli spiriti e delle forme nella poesia di Giacomo Leopardi*; ivi però il grande poeta chiamò « tavola astronomica » quel quadro di numeri; sembra a prima vista che essa nulla abbia a che vedere con la scienza degli astri; ma siccome vedremo che essa era nota a L. Pacioli che attribuì ad essa (e ai quadrati analoghi) significati astrologici, così la riferita denominazione non è del tutto impropria. Aggiungiamo che il Dürer conobbe probabilmente quel quadrato magico appunto a Bologna dove fu discepolo.

([2]) È una curva di quarto ordine che si presenta sotto tre forme distinte che si trovano disegnate nel t. I, p. 270 del Vol. I dell'opera dell'autore *Curve piane speciali* (Milano, 1930).

([3]) GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, pag. 26 (München, 1877).

abbia scritto di geometria descrittiva, si può trovare questa affermazione lievemente esagerata, ma non destituita di fondamento.

La famigliarità del Dürer con quello che oggi chiamiamo metodo di Monge è confermata dal IV Libro dell'opera in esame ove è insegnata la costruzione e la rappresentazione dei poliedri regolari e semiregolari e ad essi è applicata, non soltanto la prospettiva, ma eziandio lo sviluppo su di un piano. Sorvoliamo sopra le costruzioni relative alla duplicazione del cubo che espone il Dürer nello stesso Libro, perchè s'incontrano già in Platone ed Erone, e notiamo piuttosto che egli applicò la doppia proiezione ortogonale anche al tracciamento delle ombre portate dai poliedri sopra i piani di proiezione. Non v'ha dubbio che se il Dürer avesse trovato continuatori e discepoli i metodi di rappresentazione delle figure non avrebbero tardato ancora quasi tre secoli a costituire un nuovo e importante capitolo della geometria generale. Coloro che vennero dopo di lui — e furono non tedeschi, ma italiani; non artisti, ma scienziati — si adoperarono piuttosto a rendere più perfetti i metodi proprii della prospettiva; di essi ci occuperemo in seguito, dopo che, ritornando indietro di alcuni decenni, avremo descritti i progressi compiuti dalla scienza del numero prima che finisse il secolo xv.

## BIBLIOGRAFIA


G. Ovio, *L'Ottica di Euclide* (Milano, 1918).

*Optice thesaurus* Alhazen, l. VII (Basileae, 1572).

Vitellionis *Perspectivae*, l. X (Norimbergae, 1533).

L. B. Alberti, *Opere volgari per la più parte inedite e tratte dagli autografi*, quattro volumi Firenze, 1844-47).

L. B. Alberti, *Opera ineditae et pauca separatim impressa*, H. Mancini *curante* (Florentiae, 1890).

C. Winterberg, *Petrus Pictor Burgensis de perspectiva pingendi* (Strassburg, 1899). Ediz. critica per cura di G. Nicco Fasola (Firenze, 1942).

G. Mancini, *L'opera « De Corporibus regularibus » di Pietro Franceschi detto della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli* (Mem. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, Classe scienze morali, ecc., vol. XIV, 1913).

L. da Vinci, *Trattato della Pittura* (Bologna, 1786).

C. Ravaisson-Mollien, *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*, t. I-VI (Paris, 1881-1891).

L. da Vinci, *Il Codice Atlantico nella Biblioteca Ambrosiana di Milano. Trascrizione diplomatica e critica di* G. Piumati (Milano, 1894).

*Il Codice Arundel* 263 *nel Museo Britannico di Londra, a cura della Commissione Vinciana* (Roma, 1926-28).

Di Alberto Durero, pittore e geometra chiarissimo, *Della simmetria dei corpi humani* l. IV (Venezia, 1591).

A. Dürer, *Underweisung der messung mit dem zirckel und richtscheyt etc.* (Nümberg, 1525).

Albertus Durerus, *Institutionum geometricarum*, l. IV (Parisiis, 1535).

## CAPITOLO XV

## PRIME MANIFESTAZIONI DELL'ALGEBRA SINCOPATA

### L'Aritmetica di Treviso del 1478

192 - Ai progressi della nostra scienza, come a quelli di ogni altro ramo dello scibile, contribuì in modo sensibilissimo l'invenzione della stampa con caratteri mobili, avvenuta appunto nella seconda metà del sec. xv, giacchè la si può far datare dal 1456, anno in cui Giovanni Gutenberg (1400-1468 circa) pubblicò a Magonza la celebre *Bibbia* che reca il suo nome. Mentre sino a quel giorno il possesso dei libri era un privilegio riserbato ai pochi eccezionalmente favoriti dalla fortuna, in seguito il libro stampato penetrò in tutte le case, diffondendo anche fra gli umili la conoscenza dei prodotti dell'ingegno umano: da quel momento si iniziò la democratizzazione del sapere. La nuova invenzione (che ben a ragione può fregiarsi del motto « a me nulla resiste » inciso sulla casa di chi la inventò) si diffuse con ammirabile velocità, tanto che, prima che finisse il sec. xv, l'Europa contava non meno di settanta tipografie. Per attività in questo campo eccelle Venezia, la quale ne ospitò non meno di cinquanta (fra cui quella celeberrima di Aldo Manuzio), che produssero circa tremila opere; sicchè, contando a circa trecento le copie fatte di ogni opera, si accosta al milione il numero dei volumi che la regina dell'Adriatico sparse in breve tempo in tutto il mondo.

Per quanto concerne le scienze esatte va notato che sino dal 1482 ebbero l'onore della stampa gli *Elementi* di Euclide, i quali da quel momento ricevettere tante riproduzioni e traduzioni da potere essere in grado di gareggiare vittoriosamente con la *Divina Commedia*. Al sommo istitutore del Museo non tardarono a seguire i più grandi geometri della Grecia e poi molti dei mediocri che si sforzarono di calcarne le orme gloriose.

193 - Non entra nel nostro programma il presentarne qui un elenco: ma va ricordato che nel 1478 vide la luce a Treviso il primo manuale di aritmetica che si conosca (1). Scritto anonimo, i cui modesti intenti sono dichiarati dall'autore esordendo: « Incomincia », egli scrive, « una practica molto bona ed utile a ciaschaduno chi vuole aparare l'arte de la

(1) Esso è oggi una delle più preziose rarità bibliografiche; il Boncompagni ne conosceva sette esemplari; un ottavo fu poi scoperto nella Biblioteca universitaria di Bologna.

merchadantia chiamata vulgarmente l'arte dell'abbacho ». Il movente a sobbarcarsi a tale fatica è pure indicato dall'autore, scrivendo: « Pregato più e più volte da alchuni zovani a mi molto dilectissimi: li quali pretendevano a dover voler fare la merchadantia: che per loro amore me piacesse affadigarme uno puocho: de dargli in scritto qualche fundamento cerca l'arte de aritmetica chiamata vulgarmente l'abbacho. Onde io constretto per amor loro: et etiandio ad utilità de tuti chi pretendano a quella: segondo la piccola intelligentia vel ingegno mio: ho deliberato se non in tuto: in parte tamen satisfare a loro acio che loro yirtuo si desideri utile frutto recever posseano ».

Giova qui osservare in generale che i trattati di aritmetica scritti nel Medio Evo o erano esclusivamente teorici (modellati cioè sopra Nicomaco e Boezio, con qualche sprazzo di luce euclidea), o quasi del tutto pratici (erano detti allora di algorismo), o finalmente si proponevano scopi esclusivamente commerciali o ecclesiastici (servire, cioè, alla determinazione dell'epoca in cui cadono le feste mobili). Ora l'autore dell'*Aritmetica* di Treviso con le 62 pagine da lui scritte volle venire in soccorso tanto dei commercianti quanto degli ecclesiastici. Buona parte del suo libretto concerne, infatti, l'esecuzione delle quattro operazioni aritmetiche fondamentali [1], specialmente la moltiplicazione e la divisione, per eseguire le quali erano in uso parecchi procedimenti, che avevano ricevuti nomi speciali; così la moltiplicazione eseguivasi per colonna, per crocetta e per scacchiera, mentre si aveva un « partire per colonna » o « per battello ». Più che veri e propri metodi sono espedienti ideati dai pratici, alcuni dei quali consistono esclusivamente nel modo in cui disporre i numeri dati o i risultati delle operazioni parziali in cui si decompone la moltiplicazione o la divisione su numeri grandi; alcuni furono mantenuti, epperò ci dispensiamo dal ricordarli perchè tutti li conoscono; gli altri scomparvero onde non presentano oggi alcun interesse [2]. Riguardo al calcolo del « numero aureo » che serve notoriamente a determinare la Pasqua e le altre feste mobili, il nostro autore lo determina aggiungendo l'unità al quoziente per 19 della lunghezza dell'anno e questa viene assunta in base al sistema ebraico di

---

[1] L'autore nota che ciascuna ha un suo speciale articolo; cioè l'addizione *et*, la sottrazione *de*, la moltiplicazione *fio* (via), la divisione *in*.

[2] Che questi artifici siansi mantenuti per tutto il corso del secolo XVI « et ultra », risulta dal passo dell'opera intitolata *La piazza universale di tutte le professioni* (Venezia 1585) di Tommaso Garzoni (1549-1589) che si riferisce ai Ragionieri e che giova qui trascrivere: « Segue poi l'Aritmetica, che appartiene a Contisti, ovvero Computisti, nella quale si trova il numerare, il sommare, il sottrarre il moltiplicare, con le sue maniere, cioè a castello, a colonna, per gli scacchi, per crocetta, per quadrato, per gelosia, per ripiego, a scapezzo. Vi è poi il partire e sue maniere, cioè a regola, a danda, a galea, a schifare (ma questo è delli rotti), a ripiego, e quivi sarà l'infilzare. Vi è poi la progressione continua, o discontinua, o proporzionale, o molteplice, o particolare. E poi v'è il pigliar parte, il ridurre a parte, il trovar le radici; e all'ultimo la prova e le sue maniere, cioè la prova del sette, del nove, dell'undici, e del moltiplicato il partitore contro il prodotto. E con questa professione vi è il tener libro, e semplice e doppio come fanno i mercanti, con gli accordi vendite e compre che essi fanno; e così l'insegnar d'abbaco semplice, come fanno i maestri d'abbaco de' quali oggidì si trova numero grandissimo per le città e castella d'ogni regione ».

far il mese di 29 giorni, 12 ore e 793 punti, il punto essendo la 1080.ma parte dell'ora.

Nel congedarsi dai giovani che lo avevano indotto a sobbarcarsi a tanta fatica, l'autore con veneta bonomia osserva: « Eco miei carissima fornita l'opera con desiderio grande da mi richiesta. La quale se con tanto studio versereti con quanta l'ha impetrata li vostri ardenti desideri non dubito vi reportara incredibile frutto ».

Durante la decade 1480-1490 furono pubblicati in Italia numerosi trattati di aritmetica pratica. Il più esteso è quello avente per titolo *Qui comenza la nobel opera de arthmethica ne la qual se tracta tute cosse amercantia pertinente facta e compilata p Pietro Borgi* (o Borghi) *de Vienesia;* esso ebbe un grande successo dal momento che a Venezia nel corso d'un secolo fu stampato non meno di sedici volte (1484, 1488, 1491, 1505, 1509, 1517, 1528, 1534, 1540, 1550, 1551, 1560, 1561, 1567, 1577). Scritto in un italiano alquanto lagunare, si stacca completamente dalle opere di quel tipo greco che Boezio diffuse in Europa. si apre con una poesia elogiosa, di cui esso alcuni dei primi versi:

Chi de arte matematiche ha piacere
Che tengon di certeza el primo grado
Avanti che diquelle tenti el vado
Vogli la presente opera vedere
Per questa lui potra certo sapere
Se error sara nel calculo notado
Per questa esser potra certificado
A formar conti di tutto maniere, ecc.

È superfluo entrare in una minuta analisi di un'opera di intenti così modesti.

## L'Aritmetica di Bamberg del 1483

194 - All'*Aritmetica* di Treviso, primo manuale del genere che sia stato stampato nel mondo, fece seguito altro congenere stampato nel 1482 a Bamberg (Baviera) e composto da un professore di Norimberga, Ulrico Wagner; purtroppo non se ne conosce alcuna copia completa; soltanto nella civica Biblioteca di quella città se ne conservano, qual preziosa reliquia, nove frammenti pergamenacei di un'ampiezza non maggiore di un biglietto di visita.

Ma nell'anno successivo, vedeva la luce nella stessa città un altro manuale sulla stessa materia, del quale almeno una copia si è salvata dall'azione edace del tempo; oggi esso rappresenta una rarità bibliografica, ma un tempo quel lavoro deve avere avuto una larga diffusione, chè fu sfruttato largamente da coloro che in Germania scrissero poi sull'arte del calcolo. Adoperiamo la parola « arte » e non « scienza » chè l'*Aritmetica* di Bamberg ha evidentemente un intento analogo a quella di Treviso, quello cioè di addestrare i commercianti a servirsi dei numeri nelle loro consuete transazioni. Ma il programma che svolge è più esteso, come risulta dall'indice della materia contenuta nei 77 fogli di cui consta: indice di cui giudichiamo opportuno dar qui un rias-

sunto, dopo avere notato che esso offre una novella prova dell'influenza preponderante che l'Italia esercitava allora sulla Germania per quanto concerne i calcoli aritmetici, specialmente nelle loro applicazioni commerciali.

I. Numerazione. II. Addizione; relativa prova del 7. III. Moltiplicazione (in cinque modi), uno di questi risulta dal seguente esempio:

$$\begin{array}{r l}
640180 & \\
\hline
640180 & /\ 1 \\
5121440 & /\ 8 \\
000000 & /\ 0 \\
3200900 & /\ 5 \\
000000 & /\ 0 \\
4481260 & /\ 7 \\
\hline
451378754580 &
\end{array}$$

V. Divisione; progressioni aritmetiche e geometriche: ivi sono applicate le formole

$$1 + 2 + \dots + n = (1 + n)\,\frac{n}{2},$$

$$1 + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + q^{n-1}.$$

VI. Moltiplicazione di interi per frazioni o di frazioni fra di loro (una frazione è indicata ponendone uno sopra l'altro i due termini, usando però numeri di altezza metà di quella degli interi). VII. Addizione delle frazioni. VIII. Sottrazione delle frazioni. IX. Divisione delle frazioni. X. La « regola aurea » (cioè la regola del tre). XI. Calcoli relativi al cambio di monete. XII. Calcoli di guadagni e perdite. XIII. Regole di società. XIV. « Tolletrechnung » (nome intraducibile, di origine italiana; per trovarne l'etimologia conviene ricordare che nel dialetto veneto invece di *tavola* si dice *tola,* donde il diminutivo *toletta*; ora i calcoli esposti in questo capitolo del manuale bamberghese si eseguono appunto mediante una tavoletta disposta opportunamente e che in Baviera fu nota grazie alle attive relazioni commerciali esistenti fra Venezia e Norimberga). XV. Calcoli per lo scambio di merci. XVI. Calcoli necessari per l'acquisto di oro non monetato. XVII. Calcolo da eseguirsi applicando la regola del tre. XVIII. Cambio di frazioni di fiorini e scellini. XIX-XXI. Tabelle utili per lo scambio di merci.

Questo manuale contiene dunque più e meno di quello di Treviso; i commercianti vi trovano di più; ma chi vuol conoscere l'epoca della Pasqua non potrà ricevere da esso alcun aiuto; questa mancanza è però largamente compensata dall'unità e abbondanza della materia trattata.

## N. Chuquet e il suo "Triparty" (1484)

195 - Dell'influenza esercitata nel campo aritmetico dall'Italia nei secoli che seguirono la comparsa del *Liber Abaci* si ha una nuova convincentissima prova in un'opera scritta nel 1484 da un certo Nicola Chuquet (personaggio del resto del tutto ignoto), il quale, per manifestare essere dessa composta di tre parti, l'intitolò *Le triparty en la science des nombres*. Quantunque scritta nel francese del tempo, vi si notano frequenti italianismi, la presenza dei quali è facile spiegare da chi ricordi come Lione, ove quel libro fu scritto, era sede di una floridissima colonia italiana.

Altra conferma della detta influenza si ha nel sistema usato dal Chuquet per scrivere i numeri di più di sei cifre; mentre i francesi sogliono scomporli in gruppi di tre cifre ciascuno, Chuquet dà la preferenza a quelli di sei, come già aveva fatto il Fibonacci.

Un concetto generale della materia trattata risulta dal seguente indice dei Capitoli di cui consta:

*Parte I*. Cap. 1. Numeri interi. 2. Numeri frazionari. 3. Delle progressioni; dei numeri perfetti e amici. Numeri proporzionali e loro proprietà. 4. Regole del tre e congeneri.

*Parte II*. Delle radici. Cap. 1. Riduzione di una o più radici dissimili a una unica. 2. Come si possono estrarre le radici. 3. Come le radici si possono trasformare e addizionare. 4. Come si possono sottrarre. 5. Moltiplicazione delle radici. 6. Divisione delle radici.

Nella *Parte III* sotto il titolo « Rigle des premiers » viene esposta la risoluzione di semplici equazioni, dall'autore chiamate « equipolences des nombres ».

La caratteristica più notevole di quest'opera consiste nel fatto che ivi fanno la loro prima comparsa gli esponenti. Al Chuquet essi servono anzitutto per indicare le radici di vario ordine; così $R^2$ e $R^3$ vengono usate da lui per rappresentare le radici quadratiche e cubiche. Inoltre le lettere $p$ e $m$ sono da lui impiegate per indicare l'addizione e la sottrazione. A meglio illustrare la risultante simbolica serve il seguente esempio:

$$R^2 R^3 \cdot 13 \cdot p \cdot R^2 7 \cdot m \cdot R^3 10$$

che equivale a

$$\sqrt{\sqrt[3]{13} + \sqrt{7} - \sqrt[3]{10}}.$$

Ma gli esponenti sono adoperati dall'autore anche in un senso che meglio si approssima a quello in uso oggi, cioè per indicare le successive potenze dell'incognita d'un'equazione (quantunque Chuquet abbia usato anche segni speciali per rappresentarne le quattro prime potenze), senza nemmeno escludere il caso di esponenti negativi, come risulta dalla seguente frase: $8^3$ multiplie par $7^m$ monte $56^2$, la quale nel linguaggio dell'algebra moderna si scriverebbe così $8x^3 \,.\, 7x^{-1} = 56x^2$.

Scritturazioni di tal fatta sono certamente meno comode delle nostre, ma sono sintomi sicuri della metamorfosi che l'algebra stava subendo per passare da retorica a sincopata; mentre la presenza di esponenti negativi mostra che sino da allora cominciavasi ad avvertire il bisogno che la scienza del numero assurgesse a completa generalità; fatto questo che è confermato osservando che Chuquet non esclude la possibilità di tener conto delle due radici che ammettono certe equazioni quadratiche.

A facilitare l'esecuzione delle moltiplicazioni l'autore presenta una modesta Tavola di moltiplicazione dei numeri 1, 2,..., 9 fra di loro, adottando però una disposizione (triangolare) molto meno espressiva di quella (quadratica) oggi in uso; mentre, per agevolare la ricerca delle radici, pone a disposizione dei lettori le prime dieci potenze dei primi dieci numeri della serie naturale, osservando che il quadrato di un numero non può mai terminare con una delle cifre 2, 3, 7, 8, mentre un biquadrato non può che finire con una delle cifre 0, 1, 5, 6.

Per la moltiplicazione e la divisione dei numeri aventi un segno l'autore dà regole esatte, che formula come segue: « Qui multiplie plus par plus et moins par moins il en vient plus. Et qui multiple plus par moins vel viceversa il en vient toujours moins. - Qui partit plus par plus et moins par moins il en vient plus. Et qui partit plus par moins ou moins par plus il en vient moins ».

Le equazioni considerate dal nostro autore sono più generali di quelle che incontrammo sinora, quantunque siano riducibili a quadratiche; sono tutte trinomie e appartengono ai quattro tipi seguenti:

$$a\,x^m = b\,x^{m+n} \quad , \quad a\,x^m + b\,x^{m+n} = c\,x^{m+2n}$$

$$a\,x^m = b\,x^{m+n} + c\,x^{m+2n} \quad , \quad a\,x^m + b\,x^{m+2n} = c\,x^{m+n}\,.$$

Notevoli sono le frasi con cui chiudesi l'opera in questione, le quali manifestano la fiducia dell'autore che, in un avvenire più o meno lontano, si sarebbero potute risolvere le equazioni di gradi superiori al secondo, fiducia che — come vedremo parlando degli Arabi e come vedremo parlando del Pacioli — non era allora condivisa da persone competenti.

196 - Certamente non è questo tutto quanto di originale e importante si trovi nel *Triparty;* però il fin qui detto sembraci sufficiente a stabilirne la superiorità sugli altri scritti sinora esaminati nel presente Capitolo; questi altro non erano che modesti manuali destinati ai commercianti, la cui materia era determinata dalle esigenze dei traffici e la cui ampiezza era commisurata all'ampiezza di questi, mentre quella presenta i caratteri di una esposizione dottrinale della materia. Inoltre la simbolica usata (limitata, ma non priva di genialità) e la aspirazione alla generalità visibile nell'autore stanno a provare che col *Triparty* l'algebra ha compiuto un indiscutibile passo in avanti, sicchè è da lamentare che, per ragioni che a noi sfuggono, ad esso sia stato negato di usufruire dei vantaggi emananti dalla mirabile invenzione del Gutenberg.

Può stupire che detta opera non contenga alcuna applicazione delle teorie esposte alla risoluzione di quei problemi di contenuto concreto e pratico, che incontrammo in tutte le opere pubblicate a partire dal *Liber Abaci*. Ora, al manoscritto ove si legge il *Triparty*, trovasi allegata una collezione di 166 questioni di quel genere, che risale alla medesima epoca, perchè in un passo di essa è dichiarato che veniva scritta il giorno 2 di maggio del 1484; tutto fa credere che essa sia un altro parto dello stesso Chuquet, chè ben pochi al suo tempo sarebbero stati in grado di considerare coraggiosamente la soluzione negativa di un problema, spingendosi sino a darne una interpretazione ragionevolissima, come è fatto nel corso della soluzione di una delle questioni risolte.

Non è stato sinora sufficientemente rilevato dagli storici il singolare pregio del problema LXXVIII, il quale traducesi nel seguente sistema:

$$x + y = 3\ (z + u) - 100,$$
$$y + z = 4\ (u + x) - 106,$$
$$z + u = 5\ (x + y) - 145,$$
$$u + x = 6\ (y + z) - 170;$$

ora questo è solo in apparenza determinato mentre Chuquet ne dà le due esattissime soluzioni seguenti: 100, 115, 115, 90 e 80, 135, 95, 110.

La maggior parte delle questioni considerate sono di primo grado; ma non mancano quelle di grado superiore, come provano gli esempi seguenti:

$$x^2 + 7 = \square \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13 \quad , \quad x^3 + y^3 + z^3 = 20.$$

Di alcune fra esse si può determinare la provenienza; per alcune la si trova infatti o fra quelle a noi note concernenti la ripartizione d'un'eredità in base alla legislazione romana; altre (fra cui alcuni giuochi che non esigono calcolo alcuno) sono tratte dalle opere di Alcuino e Fibonacci.

Tutto sommato questa raccolta costituisce un prezioso complemento al *Triparty*, che, stampata in unione a questo, avrebbe dato origine a un'opera didattica di cospicuo valore, a cui non sarebbe per fermo mancato il favore dei competenti e del pubblico.

Sgraziatamente essa non vide la luce che nel 1880 e, non in vista degli scopi pei quali essa fu scritta, ma esclusivamente come contributo alla storia delle matematiche. Si direbbe anche che, a differenza di molte altre neppure manoscritta godette di considerevole notorietà, dal momento che meno di otto lustri dal giorno in cui fu scritta, potè venire impunemente saccheggiata da un certo Stefano de la Roche, il quale vi attinse a larga mano nello scrivere la sua *Arismetique nouvellement composée* (Paris, 1520; II ed., ivi, 1538). Ne facciamo menzione in questo punto, benchè essa appartenga ad epoca posteriore a quella di cui stiamo trattando, perchè, non contenendo nulla più (anzi in meno la parte algebrica) del *Triparty*, non merita altro che un cenno fugace, non scompagnato da un biasimo per il plagio di cui si è reso colpevole il suo autore.

## Giovanni Widman

197 - Un considerevole numero di opere manoscritte e anonime esistenti tuttora in biblioteche tedesche, mostra quanto largamente si fossero diffusi in Germania gli studi sull'arte del calcolo e le sue applicazioni pratiche e geometriche; e il nome «die Coss» (derivato da «cosa») con cui era designato l'insieme dei metodi relativi prova, senza alcun dubbio, che erano italiane le fonti a cui avevano attinto i loro autori. Furono allora introdotti e largamente adottati certi simboli speciali per rappresentare l'incognita d'un'equazione e le sue prime potenze che si trovano, sotto il nome di « segni cossici », nella letteratura matematica tedesca di tutto il secolo XVI.

Il primo che, a quanto ci consta, abbia pubblicato in Germania col proprio nome una trattazione metodica dell'argomento e ne abbia fatto oggetto di lezioni universitarie (a Lipsia) è Giovanni Widman di Eger (Boemia). Ignoto è l'anno in cui egli vide la luce, come quello in cui morì; si sa però che egli, appunto a Lipsia, fu immatricolato studente per il semestre invernale dell'anno 1480, che nel settembre 1482 ottenne ivi il diploma di baccelliere, nel dicembre 1485 fu promosso baccelliere in medicina e in gennaio 1486 fu licenziato col grado di « magister artium ». L'opera che gli assicura un posto nella storia della matematica fu pubblicata nel 1489 col titolo *Behend und hübsch rechnung auf allen kauffmannschafften* [1]. Si è dunque in presenza di un lavoro che, per i suoi intenti, deve avvicinarsi più alle aritmetiche di Treviso e di Bamberg, che al *Triparty* [2]. Esso è diviso in tre parti. La I è dedicata al calcolo con numeri interi e alle progressioni aritmetiche e geometriche; va ivi rilevato che l'ordinaria tavola di moltiplicazione viene disposta dal Widman, tanto in forma triangolare (analoga alla disposizione scelta dal Chuquet), quanto nell'aspetto di un quadrato, e che mentre questa viene attribuita al Beldomandi, quella si fa risalire a qualche opera ebraica non meglio indicata.

La II Parte comprende tre Capitoli. Il primo è dedicato al calcolo con frazioni, il secondo alle proporzioni e, naturalmente, alla regola del tre; mentre nel terzo si trova un buon numero di problemi di aritmetica commerciale, alcuni risolti ricorrendo alla falsa posizione. Gli è a quest'ultimo capitolo che l'opera del Widman deve principalmente il posto che occupa oggi nella storia dell'algebra, chè ivi s'incontrano per la prima volta i segni + e — per indicare l'addizione e la sottrazione; ma poichè l'autore li usa come abbreviazioni già di uso corrente, così egli non porge alcun elemento per risolvere la grave questione dell'origine di questi segni. Comunque, la loro presenza prova che l'algebra alla fine del sec. XV aveva già compìto un nuovo passo

---

(1) Cfr. *Rara arithmetica* di E. SMITH pagg. 36-40 (Boston, 1908).

(2) Si ritiene che tanto l'aritmetica di Bamberg quanto quella del Widman siano derivate da uno scritto designato d'ordinario col nome di *Algorismus Ratisponensis*, sul quale ampie notizie sono date nell'articolo di E. RATH, *Ueber ein deustches Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert* (Bibl. mathem., 3ª serie, t. XIII, 1912-13).

verso lo stadio di scienza simbolica, a cui non doveva giungere che durante il secolo XVII.

198 - La III Parte dell'opera del Widman è di natura geometrica, avendo per intento la determinazione di lunghezze e aree di figure piane numericamente determinate; sprazzi di luce avvicendandosi a regioni oscure fanno credere che l'autore ricopiasse senza discussione certe regole di cui non riusciva a rendersi conto. Così, per calcolare l'area di un triangolo equilatero, si serve della formola che esprime un numero triangolare, ma per trovare la superficie del triangolo di lati 13, 14, 15 applica a dovere la cosidetta formola di Erone; similmente mentre per calcolare l'area di un quadrilatero di cui $a$, $c$ e $b$, $d$ sono coppie di lati opposti, applica l'antica ed erronea formola $1/2\ (a + c)(b + d)$, dà per espressione del diametro del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo d'ipotenusa $a$ e cateti $b$, $c$ la seguente esatta, già nota agli agrimensori romani: $b + c - a$. Tali cose egli può avere apprese dagli autori che cita (Sacrobosco, Euclide-Campano, Boezio, Giordano Nemorario); ma vi è un risultato di cui, sino a prova contraria, egli può rivendicare la paternità; parliamo della seguente espressione per il raggio del cerchio circoscritto in un triangolo $A\,B\,C$, nell'ipotesi che se ne conosca la base $A\,C = b$, l'altezza $B\,D = h$ e il segmento $A\,D = k$ della base, $D$ essendo il punto di contatto di $A\,C$ col cerchio inscritto:

$$r = \sqrt{\left(\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2\,h}\right)^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Come sia stata ottenuta è ignoto, perchè questo risultato, al pari di tutti gli altri congeneri, viene applicato senza dimostrazione su figure con dati numerici; cosicchè riesce evidente che la geometria per Widman serve esclusivamente a porgergli delle questioni a cui applicare le regole dell'aritmetica.

Va da ultimo rilevato come il volume del Widman porga una nuova prova del fatto che il rispetto della proprietà intellettuale è un sentimento del tutto moderno, chè interi brani di esso sono letteralmente copiati dall'*Aritmetica* di Bamberg; questo plagio passò inosservato ai contemporanei oppure questi non lo considerarono come un crimine? Altri risponda; ciò che è certo si è che la colpa commessa dal Widman non impedì che il suo libro venisse ristampato non meno di due volte, nel 1508 e nel 1526.

## Luca Pacioli

199 - Il matematico di cui dobbiamo ora occuparci nacque da umile famiglia, fra il 1445 e il 1450, a Borgo S. Sepolcro (Umbria); ciò spieghi perchè spesso sia chiamato latinamente Lucas de Burgo. Ancor giovane si recò a Venezia in qualità d'istitutore in una casa privata, e appunto al suo ospite dedicò (1470) un trattatello d'algebra, di cui si è perduta ogni traccia; a Venezia vestì l'abito di S. Francesco e fu ascritto alla

famiglia dei Minori. Compiuta la propria cultura teologica e filosofica, prese a peregrinare per l'Italia quasi fosse titolare di una cattedra ambulante di matematica. Nel 1475 fu chiamato a Perugia in qualità di pubblico lettore di questa materia; durante il suo triennale soggiorno in quella città compose un secondo libro d'algebra, che dedicò ai propri alunni e che esiste tuttora manoscritto nella Biblioteca Vaticana. Lo troviamo poi per breve tempo a Venezia, e poi a Zara, ove scrisse (1481) un altro congenere lavoro. Lasciò memoria di sè a Firenze (1487) e poi si restituì a Perugia; ma per breve tempo, chè poco dopo si trasferì a Roma (1489) in qualità di lettore alla Sapienza. Neppur qui rimase a lungo, a cagione di dissensi con i suoi superiori; dopo un soggiorno a Napoli, si recò una nuova volta a Venezia (1496) e due anni dopo, per invito di Lodovico il Moro, a Milano. E quando questo sovrano perdette la corona all'arrivo dei Francesi, fra Luca riparò a Firenze in compagnia di Leonardo da Vinci, con lui, come già dicemmo, erasi legato di fraterna amicizia. Nel periodo 1500-1506 lo ebbero come pubblico insegnante Pisa (ove la cattedra relativa fu istituita appunto per lui) e Bologna e quindi nuovamente Venezia (1508), Perugia (1510) e Roma (1514): probabilmente in questa città morì, fra l'aprile e l'ottobre 1517.

200 - La grande rinomanza di cui gode Luca Pacioli riposa principalmente sopra la monumentale enciclopedia matematica intitolata *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*; prima opera del genere che sia stata stampata (I ed., Venezia, 1499; II ed., Tusculano sul Lago di Garda, 1523), ed a questa fortunata circostanza è in parte debitrice della sua immensa diffusione [1]. Essa è inspirata al concetto (già applicato, d'altronde, in opere congeneri anteriori) di avvicinare o meglio fondere la teoria con la pratica ed all'ammirazione per l'« ampia generalità che in lei (la matematica) si contiene, da potersi a tutte cose applicare ». Ed appunto per assicurare al proprio lavoro la maggior diffusione in tutte le classi sociali, fra Luca decise di abbandonare il togato latino per il volgare eloquio; ma non raggiunse che parzialmente lo scopo, chè in realtà usò promiscuamente parole latine e vocaboli greci, nonchè modi di dire dialettali appresi nelle varie città in cui aveva soggiornato. Il risultante eteroclito stile ferì il delicato orecchio di un conosciutissimo letterato — Annibal Caro — il quale equiparò la *Summa* ai « ceneracci d'orefici », perchè « vi è sepolto l'oro, come tra le ceneri degli orefici si rinvengono particelle dello stesso metallo »; giudizio questo non disforme da quello pronunciato dal migliore biografo del Pacioli — parliamo di Bernardino Baldi (n. 269) — il qnale osservò che « il suo dire è di maniera barbaro, irregolato, rozzo et infelice che rende nausea à quelli che leggono le cose sue »; ed il fatto che un matematico del valore di Federico Commandino (n. 261) si fosse proposto di ristampare la *Summa* dopo averne emendato lo stile, sta a provare che quelle critiche non sono il prodotto di esagerate pretese di puristi.

---

[1] Poco prima (1491) erano stati stampati due libri d'aritmetica, uno di Pietro Borghi a Venezia (v. p. 269), l'altro di Filippo Calandri a Firenze, ma, paragonati alla *Summa*, rievocano il ricordo della favola della pulce e del bue.

Frate Luca non s'atteggia a scrittore originale; riconosce di aver attinto liberamente al *Liber Abaci*, dichiarando anzi di averne trascritte intere pagine senza esplicita indicazione [1]; di più non nega di essersi largamente giovato delle opere di Euclide, Boezio, Giordano (Nemorario), Biagio da Parma (Pelacani), Sacrobosco, Prosdocimo de' Beldomani, Bradwardine, Regiomontano e Alberto di Sassonia, matematici già noti ai nostri lettori, e inoltre in generale dei più eminenti algebristi arabi. Originalissimo però è il suo modo di scrivere, il quale è l'opposto di quello che i moderni ritengono doveroso da parte di qualunque matematico; infatti, mentre mancano definizioni chiare e precise, agli sviluppi di carattere dottrinale sono intercalate considerazioni extramatematiche inspirate da antichi scrittori (alla testa dei quali troviamo Platone « archimandrita de li phylosophanti »), notizie autobiografiche, dati storici, informazioni sui sistemi monetari in uso e sopra costumanze commerciali, proverbi, frasi altrui in prosa e in versi. In conseguenza la *Summa* potrebbe essere scelta come guida da quei docenti di matematica in cerca di mezzi per rendere attraente l'insegnamento di una scienza che molti trovano arida. Affrettiamoci a dichiarare che molte divagazioni extra-matematiche a cui si abbandona il Pacioli non potrebbero oggi venire esposte da un insegnante serio; così appartengono al vaniloquio scolastico le considerazioni che fra Luca ricama attorno alla nozione di numero perfetto, e al tramontato neopitagorismo, le osservazioni con cui egli pretende di collegare le qualità del numero 5 all'esistenza dei poliedri regolari e le doti del 7 ai misteri della generazione; che cosa dire poi dell'imbarazzo in cui egli si trova volendo stabilire un accordo fra la biblica esortazione « crescete e moltiplicatevi » e il fatto che, quando si moltiplica un intero per una frazione, si ottiene un risultato minore del moltiplicando!

201 - Scendiamo a qualche più preciso particolare: la *Summa* consta di due parti, una dedicata all'arte e alla scienza del calcolo, l'altra alla geometria. ciascuna è divisa in Distinzioni, Trattati e Articoli.

La I Parte comincia con una trattazione dell'aritmetica speculativa, secondo i concetti di Nicomaco Geraseno e Teone Smirneo; Luca Pacioli sembra credere che i numeri perfetti euclidei siano tutti i numeri perfetti possibili e osserva che quelli terminano alternativamente con le cifre 6 e 8, come risulta da una piccola tabella di detti numeri da lui redatta. Segue la soluzione di alcuni problemi di analisi indeterminata certamente ispirati dal *Liber Quadratorum* di Leonardo Pisano, come risulta dalle proprietà esposte dei numeri congrui. Come ponte fra queste considerazioni teoriche e le applicazioni di indole pratica serve l'esposizione del sistema di numerazione decimale (che fra Luca attribuisce agli Arabi) e un evidente estratto dall'opera di Beda (n. 111), sopra la *loquela digitorum* [2]. Seguono le regole per

---

[1] Essi furono riscontrati da B. Boncompagni: vedere il volume *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* (Roma, 1854).

[2] La Tavola della *Summa* ove sono raffigurate le pose della mano per indicare i numeri 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000, 2000, ..., 9000 trovasi riprodotta a pag. 57 della già citata opera *Rara arithmetica* di D. E. Smith (Boston, 1908).

calcolare con numeri interi; va rilevato che il nostro autore, allontanandosi da Sacrobosco e Beldomandi, seguendo invece l'esempio dato nell'*Aritmetica di Treviso,* esclude dal novero delle operazioni aritmetiche la duplazione e la mediazione, osservando giustamente che sono operazioni che rientrano come casi speciali della moltiplicazione e della divisione; altra cosa che non va taciuta è che, per eseguire la moltiplicazione, egli insegna non meno di otto metodi, la maggior parte dei quali si trova già nell'*Aritmetica di Treviso*; anche per la divisione egli insegna più di una procedura. Per verificare l'esattezza dei risultati, egli esorta a ricorrere alla prova per 7, notando che la prova per 9 è malsicura, non essendo essa in grado di segnalare l'omissione di qualche zero o lo spostamento di qualche cifra.

Le frazioni sono scritte col sistema oggi in uso, distinguendosi il « denominatore » dal « numeratore » o « denominato », collo scrivere quello sotto questo, separati da un tratto detto « riga ». Vengono anche considerate le frazioni continue ascendenti, e date regole per scrivere sotto questa forma una frazione ordinaria. Seguono le formole per calcolare la somma dei termini di una progressione aritmetica o geometrica, con l'immancabile applicazione offerta dal giuoco degli scacchi, nonchè quelle che servono a calcolare la somma di un certo numero di termini della serie 1, 2,... o di quella che nasce elevandoli al quadrato o al cubo. Sempre ispirandosi al Fibonacci, il Pacioli fa svariate applicazioni del metodo di falsa posizione, designata col nome orientale « el cataym » che già incontrammo nel *Liber Abaci.*

Un grande numero di pagine della *Summa* è dedicato all'aritmetica applicata a contratti di vario genere, nell'ipotesi che per ciò vengano usate le monete di differenti specie in uso nei numerosi staterelli in cui allora era frazionata la patria nostra. Molti sviluppi sono relativi alla partita doppia, artificio largamente usato in Italia sino dai primordii del sec. xv, specie nei grandi emporii commerciali di Genova e Venezia; anzi queste pagine della *Summa* fecero assurgere il Pacioli a una autorità in fatto di ragioneria; posizione doppiamente giustificata tenendo conto delle norme da lui insegnate per calcolare le Tavole d'interessi, delle quali sin d'allora si era avvertito il bisogno. Il problema da lui trattato di « dividere equamente fra due giocatori la posta nel caso in cui la partita venga interrotta », fa apparire il Pacioli (anche se il risultato da lui ottenuto non sembra oggi accettabile) come uno dei primi che si occuparono della teoria delle probabilità. Un cenno meno fugace va fatto del passo della *Summa* in cui l'autore si chiede « dopo quanti anni viene raddoppiato un capitale impiegato ad interesse composto dell'$r$ %? »; è una questione che oggi traducesi nell'equazione esponenziale

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x = 2$$

da cui traesi

$$x = \log_e 2 : \log_e \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

ed approssimativamente

$$x = \frac{100 \log_e 2}{r};$$

ora siccome il nostro autore scrive invece $x = 72/r$ così egli ha visto essere all'incirca $\log_e 2 = 0 . 72$, approssimazione accettabile dal momento che

$$\log_e 2 = 0{,}69314 \ldots$$

202 - Il V Trattato della Distinzione VIII della I Sezione si apre con le seguenti entusiastiche frasi: « Gionti con l'ajuto de dio al luogo molto desiderato: cioe ala madre de tutti li casi detta dal vulgo la regola della cosa over Arte magiore cioe pratica speculativa, altramente chiamata Algebra et almucabala in lingua arabica over caldea secondo alcuni che in la nostra sona quanto che a dire restaurationis et oppositionis. Algebra id est Restauratio. Almucabala id est oppositio ». Esse dicono chiaramente quale sia il campo in cui l'autore vuol guidare i propri lettori. Senza seguirlo passo passo riferiamo le più interessanti fra le cose che egli espone.

L'incognita è da lui detta « cosa ». se però vi è una seconda grandezza ignota, egli chiama questa « quantità »; le potenze dell'incognita sino alla ventisettesima sono indicate con nomi e simboli speciali, fra cui ecco i primi:

cosa = co; censo = ce; cubo = cu; censo censo = ce ce; primo relato = p° r°; censo de censo = 2° r°; censo de censo de censo = ce ce ce.

Le lettere *p* e *m* servono a indicare *più* e *meno,* mentre $R^2$ e $R^3$ (la lettera R essendo attraversata da una sbarra obliqua) sono i segni usati per designare le radici quadratiche e cubiche. I numeri negativi sono preceduti dalla lettera *m*; notisi che il nostro autore scrive « pero che chiaro e che *m* 4 e manco che nulla ». Le regole per operare con numeri segnati vengono dimostrate per via geometrica e enunciate all'incirca con le parole di cui noi stessi ci serviamo. Interi e frazioni (cioè numeri « sani » e numeri « rotti ») vengono trattati senza difficoltà, ma, nello studio dei numeri irrazionali, fra Luca resta molto al disotto di N. Oresme (v. n. 180 *a*) perchè si limita a quelli considerati da Euclide nel X Libro degli *Elementi,* la cui materia viene da lui esposta sotto nuova forma, ma applicata non sempre a dovere.

Le equazioni quadratiche considerate appartengono a uno dei soliti tre tipi

$$x^2 + ax = b \quad ; \quad x^2 = ax + b \quad ; \quad x^2 + b = ax \ ,$$

*a* e *b* essendo sempre numeri positivi; le regole di risoluzione vengono date col mezzo di tre quartine latine, che risparmiamo al lettore perchè certamente non entreranno mai in alcuna raccolta di modelli di bello stile.

Il Pacioli enumera poi altre forme di equazioni di grado più ele-

vato, cioè le seguenti:

$1 \cdot ax^4 = c$ , $2 \cdot ax^4 = dx$ , $3 \cdot ax^4 = cx^2$ ; $4 \cdot ax^4 + cx^2 = dx$;
$5 \cdot ax^4 + dx = cx^2$ ; $6 \cdot ax + c = cx^2$ ; $7 \cdot ax^4 + cx^2 = c$ ;
$8 \cdot ax^4 = cx^2 + c.$

Accanto alle equazioni dei tipi 4 e 5 sta scritto « impossibile »; ma che il Pacioli intenda parlare di impossibilità relativa ma non assoluta, temporanea ma non eterna, sembra risultare dal fatto che egli stesso ha poi risolta un'equazione di quarto grado, cioè la seguente:

$$\frac{x(x+1)}{2} + \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2 = 20400$$

non già, come farebbesi oggi, assumendo come incognita ausiliare il prodotto $x(x+1)$, ma svolgendo completamente i calcoli e osservando che l'equazione risultante

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$$

si può scrivere

$$(x^2 + x + 1)^2 = 81601,$$

onde, estraendo la radice quadrata, si cade in una equazione quadratica. Ma questo problema dà occasione a un'altra osservazione. L'equazione scritta fu ottenuta dal Pacioli cercando di determinare un certo numero $x$ di termini della serie 1, 2,..., per modo che la loro somma, unita alla somma dei loro cubi, desse per risultato 20400; perciò l'incognita doveva per necessità essere un numero intero e appunto in tale ipotesi il problema traducesi nella soprascritta equazione. Ora a questa circostanza essenziale il nostro autore non fa attenzione; infatti egli applica le formole

$$1 + 2 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2} \quad , \quad 1^3 + 2^3 + \ldots + x^3 = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2,$$

dimenticando che esse sussistono soltanto quando $x$ è intero, e, giunto al termine, non conclude, come dovrebbe, che il problema proposto è irresolubile dal momento che l'equazione relativa non ammette alcuna radice intera, anzi neppur razionale. Si è dunque, in presenza di una cieca applicazione di formole, cioè di un fenomeno che ritroveremo, sotto la forma più acuta, nel periodo post-leibniziano, durante il quale i matematici, auspice Eulero, procedevano nell'assoluta convinzione dell'illimitata generalità dell'analisi.

Prima di lasciare la parte aritmetico-algebrica della *Summa* noteremo la seguente equazione esponenziale

$$2^x \cdot x = 30,$$

risolta per tentativi, ed osserveremo che il Pacioli venne accusato di plagio per avere inserita nel Trattato XII della sua Distinzione IX (la quale tratta « de mercantie et usanze di paesi ») una Tariffa dei prezzi

correnti in vari stati italiani, traendola da una pubblicazione recante il nome di un tale Giorgio Chiarini [1]; ma tale accusa sembre provenire da un equivoco, la Tariffa essendo un lavoro anonimo, dovuto a una collaborazione quasi inconscia fra persone diverse; si trattava, dunque, di una terra senza proprietario, che chiunque aveva il diritto di sfruttare a proprio vantaggio; e così fece il Pacioli.

203 - Sospinti dalla lunga via che ci si para dinnanzi, lasciamo la parte aritmetica della *Summa* per volgerci a quella che alla geometria si riferisce. Per comporla il nostro autore disponeva di eccellenti modelli negli *Elementi* di Euclide e nella *Practica geometriae* del Fibonacci, ed entrambi sfruttò con tanta larghezza che tutti riconoscono che le pagine geometriche della *Summa* sono ancora meno originali di quelle dedicate alla scienza del numero. Esse sono distribuite in otto sezioni « a reverentia de le octo beatitudine », di cui ecco in breve il contenuto:

I. Tratta di triangoli e quadrilateri, conformemente ai Libri I, II, VI di Euclide, con l'aggiunta del calcolo dell'area di un triangolo di dati lati, secondo Fibonacci e i « tre fratelli ».

II. È dedicata a vari casi del seguente problema: Date le lunghezze dei lati di un triangolo e segnati due punti sopra due di essi determinare la lunghezza del segmento che li unisce.

III. Calcolo delle aree di quadrilateri e altri poligoni; risoluzione algebrica di problemi relativi, con frequenti applicazioni delle equazioni quadratiche.

IV. Teoria del cerchio secondo il Libro di Euclide; calcolo di $\pi$ con la considerazione dei poligoni inscritti e circoscritti applicata allo stesso scopo da Archimede; costruzione di una tavola di corde seguendo l'*Almagesto* di Tolomeo.

V. Problemi sulla divisione delle figure piane, sulle traccie di Fibonacci e di Maometto di Bagdad, a cui, come sappiamo, è dovuto un rifacimento dello scritto perduto di Euclide sulla divisione delle figure; sono aggiunti problemi analoghi sul cerchio.

VI. Calcolo di volumi di solidi considerati da Euclide.

VII. Descrizione e uso di alcuni strumenti che servono a misurare le dimensioni dei solidi.

VIII. Sotto il titolo « Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria » sono risolti non senza originalità cento problemi fra cui trascegliamo come esempio i seguenti: *a*) Conoscendo due lati di un triangolo e la sua area, determinare il terzo lato. *b*) Determinare un rettangolo conoscendone l'area e la differenza dei lati. *c*) Di un triangolo determinare i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto. *d*) In un triangolo isoscele inscrivere due cerchi fra loro eguali, tangenti fra loro e di cui ognuno tocchi la base e uno dei lati eguali. *e*) Dato un cerchio descriverne 3, 4 o 5 tutti tangenti al dato e ciascuno al successivo. *f*) Determinare i lati di un triangolo di area data sapendo che sono

[1] Il titolo ne è riprodotto nella citata *Rara arithmetica*, pag. 11.

della forma $x$, $x + 1$, $x + 2$. *g*) Per i vertici di un triangolo si conducono tre perpendicolari al piano dello stesso, che siano di lunghezze conosciute; determinare nel piano del triangolo un punto che sia equivalente dai loro estremi. *h*) Dato un triangolo, determinare un semicerchio che sia tangente a due dei suoi lati e abbia il proprio centro sul terzo. *k*) Inscrivere in un emisfero un cubo di volume massimo. Riguardo a quest'ultimo va notato che il Pacioli cadde in un equivoco; di cubi inscritti in un emisfero ne esiste uno solo, appunto quello da lui trovato che ha per lato $d/\sqrt{6}$, $d$ essendo il diametro dell'emisfero dato.

A questo punto chiudiamo la nostra analisi della *Summa*, per esigenze di spazio, non per mancanza di materia, giacchè, per dirlo con un giudice competente « it would yet require a volume of description to do it justice (1). Chiudiamo osservando che, malgrado le doti indiscutibili che possiede quest'opera, essa è documento inoppugnabile del fatto che, nei tre secoli intercorsi fra Leonardo e Luca, la nostra scienza non compì alcun reale progresso (2). La cosa è evidente per quanto concerne la geometria, la quale, già lo osservammo, non soltanto non superò il livello da esso conseguito durante il periodo aureo della scienza greca, ma nemmeno raggiunse il grado di perfezione contrassegnato dalle opere di Archimede e Apollonio, cosa che invece era accaduto presso gli Arabi; ma neppure l'algebra si era effettivamente perfezionata nè nella sostanza, nè nella forma. Non nella sostanza, giacchè le equazioni di secondo grado rappresentavano sempre le colonne d'Ercole, oltre cui nessun navigante osava avventurarsi; non nella forma perchè gli accenni verso l'algebra simbolica che notammo in Chuquet e in Widman, ancor più chiaramente che in Pacioli, suonano come tentativi isolati, come voci in un deserto. Vedremo tra breve come l'algebra, benchè avesse a mala pena raggiunto il livello di algebra sincopata, mostrò, durante il secolo XVI, ancora una volta grazie al genio italiano, di essere in grado di toccare, nella risoluzione delle equazioni algebriche, l'ultima Thule a cui può giungere senza ricorrere a veicoli ad essa estranei.

Ma prima di occuparci di questa epoca, tanto gloriosa per la patria nostra, ci corre l'obbligo di rendere completo il quadro dell'opera scientifica del matematico di cui abbiamo ultimamente parlato, esaminandone le altre opere superstiti.

---

(1) A. DE MORGAN, *Arithmetical Books from the Invention of Printing to the present Time*, pag. 2 (London, 1847).

(2) Uno dei motivi, anzi il principale, per cui durante l'ultimo periodo del Medio Evo si notò una decadenza nello studio delle matematiche va forse rintracciata nel sommo onore in cui veniva tenuto lo studio della Giurisprudenza e della Medicina. Tale era la foga con cui allora la gioventù accorreva alle scuole di diritto, e specialmente di diritto civile, che le autorità competenti dovettero intervenire, proibendo agli ecclesiastici l'abbandono delle scienze sacre per le profane. All'ambizione e alla cupidigia degli uomini era stimolo la massima *dat Galenus opes, dat Justinianus honores*. E infatti non erano soltanto l'amore disinteressato per le *Pandette* o l'interesse di conoscere il funzionamento del corpo umano che determinarono quell'affluenza, ma la constatazione del fatto che ai medici era riserbata la ricchezza e ai giurisperiti venivano conferite le più alte magistrature dello Stato. Tendenze e sentimenti per fermo non esclusivi all'epoca di cui ragioniamo, ma che allora ebbero conseguenze più deplorevoli che in altri tempi.

204 - L'11 agosto 1508 il nostro frate tenne nella Chiesa di S. Bartolomeo di Venezia un discorso sopra gli *Elementi* di Euclide, esordio di un corso di lezioni sul V libro di quell'opera. Di questa, appunto per merito suo, era stata pubblicata poco prima (Venezia, 1508) una edizione riveduta e migliorata rispetto a quelle di Campano e Zamberti, nella quale però non è evitato l'equivoco di identificare l'autore degli *Elementi* con Euclide da Megara. Non basta: in un'opera inedita di cui parleremo nel n. seg., il Pacioli si vanta di avere « posta già la extrema mano, con la egregia, per noi similmente, traductione de latino in vulgare de verbo ad verbum del maximo Monarcha dele Mathematici discipline megarense Euclide ».

L'anno successivo (1509) egli pubblicò, pure a Venezia, un altro volume che, a somiglianza della *Summa,* è composto di materiali raccolti qua e là. Essa porta il titolo *Divina proportione. Opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria,* e consta di tre parti che vanno considerate separatamente.

La I, l'unica a cui con diritto competa il titolo surriferito, venne ultimata a Milano addì 14 dicembre 1497, cioè quando il nostro geometra trovavasi ai servigi di Lodovico il Moro, donde la spiegazione del fatto che le splendide figure che la illustrano sono di mano di Leonardo da Vinci. Tema di essa è la divisione di una retta in media ed estrema ragione, proporzione divina secondo Pacioli, divisione aurea secondo alcuni moderni. Premesse alcune definizioni, l'autore si dilunga in considerazioni, che occupano non meno di 66 pag. in-folio; sono tratte dalla filosofia di Platone e dalla teologia cristiana, ed hanno per intento di giustificare l'epiteto « divina » da lui usato. Espone poi buon numero di teoremi relativi ad essa, rinviando per le dimostrazioni a Euclide e Campano, limitandosi a illustrarli sopra esempi numerici. Benchè egli esponga le applicazioni che, a suo credere, si possono fare della sezione aurea all'architettura, alla determinazione delle proporzioni del corpo umano e persino alla delineazione delle lettere in carattere stampatello, pure a ragione egli giudica che le più importanti siano offerte dalla costruzione dei poliedri regolari, sopra i quali egli si arresta con ben giustificato compiacimento. Un quadro molte volte riprodotto, ove fra Luca è raffigurato mentre spiega un problema di matematica a Guidobaldo I, duca d'Urbino, nell'angolo del quale si vede un poliedro regolare, induce a ritenere che ai suoi tempi di tali figure fossero già stati costruiti dei modelli; e infatti, mentre nella *Summa* il Pacioli parla de « le forme materiali » da lui costruite e esposte, nell'aprile 1489, in Roma nel palazzo del cardinale Giuliano della Rovere, nella *Divina proportione* allude a tre collezioni, di sessanta modelli ciascuna, esistenti a Firenze, Milano e Venezia: quale fine abbiano fatto, è ignoto.

La II Parte della medesima opera è una monografia architettonica ispirata da Vitruvio e sulla quale non è il caso che noi ci arrestiamo.

Più lungo discorso esigerebbe la III Parte, la quale tratta un tema prettamente geometrico, cioè la teoria dei poliedri, ma ne siamo dispensati dall'essere dessa una inconfessata versione, non migliorata, di un'opera di Pier della Francesca, di cui abbiamo parlato altrove (numero 189).

205 - Un lavoro di *Prospettiva,* progettato dal Pacioli, rimase, per quanto ci consta, allo stato di progetto; con la disinvoltura di cui era dotato, egli avrebbe probabilmente ridotto questo lavoro ad una semplice versione di quello ben noto di Pier della Francesca (n. 189).

Uno scritto sul giuoco degli scacchi che gli viene attribuito faceva parte di un'opera più estesa dal titolo *De ludis*, ovvero *Schifanoja*, dedicato a Francesco Gonzaga e Isabella d'Este; ma se ne è perduta ogni traccia.

In migliore condizione ci troviamo riguardo ad altra scrittura dal titolo *De viribus quantitatis,* che si conserva in un manoscritto, quasi perfetto, esistente nella Biblioteca dell'Università di Bologna. È una raccolta di problemi curiosi del genere delle *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino (n. 112), la quale fu forse conosciuta e utilizzata dal Bachet de Méziriac, che vedremo (n. 311) essere stato il primo a dare alle stampe una raccolta di questioni curiose; quasi a giustificarsi per avere scritto quel lavoro, il Pacioli dice che quesiti di detto genere solevano venire proposti nelle pubbliche scuole.

Il *De viribus* consta di tre parti intitolate rispettivamente: I. Delle forze numerali cioè de arithmetica. II. Della virtù e forza lineale et geometria. III De documenti morali utilissimi.

La I contiene 81 Problemi, i quali in buona parte hanno per scopo di indovinare un numero pensato da altri, in base a dati di varia specie; non ne riferiamo gli enunciati per amore di brevità e più ancora perchè essi probabilmente nulla insegnerebbero al lettore; notiamo soltanto che essi, in piccola parte, si incontrano nel *Liber Abaci,* e si ritrovano poi in opere di Tartaglia e in pubblicazioni posteriori; tradotti in formole conducono ad equazioni lineari, determinate o non. Rileviamo anche nella stessa I Parte alcune questioni non aritmetiche a tutti note, quale quella del trasporto in una barca di un lupo, un agnello e un cavolo, o quella del salvataggio di uno o più individui imbarcati insieme ad altri e soggetti a decimazioni; nel caso in cui si tratti di 15 Cristiani e 15 Turchi, il Pacioli dà in versi le regole mnemoniche per salvare i primi, da applicarsi quando la scelta delle vittime si fa contando per 3, 4, ecc. sino a 12.

Maggiore importanza dal punto di vista matematico è il passo relativo ai quadrati magici: il nostro autore li collega alla considerazione dei corpi celesti, giacchè fa corrispondere quelle figure composte con 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 numeri rispettivamente a Saturno, Giove, Marte, Sole, Venere, Mercurio, e Luna; prescindendo da tali fantastici ravvicinamenti, va riferito che l'opera del Pacioli è la prima europea che tratti di tali figure. Sotto altra forma viene poi nuovamente presentato il fatto meraviglioso che si suol collegare all'invenzione degli scacchi e che Dante, due secoli innanzi, aveva espresso citando il « doppiar degli scacchi » che « s'immilla ».

La II Parte della medesima opera annovera 80 problemi (o documenti, per usare la nomenclatura dell'autore), seguiti da 54 giuochi fisico-meccanici. Fra le questioni geometriche trattate meritano di essere ricordate le costruzioni approssimate dei poligoni regolari di 9, 11, 13 e 17 lati. Sgraziatamente il testo relativo a quest'ultimo poligono

è tanto corrotto da riuscire inintelligibile, onde è impossibile decidere se Gauss abbia o non avuto un precursore nel Pacioli. Riguardo al lato $l_9$ dell'ennagono, fra Luca ne afferma la dipendenza dai lati del triangolo e dell'esagono regolari inscritti nel medesimo cerchio scrivendo $l_9 = \frac{l_3 + l_6}{4}$; per quello $l_{11}$ del poligono di 11 lati afferma che è la parte maggiore del segmento $\frac{l_3 + l_6}{3}$ diviso in media ed estrema ragione;; finalmente $l_{13}$ si ottiene, secondo lui, in modo analogo dal segmento $\frac{5r}{2}$, $r$ essendo il raggio del cerchio su cui si opera.

La III Parte non ha nessun carattere scientifico, essendo una raccolta di aneddoti, proverbi, poesie, ecc.; ad esempio vi si legge, attribuendola però al Brunelleschi, la notissima storiella dell'uovo di Cristoforo Còlombo.

Prescindendo da quest'ultima Parte, che è estranea al soggetto della presente storia, l'opera *De viribus quantitatis* non sarebbe stata indegna dell'onore della stampa e avrebbe giovato all'istruzione matematica della gioventù del tempo; ma essa però non avrebbe servito a modificare sostanzialmente il giudizio che deve pronunciarsi sopra il Pacioli: egli era un uomo colto e un insegnante coscienzioso, che in tutte le sue pubblicazioni si mostra perfettamente al corrente della scienza del tempo suo e sollecito di diffonderla fra la gioventù che accorreva alle sue lezioni; se anche non ha partecipato ai trionfi celebrati dell'algebra che stiamo per descrivere, li ha certamente preparati, segnando con precisione il punto donde dovevano prendere le mosse i coraggiosi pionieri che sono gloria del secolo XVI e di cui ci apprestiamo ad occuparci.

## BIBLIOGRAFIA

B. Boncompagni, *Intorno a un trattato d'aritmetica stampato nel* 1478 (atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. XVI, 1862-63). Alcune pagine dell'« Aritmetica di Treviso », appunto soggetto di questa memoria, si trovano riprodotte in principio dell'opera di D. E. Smith, *Rara arithmetica* (Boston and London, 1908).

G. P. Pichi, *Di un nuovo esemplare dell'Abbaco di Treviso del* 1478, *posseduto dalla Biblioteca della Regia Università di Bologna* (Bologna, 1888).

D. E. Smith, *The first great commercial Arithmetic* (Isis, t. VIII, 1926; si tratta dell'opera del Borghi).

F. Unger, *Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung* (Leipzig, 1888; pagg. 36-40 dà notizie sull'Aritmetica di Bamberg).

A. Marre, *Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien, d'après le Manuscrit « Fonds français », n° 1346 de la Bibliothèque Nationale de Paris* (Bulletino di bibl. e storia, ecc., t. XIII, 1880). *Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet* (Id., t. XIV, 1881).

Luca Pacioli, *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* (1ª ed., Venezia, 1494; 2ª ed., Tusculano, 1525).

Luca Pacioli, *Divina Proportione* (Venezia, 1509).

A. Agostini, *Il « De viribus quantitatis » di Luca Pacioli* (Period. di matematica, 4ª serie, t. IV, 1924).

D. I. Ricci, *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato, con documenti inediti* (Sansepolcro, 1940).

## CAPITOLO XVI

## L'ALGEBRA SINCOPATA NEL SUO APOGEO

### PARTE I: IN ITALIA

### Esordio

206 - Il secolo XVI, di cui imprendiamo lo studio, è uno dei più importanti che s'incontrano nella storia dell'algebra e uno dei più gloriosi per la patria nostra, ma anche uno dei più agitati che registrino i fasti della matematica. Gli è nel corso di esso che vennero stabilite le formole risolutive delle equazioni letterali di III e IV grado, formole della cui esistenza, dopo tanti sforzi infecondi, si era giunti e continuavasi a dubitare. Ma la loro conquista diede luogo ad una delle più violente controversie scientifiche in cui c'imbatteremo e sulla quale i giudizi non sono del tutto concordi, forse perchè la relativa documentazione presenta qualche lacuna e anche perchè gli atti che vi si riferiscono provengono da l'una o l'altra delle parti contendenti. Corsero allora pubbliche disfide a soggetto matematico, le quali, secondo alcuni (1), erano modellate sopra la teatrale procedura usata nei tornei caratteristici dell'epoca della cavalleria e alle quali il pubblico si appassionava non meno che a quelli che venivano disputati con lancia e spada. Riguardo a siffatta identificazione è necessario rilevare come l'unica descrizione che incontreremo di una gara scientifica del genere (v. n. 223) la presenta in proporzioni modestissime e in aspetto ben diverso da quello sotto cui Massimo d'Azeglio ha eternata la disfida di Barletta, e che, d'altra parte, di quella che a noi interessa, sino ad oggi non venne scoperta alcuna narrazione nelle cronache milanesi del tempo, benchè queste siano state accuratamente esaminate per incarico del Principe B. Boncompagni. Questa circostanza rafforza il dubbio intorno al preteso interesse del pubblico per argomenti prettamente dottrinali, non aventi cioè la più lontana attinenza con la pubblica cosa, in tempi ancora semi-barbari e non certamente propizii alla serena contemplazione del vero; chè appunto sullo scorcio del secolo XV si

---

(1) La fonte prima di questa (a parer nostro non accettabile) opinione sta probabilmente in un passo del *Catalogue of the mathematical, historical, bibliographical and miscellaneous portion of the celebrated Librairy of* G. LIBRI (London, 1861) che si trova riprodotto nella *Biblioteca matematica* di P. RICCARDI (colonna 500-01). Ora, prima di dichiararla per conforme al vero, fa mestieri ricordare che nel momento in cui scriveva quelle parole il Libri, non era già lo storico da tutti riverito e ammirato, ma il profugo in condizioni disagiate che offriva al migliore offerente i propri tesori bibliografici.

inizia il periodo delle preponderanze straniere in Italia, e durante la prima metà del successivo la patria nostra fu sconvolta e dilaniata in conseguenza delle guerre tra Francia e Spagna, disputanti per l'egemonia sulla penisola.

Prima di esporre come, appunto mentre fervevano queste lotte cruenti, la teoria delle equazioni algebriche abbia raggiunto l'ultimo limite a cui essa può arrivare senza invadere il campo delle funzioni trascendenti, fa mestieri che facciamo conoscere le *dramatis personae* che allora trovaronsi sulla scena, in particolar modo i due protagonisti: Nicolò Tartaglia e Girolamo Cardano. Non devesi però credere che fra il Pacioli e la comparsa di questi matematici non siavi stato in Italia algebrista alcuno. Ebbe, infatti, allora larga diffusione la *Summa de arithmetica* di un certo Francesco Galigai (o Ghaligai) pubblicata a Firenze nel 1521 e poi nel 1548, e dedicata al cardinale Giulio de' Medici che fu poi papa Clemente VII. Dell'autore nulla di preciso si conosce, onde pura ipotesi è che (come opina il Libri) egli sia stato un antenato della donna celebre nella storia di Francia sotto il nome di marescialla d'Ancre. Quell'opera non offre alcuna innovazione degna di speciale ricordo e il successo che ebbe si deve in gran parte all'essere di dimensioni minori e al presentarsi sotto forma meno barbara di quella del Pacioli. Essa presenta però un valore storico; giacchè contiene numerosi estratti dell'*Algebra* tradotta dall'arabo in latino da Guglielmo de Lunis (v. p. 235) e del trattato *Sui numeri quadrati* del Fibonacci (v. p. 234); ad essa devesi poi se si è serbato ricordo di Giovanni dal Sodo, che il Galigai ricorda più volte come proprio maestro.

## Gli attori

207 - Non si conosce con esattezza la data di nascita del Tartaglia; è però noto che egli era circa sessenne quando Gastone de Foix, il ventiduenne nipote del re di Francia, sconfitti i Veneziani, riprese Brescia (19 febbraio 1511) e la sottopose a un sacco talmente spietato da rimanere tristemente memorabile. Il nostro matematico fu una delle tante vittime innocenti dello spietato condottiero francese. Lo narra egli stesso in uno squarcio commoventissimo della sua opera (cfr. n. 215) *Quesiti et inventioni diverse*. Da esso si apprende che egli era figlio di un tal « Micheletto cavallaro » di « casata ignota », il quale morì quando il futuro scienziato era tuttora fanciullo, sicchè egli, insieme ad un fratello di poco maggiore e ad una sorella, rimase totalmente affidato alla madre « liquida di beni della fortuna ». Con questi congiunti egli, quando l'esercito francese si approssimava a Brescia, si rifugiò nel duomo di questa città, fidando che la santità del luogo gli avrebbe salva la vita. Ma s'ingannò; chè uno dei soldati che penetrarono in quel tempio vilmente gli inferse non meno di cinque ferite sulla testa e una attraverso la faccia, la quale per lungo tempo gli tolse l'uso della parola; fu sua madre che, col tenere accuratamente pulite le ferite « con la lingua », lo portò a guarigione; ma non perfetta, chè la favella rimase per lungo tempo così inceppata che al giovanetto non tardò

a venir posto il soprannome di Tartaglia, che egli conservò per tutta la sua vita. È ignoto per quale serie di circostanze egli siasi avviato verso la carriera scientifica, dedicando poi la maggior parte del proprio tempo a insegnare, pubblicamente e privatamente, in varie città del territorio della Repubblica di Venezia. Sono ancora le sue opere (ed esse soltanto) che gettano qualche luce sui casi della sua vita; esse insegnano che negli anni 1521-1533 egli risiedette a Verona, donde nel 1526 fece una corsa a Mantova, e nel 1534 si stabilì a Venezia in qualità di pubblico insegnante; nel 1548 lo troviamo a Brescia, ove però non ebbe ragione di lodarsi dei propri concittadini; in conseguenza si restituì a Venezia, e le dediche ai primi Libri del suo *General trattato* (v. n. 224) stanno a provare che egli vi rimase sino alla morte, avvenuta il 13 dicembre 1557. Nel testamento, da lui dettato tre giorni prima di morire, è indicato come erede un suo fratello, designato così: Giampietro Fontana. Ciò indusse molti a ritenere che Fontana fosse il cognome della famiglia dei due fratelli. Ora, benchè riesca malagevole addurre una spiegazione del fatto di due fratelli di cognome differente, pure noi non abbiamo tolto a Nicolò la designazione a cui egli si è sempre attenuto pubblicando i suoi lavori e sotto cui è da secoli famoso in tutto il mondo.

A questo riducesi quanto sappiamo intorno alla vita dell'eminente matematico bresciano; meglio si conoscono i suoi lineamenti, grazie a un'incisione riprodotta a sazietà nei frontispizi delle sue opere; quanto al suo carattere, la lettura delle sue opere fa fede che egli era ambizioso e violento; agli antipodi di Euclide, quale ci viene dipinto da Pappo (v. p. 84), più prossimo a Apollonio, quale è descritto dal medesimo commentatore (v. p. 59). Umile di natali, non potè avere che un'educazione e un'istruzione insufficienti; ciò spiega perchè non seguì il costume generale del tempo, di scrivere in latino; usò invece un linguaggio volgare, che più si accosta a quello che allora parlava il popolo di Brescia che a quello a cui Dante impresse lineamenti definitivi.

208 - Ben diverso è l'aspetto sotto cui si presenta Gerolamo Cardano. Nato a Pavia addì 24 settembre 1501, fece i propri studi in questa città e poi a Padova, ove occupò anche l'ufficio di « rettore degli studenti » e poi conseguì la laurea in medicina: appunto come medico salì a una rinomanza così alta che non tardò a oltrepassare le Alpi. Nel 1534 gli fu conferita una cattedra nell'Accademia Palatina di Milano, ove egli recitò quell'*Encomium geometriae* che si legge tra le sue *Opere*. Perdette la cattedra in seguito a un concorso disgraziato nel quale si trovò di fronte quel Zuanne da Coi (o Colla) che ritroveremo più innanzi. Passò allora a Pavia, ove ebbe l'indescrivibile dolore di vedere (25 aprile 1560) il proprio figlio decapitato come colpevole d'uxoricidio; e forse per la conseguente macchia sulla sua famiglia chiese e non tardò a ottenere, grazie all'appoggio del Cardinale legato, una cattedra nell'Università di Bologna, città di cui, a titolo di onore, gli fu conferita la cittadinanza. Ma, accusato di magìa, fu imprigionato il 14 ottobre 1570 e non riottenne la libertà che dietro promessa di non leggere più negli Stati della Chiesa. Si trasferì allora a Roma (1571) ove, per la sua incontrastata valentìa

nell'arte salutare, conquistò il favore del papa, che gli assegnò una lauta pensione, della quale godette sino alla morte (21 settembre 1576).

Uomo di grande ingegno, abbracciò tutta la scienza del proprio tempo, senza però riuscire a evitare le aberrazioni che vanno sotto i nomi di magia, astrologia, alchimia; nessuno più di lui offre conferme alla massima di Seneca: « Nullum unquam magnum ingenium sine mixtura dementiae ». Nell'*Autobiografia,* da lui scritta, e che spiace per le incessanti reticenze che vi si notano, egli tracciò il seguente straordinario ritratto di sè stesso:

« Io ho ricevuto dalla natura un spirito filosofico ed inclinato alle scienze; sono ingegnoso, accessibile, elegante, voluttuoso, allegro, pio, amico della verità, appassionato per la meditazione, intraprendente, desideroso d'imparare, dotato di talento inventivo; pieno io stesso di dottrina, sono avido di cognizioni mediche, entusiasta per il meraviglioso; astuto, furbo, ingannatore, satirico, esercitato nelle arti occulte; sobrio, laborioso, applicato, non curante, ciarliero; detrattore della religione, vendicativo, invidioso, tristo, finto, perfido, mago, in preda a mille contrarietà, a carico de' miei, lascivo, amico della solitudine, dotato della facoltà d'indovinare, geloso, rozzo, calunniatore, officioso ed incostante a cagione del contrasto che vi è tra la mia natura ed i miei costumi ».

Affrettiamoci a dichiarare che di alcuni dei difetti del Cardano riconosciuti in sè stesso incontreremo fra non molto manifestazioni impressionanti. Ma certo nocque alla sua riputazione la riprovevole condotta dei figli, il maggiore assassino, il minore talmente scostumato da dover essere cacciato in bando da Bologna dietro istanza del padre. I dieci testamenti da lui lasciati (scritti successivamente durante il lungo periodo 1531-1576) lo mostrano « pater familiae » sollecito del benessere, non soltanto dei propri congiunti, ma anche dei suoi domestici. le minute disposizioni che essi contengono inducono, a parer nostro, a ritenere essere pura leggenda che egli siasi lasciato morire di fame, affinchè non risultasse menzognero l'oroscopo che egli aveva tratto di sè stesso.

209 - A lato dei grandi, di cui dicemmo nei due nn. precedenti, occupano nella storia dell'algebra un posto di somma importanza Scipione dal Ferro e Ludovico Ferrari.

Nacque il primo in Bologna — il 6 febbraio 1465, ond'è più anziano tanto di Tartaglia quanto di Cardano. A partire dal dicembre 1496 ebbe nel patrio Ateneo la cattedra « ad arithmeticam », e in essa venne confermato con onorari sempre più crescenti — per essere stato riconosciuto « dottore eminente » e « matematco eccellentissimo » — sino al principio dell'anno 1526. Si trasferì allora a Venezia; ma prima che spirasse detto anno, essendosi restituito a Bologna, riebbe la cattedra che aveva già illustrata; poco dopo scompare definitivamente dai « Rotuli » di detta Università, essendo morto fra il 30 ottobre e il 15 novembre di detto anno 1526. Ebbe per successore il genero Annibale della Nave, il quale ereditò, a tacer d'altro che a noi non interessa, un prezioso quaderno (tuttora irreperibile, malgrado diligenti e ripetute ricerche), ove era esposta e dimostrata la risoluzione delle equazioni cubiche, e che conteneva fors'an-

che una collezione di problemi geometrici, risolti con una unica apertura di compasso. Furono questi argomenti svolti nelle pubbliche lezioni del dal Ferro? Ciò sembra poco probabile; perchè, se la memorabile scoperta da lui fatta fosse stata esposta dinnanzi a un numeroso uditorio, sempre rinnovantesi durante trent'anni, non avrebbe tardato a diffondersi di bocca in bocca e di penna in penna, mentre vedremo (n. 229) che un compatriota del dal Ferro, di poco posteriore (parliamo di R. Bombelli), mostrò di ignorare perfino l'esistenza di quel risultato; tuttavia è possibile che qualcuno (come Anton Maria Fior, di cui parleremo) ne abbia avuta privata comunicazione, fors'anco sotto il vincolo del segreto, ed è certo che ne ebbe notizia Pompeo Bolognetti (professore nel felsineo Ateneo dal 1565 al 1582), di cui esiste manoscritto nella Biblioteca universitaria di Bologna un lavoro, ove è parola del metodo scoperto dal dal Ferro per risolvere le equazioni di terzo grado. Strana invece appare agli occhi nostri l'attitudine di uno scienziato il quale scende nella tomba senza avere resa di pubblica ragione una scoperta capace di farlo salire ai pinnacoli della gloria, mosso per fermo soltanto dal non lodevole sentimento di conservarne il monopolio.

L'altro dei matematici anzidetti, Ludovico Ferrari, nacque egli pure a Bologna, ma da un profugo milanese, il 2 febbraio 1522. Rimasto orfano a soli quattordici anni si trasferì a Milano, ove ottenne « loco et foco » presso il Cardano, il quale da lui fu validamente aiutato nelle ricerche che culminarono nell'*Ars magna*, di cui diremo fra poco (n. 212). Da un problema proposto dal già citato maestro Zuanne da Coi, il Ferrari fu indotto a cercare la soluzione delle equazioni di quarto grado e, riuscendo nell'intento, assicurò al proprio nome rinomanza perenne e universale. La protezione dei Gonzaga gli procurò a ventidue anni una cattedra a Milano e poi l'incarico del censimento del Ducato di Mantova. In questa città rimase otto anni e ne partì a cagione di una grave malattia che aveva ivi contratta. Trasferitosi a Bologna, vi conseguì (14 luglio 1565) la laurea in filosofia e subito dopo una cattedra in quel l'Università. Ma non potè occuparla, essendo mancato ai vivi nell'ottobre dello stesso anno, vuolsi (i Borgia avevano fatto scuola!) per veleno propinatogli da una sorella, che agognava alla sua eredità. Cardano, pure dipingendolo di carattere violento e spregevole, non esitò a proclamarlo « ingenio et eruditione in mathematicis nulli secundi »; l'unico suo scritto che vedremo (n. 222) esserci rimasto, benchè di carattere polemico, mostra che questa lode non è esagerata nè immeritata.

## Primi lavori di N. Tartaglia

210 - Come scrittore Nicolò Tartaglia appare per la prima volta nel 1537. In un'epoca, quale era la prima metà del secolo XVI, in cui le armi mai posavano, in una persona in cui i primi ricordi d'infanzia erano macchiati di lagrime e sangue, nessuna meraviglia se l'attenzione fu attratta dall'arte della guerra, specialmente dai problemi imposti dalle armi da fuoco, il cui uso era da poco divenuto generale e costante. E infatti la *Nuova scientia,* di cui il nostro vantasi inventore, altro non è che

la Balistica; e a lui spetta la gloria di avere per primo applicato il ragionamento matematico a soggetti bellici; a provare la fecondità delle procedure da lui seguite, basti dire che per primo giunse a scoprire che, nel tiro col cannone, la portata massima si ottiene inclinando il pezzo a 45° sull'orizzonte.

Non ritorneremo sull'appropriazione indebita da lui commessa facendo apparire come opera propria la versione latina dei *Galleggianti* di Archimede, dovuta invece a Guglielmo di Moerbeke (v. p. 141): se, a cagione di tale indelicatezza, in base alla legge morale va pronunciata contro di lui una severa condanna, la scienza invoca il perdono, considerando che, con l'indicata pubblicazione, il Tartaglia ha riposti in circolazione pensieri e metodi sepolti da secoli e che subito manifestarono la loro perenne vitalità. Aggiungiamo che il Tartaglia, avendo saputo misurare tutta la grandezza del matematico di Siracusa, curò (1543) una pregevole versione latina di altri suoi scritti.

Grande e ben meritato successo ottenne la sua versione in italiano degli *Elementi* d'Euclide [1], con estesi commenti, in parte originali, in parte tratti da Campano e da altri editori anteriori; peccato che egli abbia attribuiti ad Euclide i cosidetti XIV e XV Libri degli *Elementi* (v. n. 54) e che abbia seguito Valerio Massimo nell'identificare l'autore di quella grande opera con Euclide da Megara! Nè va taciuto che, nel tradurre, il Tartaglia si fece lecite modificazioni importanti; a provarlo basta citare la definizione di retta come linea di lunghezza minima e l'analoga per il piano, l'una e l'altra inspirate certamente, ma non tratte, da Archimede.

## Scritti matematici di Cardano

211 - L'ordine cronologico impone che noi abbandoniamo momentaneamente il matematico bresciano per esaminare le opere (tutte meno una) matematiche del suo grande rivale. Ora degli scritti matematici di Cardano è agevole prendere completa cognizione essendo essi raccolti nel t. IV della edizione (in dieci imponenti volumi in-f°) di quanto uscì dalla fecondissima sua penna; va però avvertito che chiunque voglia contemplare l'autore e la totalità della sua produzione deve anche tenere presente il t. I perchè si trovano in essi i due scritti *De vita propria* e *De libris propriis*, di alto valore biografico e bibliografico.

Sospinti come siamo dal lungo cammino che dobbiamo percorrere, non ci arresteremo sulla breve monografia intitolata *De numerorum proprietatibus*, chè non si tratta che di un'esposizione di quanto contengono i Libri VII-IX di Euclide.

Più lungo discorso esige il trattato *Practica arithmeticae* (1539) [2], formato di 67 Capitoli, che riempiono non meno di duecento pagine in-f°,

---

[1] La prolusione premessavi mostra che quest'opera è frutto di un corso di lezioni tenuto a Venezia.

[2] Secondo quanto dice il Cardano stesso nel citato opuscolo *De libris propriis*, questo lavoro sarebbe la prima parte di una grande enciclopedia sull'arte del calcolo

a due colonne. È un'esposizione non sempre felice della scienza del numero, la quale, mentre per la forma appartiene all'algebra retorica, per la materia si accosta al *Liber Abaci,* che il Cardano apprese a conoscere nella *Summa* di L. Pacioli. Molto spazio è, naturalmente, occupato dalle operazioni sopra i numeri interi, frazioni e irrazionali; fra gli artifici per agevolare l'esecuzione a memoria di calcoli aritmetici, notiamo quello (Cap. 39) che è corollario della formola

$$a\,b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 ;$$

essa è da usarsi per sostituire una moltiplicazione con una sottrazione e riesce utile quando $a$ e $b$ sono numeri di eguale parità e se si abbia a propria disposizione una tavola dei quadrati dei numeri interi. Cardano consiglia pure l'uso della relazione

$$a\,b = 100\,\alpha\,\beta - 10\;(\alpha\,\beta' + \alpha'\,\beta) + \alpha'\,\beta' \;,$$

ove $a = 10\alpha - \alpha'$, $b = 10\beta - \beta'$ e $\alpha', \beta'$ sono numeri inferiori a 10. Seguendo le tendenze astrologiche da lui candidamente confessate nella sua autobiografia (v. n. 208) egli, conformemente a quanto fece il Pacioli (v. p. 284), stabilisce una corrispondenza fra i quadrati magici rispettivamente di $3^2$, $4^2$,... $9^2$, elementi e gli astri Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove e Saturno, nonchè fra gli stessi e i numeri 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369 che si ottengono addizionando i numeri situati in una orizzontale o verticale di uno dei detti quadrati. A titolo di curiosità aggiungiamo che, contrariamente all'opinione di Averroè, egli ritiene che siano perniciosi all'uomo i numeri 20, 40, 60, 80; 9, 18, 27, 36; 63, 81.

Uniformandosi alle abitudini medioevali, Cardano si giova, nella risoluzione dei problemi, della « falsa posizione » e della « regula sex quantitatum ». Molte delle pagine da lui scritte sono dedicate alle equazioni di 1° e 2° grado o a queste riducibili; superfluo avvertire che, riguardo alle equazioni quadratiche sono considerati e trattati a parte i tre tipi classici (con $p$ e $q$ positivi)

$$x^2 = p\,x + q \quad , \quad x^2 + p\,x = q \quad , \quad x^2 + q = p\,x \;,$$

riguardo all'ultimo dei quali Cardano osserva di passaggio che in certi casi si hanno due soluzioni e in altri nessuna; e, mentre non esclude la possibilità di radici negative, non ammette radici nulle (cosicchè dichiara impossibili tutte le equazioni della forma $ax^m = bx^n$). Non mancano sistemi di equazioni risolubili applicando le regole suaccennate;

---

(aritmetica e algebra) destinata a portare il superbo titolo di *Opus perfectum.* Le quattordici parti di cui sarebbe stata composta avrebbero avuto i seguenti argomenti:

1. Dei numeri interi; 2. Delle frazioni; 3-4. Radici quadratiche e cubiche; 5. Proporzioni; 6. Proprietà dei numeri; 7. Del commercio; 8. Calcolo d'interessi; 9. Dei problemi straordinari (?); 10. Delle regole maggiori o la cosidetta *Ars magna*; 11. Della misura delle figure piane; 12. Della misura dei corpi; 13. Problemi aritmetici; 14. Problemi geometrici.

La decima parte sarebbe rappresentata dall'opera di cui parleremo nei nn. 212-13.

indarno cercansi invece qualsiasi dimostrazione dei procedimenti esposti. Oltre alle consuete progressioni, egli sotto il nome di ***Progressio,*** considera altre successioni indefinite di numeri; e, oltre a un grande numero di problemi aritmetici e geometrici (in alcuni dei quali notansi applicazioni della espressione dell'area di un triangolo in funzione dei lati), sono risolti i vari tipi di problemi che s'incontrano nelle ordinarie transazioni commerciali (regole di società, cambi di monete, calcoli d'interesse, ecc.). Nè mancano semplici applicazioni del calcolo combinatorio ed elementari questioni di probabilità, queste tratte da L. Pacioli, da cui però Cardano dissente riguardo alla ripartizione della posta fra due giocatori che intendono interrompere la partita (v. p. 278). Per agevolare il calcolo di superficie e volumi, Cardano espone tanto una tabella di corde, quanto una serie dei valori degli apotemi di alcuni poligoni regolari; nè omette di somministrare qualche dato relativo ai poliedri regolari.

Il nostro autore, che ha evidentemente attinto a larga mano alla *Summa* del Pacioli, si dilunga nell'ultimo Capitolo del suo lavoro sopra gli errori che vi ha riscontrati, industriandosi a correggerli.

Benchè il Cardano non si serva di simboli speciali, ma soltanto di qualche abbreviazione già usata dai predeccesori (*R.* per *radice*, *p.* per *più* e *m.* per *meno*), pure sa trasformare in modo ammirabile le equazioni in cui s'imbatte; valga a provarlo il seguente esempio: di fronte all'equazione

$$6x^3 - 4x^2 = 34x + 24,$$

egli aggiunge ai due membri il primo; ottiene così

$$2(6x^3 - 4x^2) = 6x^3 - 4x^2 + 34x + 24 \quad ;$$

poi addiziona ai due membri $24x^2$, onde nasce

$$2(6x^3 + 8x^2) = 6x^3 + 20x^2 + 34x + 24$$

ossia

$$4x^2(3x + 4) = (2x^2 + 4x + 6)(3x + 4) \quad ;$$

ora, siccome $3x + 4$ —non si annulla per alcun valore positivo di $x$, Cardano lo sopprime dai due membri; così ottiene

$$2x^2 = x^2 + 2x + 3 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 = 2x + 3 \quad ,$$

che dà subito $x = 3$. Sopra siffatte manipolazioni algebriche va fissata la nostra attenzione, perchè sono esse che hanno resa possibile e forse inspirata al Ferrari la risoluzione delle equazioni di 4° grado.

Come appendice e complemento della *Practica arithmeticae* si legge un *Libellus qui dicitur computus minor*, dedicato a una procedura, allora in uso nel commercio, ma oggi caduta in dimenticanza; limitiamoci a rilevare in esso una breve tavola di moltiplicazione che va da $0 \times 0$ a $20 \times 20$.

212 - Importanza di gran lunga maggiore possiede l'opera giustamente celebre intitolata *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (1545), la quale diffuse in tutto il mondo i metodi di risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche e insegnò le prime proprietà ravvisate nelle equazioni algebriche di tutti i gradi. Sgraziatamente Cardano si mostra ivi espositore infelicissimo, onde tutto fa credere che la materia svolta non abbia subita la preziosa elaborazione dell'insegnamento orale; inoltre, non riuscendo a insorgere contro l'abitudine del tempo di considerare esclusivamente equazioni con coefficienti positivi, fu costretto a distinguere molti casi in ogni equazione di grado assegnato; da ciò lungherie che rendono la lettura dell'opera ostica e ripugnante; ma, se si arriva a sormontare le difficoltà di lettura e si giunge a penetrare nell'intimo del pensiero cardanico, non si tarda a riconoscere in varie osservazioni geniali alcune vere scoperte.

Fra i quaranta Capitoli di cui consta l'*Ars magna,* presentano un vero e grande interesse quelli (Cap. XI-XXV) che trattano di equazioni cubiche o riducibili al terzo grado e di equazioni di quarto grado (Cap. XXVI-XXVIII).

La scoperta della risoluzione delle equazioni di terzo grado viene raccontata da Cardano come segue nel Cap. I dell'*Ars magna*:

« Scipione dal Ferro, bolognese, trovò ai tempi nostri il capitolo di « cubo e cose eguali a numero », cosa veramente bella e ammiranda. Tale arte, superando ogni umana sottigliezza e lo splendore di ogni ingegno mortale, attesta il valore delle menti; è cosa tanto meravigliosa che chi l'ha raggiunta può illudersi che nulla gli sia negato di superare. Per emulazione verso costui Niccolò Tartaglia da Brescia, amico nostro, essendo entrato in disputa con Anton Maria Florido (o Fior), discepolo di dal Ferro, per vincere la gara trovò lo stesso capitolo, e lo confidò a me, che con insistenti preghiere ne lo aveva richiesto. Io, tratto in inganno dalle parole di Luca Pacioli, il quale nega che oltre i suoi capitoli ne possa esistere alcun altro generale, benchè la scoperta avesse potuto essere facilitata da molte altre cose che avevo già trovate, tuttavia disperavo di trovare quello che io non osavo di cercare. Avuto poi quel capitolo e trovatane la dimostrazione, compresi che se ne potevano dedurre molte altre cose, e, essendo aumentata in me la fiducia, finii per trovarle, in parte con l'aiuto di Ludovico Ferrari mio antico discepolo. Tutto ciò che da costui è stato trovato verrà indicato col suo nome, tutto il resto è cosa mia ».

Vedremo (n. 220) che questa esposizione contiene alcune reticenze che deformano i fatti; per ora limitiamoci a notare che Cardano poteva affermare di nulla avere detto *contrario alla verità,* ma ben potevasi fargli carico di non avere detta *tutta la verità.*

La parte dottrinale dell'*Ars magna* consta di una serie di Capitoli, in ciascuno dei quali sono risolte equazioni numeriche appartenenti alle seguenti forme, che egli aveva già enumerate nel Cap. II:

$$x^3 + p\,x = q \quad , \quad x^3 = p\,x + q \quad , \quad x^3 + q = p\,x \quad ,$$
$$x^3 + p\,x^2 = q \quad , \quad x^3 = p\,x^2 + q \quad , \quad x^3 + q = p\,x^2 \quad ,$$

$$x^3 + p\,x^2 = q\,x + r \quad , \quad x^3 + p\,x^2 + q\,x = r \ ,$$
$$x^3 + q\,x = p\,x^2 + r \ ,$$
$$x^3 = p\,x^2 + q\,x + r \quad , \quad x^3 + r = p\,x^2 + q\,x \ ,$$
$$x^3 + p\,x + r = q\,x^2 \quad , \quad x^3 + p\,x^2 + r = q\,x \ .$$

Le equazioni che rientrano nelle tre prime forme vengono risolte col noto artificio che consiste nello scomporre l'incognita nella somma di due, fra cui si stabilisce una opportuna relazione; quelle dei tre tipi successivi si riducono alle precedenti o sostituendo all'incognita altra inversamente proporzionale, o facendo scomparire il secondo termine con un metodo nel fondo identico a quello oggi in uso. Congeneri artifici vengono applicati in tutti gli altri casi.

Il Cardano però non ha mancato di osservare come talvolta si possa giungere alla mèta per altre vie; in tale condizione privilegiata si trovano ad esempio le equazioni delle seguenti forme

$$x^3 = (a + b^2)\,x + a\,b \quad , \quad x^3 = (a^2 + b^2)\,x + 2\,a\,b\,(a + b) \ ,$$

le quali sono suscettibili di abbassamento, avendo la seconda per radice $a + b$ e potendosi la prima scrivere sotto la forma

$$x\,(x + b)\,(x - b) = a\,(x + b)$$

e quindi dividere per $x + b$.

Nel corso di tali ricerche Cardano si è imbattuto in un fatto della massima importanza, cioè (Cap. XVIII) che le equazioni

$$x^3 + 10\,x = 6\,x^2 + 4 \quad , \quad x^3 + 21\,x = 9\,x^2 + 5 \ ,$$
$$x^3 + 26\,x = 12\,x^2 + 12$$

hanno ciascuna tre radici; e poichè egli notò che in ogni caso la somma delle tre radici risulta eguale in valore assoluto al coefficiente di $x^2$, ha inaugurata la serie delle relazioni che passano fra le radici e i coefficienti di un'equazione algebrica; siccome poi non gli è rimasto ignoto che, almeno in certi casi, il prodotto delle radici è in valore assoluto eguale al termine noto, ben a ragione si considera l'*Ars magna* come iniziatrice della teoria delle equazioni algebriche; e infatti mentre prima unico intento dello studioso era di giungere a calcolare il valore delle radici, da questo momento si delinea il problema generale di determinare le relazioni che intercedono fra radici e coefficienti.

213 - Lo stimolo a oltrepassare il terzo per giungere al quarto grado sembra doversi far risalire a Maestro Zuanne da Coi, il quale, sino dal 15 dicembre 1536, propose al Tartaglia un problema che guida appunto a un'equazione di detto grado, ma che il matematico bresciano non riuscì a risolvere. La medesima questione s'incontra nell'*Ars magna* (Capitolo XXXIX) con altri dati numerici, come proveniente dalla stessa fonte e, ciò che è ben più importante, accompagnata da una soluzione scoperta da Ludovico Ferrari. Quel problema consiste nello spezzare un dato nu-

mero $a$ in tre parti continuamente proporzionali e tali che il prodotto dei due primi sia conosciuto ($b$). Ora, indicando come è lecito, con $x, x\,y, x\,y^2$ le tre parti cercate, quel problema traducesi nelle due equazioni seguenti

$$x + x\,y + x\,y^2 = a \quad , \quad x^2\,y = b \ ,$$

fra le quali, eliminando $y$, si trova

$$x^4 + b\,x^2 + b^2 = a\,x^3 \ ,$$

equazione di quarto grado mancante del terzo termine. Se, invece, i tre numeri richiesti si fossero indicati con $x/y$, $x$, $x\,y$, si sarebbe ottenuta un'equazione dello stesso grado ma mancante del termine in $x^3$. In un caso e nell'altro la questione si abbassa al secondo grado scrivendo la equazione risolvenda sotto la forma

$$(x^2 + p\,x + q)^2 = (r\,x + s)^2 \ ,$$

il che si ottiene col mezzo di un'equazione cubica; fatto ciò, con un'estrazione di radice, la equazione precedente si riduce al 2° grado: artificio geniale, di indiscutibile sapore diofanteo, il quale è applicabile anche ad equazioni biquadratiche complete.

Cardano osserva che, analogamente a quanto accade nelle equazioni cubiche, esistono casi particolari delle biquadratiche che si possono trattare più agevolmente che applicando l'esposto espediente; così, se i coefficienti dell'equazione

$$x^4 = n\,x^2 + p\,x + q$$

soddisfano alla condizione

$$p/2\,n = \sqrt{q/n} \ ,$$

quell'equazione si può scrivere

$$4\,n\,x^4 = (2\,n\,x + p)^2 \ ,$$

onde si abbassa subito al secondo grado.

La procedura generale scoperta dal Ferrari venne dal Cardano applicata a un grande numero di problemi, senza però che egli esponesse una completa classificazione dei casi che si possono presentare quando ci si attenga al vincolo che i coefficienti siano sempre positivi: il che vedremo (n. 232) fece il Bombelli.

Benchè quanto ora dicemmo sia sufficiente a stabilire l'importanza dell'*Ars magna*, pure non esaurisce ciò che vi si trova di notevole. Infatti nel Cap. XXIX, sotto il titolo *De regula modi*, viene insegnato un procedimento per risolvere un sistema formato da due equazioni lineari con due incognite, mentre nel seguente (intitolato *De regula aurea*) è esposto un metodo per approssimare le radici delle equazioni numeriche. Dobbiamo anche richiamare l'attenzione dei lettori sul Capitolo XXXVII (*De regula falsum ponendi*), il quale prova che Cardano, a differenza dei propri contemporanei, usò talvolta nei calcoli i numeri

immaginari, vincendo la generale ripugnanza che si provava ai suoi tempi ad operare con enti aritmetici tanto misteriosi e strani.

Ulteriori sviluppi e applicazioni dei metodi di risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche si trovano nell'altro lavoro dello stesso autore dal titolo *Ars magna arithmeticae, seu liber quadraginta capitulorum et quadraginta questionum*, il quale manca di data e che sembra avere il precipuo scopo di esporre il contenuto del X Libro di Euclide e di estenderne la portata a radicali cubici. Mentre le citazioni che vi si trovano di Tartaglia e Ferrari nulla di sostanziale aggiungono a quanto Cardano disse nell'*Ars magna* intorno ai lavori da essi compiuti, esso conferma che il geniale medico milanese ebbe così ammirabili visioni d'insieme sulla natura delle equazioni algebriche che assurgono talora al livello di anticipazioni a carattere profetico: a riprova citiamo la sua osservazione che un'equazione dell'anzidetta specie completa, i cui coefficienti non presentino che variazioni di segno, può avere esclusivamente radici positive.

214 - Con le ricerche algebriche sin qui discorse il Cardano arrecò contributi di indiscutibile valore alla conoscenza delle equazioni cubiche. Ma un punto rimaneva tuttora avvolto nelle tenebre del mistero, cioè la presenza di quantità immaginarie nelle formole risolutive di dette equazioni nel caso in cui siano tutte tre reali (« caso irriducibile »). Sopra questo perturbante fenomeno egli deve aver meditato a lungo e nel 1570 vi consacrò un lavoro speciale, a cui diede il titolo, sinora inesplicato, *De regula aliza* (secondo alcuni *aliza* deriverebbe da una parola araba significante *difficile*). Mentre, come già osservammo, tutti gli scritti del Cardano non brillano per chiarezza, quest'ultimo è di una disperante oscurità; nessuno o pochi (uno di questi è lo storico Cossali) si sforzarono di comprenderlo, onde scarsa per non dire nulla ne fu l'influenza. Chi lo percorre segue il Cardano nel mentre tenta mille vie per sciogliere quell'angoscioso enigma; lo vede arrestarsi, retrocedere per poi riprendere il cammino in avanti, sospinto dalla brama di scoprire i limiti di applicabilità del metodo di risoluzione ideato dal Tartaglia, cercando se lo si possa modificare in modo da evitare quel pericoloso scoglio. E appunto nella ricerca di tali limiti egli s'imbattè in tre problemi di massimo che, essendo stati da lui felicemente risolti, vanno qui registrati: I. Togliere da un rettangolo di lati dati $a, b$ una sua parte di altezza $x$ mediante una parallela al lato $a$ in modo che risulti massimo il parallelepipedo avente per altezza $\sqrt{ax}$ e per base la restante parte di quel rettangolo (Cardano trova che il massimo si raggiunge se $x = b/3$). II. Dividere una retta $a$ in due parti tali che risulti massimo il parallelepipedo $x(a - x)^2$ (in tal caso Cardano trova $x = a/3$). III. Dividere una retta $a$ in due parti $x, y$ tali che risulti massima la somma $xy^2 + xy^2$ (essendo questa equivalente a $axy$, il problema riducesi alla ricerca del massimo dei rettangoli aventi un dato perimetro, la quale era già stata risolta sin dai tempi di Euclide). Quando avremo aggiunto che, per alcune delle questioni trattate, Cardano dà una soluzione basata sull'intersezione di sezioni coniche, avremo adunati elementi sufficienti per

stabilire il valore dello scritto in questione, anche se esso non è bastato a diradare le tenebre in cui allora brancolavano gli analisti riguardo al caso irriducibile. A tanto egli non giunse perchè subì l'influenza dei pregiudizi allora dominanti sopra le quantità immaginarie; la luce doveva venire poco dopo per merito di un altro italiano — R. Bombelli — i cui lavori attraverso l'attenzione di Cardano, ormai decrepito, come è attestato dalla breve memoria intitolata *Sermo de plus et minus*, che leggesi nelle sue *Opere complete*; memoria di carattere filosofico, ove sono espressi i dubbi che fa sorgere il concetto di numero immaginario, ma non sono in alcun modo dissipati, onde non segna alcun vero progresso nella teoria di quei nuovi enti aritmetici.

Prima di lasciare l'eminente medico milanese notiamo che non è questo l'unico lavoro che dimostri essersi egli occupato di matematica sino al termine della sua travagliata esistenza. Infatti nel 1572 egli compì la redazione definitiva di una serie di problemi, alla quale diede per titolo *Exaereton mathematicorum*; e pure verso il tramonto egli scrisse il lungo *Opus de proportionibus numerorum,* ove il V Libro di Euclide trovasi esposto, commentato e applicato allo studio dei rapporti e delle proporzioni che s'incontrano nella meccanica, nell'acustica, ecc.

## I "Quesiti et Inventioni diverse" di N. Tartaglia

215 - L'ordine cronologico ci guida all'esame dei lavori matematici del Tartaglia che videro la luce posteriormente all'*Ars magna* dell'illustre suo emulo.

Ci si presenta anzitutto l'attraentissimo volume intitolato *Delli quesiti et inventioni diverse,* stampato per la prima volta a Venezia nel luglio 1546, più volte ristampato e, come scrive l'autore, dedicato a

> Chi brama di veder nove inventioni,
> Non tolte da Platon, ne da Plotino,
> Ne d'alcun altro Greco, over Latino,
> Ma sol da l'Arte, Misura, e Ragioni,

Tacendo per il momento del valore scientifico di quest'opera (del quale diremo tra poco), rileviamo la grandissima importanza che essa possiede dal punto di vista biografico e storico, giacchè il Tartaglia negli enunciati e nelle soluzioni delle questioni trattate ha cura di dire dove, quando e da chi gli furon proposte, onde incidentalmente dà notizia dei luoghi da lui abitati e delle persone con cui venne a contatto, aggiungendo qua e là notizie di carattere personale, che noi abbiamo in parte già utilizzato.

I tre primi Libri dell'opera in questione trattano problemi attinenti alla balistica e all'artiglieria, onde sono estranei al programma della presente *Storia*; il IV si riferisce al modo in cui ordinare un esercito in ischiere di varia forma; il V alla topografia, i tre successivi alla fortificazione e alla statica, cose tutte che meritano soltanto una fugace menzione da parte nostra.

216 - Ben più lungo discorso esige il IX e ultimo Libro, il quale aggirasi « sopra la scientia arithmetica, geometrica, et in la pratica speculativa de algebra et almucabala, volgarmente detta Regola della cosa, over Arte maggiore, et massime della inventione de Capitulo de Cosa, e Cubo equale a numero, et altri suoi aderenti, et dependenti, quali dalli Sapienti sono stati giudicati impossibili ».

I problemi geometrici trattati appartengono agli elementi della scienza. Tale quello proposto al Tartaglia da Messer Zuanne de Tonini da Coi in Venezia il 15 dicembre 1536 (Lib. IX, Quest. XXVI), il quale consiste nel dimostrare che « in qualunque triangolo rettangolo la somma dei cateti è eguale alla somma dell'ipotenusa e del diametro del cerchio inscritto », cosa già nota agli agrimensori romani. Ma, nella medesima occasione, lo stesso enunciò un altro problema che non torna ad onore del proponente nè tampoco del Tartaglia che si accinse a risolverlo; ci esprimiamo così severamente perchè si tratta di un problema più che determinato, epperò impossibile; infatti ivi si suppone dato il classico triangolo di lati 13, 14, 15 e in più uno (di lunghezza 3) dei segmenti in cui l'altezza che cade sul lato 14 è spezzata da quella relativa al lato 15 e si tratta di determinare i segmenti in cui questa altezza decompone il lato opposto.

Non è questo l'unico fatto il quale mostri come anche i migliori matematici del secolo XVI erano mediocremente esperti in geometria; un altro ne troviamo nella lettera scritta da Cardano a Tartaglia in data 4 agosto 1539 (Quest. XXXVIII) per chiedergli gli insegnasse come inscrivere un quadrato in un dato triangolo; il nostro gli rispose in modo sprezzante, inviandogli le soluzioni datene da due suoi alunni (esse però non vennero pubblicate). Osserviamo in aggiunta che, nel caso in cui il dato triangolo sia equilatero, la stessa questione era stata proposta al Tartaglia in Brescia addì 12 ottobre 1530 (Quest. XV) e da lui risoluta con un metodo che è facile riconoscere applicabile a qualunque triangolo. Alcuni dei *Quesiti* trattati sono di semplice aritmetica teorica e commerciale (p. es. la Quest. IV, ove dietro domanda rivoltagli a Mantova nel 1526, viene determinata la coppia 220, 284 di numeri amici) o altri sono di quelli che oggi si risolvono mediante equazioni lineari e quadratiche. Ma le pagine del più alto valore, sia storico che dottrinale, sono quelle relative alle equazioni cubiche; esse meritano da parte nostra un'analisi particolareggiata.

217 - Le prime questioni di questo genere furono proposte al Tartaglia, quando nel 1530 egli trovavasi in Brescia; glie le inviò il da Coi per interposta persona (Quest. XIV); eccone gli enunciati: I. Trovare un numero che, moltiplicato per la sua radice aumentato di 3, dia 5: II. Trovare tre numeri della forma $x$, $x+2$, $x+4$ il cui prodotto sia 1000. Tartaglia non stentò a trovare come equazioni risolutive le seguenti

$$x^3 + 3\,x^2 = 5 \quad , \quad x^3 + 6\,x^2 + 8\,x = 1000\ ;$$

si può notare che se nel secondo si prende per incognita la media delle tre incognite, si ha invece per equazione del problema $x^3 = 1000 + 4\,x$.

Ora, siccome tutte queste equazioni sono delle forme che il Pacioli dichiarò « impossibili » (v. p. 280), così il Tartaglia rimprovera il da Coi per avere proposta una questione che egli stesso non era in grado di risolvere; a scusa di Maestro Zuanne si può addurre il fatto che egli aveva forse avuto sentore della scoperta fatta da S. dal Ferro quindici anni innanzi; Tartaglia aggiunge che egli non condivide l'opinione di fra Luca, sembrandogli di avere scoperta una regola per risolvere tutte le equazioni della forma $x^3 + p x^2 = q$ [1]; e, seguendo il costume del tempo, propone al riguardo una scommessa; va però in generale osservato che nulla autorizza a ritenere che le soluzioni dei *Quesiti* siano esposte dal Tartaglia in modo fedelmente conforme a quello usato quando furono proposte.

Sembra che quella scommessa non abbia avuto seguito; ma il da Coi riappare cinque anni dopo inviando al Tartaglia (addì 12 settembre 1535) tre problemi (Quest. XX), nel terzo dei quali questi ravvisò un tranello, giacchè esige la risoluzione di un'equazione di grado superiore al secondo. Scopo di esso è la scomposizione del numero 20 in tre parti che siano in progressione geometrica e di cui le due prime diano per prodotto 8; come il lettore riconoscerà, è il problema che, come vedemmo (n. 39), condusse alla risoluzione delle equazioni di quarto grado.

Passa circa un altro anno. Nell'agosto 1536 Tartaglia teneva cattedra a Venezia e, per ritorsione di una questione fattagli da un certo Vincenti (Quest. XXIII), propose la ricerca di un numero che, moltiplicato per la sua radice quadrata aumentata di 6, dia per prodotto 100; con dati diversi, si ritorna alla questione proposta nel 1530 dal da Coi, e tutto fa credere che sia rimasta nuovamente intatta. Durante lo stesso anno il da Coi recossi a Venezia e il 10 dicembre propose al Tartaglia alcuni problemi (v. Quest. XXV), nel relativo racconto è anche fatto cenno di una sfida anteriore corsa a Brescia fra Anton Maria Fior e Tartaglia, nel corso della quale questi avrebbe risolte in sole due ore non meno di 30 questioni propostegli; le relative equazioni erano tutti casi particolari dell'equazione $x^3 + p x = q$, che il Fior vantavasi di sapere risolvere applicando una regola comunicatagli da un grande matematico (S. dal Ferro?). A quanto afferma il Tartaglia egli le risolse a Venezia il 12 febbraio 1535 e nel giorno successivo fece altrettanto riguardo alle equazioni della forma $x^3 = p x + q$. Sempre per ritorsione il Tartaglia propose al Fior nell'anzidetta occasione altre 30 questioni, ma non ne ricevette le soluzioni; di quattro ha conservato l'enunciato (Quest. XXV); riferiamo le corrispondenti equazioni, usando la lettera $R$ per designare un numero razionale:

$$x(\sqrt{x} + 40) = R \quad , \quad x(30 - \sqrt{x}) = R \ ,$$

$$x + 4\sqrt[3]{x} = 13 \quad , \quad x - \sqrt[3]{x} = 10 \ ,$$

---

[1] Si leggano anche le dichiarazioni fatte nel 1541 al Ventuorth e riferite nel XLII quesito.

si tratta dunque di equazioni riducibili alle seguenti forme

$$x^3 + p\,x^2 = q \quad , \quad p\,x^2 = q + x^3 \quad , \quad x^3 + p\,x = q$$
$$x^3 = p\,x + q \ ,$$

e il matematico bresciano dice di averle risolute sino dal 1530, il che sembra in disaccordo con quanto è dichiarato nell'ultima delle strofe che riferiremo nel numero seguente.

218 Sino a questo momento Tartaglia si era trovato di fronte a personalità di secondo ordine; ma poco dopo (Quest. XXXI) entra in scena Cardano, mediante una lettera, in data 2 giugno 1539, recapitata per il tramite di un libraio. È ivi detto che, avendo il celebre medico milanese appreso che il Tartaglia era riuscito vincitore nella sfida lanciatagli dal Fior, la quale tutta aggiravasi sopra equazioni della forma $x^3 + p\,x = q$, ed essendo egli in procinto di pubblicare un completo trattato di algebra, chiedeva comunicazione della regola di risoluzione, impegnandosi di tenerla per sè o di pubblicarla col nome dell'inventore. E poichè il Tartaglia rispose rifiutando, Cardano chiese gli fossero almeno comunicati gli enunciati di quelle 30 questioni. Neppure ciò venne accordato dal Tartaglia, e allora il Cardano inviò al suo corrispondente gli enunciati di 8 problemi, di cui il Tartaglia riconobbe l'identità con altri anteriormente propostigli dal da Coi; e, dietro nuove pressioni, il matematico bresciano finì (28 febbraio 1539) per comunicargli gli enunciati dei famosi 30 problemi.

Dell'insuccesso della missione affidata al proprio libraio Cardano si mostrò sdegnato in una lettera scritta il 12 febbraio 1539 (Quest. XXXII); per vendicarsi rivolse un appunto a un passo dell'*Artiglieria* del Tartaglia; questi, nel mentre si difendeva (lettera 18 febbraio 1539), porse qualche ulteriore particolare sui problemi proposti dal Fior, al quale viene riconosciuta la qualità di calcolatore « di gran pratica ». Ben più mite e conciliante è la lettera scritta dal Cardano in data 13 marzo dello stesso anno: dopo un ritratto poco lusinghiero del da Coi, egli, oltre ad insistere per avere comunicazione della scoperta del Tartaglia, invita questo a recarsi a Milano in sua casa, per fare la conoscenza del Marchese del Vasto, dilettante di scienze e protettore del Cardano. L'invito fu accettato, e nell'opera in esame (Quest. XXXIV) si legge il racconto del colloquio fra i due matematici che ebbe luogo a Milano addì 25 marzo 1539; durante lo stesso il medico milanese rinnovò la sua istanza, giurando di non far parola con alcuno delle comunicazioni che gli fossero fatte, di cui avrebbe preso nota in cifre, onde nessuno potesse averne notizia. Tartaglia finì per cedere, compendiando la propria scoperta nei versi seguenti, dai quali sembra emergere che per giungere a una radice dell'equazione $x^3 + p\,x = q$ egli scomponesse l'incognita nella somma di due altre, come si pratica ancora:

Quando che 'l cubo con le cose appresso
  Se agguaglia a qualche numero discreto:
  Trovan dui altri, differenti in esso.

Dapoi terrai, questo per consueto,
Che 'l loro produtto, sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto;
El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesti atti;
Quando che 'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'a volo,
Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo delle cose in stolo;
Delle quali poi, per commun precetto,
Torrai li lati cubi, insieme gionti,
Et cotal somma, sarà il tuo concetto;
El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solve col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti,
Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent'e quattro e trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi;
Nella Città del mar 'intorno centa.

219 - Presane visione (e forse copia), Cardano rinnovò l'impegno preso; ma poi (lettera del 9 aprile 1539) confessò di non essere riuscito a risolvere l'equazione $x^3+3x=10$, e Tartaglia, pure manifestando qualche preoccupazione sul modo di agire del Cardano, espose per esteso la relativa applicazione della sua regola. Sorvolando sopra due lettere scambiatesi poco dopo (12 e 17 maggio 1539) fra i due matematici, perchè estranee al dibattito, noteremo che i sospetti di mala fede sorti in Tartaglia si acuirono (lettere del 10 e 19 luglio 1539) in seguito alla notizia, datagli da un certo Maestro Mafio Poncini, che il matematico milanese stava scrivendo un'opera appunto relativa alle equazioni cubiche. Ciò porge la spiegazione della risposta poco cortese data dal Tartaglia alla domanda rivoltagli dal suo corrispondente (lettera in data 4 agosto 1539) riguardo all'equazione $x^3 = 9x + 10$, che appartiene al caso irriducibile. Cardano si mostrò risentito (lettera del 18 ottobre 1539); ciò non ostante richiamò l'attenzione del suo corrispondente sulla equazione $x^3 = 12x + 20$, ma il Tartaglia rifiutò di seguirlo, adducendo a scusa la insufficienza delle cautele prese a tutela delle proprie scoperte. La freddezza nei rapporti fra i due matematici si andò sempre più accentuando; all'informazione data dal Cardano (lettera del 5 gennaio 1540) che il da Coi vantavasi di avere indovinati i metodi di risoluzione delle equazioni delle due forme $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ nel momento in cui Tartaglia si batteva col Fior, Tartaglia rispose di non volersi più impicciare nè col Cardano nè col da Coi: e realmente la corrispondenza fra i due scienziati non ebbe seguito. Tuttavia alcune ulteriori notizie relative alle equazioni cubiche si traggono dall'ultimo dei *Quesiti*; giacchè ivi si trovano le risposte a domande rivolte al Tartaglia dal suo diletto discepolo Ventuorth, che era in procinto di restituirsi in Inghilterra sua patria. Le questioni enunciate dal gentiluomo

britanno concernono equazioni della forma $x^3 + p\,x^2 = q$; il Tartaglia le avrebbe risolte nella notte di S. Martino del 1536, ma rifiutossi di comunicare il proprio metodo, intendendo esporlo in una grande opera algebrica da lui progettata; si limitò a farne applicazione a qualche caso speciale; accennò poi alle tre forme $x^3 = p\,x^2 + q$, $x^3 + p\,x^2 = q$, $x^3 + q = p\,x^2$, nonchè alle equazioni generali e notò finalmente la riducibilità a quadratiche delle equazioni seguenti: $x^6 = p\,x^3 + q$, $x^6 + p\,x^3 = q$, $x^6 + q = p\,x^3$, senza osservare che, mutandovi gli esponenti 3 in 2 si ottengono equazioni riducibili al terzo grado.

## I Cartelli di matematici a disfida (¹)

220 - L'accusa di malafede rivolta dal Tartaglia al Cardano non poteva lasciare costui indifferente, nè infatti lo lasciò; e poichè per la sua posizione ufficiale e sociale egli non ritenne conveniente il disputare direttamente col Tartaglia, la sua difesa venne assunta dal suo discepolo Ludovico Ferrari. Spontaneamente? Così affermò ripetutamente il Ferrari; ma il Tartaglia non si è mai indotto a crederlo; perciò, nei suoi scritti polemici, trattò sempre il Ferrari come un semplice portavoce del suo maestro, sia che tale fosse la sua convinzione, sia che adottasse questo artificio dialettico per fare stizzare il proprio avversario.

Gli è da Milano, in data 10 febbraio 1547, che il Ferrari fece partire il suo 1° *Cartello di sfida*, nel quale, dopo avere accennato all'attitudine rispettiva dei due avversari e agli errori di cui, a suo dire, riboccano i *Quesiti et inventioni diverse*, propose all'autore di quest'opera di « disputar in luogo egualmente commodo, dinnanzi a giudici idonei, pubblicamente » con lui « in Geometria, Arithmetica e tutte le discipline che da esse dependono », dichiarandosi pronto a depositar in mani sicure 200 scudi, destinati al vincitore; la risposta doveva essere data nel termine di giorni trenta.

Essa non si fece attendere; è datata da Venezia, 19 febbraio 1547, e redatta sotto forma non meno aspra e violenta di quella usata dal Ferrari. Il Tartaglia si rifiutò di contendere col Ferrari, non avendo verso di lui avversione alcuna, ma si dichiarò disposto a farlo quando gli atti relativi fossero controfirmati dal Cardano. Seguono altri particolari sulla condotta della gara; fra essi limitiamoci a notare la richiesta che quesiti e soluzioni fossero esposti, non a voce, ma per mezzo della stampa, e la dichiarazione del Tartaglia di essere pronto a depositare presso persona degna di fiducia una somma da determinare di comune accordo.

Il *II° Cartello* ferrariano è molto lungo e scritto in latino, certamente col maligno proposito di porre nell'imbarazzo l'avversario, che,

(¹) Le prime attendibili notizie sopra questi importanti documenti furono date dal Fantuzzi (*Notizie degli scrittori bolognesi*, Bologna, 1781-90), in un'Appendice all'articolo relativo al dal Ferro. Particolari più minuti si leggono nella memoria di S. Gherardi, *Di alcuni materiali per la storia della Facoltà matematica nell'antica Università di Bologna* (Annali delle Sc. nat., Ser. II, t. V, 1846). Seguì la pubblicazione integrale dei *Cartelli* citata nella *Bibliografia* che chiude il presente Capitolo.

notoriamente, era di scarsa coltura letteraria. È datato, sempre da Milano, calende di aprile 1547, e, fra ingiurie e schermaglie, contiene una notizia, data per umiliare il Tartaglia, ma che è del più alto interesse storico: ed è che *Cardano, durante un viaggio col Ferrari da Milano a Firenze, fece nel* 1542 *una sosta a Bologna, durante la quale da Annibale Della Nave ebbe comunicazione dell'opuscolo di Scipione Dal Ferro in cui era esposta elegantemente e completamente la risoluzione delle equazioni cubiche;* in tal modo la priorità del Tartaglia veniva revocata in dubbio, ma veniva rivelata una circostanza essenziale, che il Cardano aveva tenuta gelosamente nascosta per ragioni evidenti. Meno importante, ma pur degno d'essere rilevato, è il fatto, pure narrato dal Ferrari, che egli assistè al colloquio che vedemmo (v. p. 302) aver avuto luogo a Milano fra il Cardano e il Tartaglia.

La risposta di questi, quantunque lunghissima, fu scritta rapidamente, essendo stata licenziata per la stampa il giorno 21 aprile 1547; sono ivi svelate alcune circostanze le quali provano che il Cardano s'interessava personalmente al dibattito, del quale egli appare veramente come il recondito direttore, ed è lungamente disputato sulle condizioni in base a cui fosse da pronunciarsi il giudizio: notiamo soltanto che Tartaglia insiste sulla proposta che suoi giudici fossero, non soltanto Cardano e Ferrari, ma i matematici del mondo intero. Ciò che, in questa risposta, raggiunge dal punto di vista scientifico la massima importanza, è che il matematico bresciano chiude il proprio scritto proponendo ai suoi avversari 31 questioni, di cui daremo le caratteristiche, dopo di aver notato che non superano il livello che la scienza raggiunse all'epoca di Luca Pacioli. Di iassette di esse si riferiscono alle costruzioni con una sola apertura di compasso, soggetto che già vedemmo coltivato dagli Arabi (v. p. 200), da A. Dürer e forse (v. p. 291) anche da S. dal Ferro. È necessario rilevare qui una differenza fra le soluzioni arabe e tutte quelle dovute ai matematici di cui tratteremo nel presente Capitolo. Ed è che gli Arabi si servivano in ciascun problema, di *un'apertura non arbitraria, ma suggerita caso per caso dalle condizioni imposte,* il che spesso agevolava la procedura; invece i geometri italiani supposero che *il raggio da usarsi fosse sempre lo stesso in tutte le questioni trattate,* inspirandosi evidentemente a considerazioni prettamente teoriche.

Il Tartaglia chiede anzitutto (Quest. 1ª-10ª) che vengano risolte con tale artificio le proposizioni che negli *Elementi* di Euclide portano le segnature seguenti: III, 17; VI, 25, 28, 29; X, 31, 32, 33; XIII, 18; poi (11ª-13ª) che similmente vengano sciolti alcuni problemi di cui si occupò Tolomeo: e finalmente (15ª-17ª) siano in modo analogo costruite le tangenti a coniche in casi contemplati da Archimede e Apollonio. La *Geografia* di Tolomeo dà materia ai problemi 18-20, mentre il seguente ha per iscopo il calcolo della superficie di un solido semiregolare descritto nella *Divina proportione* di frate Luca. Le restanti questioni sono prettamente pratiche, avendo per iscopo l'estrazione di radici o da numeri o da polinomi formati con radicali di varia specie.

221 - Il rispetto per i nostri lettori ci vieta di trascrivere le plateali ingiurie di cui ribocca la nuova scrittura pubblicata dal Ferrari in

data 24 maggio 1547: rileviamovi invece la rinnovazione delle precedenti proposte relative alle modalità del concorso, l'assenza di soluzioni per le questioni enunciate dal Tartaglia e la presenza di altrettanti nuovi problemi proposti all'avversario. Questi sono più elevati di quelli provenienti dal matematico bresciano, qualcuno anzi tanto elevato che presumibilmente sorpassava le forze del proponente; nella totalità manifestano gli sforzi compiuti dal Ferrari per raggiungere il numero 31 a cui erasi arrestato l'avversario. Riferiamo gli enunciati dei più interessanti. Nella seconda questione proposta si chiede di dimostrare elementarmente, cioè basandosi sopra Euclide, ma non su Archimede e Apollonio, che il cerchio è massimo fra le figure isoperimetre. Nella 18ª si domanda di stabilire « estensivamente » (¹) l'eguaglianza degli angoli alla base di qualunque triangolo isoscele (*Elementi*, Lib. I, 6), nella 22ª si chiede al Tartaglia d'illustrare un passo del *Timeo* di Platone, mentre nella 30ª vuolsi una decisione sul dubbio se l'unità sia o non un numero. Sorvoliamo sulle questioni aventi per soggetti l'illustrazione di passi di Vitruvio (10ª e 28ª) e di Aristotele (31ª) o la spiegazione del funzionamento degli astrolabi (13ª, 20ª, 25ª). Rileviamo piuttosto i problemi che guidano ad equazioni cubiche (1ª, 3ª, 15ª, 23ª, 24ª) o di grado più elevato (27ª); perchè ben più notevoli di altri che si risolvono mediante equazioni quadratiche (12ª e 14ª). Non indegni di menzione sono i quesiti (6ª e 29ª) relativi all'inscrizione di un pentagono regolare in un triangolo equilatero; ma più viva impressione si prova leggendo la questione 17ª, giacchè essa ha per intento di scomporre il numero 8 in due parti tali che il loro prodotto per la loro differenza risulti massimo (²).

La risposta al *III Cartello* non si fece soverchiamente desiderare; porta la data 23 giugno 1547 e fu finita di stampare il 9 luglio seguente. Facciamo grazia al lettore della parte polemica, il cui esame troverebbe il proprio posto meglio in un florilegio di cavilli avvocateschi o di frasi ingiuriose che in un'opera destinata a dar notizia dell'evoluzione delle idee matematiche. Arrestiamoci invece sulla parte che veramente dottrinale può dirsi, perchè contiene risposte a non meno di 26 dei 31 quesiti proposti, senza esclusione di quelli a carattere filosofico; si deve però rammaricare che Tartaglia abbia omesse le questioni che menano a equazioni cubiche, perchè così ci ha negati ulteriori lumi sopra questo importante argomento. Riguardo a certe questioni il Tartaglia rileva con non ingiustificata vivacità imperfezioni negli enunciati ferrariani, le quali egli interpreta come riprovevoli tranelli e condanna in base alla massima aristotelica « qui litigatorie interrogat, prave disputat ». Il 3º dei quesiti proposti viene dal Tartaglia ridotto al problema di Delo, e per dimostrare « estensivamente » la proposizione 6ª del I Libro di Euclide, circoscrive un cerchio al dato triangolo isoscele: allora la eguaglianza degli angoli alla base risulta dal-

---

(¹) In un passo del V Cartello, il Ferrari dichiarò che con ciò egli intendeva che non si ricorresse alla riduzione all'assurdo.

(²) Il lettore non mancherà di rilevare l'analogia di questo problema con altri che incontrammo in Cardano (v. p. 298).

l'essere eguali due archi di un cerchio i quali siano sottesi da corde eguali: ma l'avversario non si dichiarò soddisfatto, perchè il Tartaglia si appoggiò a proposizioni dimostrate da Euclide più oltre. Nello stesso *III Cartello* si legge anche il seguente problema: « Proposte due linee, partitemi ciascuna di quelle talmente, che le parti dell'una siano la prima e la quarta, e quelle dell'altra siano la seconda e la terza di quattro continue proporzionali ». La questione si risolve agevolmente, ma di ciò il Tartaglia non si accorse e nascose la propria ignoranza in una lunga chiacchierata, d'onde emerge che egli equiparava quella questione al problema di Delo, epperò giudicava dovesse risolversi meccanicamente. Su di essa egli ritornò nel III Libro del suo *General trattato,* dandone bensì la soluzione esatta, ma non confessando il suo precedente abbaglio.

Lo spazio non consentendoci di fare di questa risposta un'analisi completa, restringiamoci a notare la soluzione data dal Tartaglia al problema aritmetico di massimo, di cui più sopra abbiamo riferito l'enunciato; ora egli afferma con piena ragione che le due cercate parti di 8 sono $4 \pm \sqrt{5\frac{1}{3}}$; soltanto è da lamentare che egli, come era richiesto, non abbia dimostrata l'esattezza della sua risposta, chè così il Ferrari potè dire che la questione non era stata risoluta. La dimostrazione fu poi data dal Tartaglia nel suo *General trattato* (Parte V, Venezia 1560, p. 88) e da essa risulta la sostanziale identità del ragionamento usato con quello mediante cui Archimede dimostrò (*Della sfera e del cilindro,* II Lib., Prop. X) che l'emisfero è massimo fra tutti i segmenti sferici ad una base avente medesima superficie. Che il Tartaglia fosse orgoglioso di quanto aveva trovato sembra emergere dal verso

Ogni dubbioso il paragon fa certo

col quale chiude il suo scritto.

222 - Non ci arresteremo sul *IV° Cartello* pubblicato dal Ferrari in data 10 agosto 1574, nè sulla risposta datavi dal Tartaglia il giorno 30 dello stesso mese, chè non contengono se non discussioni e invettive. Restringiamoci a rilevare che il matematico bresciano, sempre volgendosi al Cardano, espone alcune delle soluzioni dei quesiti anteriormente lasciati in sospeso, aggiungendo le seguenti parole: « Vi aviso anchora, qualmente nelle mie prime risolutioni ve ne interposi una, qual ha del verosimile, e nondimeno non è vera ne ben risolta, e questo ho fatto per duoi rispetti: l'uno per certificarmi se tal Questione era da voi intesa o ignorata, l'altro per far chiaro ogn'uno, che in tal nostra disputa non vi aveva bisogno d'altri giudici che noi medesimi ».

Il *V° Cartello,* pubblicato dal Ferrari nell'ottobre del 1547, consta di tre parti. Una di carattere polemico-giuridico, ancora più scortese delle precedenti, sulla quale ci sentiamo autorizzati a non dilungarci. Una seconda di critica delle soluzioni date dal Tartaglia, ove a rilievi ragionevoli si trovano mescolate osservazioni che dimostrano ad evi-

denza che, nel binomio Cardano-Ferrari, la violenza della passione ottenebrava la serenità del giudizio; finalmente nella terza, l'unica d'indiscutibile valore scientifico, sono risolti i problemi proposti dal Tartaglia. È ben vero che il Ferrari impiegò sei mesi per compiere siffatto lavoro; ma esso è riuscito tale, per sostanza e forma, da fare lamentare che sia l'unico scritto di quell'autore che sia giunto sino a noi.

Riguardo ai problemi da risolvere con un compasso ad aste fisse, egli osserva con ragione che si trattava di materia nella quale da circa cinquant'anni (anzi, noi sappiamo, da molto più tempo) si affaticarono molti begli ingegni fra cui emerge il bolognese S. dal Ferro. Quanto a lui, invece di restringersi a risolvere le questioni segnalate dal Tartaglia, si è proposto di esporre, in base alla condizione anzidetta, tutto Euclide, i teoremi non meno che i problemi [1]. Naturalmente non possiamo dar contezza ai lettori della struttura dell'edificio da lui eretto; come saggio delle costruzioni da lui inventate, limitiamoci a riferire quella da lui immaginata per la bisettrice di un dato angolo $B\ A\ C$ (Fig: 34): col raggio dato si descriva una circonferenza di centro $A$ e se ne determinino le intersezioni $D$, $E$ con i lati del dato angolo; poi, centri $D$, $E$, si descrivano altre due circonferenze col raggio dato; se $F$ ne è il secondo punto di intersezione, la retta $A\ F$ sarà la richiesta bisettrice. Superfluo aggiungere che il Ferrari si è occupato anche delle questioni aritmetiche proposte dal suo avversario, non senza rilevare che certamente furono ispirate dalla lettura delle opere dello Stiefel, matematico tedesco che impareremo a conoscere nel venturo Capitolo.

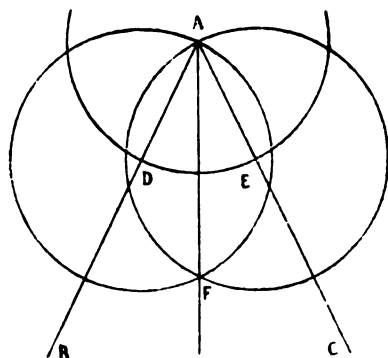



Fig. 34.

223 - Troppo spazio avendo già dedicato a questa disputa, ci basti aggiungere che il Tartaglia nella sua risposta al V° Cartello inaspettatamente dichiara di essere disposto a recarsi a Milano per cimentarsi in un torneo matematico coi proprî avversari, approfittando della vicinanza al capoluogo della Lombardia, di Brescia, ove egli trovavasi per ragioni professionali. Siffatta dichiarazione poteva ragionevolmente calmare gli animi dei due soci, i quali vedevano finalmente accolta la loro primitiva proposta. Invece il *VI° Cartello*, che il Ferrari licenziò addì 14 luglio 1548, è non meno dei precedenti riboccante di improperi e male parole; notiamovi soltanto che il Ferrari dice essere stata grande generosità da parte del Cardano citare il Tartaglia nell'*Ars magna*, dal momento che la risoluzione delle equazioni cubiche era stata ottenuta prima da S. dal Ferro ed era nota ad A. M. Fior. In pari tempo

[1] Che questa parte dello scritto sia dovuto alla collaborazione sua col proprio maestro venne dichiarato dal CARDANO nella sua opera *De subtilitate*.

della dichiarazione del matematico bresciano fu preso atto, circondandola di precise determinazioni, intese a sventare l'inganno che il Ferrari temeva vi si celasse; e, in data 24 luglio, i contendenti si trovarono d'accordo sui particolari del progettato duello.

Come si svolse? Tutto fa credere che esso abbia interessato assai mediocremente la cittadinanza milanese, dal momento che non se ne è trovata menzione alcuna nelle cronache del tempo (a loro scusa si tenga conto di quanto tribolata e agitata fosse l'epoca di cui discorriamo). Il Cardano e il Ferrari non avendone scritta veruna relazione, gli unici documenti che vi si riferiscono sono due narrazioni lasciateci dal Tartaglia, una nel terzo dei suoi Ragionamenti sopra la *Travagliata inventione*, l'altra nella II Parte del *General trattato,* di cui ben presto ci occuperemo; riferiamo la prima che è più breve: « ...per il che me parve tempo molto congruo de scorrere perfin Milano per ultimar la differentia desputativa che staseva suspesa con cartelli pubblici fra me et messer Hieronimo Cardano et messer Ludovico Ferrari: et di queste ne parlai alla eccellentia de messer Jacomo Chizola, et con messer Jacomo Aleno, li quali l'uno e l'altro me desconsigliavano digando che tal mia andata era periculosa per varij rispetti; ma io non mi volli smarir per questo, anci gli volsi andare, pur con sua licentia et così la ultimai, perchè gionto che fui a Milano per abreviar la cosa richiesi con un Cartello pubblico il detto messer Hieronimo Cardano insieme con messer Ludovico in un tempio detto il giardino di frati zoccolanti a disputar le sue reprobationi, che voleva adure sopra le solutioni per lor fate in termine di 7 mesi sopra alli miei quesiti 31 a lor proposti. Ma il detto messer Hieronimo non vi volse venire, anci cavalcò immediate fora de Milano; vero è che vi venne messer Ludovico con gran comitiva. Et venendo alle contese gli feci vedere et confessare lor haver non poco errato nella sua solutione fatta sopra la prima allor proposta nella geografia de Ptolomeo; et volendo io proseguire nelle altre sue resolutioni, tutti li circostanti, per torme fora del proposito, non volseno che io proseguisse più oltre, anci tutti ad un voce volseno che lo lasciassi dir lui, acciò la cosa restasse confusa, et tolse a dechiarar quella de Vitruvio da me non resolta, et vi disse suso assai assai, et così sopra quella de dividere un rettangolo, talmente che vene hora d'andar a cena.

« Io gli dissi che me dovesse dar tai solutioni in scritto; et con questa levata fu posto fine alla cosa, et me ne tornai a Bressa » (si era ai 19 agosto 1548).

Ben piccolo topolino partorito da una imponente montagna, non soltanto dal punto di vista umano (1), ma anche riguardo agli interessi supremi della scienza! Chè, a chi ben guarda, l'unico frutto dell'aspra contesa fu, non già qualche progresso nella teoria delle equazioni, che era allora l'argomento all'ordine del giorno, ma solo un perfezionamento alla geometria con una sola apertura di compasso, tema che non si eleva al disopra del livello di una semplice curiosità; sull'unica

(1) Dal punto di visita pratico ebbe per conseguenza che il Tartaglia perdette la cattedra che occupava a Brescia, mentre al Ferrari ne furono offerte a Roma, Venezia, Mantova, ecc.

questione di notevole valore proposta e risolta nel corso del lungo dibattito (ricerca di un massimo) regna completa oscurità sulla via che condusse allora Tartaglia alla soluzione; essa passò inosservata e fu ben presto dimenticata, condividendo la sorte di tutte le scoperte superiori all'epoca in cui furono fatte.

Ciò non ostante l'importanza dei *Cartelli* è indiscutibile e grande per la luce che proiettano sul cammino che guidò alla risoluzione delle equazioni di terzo grado, il quale sembra potersi tracciare come segue:

È Scipione dal Ferro che nel 1515, non condividendo l'opinione del suo ex-collega Luca Pacioli (professore a Bologna durante l'anno 1501-02) tentò e giunse a risolvere le equazioni della forma $x^3 + p x = q$, ma al riguardo mantenne gelosamente il segreto, limitandosi ad esporre per iscritto il suo metodo; il prezioso documento passò nelle mani del suo genero Annibale della Nave. Ma sembre che, almeno nei circoli bolognesi, trapelasse il segreto della scoperta; da ciò la spiegazione di problemi proposti al Tartaglia da Zuanne da Coi e Antonio Maria Fior. A questi modesti insegnanti risale il gran merito di avere spinto il matematico bresciano a nuovi sforzi, a cui egli si accinse incoraggiato dal fatto che, presso altri, essi non erano stati infruttiferi. Il risultato conseguito egli riassunse in alcune terzine a noi già note (v. p. 302). Questo egli comunicò al Cardano sotto vincolo del segreto, obbligandolo a giurare « ad sacra Dei » di non comunicarlo ad alcuno, riserbandosi di far nota la propria invenzione in un'opera algebrica che egli preparava (si tratta evidentemente del *General trattato* di cui parleremo nei nn. sgg.): così facendo egli si uniformò alle abitudini del tempo, quasi prevedendo quello che realmente accadde, che la formola da lui scoperta avrebbe finito col portare il nome di Cardano [1]. Questi poi, non traendo dall'autore completa luce sulla dottrina che ascondevasi sotto il velame degli strani versi del Tartaglia, chiese ed ottenne aiuto dai ragionamenti e dai calcoli registrati nel prezioso quaderno affidato ad A. della Nave, e così rese completo il materiale destinato a entrare nell'*Ars magna*. Ma le poche linee di carattere storico che vi si leggono (v. p. 295) furono evidentemente stilizzate col deliberato proposito di lasciare in tenebre complete l'entità delle comunicazioni ricevute intorno alla risoluzione delle equazioni cubiche, sia dal Tartaglia che da S. dal Ferro. Astenendoci di deliberato proposito da ogni giudizio sopra il contegno tenuto dagli attori di questo memorabile dramma [2] (chè si tratta di ufficio piuttosto della morale che della storia, per disimpegnare il quale fa mestieri tener presente l'epoca nella quale esso si svolse), rileveremo che fu l'*Ars magna*, scritta nella lingua che era allora posseduta da ogni persona colta, che diffuse nel

---

(1) In un'opera giudicata classica, il *Cours d'algèbre supérieure* del SERRET, si parla continuamente di « formule de Cardan »; e non è l'unico autore che abbia adottato questo anti-storico sistema.

(2) Aggiungiamo soltanto che neppure il contegno del TARTAGLIA fu sempre corretto; infatti nei *Quesiti et inventioni diverse* egli trasse profitto dell'*Ars magna*; ma nascose questo fatto riunendo sotto un'unica data gli enunciati e le soluzioni delle questioni trattate.

mondo la lieta novella dell'importantissimo progresso che l'algebra aveva compiuto nella prima metà del secolo XVI per opera di pensatori italiani.

## Il " General Trattato „ di N. Tartaglia

224 - La redazione dell'opera nella quale il Tartaglia riserbavasi di dare completa notizia delle proprie ricerche sopra le equazioni cubiche assorbì la miglior parte della sua attività, durante gli ultimi anni di sua vita; ma a lui fu negato di portarla a compimento, cosicchè essa ci si presenta mutila della parte più originale e importante, più desiderabile e desiderata. Si tratta di una completa Enciclopedia matematica, del tipo della *Summa* pacioliana, la quale ci si presenta un po' disordinata, forse perchè rispecchiante vari corsi di lezioni tenuti dall'autore in luoghi e tempi diversi. Che sia stata composta da persona edotta di quanto era stato scritto al suo tempo risulta dalle citazioni di opere di Boezio, Campano, Oronzio Fineo, Stiefel, Sacrobosco, Pacioli, Cardano, nonchè del Cardinale di Cusa, ed è confermato dalle critiche esposte con piena libertà di linguaggio e spesso con discutibile cortesia; inoltre numerosi sono i passi in cui riecheggiano i clamori delle dispute in cui l'autore fu trascinato dal suo focoso carattere. L'opera in questione porta nel suo insieme il titolo *General trattato di numeri et misure,* completato in vario modo per meglio indicare il contenuto di ciascuna delle sei parti di cui consta. In totale abbraccia 711 pagine in-folio, impresse in carattere così piccolo e compatto che, con le nostre abitudini tipografiche esso avrebbe occupato non meno di quattromila pagine. Le prime due Parti recano la data 1556, le tre successive quella del 1560, onde sono posteriori alla morte dell'autore; pure nel 1560 vide la luce la VI Parte e fu scritta, non dal Tartaglia, ma da un « dotto matematico » (chi?) giovandosi di materiali frammentari lasciati dal matematico bresciano.

225 - La I Parte è un esteso trattato d'aritmetica pratica, ove la esecuzione delle quattro operazioni aritmetiche è lungamente esposta, illustrata e poi applicata a problemi suggeriti da circostanze della vita o da transazioni commerciali; i dati numerici sono evidentemente scelti a caso, e non è fatta alcuna distinzione fra problemi determinati e problemi indeterminati.

Più dottrinale è la II Parte, che tratta dell'aritmetica teorica, in base alla rappresentazione geometrica euclidea, con inclusione della elevazione a potenza e dell'estrazione delle radici quadratiche e cubiche. Notiamo che un problema, propostogli a Verona il primo giorno di Quaresima del 1523, dà occasione al Tartaglia di mostrarsi esperto nel calcolo combinatorio, e che all'antica formola approssimata $\sqrt{a^2 + b} = a + b/2a$ egli di suo aggiunge l'analoga $\sqrt[3]{a^3 + b} = a + b/3a(a + 1)$. Dal punto di vista storico hanno notevole importanza le pagine in cui il Tartaglia dà qualche notizia intorno alle considerazioni che lo guidarono alla risoluzione delle equazioni cubiche, non senza offrire qualche particolare sopra la controversia col Cardano.

Una speciale menzione merita il calcolo esposto da lui delle prime undici potenze di un binomio; da esso egli viene indotto a studiare i coefficienti binomiali e, per mettere in luce la legge di formazione, a disporli nel triangolo delineato nella Fig. 35. In tale considerazione, che egli vanta quale opera propria, egli fu però prevenuto da due matematici tedeschi (P. Bienenwitz e M. Stiefel) che incontreremo nel seguente Capitolo.

Il carattere enciclopedico dell'opera di cui ragioniamo risulta dell'estrema varietà degli argomenti trattati nella II Parte di essa: calcolo con espressioni radicali, teoria delle proporzioni secondo Euclide, numeri congrui secondo Fibonacci e Pacioli (con un elenco di 43 fra

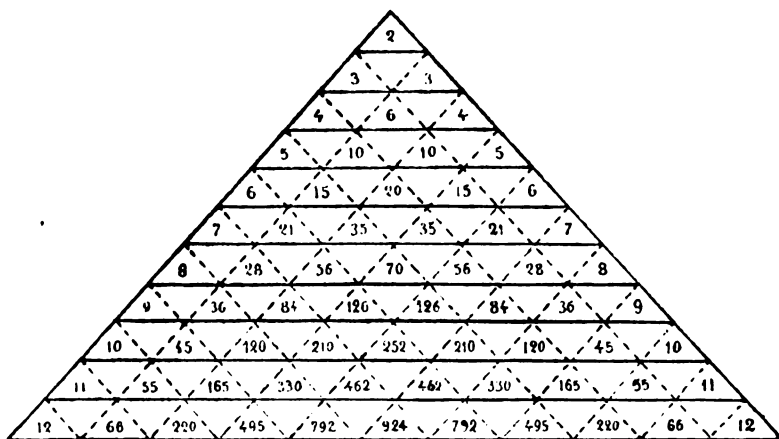



Fig. 35.

essi), quantità irrazionali considerate nel X Libro degli *Elementi*, numeri perfetti euclidei. Riguardo a questi va rilevato che Tartaglia presenta una tabella di nove di essi; ma le difficoltà che s'incontrano da chi voglia riconoscere se un dato numero sia o non primo, lo indussero in asserzioni erronee, cosicchè dei numeri da lui dati come perfetti, soltanto i primi quattro meritano tale nome.

Fra i problemi risolti dal Tartaglia citiamo il seguente: « Uno con quattro campioni » (cioè pesi) « con tal ordine fabbricati, che con quelli pesa quante lire » (cioè libbre) « gli occorrono alle mani da lire 1 sino a lire 40. Si addimanda in che ordine di peso erano formati tali campioni ». La soluzione datane dal nostro autore è esatta e notevole: i risultati sono differenti secondochè nel pesare si usano i due piatti della bilancia o uno solo; nel primo caso i campioni possono essere soltanto quattro dei pesi 1, 3, 9, 27, mentre nel secondo dovrebbero essere dei pesi 1, 2, 4, 8, 9, 16 oppure 1, 2, 4, 8, 16, 32. Ad onore di Tartaglia va notato che questo problema raggiunse larga notorietà essendo stato inserito in una famosa opera del Bachet de Méziriac (v. n. 311); questo matematico non confessò di avere attinto al nostro, ma l'identicità, non solo dei risultati, ma anche dei dati numerici, toglie ogni dubbio al riguardo.

226 - La III Parte del *General trattato* è costituita da una mediocre esposizione della geometria pratica, che potrà giovare principalmente a chi si interessa di ricerche metrologiche; ivi a torto il Tartaglia si ostina (cfr. p. 292) a identificare l'autore degli *Elementi* con Euclide da Megara e ad attribuirgli la definizione di retta come linea di lunghezza minima.

Alla geometria speculativa è consacrata la IV Parte della stessa opera; la trattazione è spinta sino al punto di giungere alla misura delle aree piane e al calcolo di una tavola di corde, secondo Tolomeo. L'esposizione dottrinale è accompagnata da osservazioni critiche non prive di fondamento: così Oronzio Fineo viene rimproverato per avere asserita la possibilità di costruire *regula et circino* tutti i poligoni regolari e Cardano per avere dichiarato ciò fattibile per l'ettagono. Lo stesso Fineo viene criticato per avere creduto che la quadratura delle lunole d'Ippocrate (v. pag. 33) conducessero alla quadratura dell'intero cerchio; nè mancano appunti giustificati al de Bouvelles e Stiefel, a proposito dello stesso problema. Passando alla geometria dello spazio, Tartaglia giunge sino ad esporre il contenuto dei libri archimedei *Su la sfera e il cilindro,* il quale, per merito del nostro matematico, da questo momento entra a far parte di qualunque insegnamento geometrico elementare.

Nella V Parte la geometria è studiata dal punto di vista costruttivo, prima nel piano e poi nello spazio; le questioni trattate sono, non solo quelle che trovansi negli *Elementi* di Euclide, ma altre più elevate, tanto da esigere il sussidio del calcolo. Nelle ultime pagine — che sono indubbiamente le più originali ed importanti — Tartaglia introduce il vincolo di operare con una sola apertura di compasso, ed espone le soluzioni delle questioni propostegli dal Ferrari, mostràndosi in grado di venire così a capo di tutti i problemi risolti altrimenti da Euclide (non esclusa la costruzione del pentagono regolare) e di sapere sciogliere similmente anche questioni concernenti le coniche. Per costruire la perpendicolare in un punto ad un data retta, il matematico bresciano sug-

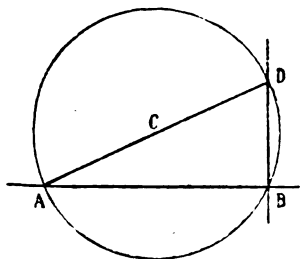



Fig. 36.

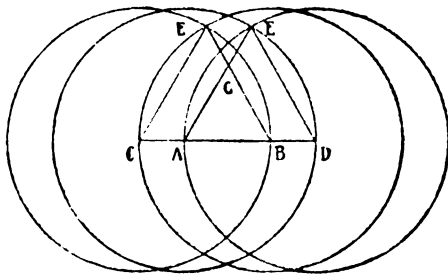



Fig. 37.

gerisce un procedimento di cui si vanta l'inventore, ma che era già stato prima immaginato da Abu'l Wafa; comunque, merita di venire riferito (Fig. 36): Si descriva con l'apertura data un cerchio passante per il punto dato $B$: ne sia $C$ il centro e $A$ la seconda intersezione con la

data retta; se $D$ è il secondo estremo del diametro $A\,C$ del dato cerchio ausiliare, sarà $B\,D$ la retta domandata. A meglio caratterizzare questa parte del *General trattato* aggiungiamo la costruzione che vi si legge di un triangolo equilatero di dato lato: Sia questo il segmento $A\,B$ (Fig. 37): Si descrivano col dato raggio quattro circonferenze di centri $A$, $B$, $C$, $D$ e se ne determinino le mutue intersezioni $E$, $F$, nonchè i punti d'incontro $C$, $D$, con la retta $A\,B$: condotte le rette $A\,E$, $D\,E$, $B\,F$, $C\,F$ risulteranno due triangoli equilateri $A\,D\,E$, $B\,C\,F$, e se $G$ è il punto comune alle rette $A\,E$, $B\,F$, sarà $A\,B\,G$ il triangolo richiesto.

227 - Con la VI Parte del *General trattato* si entra finalmente nel campo algebrico; ma l'esposizione non va oltre le equazioni di secondo grado o a tali riducibili; essa riesce verbosa e pesante per il vincolo, osservato dal Tartaglia, che i coefficienti siano sempre tutti positivi. Alla parte teorica segue una collezione di problemi, alcuni con intenti mercantili, altri geometrici, ma tutti risolubili mediante equazioni lineari o quadratiche; le poche abbreviazioni usate non permettono di considerare l'opera in discorso come appartenente ad altra fase che all'algebra sincopata.

Come a lavoro di un provetto insegnante, rotto a tutte le astuzie della didattica matematica, al *General trattato* non può negarsi un posto cospicuo nell'elenco degli scritti aventi per intento l'istruzione della gioventù [1]. Se, adottando i modi di vedere moderni, si può lamentare che troppo numerose siano le pagine biografiche, polemiche e autoapologetiche, non si può negare che in conseguenza la esposizione assume una varietà e una vivacità la cui mancanza fa apparire di desolante aridità gli scritti matematici modellati sopra gli *Elementi* di Euclide. Giunti all'ultima pagina, in ogni lettore sorge vivissimo il rammarico che al valoroso scienziato sia stato vietato di ultimare lo scritto che ci si presenta come il suo testamento scientifico, esponendo quei capitoli dell'algebra in cui la sua personalità sarebbe certamente apparsa in tutta la sua grandezza. Alcuni manifestarono l'opinione che Tartaglia abbia rinunciato a esporre la teoria delle equazioni cubiche, dopo che ciò era stato fatto da Cardano; noi, dopo un attento esame del *General trattato,* pensiamo che sia stata l'inflessibile falciatrice che impedì a lui di elevarsi oltre le equazioni di 2° grado, proprio nel momento in cui egli stava per spiccare il volo verso le più elevate regioni dell'algebra.

## R. Bombelli

228 - Fra le opere algebriche che videro la luce durante il glorioso secolo XVI raggiunse grande diffusione, non soltanto quando ottenne l'onore della stampa, ma anche quando cominciò a girare manoscritta,

---

[1] Che il *General trattato* sia stato giudicato favorevolmente anche all'estero è documentato dalla versione francese fattane dal GOSSELIN, la quale porta questo lusinghiero titolo: *L'arithmétique de Nicola Tartaglia brescian, grand mathématicien et prince des practiciens* (Paris e Anvers, 1578 e Paris, 1615).

quella che reca la firma di Raffaele Bombelli. La prefazione è datata 22 giugno 1572. Il Riccardi nella sua *Biblioteca matematica italiana* ne cita due edizioni: una del 1572, l'altra del 1579. Ma questa non porta alcuna indicazione che si tratti di una nuova edizione, giacchè reca la seguente dichiarazione: « Posta hora in luce a beneficio delli studiosi di detta materia »; sembra realmente strano che a soli sette anni di distanza si sia sentito il bisogno di una ristampa. Nel volume recante la data 1579 incorsero poi molti errori che sono segnalati in fine di esso e che avrebbero potuto correggersi in una ristampa; inoltre, mentre l'ultimo dei problemi risolti dal Bombelli porta il n. CCLXXII, due di essi portano il n. XLIX e invece mancano i nn. CCLVI e CCLVII, sviste queste inesplicabili in una seconda edizione; finalmente l'esame del testo, pagina per pagina, porta a concludere che si è in presenza di un semplice mutamento del frontispizio.

L'autore di essa si proclama bolognese, ma non se ne conosce l'atto di nascita e nemmeno quello di morte, il che si può spiegarlo considerando che il Bombelli, essendo di professione ingegnere idraulico, può aver finito la propria vita in qualche località, ove si trovava per doveri d'ufficio. Altro sulla sua vita non si conosce, onde si può dire che *tutto* Bombelli, lo scienziato e l'uomo, si trovi compendiato nel volume che gli assicurò l'immortalità, eventualmente completato dall'esame dei manoscritti, l'utilità dei quali è dimostrata dall'averci posti in possesso di un'intera sezione geometrica di quell'opera, che l'autore non diede alle stampe perchè intendeva meglio ripulirla, onore che essa conseguì ai giorni nostri.

Per scrivere il suo volume il Bombelli si giovò di lavori anteriori, che egli enumera onestamente; uno ha per autore Mohammed ibn Musa, ed egli lo cita perchè porge i dati necessari a stabilire l'etimologia del vocabolo « algebra »; si trovano poi la *Summa* di L. Pacioli e gli scritti di Cardano, Tartaglia e L. Ferrari (1), mentre si cerca indarno il nome del compatriota S. dal Ferro. Fra i francesi egli ricorda Oronzio Fineo e un Boglione, di identificazione difficile; seguono i tedeschi Stiefel e Schreiber (se così deve intendersi il nome Scribellio). Da ultimo egli fa menzione di un'opera greca « composta da un certo Diofanto Alessandrino autor greco, il quale fu a tempo di Antonin Pio » (che regnò negli anni 138-161), opera che egli imparò a conoscere nella Biblioteca Vaticana, di cui, anzi, con l'aiuto di un amico, « Messere Antonio Pazzi, Reggiano, pubblico lettore delle matematiche in Roma » (dal 1567 al 1575), egli tradusse i primi cinque Libri. Riguardo a questa importante citazione va anzitutto ricordato (v. Vol. I, p. 433) che sino dal febbraio 1464 il celebre Regiomontano aveva scoperto in una Biblioteca di Venezia i sei Libri superstiti dell'*Aritmetica* diofantea; ma più di un secolo era trascorso senza che si avesse alcuna pubblica prova che ne fosse stato intrapreso lo studio, ond'è merito indiscutibile del

(1) Il Bombelli non si addentra nella famosa disputa relativa alla scoperta della risoluzione delle equazioni cubiche; dice soltanto che Tartaglia era « di sua natura così assuefatto a dir male, che all'hora egli pensava di haver dato honorato saggio di sè, quando di alcuno avesse sparlato ».

Bombelli l'avere per primo [1] (come si vedrà fra breve) riposti in circolazione idee e metodi che da secoli giacevano dimenticati e negletti. Osservisi poi che, secondo l'ingegnere bolognese, l'opera di Diofanto sarebbe stata in *sette* Libri; ma l'esame di tutti i manoscritti esistenti, compiuto nel corso del lavoro che condusse P. Tannery all'edizione critica di essa, porta a concludere che si tratta di un « lapsus calami » commesso dal Bombelli, avendo scritto 7 in luogo di 6. Più strana, epperò meno facilmente spiegabile, è la sua asserzione che Diofanto avrebbe appresa la propria scienza dagli Indiani: lasciamo ad altri di trovarne la ragione o dimostrarne l'insussistenza.

229 - Dei tre Libri nei quali è divisa l'*Algebra* del Bombelli, il primo è interamente dedicato al calcolo con potenze e radici; queste, se applicate a numeri che non siano le potenze corrispondenti, dànno origine alle quantità *sorde* o *indiscrete*. Le radici vengono dal Bombelli designate con la lettera $R$, seguita dalle lettere $q$ o $c$ per distinguere se si tratta di una radice quadratica o cubica; la moltiplicazione viene indicata ora con la parola *via* ora con *per*. Così ad esempio la scrittura

$$R \cdot q \cdot 49 \quad \text{via} \quad R \cdot q \cdot 5 \quad : \quad \text{fa} \quad R \cdot q \cdot 245$$

significa

$$\sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{245}\,.$$

Quando Bombelli deve indicare un radicale che porta sopra una espressione polinomia, i termini di questa vengono da lui racchiusi fra due $L$, una diritta, l'altra rovesciata, le quali disimpegnano l'ufficio delle parentesi usate nei manoscritti.

Per agevolare l'estrazione delle radici quadratiche e cubiche, Bombelli fa notare con ragione che il quadrato di un numero intero non può terminare con 2, 3, 7 e 8, mentre « li numeri cubi possono finire in tutti li numeri ». L'estrazione delle radici quadratiche viene eseguita con un procedimento identico nella sostanza a quello oggi in uso per trasformare un radicale quadratico in frazione continua. Il nostro autore dimostra poi geometricamente la regola dei segni per le moltiplicazioni e divisioni, le addizioni e le sottrazioni delle quantità positive e negative, e quindi espone alcune delle proprietà godute dagli irrazionali di cui Euclide stabilì la teoria nel X Libro degli *Elementi*.

Mentre sino a questo punto il Bombelli aveva calcate le orme dei predecessori, nelle ultime pagine del suo I Libro egli fa compiere all'algebra un mirabile sbalzo in avanti, assurgendo al livello di creatore

---

[1] Il Libri (*Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. III, Paris, 1840, p. 182, nota) disse esistere nella Biblioteca Palatina di Firenze una versione italiana dell'*Algebra* di Diofanto, anteriore al volume bombelliano. Dietro mia preghiera il prof. L. Cavazzoni ne fece ricerche nelle biblioteche di Firenze, e non tardò a rintracciarla in quella Biblioteca Nazionale, ove essa porta la segnatura seguente: Palatino 625 [432. E. 5, 6, 36]. Circa contemporaneamente A. Agostini studiò il medesimo documento e ne trasse la conclusione che esso è formato dagli appunti presi dal Pazzi mentre studiava col Bombelli l'opera diofantea: v. l'articolo *Un commento su Diofanto contenuto nel Mss. Palat.*, 625 (*Archeion*, t. XI, 1929).

del calcolo con numeri complessi. A tale scopo egli introduce le locuzioni *più di meno* e *meno di meno,* per indicare le unità $+ i$ e $- i$, che abbrevia nelle scritture *pdm* e *mdm*; in conseguenza con la scrittura *Rc* ⌊ 2 *p d m* 2 ⌉ egli rappresentò l'espressione che noi indichiamo con la scrittura $\sqrt[3]{2 + 2i}$. Per operare mediante i nuovi enti aritmetici stabilisce un certo numero di regole fondamentali,, le quali non differiscono da quelle che oggi noi esprimiamo con le formole seguenti:

$$(\pm 1) i = \pm i \quad ; \quad (\pm 1)(-i) = \pm i \quad ;$$
$$(+i)(+i) = -1 \quad ; \quad (+i)(-i) = 1 \quad ;$$
$$(-i)(+i) = 1 \quad ; \quad (-i)(-i) = -1.$$

Così egli si procurò i mezzi per spiegare come, nel caso irriducibile delle equazioni cubiche, una quantità reale potesse presentarsi sotto forma immaginaria; ad esempio la consueta formola applicata all'equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

dà

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \quad ;$$

ma, poichè si ha $2 \pm 11i = (2 \pm i)^3$,

così essa può trasformarsi in

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 4 \quad ,$$

ove è scomparsa ogni traccia d'immaginario.

230 - È a partire dal II Libro dell'opera in esame (il quale tratta la teoria e la risoluzione delle equazioni algebriche) che si nota chiaramente l'influenza di Diofanto. Essa si manifesta anzitutto nella nomenclatura, chè, mentre da tempo l'incognita era indicata (non soltanto in Italia) con la parola *cosa,* Bombelli, sottraendosi all'influenza araba, seguendo invece l'esempio greco, usa uno dei vocaboli *tanto* o *quantità*; e mentre il quadrato dell'incognita era prima di lui indicato con la parola *censo,* egli usa *potenza,* a cui seguono *cubo, potenza di potenza,* ecc. La medesima influenza è visibile nel modo di rappresentare con la scrittura la incognita e le sue potenze; ricordiamo infatti che il matematico greco per designare l'incognita usa un segno speciale che i moderni editori hanno rappresentato con una ς finale; nei manoscritti tuttora esistenti, Bombelli adopera pure un segno « ad hoc » che ricorda una *v*; ma nell'opera stampata egli preferì un metodo del tutto nuovo, si servì cioè di un piccolo semicerchio concavo all'insù, entro il quale (ed è questa un innovazione originale su cui richiamiamo l'attenzione dei lettori) venivano scritti i numeri 1, 2, 3,... per indicare le corrispondenti potenze dell'incognita. Grande è il progresso così compiuto, chè si può dire che gli è da questo momento che gli esponenti furono usati metodicamente nell'algebra. A complemento delle convenzioni fatte il

Bombelli stabilisce la legge degli esponenti, cioè la relazione $x^m x^n = x^{m+n}$ che egli scrive $\underset{\smile}{m}$ via $\underset{\smile}{n}$ fa $\underbrace{m+n}$, $m$ e $n$ stando in luogo di numeri determinati.

Le formole bombelliane non sono molto più complicate e meno comode delle nostre; valga a provarlo il seguente esempio: il prodotto di

$$\overset{3}{\smile}\!\!1 \cdot p \cdot \overset{2}{\smile}\!\!4 \cdot m \cdot 3 \quad (\text{cioè} \quad x^3 + 4x^2 - 3) \quad \text{per} \quad \overset{1}{\smile}\!\!2 \cdot p \cdot \overset{4}{\smile}\!\!8 \cdot m \cdot 5$$
$$(\text{cioè} \quad 2x + 8x^4 - 5)$$

è dato da

$$\overset{7}{\smile}\!\!8 \cdot p \cdot \overset{6}{\smile}\!\!32 \cdot m \cdot \overset{4}{\smile}\!\!22 \cdot p \cdot \overset{3}{\smile}\!\!3 \cdot m \cdot \overset{2}{\smile}\!\!20 \cdot m \cdot \overset{1}{\smile}\!\!6 \cdot p \cdot 15$$
$$(\text{cioè} \quad 8x^7 + 32x^6 - 22x^4 + 3x^3 + 20x^2 - 6x + 15).$$

Va notato che, essendo le lettere $p$ e $m$ usate come simboli delle operazioni di addizione e sottrazione, a chi segue le orme del Bombelli è vietato di servirsi in generale di lettere per indicare costanti date; in conseguenza nessuno dei problemi da lui risolti ha dati letterali; in molti casi egli ovvia al risultante inconveniente stabilendo, con una fine analisi, l'interdipendenza fra il numero ottenuto risolvendo un problema e i numeri dati, e così può concludere regole applicabili in qualunque altra ipotesi numerica, cosa che — giova notarlo — non era mai stata fatta da Diofanto, nè da altri.

Emerge da tutto ciò che, benchè assai più perfetta, la simbolica bombelliana presenta l'identico inconveniente della diofantea, cioè di *essere applicabile ad un'unica incognita*, sicchè nei problemi in cui ne entrano parecchie, il nostro connazionale, al pari del matematico greco, è costretto a ricorrere a svariati artifici per esprimere mentalmente tutte le incognite della questione in funzione di una di esse (o, in certi casi, di un'incognita ausiliare): affrettiamoci a rilevare che gli è in queste occasioni che il matematico bolognese diede prova di essere degno del principe degli aritmetici greci.

La simbolica bombelliana mostra come l'algebra si andava lentamente evolvendo passando dalla condizione sincopata a quella oggi a tutti nota; essa mostra anzitutto la propria energia nella estensione ai polinomi ordinati secondo le potenze di una variabile delle regole date precedentemente per eseguire le operazioni sui numeri interi, scritti col sistema decimale. Ma essa è luminosamente confermata dalla trattazione delle equazioni (cioè della operazione detta dal Bombelli *dello agguagliare*) supposte sempre razionali. Tale trattazione s'inizia con l'operazione di « levare i rotti » e prosegue con lo studio delle equazioni della forma $a x^m = b x^n$; queste si risolvono mediante una divisione, eventualmente seguita da un'estrazione di radice, e va rilevato che il Bombelli, al pari dei matematici del tempo suo, esclude sempre le radici nulle.

231 - Prima di seguirlo in quanto dice riguardo alle equazioni con più di due termini, osserviamo che, egli fedele seguace di Diofanto e dei matematici arabi, considera esclusivamente equazioni a coefficienti

positivi, il che ha per conseguenza la necessità di considerare un numero di casi che va rapidamente crescendo col grado delle equazioni considerate; in alcune circostanze, quasi a forza, è costretto a considerare equazioni col secondo membro eguale a zero, ma, non generalizzando tale sistema, mostra di non aver saputo valutare il pregio di una gemma caduta casualmente ai suoi piedi.

Delle equazioni quadratiche egli considera le tre forme classiche

$$x^2 + px = q \quad , \quad x^2 = px + q \quad , \quad x^2 + q = px \; ,$$

ove $p, q, r$ sono numeri positivi; esse vengono risolute col consueto artificio di ridurle alla forma $(x + a)^2 = b$, giustificato mediante considerazioni geometriche. Generalmente di ogni equazione di 2° grado egli considera una sola radice; però, di fronte all'equazione $x^2 + 12 = 8x$ nota che è soddisfatta tanto da $x = 2$ quanto da $x = 6$; ma poichè egli limitasi ad osservare che « l'uno e l'altro modo è buono », è passato accanto a un'altra scoperta che avrebbegli arrecato grande onore. Il Bombelli risolve poi le equazioni biquadratiche e bicubiche, distinguendo per ciascuna specie i tre casi corrispondenti a quelli considerati nelle equazioni di secondo grado.

A questo punto il nostra autore passa alle equazioni di terzo grado, delle quali distingue le sei seguenti forme:

$$x^3 + px = q \quad , \quad x^3 = px + q \quad , \quad x^3 + q = px$$
$$x^3 + px^2 = q \quad , \quad x^3 = px^2 + q \quad , \quad x^3 + q = px^2 \; ;$$

le tre prime sono risolte applicando il solito artificio di scomporre l'incognita in due parti, giustificato mediante opportune considerazioni geometriche, le rimanenti sono ridotte alle prime sostituendo all'incognita altra ad essa inversamente proporzionale (p. es. dall'equazione $x^3 + 8 = x^2$, si passa alla $z^3 + 64 = 48z$ ponendo $x = 8/z$). Sopra i casi in cui le radici, benchè reali, si presentano sotto forma immaginaria, il Bombelli espone alcune geniali considerazioni atte a provare che egli percepì chiaramente le caratteristiche del caso irriducibile; nell'indicata classe entra l'equazione $x^3 = 9x + 9$ alla quale — osserva l'autore nostro — si riduce il problema della trisezione dell'angolo. Quando l'equazione cubica sia quadrinomia, tenendo conto dei segni dei coefficienti (quello del cubo essendo sempre uno) si hanno sette casi; per ridurre in ciascuno l'equazione a forma trinomia, il Bombelli si avvale di artifici che nel fondo non differiscono da quello oggi in uso; così l'equazione $x^3 + 9x^2 + 12x = 56$ viene da lui scritta sotto la forma $(x + 3)^3 = 15(x + 3) + 38$, e quindi ridotta a una delle forme precedenti, assumendo come nuova incognita $x + 3$. Da cosiffatti mutamenti, il Bombelli è condotto a osservazioni di carattere generale sopra la trasformazione delle equazioni, le quali mostrano quanto profondamente egli avesse riflettuto sulla materia.

232 - Volgendosi alle equazioni di quarto grado, egli manifesta il convincimento che Diofanto avesse insegnato a risolverle nei Libri perduti della sua *Aritmetica*; è un'opinione che si manifesta verosi-

mile a chiunque abbia meditato sull'opera del grande matematico greco, ma che, sgraziatamente, manca di qualunque base storica. Fortuna volle che l'ipotetica lacuna sia stata felicemente colmata da L. Ferrari, la cui invenzione il nostro si propose di svolgere e illustrare, applicandone il concetto fondamentale di risoluzione ai vari tipi di equazioni che fa d'uopo distinguere in base al numero dei termini e ai segni dei coefficienti.

Riguardo alle varie forme di equazioni da considerare, osserviamo che in un'equazione della forma

$$x^4 + p\,x^3 + q\,x^2 + r\,x + s = 0$$

non può mancare il termine costante senza che l'equazione scenda di grado; nè possono mancare ad un tempo $p$ e $r$, senza che l'equazione diventi biquadratica, e tanto meno $p, q, r$, chè allora si avrebbe un'equazione binomia. Si hanno pertanto equazioni *trinomie, quadrinomie* e *complete*. Le prime, in base al numero di termini che contengono, presentano soltanto questi due tipi:

$$x^4 + p\,x^3 + s = 0 \quad , \quad x^4 + r\,x + s = 0\,.$$

Siccome Bombelli esclude il caso in cui tutti i coefficienti siano positivi, così distingue le sei forme seguenti

$$x^4 + s = p\,x^3 \quad , \quad x^4 + p\,x^3 = s \quad , \quad x^4 = p\,x^3 + s$$
$$x^4 + s = r\,x \quad , \quad x^4 + r\,x = s \quad , \quad x^4 = r\,x + s \;;$$

di tutte s'incontrano esempi nell'opera che esaminiamo. Le equazioni quadrinomie, riguardo alle potenze che contengono, si distribuiscono in tre classi, caratterizzate come segue:

$$x^4 + q\,x^2 + r\,x + s = 0 \quad , \quad x^4 + p\,x^3 + r\,x + s = 0 \;,$$
$$x^4 + p\,x^3 + q\,x^2 + s = 0 \;;$$

tenendo poi conto dei segni dei coefficienti si vede che, esclusa l'ipotesi che questi siano tutti positivi, ognuno dà luogo a 7 casi, onde in totale se ne hanno 21. Se finalmente l'equazione è completa, sempre tenendo conto dei segni dei coefficienti, si arriva a 17 casi, in 15 dei quali rientrano i numerosissimi esempi svolti dal nostro matematico. A tutti è applicabile il metodo ferrariano di risoluzione; giova però osservare che il Bombelli spesso riduce previamente a quadrinomia l'equazione completa.

Lo scopo propostosi dal nostro matematico di applicare in tutte le ipotesi possibili il citato metodo si può ritenere pienamente raggiunto. Non si può negare però che l'impiego costante di una stessa procedura a tante equazioni, differenti fra loro soltanto per il numero dei termini e i segni dei coefficienti, rende pesante questa parte dell'opera che esaminiamo; ed è da lamentare che il Bombelli, il quale diede prova di ammirabile coraggio nel trattare i numeri immaginari, siasi mostrato tanto timido di fronte ai numeri negativi; se, oltre ad opere arabe,

egli avesse avuto notizia degli scritti indiani, avrebbe senza dubbio misurata la grande utilità di ammettere che i coefficienti delle equazioni potessero assumere valori negativi, e così avrebbe arrecato all'algebra un perfezionamento di cui è superfluo vantare l'importanza.

233 - Mentre nel II dei suoi Libri il Bombelli espose i metodi per trattare le equazioni suscettibili di risoluzione algebrica, nel III si è proposto di applicare detti metodi a non meno di 273 questioni. In una prima stesura della sua opera (tuttora manoscritta) egli, uniformandosi alle abitudini del tempo, scelse problemi enunciati (per usare le parole da lui scritte nell'opera stampata) « sotto velame di attioni e negotij umani » cioè « vendite, compere, restitutioni, permute, cambij, interessi, deffalcationi, leghe di monete, di metalli, pesi, compagnie, e con perdite, e con guadagno, giochi e simili infinite altre attioni e operationi umane »; ma, subìta che ebbe l'influenza di Diofanto (nella cui *Aritmetica* un solo problema è enunciato sotto forma concreta: v. p. 111), decise di supporre sempre che i dati fossero numeri astratti e che le condizioni avessero carattere prettamente teorico, innovazione alla quale egli fu certamente indotto anche dalle difficoltà che avrebbe incontrato nell'immaginare fenomeni sociali traducentisi nelle questioni elevate che egli ambiva di trattare. Ma l'influenza esercitata sul nostro matematico dal sommo aritmetico greco non si limita alla superficie; essa, al contrario, è talmente profonda che, in un certo senso, si può ben dire che il III Libro dell'*Algebra* del Bombelli rappresenti un rifacimento dei Libri superstiti dell'antica opera (non meno di 143 questioni sono semplicemente trascritte da Diofanto) e un tentativo di divinazione di quelli perduti. Anzi questa adesione si palesa anche nei casi in cui si sarebbe desiderata nel Bombelli una maggiore indipendenza. E in questo momento il nostro pensiero è diretto specialmente al fatto che in entrambi i citati scrittori manca la visione della necessità di distinguere i problemi determinati da quelli che tali non sono, onde, in entrambi, gli uni s'incontrano mescolati agli altri, e si ritiene lecito di completare i dati aggiungendo ad arbitrio nuove condizioni atte ad agevolare il raggiungimento dello scopo. Ancora: il problema dell'analisi indeterminata consiste per Bombelli come per Diofanto nella *ricerca di una soluzione* razionale positiva delle corrispondenti equazioni; per ciò i metodi e i calcoli relativi riescono di ben scarso giovamento ai moderni cultori della teoria dei numeri, i quali, come tutti sanno, si propongono la ricerca di *tutte* le soluzioni intere di una data questione. Aggiungiamo che in certi casi il nostro matematico si contenta di soluzioni frazionarie, mentre ne esistono d'intere; così del problema CLXXXII, il quale traducesi nel sistema $x - z = 3(y - z)$, $y + z = 5(x - z)$ egli preferisce una soluzione frazionaria ad una delle seguenti: $x = 10$, $y = 8$, $z = 7$; $x = 20$, $y = 16$, $z = 14$.

234 - Nell'*Aritmetica* di Diofanto i problemi si seguono in modo di cui non è agevole determinare il fondamento dottrinale, e l'apparente disordine viene da alcuni spiegato in base allo stato dei relativi manoscritti; ora questo comodo argomento non può servire a spiegare lo

stesso fenomeno nell'*Algebra* del Bombelli. Esso si manifesta sotto forma così acuta che, se si volesse presentare un quadro ben ordinato di quanto contiene il III Libro di essa, sarebbe indispensabile abbandonare quasi completamente l'ordine di successione adottato dall'ingegnere bolognese: diciamo « quasi », perchè in certi casi un problema segue un altro perchè in esso è applicata la soluzione di questo.

Molti problemi trattati nell'opera in esame si traducono in sistemi determinati di equazioni lineari ed appartengono a tipi che già s'incontrano nell'*Antologia* greca o che ne derivano col semplice aumento del numero delle incognite. La medesima osservazione può ripetersi riguardo a sistemi di gradi superiori, ma risolubili mediante equazioni dei due primi gradi. Senza arrestarci sui problemi che guidano ad equazioni di 2° e 3° grado, reputiamo meritevole di essere segnalato il seguente (n. CCLV) che guida ad una del 4°: « Trovinsi cinque numeri in proporzione, tali che dividendo la somma di quattro qualunque per il quinto e facendo la somma dei cinque quozienti risultanti si ottenga 836 ». E un problema indeterminato che il Bombelli trasforma in determinato assumendo eguale a 1 il minimo dei numeri cercati; in ogni caso si arriva alla equazione:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 836$$

per risolverla il Bombelli la trasforma successivamente come segue:

$$x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 841\,x^4 ,$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 29\,x^2 ,$$

$$x^4 + x^3 + 2\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 30\frac{1}{4}x^2 ,$$

$$x^3 + \frac{1}{2}x + 1 = 5\frac{1}{2}x ,$$

$$x^2 + 1 = 5x .$$

Il nostro autore conclude da ciò essere:

$$x = \frac{5}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}} .$$

Con maggiore semplicità di mezzi non potevasi conseguire lo scopo!

Non più di quattro sono le questioni di analisi indeterminata di 1° grado trattate dal Bombelli; molto più numerose sono quelle di grado più elevato (¹), in gran parte tratte da Diofanto e risolte in numeri quelle che si riferiscono alle « doppie equazioni » (v. pag. 111), cioè alla questione generale di attribuire all'incognita che entra in due fun-

(¹) Esse trovansi riferite nel t. II dell'*History of the theory of numbers* (Washington 1920, p. 444, 472, 478, 517, 524 e 599) del Dickson.

zioni lineari o quadratiche un valore tale da ottenere due numeri quadrati. Le citiamo per aggiungere che il Bombelli è andato più oltre del matematico greco, avendo considerate, da un analogo punto di vista, quelle che possono ben chiamarsi equazioni « triple » e « quadruple », nonchè altre equazioni doppie e triple di grado superiore al secondo; citiamo come esempio la ricerca di tre numeri $x, y, z,$ tali che rendano cubi le tre espressioni

$$(x+y+z)^3+x \quad , \quad (x+y+z)^3+y \quad , \quad (x+y+z)^3+z .$$

235 - Col III Libro si chiude la parte prettamente algebrica dell'opera bombelliana, l'unica che egli giudicò di forma abbastanza perfetta per poter essere data alla stampa.

Il resto è diviso in due libri e consta di un grande numero di problemi geometrici. Molti sono di ordinaria geometria e sono risoluti in modo differente e talvolta migliore dell'euclideo; volendo istituire un paragone fra i due autori, bisogna tener presente che il bolognese non era come il greco vincolato dal dovere in ogni occasione applicare esclusivamente teoremi anteriormente stabiliti; molto elegante è la costruzione indicata dal Bombelli per la divisione di un segmento rettilineo in un numero qualunque di parti eguali. Numerose sono le questioni che oggi direbbesi di calcolo grafico e che l'autore riguarda come di pertinenza dell'« algebra linearia ». Egli le risolve introducendo un segmento unitario (come aveva fatto prima Leonardo da Vinci e come Descartes fece quasi un secolo dopo) e non si limita a problemi di 2° grado, ma ne affronta anche di 3°, e così dà importanti complementi a quanto leggesi nei primi tre Libri della sua opera. Poichè lo spazio non ci consente di riferire gli enunciati dei problemi da lui trattati, limitiamoci a citare l'inscrizione di un ennagono regolare in un cerchio, la quale viene ridotta alla risoluzione di un'equazione cubica; aggiungiamo una menzione dei problemi relativi ai poliedri regolari e semi-regolari con cui si chiude l'opera, per notarvi l'ampio uso dell'operazione di sviluppo delle relative superficie, la quale notoriamente doveva assai più tardi entrare nella geometria descrittiva.

L'esame dei manoscritti in cui trovansi i Libri IV e V dell'*Algebra* del Bombelli porta alla conclusione essere stata la morte, che sembra avere colpito l'autore poco dopo la pubblicazione del suo volume, che gli ha vietato di sottoporli a un'ultima ripolitura; ove egli avesse potuto recarli a perfezione e darli alle stampe, la sua fama si sarebbe accresciuta e la scienza se ne sarebbe certamente avvantaggiata (1).

---

(1) Contemporaneo del Bombelli fu Paolo Bonasoni, professore nell'Università di Bologna dall'anno 1587-88 al 1592-93; di lui rimane in manoscirtto una raccolta di problemi di applicazione dell'algebra a problemi di 1° e 2° grado; al 3° egli non ha osato di elevarsi.

## G. B. Benedetti

236 - Gettando uno sguardo alla totalità delle opere che studiammo nel presente Capitolo, non si tarda a riscontrarvi unità di scopo e d'indirizzo: cioè lo scopo di fare oltrepassare all'algebra il confine da più di un millennio toccato, l'indirizzo di perfezionare la tecnica relativa sì da renderla più vigorosa e agile. Ora, verso la fine del secolo XVI si levò una voce solitaria per propugnare il ritorno ai procedimenti geometrici usati da Euclide nel trattare le questioni aritmetiche, voce che ricorda quella proveniente da Domnino da Larissa (v. pag. 108). Ma, mentre questi propugnava la santa causa del ritorno al rigore, caratteristico delle opere appartenenti al periodo aureo della geometria greca, il matematico moderno a cui facciamo allusione nutrì la stolta pretesa di opporsi al fatale andare della scienza, ritornando all'algebra geometrica degli antichi (v. p. 45).

È desso un patrizio veneto a cui il Tartaglia insegnò i primi quattro Libri di Euclide: Giambattista Benedetti. Egli nacque a Venezia il 14 agosto 1530; nel periodo 1558-1566 fu alla corte di Parma, chiamatovi dal Duca Ottavio Farnese, in qualità di lettore di filosofia e matematica. In principio del 1567 passò a Torino, ove era stato invitato da Emanuele Filiberto, il quale, nel grande concetto della restaurazione del proprio Stato, mirava anche alla elevazione della pubblica cultura, epperò chiamava intorno a sè, da altre regioni della penisola. uomini di chiara fama. In Piemonte il Benedetti fece così buona prova che dal Sovrano ebbe, a dimostrazione di alta stima, titolo di nobiltà: a Torino egli morì il 20 gennaio 1590.

Il suindicato divisamento risulta implicitamente dal lungo lavoro intitolato *Theoremata arithmetica* che occupa le prime 118 pagine dell'estesa opera pubblicata dal Benedetti a Torino nel 1585 col titolo *Diversarum speculationum liber*. Ora, che l'autore sia ricorso a rappresentazioni geometriche per stabilire alcune proposizioni che entrano oggi come parte integrante dell'aritmetica teorica è, sino ad un certo punto, spiegabile; ma la fiducia da lui nutrita di poter dimostrare la superiorità di quell'artificio sopra l'algebra, anche nel risolvere i problemi trattati da Cardano e Tartaglia, prova soltanto la sua incapacità di percepire la luce che emana dagli scritti che determinarono il più glorioso periodo dell'algebra italiana. Prescindendo anche dal metodo usato, rileviamo che le questioni trattate, dato il loro carattere elementare e la loro scarsa novità, presentano un limitato interesse: a mostrarlo basta notare che una delle più piccanti è quella notissima prodotta dalla frode dell'orefice scoperta da Archimede. Non tratteniamoci, dunque, più oltre sopra un lavoro di così scarso valore; e chiudiamo questo cenno notando che incontreremo più avanti (numeri 263-4) l'autore in attitudini più pregevoli.

## BIBLIOGRAFIA

N. TARTAGLIA, *Nova scientia inventa de N. T.* (Venezia, 1537).

N. TARTAGLIA, *La nova scientia de N. T.*, con una gionta al terzo Libro (Ivi, 1550).

EUCLIDE MEGARENSE, *philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice, diligentemente reassettato et alla integrità ridotto* (Venezia, 1543).

*Opera Archimedis Siracusani, phisolophi et mathematici ingeniosisimi, per* NICOLAUM TARTALEAM BRIXIANUM (Venezia, 1543).

ARCHIMEDIS, *De insidientibus aquae* (I Libro, Venezia, 1543; II Libro, ivi, 1565).

*Quesiti et inventioni diverse*, di NICOLÒ TARTAGLIA (Venezia, 1546).

*General trattato di numeri et misure*, di NICOLÒ TARTAGLIA (Parti I-VI, Venezia, 1556 e 1560).

B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad un testamento inedito di Nicolò Tartaglia* (Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini; Milano, 1881).

A. BERTOLOTTI, *I testamenti di Girolamo Cardano, medico, filosofo e matematico del secolo XVI* (Arch. Stor. Lombardo, t. IX, 1882).

E. COSTA, *Gerolamo Cardano allo studio di Bologna* (Arch. Stor. Italiano, V. Ser., t. XXXV, 1905).

E. RIVARI, *Girolamo Cardano accusa e fa bandire da Bologna per furto il figlio Aldo* (Studi e Mem. per la storia dell'Univ. di Bologna, t. I, 1907).

HIERONYMI CARDANI, *medici Mediolanensis, Practica arithmetice et mensurandis singularis* (Mediol., 1539).

HIERONYMI CARDANI, *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, Lib. unus* (Norimbergae, 1545).

HIERONYMI CARDANI, *Opera omnia*, 10 Vol. (Ludguni, 1553). Il I Vol. contiene gli scritti bio-bibliografici intitolati *De vita propria Liber* e *De libris propriis et eorum usu*; il IV tutti i lavori matematici.

*I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di* LODOVICO FERRARI, *coi sei contro-cartelli in risposta di* NICOLÒ TARTAGLIA, *comprendenti le soluzioni de' quesiti dall'una e dall'altra parte proposti. Raccolti autografati e pubblicati da* ENRICO GIORDANI (Milano, 1876).

LODOVICO FRATI, *Scipione dal Ferro* (Boll. di bibl. e storia delle scienze matem., t. XII, 1910).

E. BORTOLOTTI, *La scuola matematica di Bologna*. Cenno storico (Bologna, 1928).

E. BORTOLOTTI, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII* (Bologna, 1928).

*L'Algebra*. Opera di RAFAEL BOMBELLI da Bologna, divisa in tre Libri. Con la quale ciascuno da sè potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'aritmetica (Bologna, 1579). Libri IV e V comprendenti « la parte geometrica », inedita, tratta dal manoscritto, pubblicata a cura di E. BORTOLOTTI (Bologna, 1929).

BAPTISTAE BENEDICTI, *Patritij Veneti Philosophi, Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum Liber* (Taurini, 1585).

## CAPITOLO XVII

# L'ALGEBRA SINCOPATA NEL SUO APOGEO

## PARTE II: AL DI LÀ DELLE ALPI

### La letteratura aritmetica nella prima metà del secolo XVI

237 - La lenta ma costante elevazione del livello culturale delle masse popolari, e più ancora l'estendersi e l'intensificarsi delle transazioni commerciali, resero, in tutti i paesi d'Europa, sempre più urgente il bisogno di conoscere le norme governatrici della pratica aritmetica; in conseguenza le opere intese ad insegnarle divennero in breve tempo siffattamente numerose da rendere vano ogni tentativo di tutte enumerarle; lo storico deve pertanto restringersi a menzionare le migliori, non senza far cenno di quelle che, grazie a numerose edizioni esercitarono una più vasta e duratura influenza.

In siffatta privilegiata situazione trovasi la *Margarita philosophica*, grande enciclopedia, di cui nel secolo XVI si ebbero una ventina di edizioni e traduzioni: ne è autore Gregorio Reisch, nato a Baligen (Württemberg) e morto nel 1523 a Friburgo i. B rivestito di un'alta dignità ecclesiastica. Sotto forma di dialogo fra Maestro e Discepolo (ora è l'uno, ora è l'altro che interroga) sono ivi esposti i rudimenti dell'aritmetica e della geometria pratica, non senza errori, chè erronea è la regola per calcolare l'area di un poligono, consistente nell'applicazione della espressione di un numero poligonale.

Ancora più del Reisch conseguì popolare rinomanza Adamo Riese, il cui nome divenne proverbiale in tutte le terre di lingua tedesca.

Adamo Riese nacque nel 1492 a Staffelstein vicino a Bamberg (Franconia); fu istruito probabilmente ad Erfurt, ove nel 1522 occupava un posto di ragioniere (Rechenmeister); uffici analoghi ottenne negli anni successivi in altre città tedesche; ma sino dal 1532 aprì in Annaberg una scuola privata d'aritmetica, che ben presto assurse ad alta fama.

Prescindendo da una raccolta di tavole numeriche, si conoscono tre volumi aritmetici recanti la sua firma, pubblicati negli anni 1518, 1522 e 1550 [1], nei quali la stessa materia è esposta sotto forma sem-

[1] Il frontispizio di quest'opera nella redazione del 1550, ornato dal ritratto dell'autore nel suo LVIII anno di vita, si trova riprodotto a pag. 251 dell'opera D. E. SMITH, *Rara arithmetica* (Boston, 1908).

pre più perfetta, ma senza notevole originalità: solo va osservato che le considerazioni sopra i quadrati magici che si leggono nel secondo dei citati volumi collocano il Riese al primo posto fra i matematici tedeschi che si occuparono di questo argomento.

Lo stesso carattere compilatorio ha uno scritto d'algebra (*Die Coss*) del medesimo autore, compiuto nel periodo pasquale del 1524, ma che non venne mai dato alle stampe, forse perchè nel frattempo la letteratura matematica tedesca si era arricchita di trattazioni migliori della stessa materia. Il relativo manoscritto è conservato quale preziosa reliquia nei forzieri della Cassa di Risparmio di Marienburg (Sassonia) (1).

Il Riese morì il 30 marzo del 1559 in Annaberg.

Carattere totalmente differente ha lo scritto *De numero atomorum totius universi contra usurarios* (Roma, 1518), che ha lo scopo di diffondere nelle masse la convinzione dell'utilità di servirsi delle casse di risparmio; a tale scopo si fa vedere l'enormità delle somme a cui si arriva impiegando a interesse composto un modesto capitale; e per conseguire lo scopo l'autore giunge persino a considerare numeri di 69 cifre. Ne è autore un certo Paolo nato a Middelburg (Olanda) nel 1445 e morto nel 1533 vescovo di Fossombrone. È un personaggio oggi quasi dimenticato, ma che occupa un posto cospicuo nella storia della riforma del calendario. A stabilirne il valore come matematico possiamo citare due fatti: cioè l'avere egli assunto come valore di $\pi$ la semisomma dei limiti (3 1/7 e 3 10/71) assegnati da Archimede e l'avere combattuta l'opinione così diffusa (v. p. 241) che fosse possibile riempire lo spazio con poliedri regolari differenti dal cubo.

238 - L'ampia diffusione che conseguirono in Germania gli scritti del Riese è in parte dovuta all'avere egli scritto in tedesco; giustizia vuole però si dichiari che non fu il primo ad abbandonare la lingua dei dotti per quella del volgo. Tale primato spetta a Enrico Schreiber (nome latinizzato in Grammateus), il quale, nato circa nel 1496, studiò a Vienna nel periodo 1507-12, ivi pubblicò (1514) un *Algorismus proportionum* e nel 1518 scrisse la prima aritmetica in tedesco — la quale però non fu stampata che nel 1525 (e ristampata a Francoforte negli anni 1535, 1544 e 1572 (2) — ed ivi morì nel 1525. La citata *Aritmetica* è un lavoro di pura compilazione, nella quale si può avvertire l'influenza del Pacioli, chè ivi, come è fatto nella *Summa*, si è abbandonato l'antico sistema di considerare le operazioni « duplicazione » e « bisezione » come operazioni speciali, invece che come casi particolari della moltiplicazione e della divisione: per le varie potenze dell'incognita sono usati simboli speciali, i quali, sotto il nome di « segni cossici » s'incontrano non soltanto in Germania nel secolo di cui ragioniamo, ma anche altrove e più tardi (3).

Non dissimile dal lavoro dello Schreiber, sia per la materia svolta che per la lingua in cui è scritto, è un trattato d'aritmetica pubblicato

(1) Nel minuscolo opuscolo di M. Sommer, intitolato *Die Coss von Adam Riese* (Schwarzenberg, 1929), ne sono riprodotte in fototipia alcune pagine.

(2) Il lungo titolo trovasi trascritto nella citata opera dello Smith (p. 124).

(3) Cfr. *Oeuvres de Descartes* (ed. Adam et Tannery, Paris, 1908), t. X, p. 294.

a Ingolstadt nel 1527 da Pietro Bienewitz (latinizzato in Peter Apianus): l'autore, nato in Sassonia nel 1495 e morto nel 1552, deve avere conseguita un'invidiabile rinomanza se fu prescelto a maestro del principe che divenne poi l'imperatore Carlo V. È da notarsi che nel frontispizio di quel trattato ([1]) trovasi disegnato il triangolo aritmetico sotto forma identica a quella che rilevammo (v. p. 164) in un'antica opera cinese.

Più alto è il programma dell'opera intitolata *De numeris libri II* (Colonia, 1539). Essa fu scritta da Giovanni Bronchorst, nato a Nimega (città dell'Olanda, presso alla frontiera prussiana, dal cui nome latino trae origine l'appellativo Noviomago spesso usato per indicare il matematico di cui ci occupiamo), insegnante prima a Rostock, poi a Colonia, ove morì nel 1570. L'opera succitata consta di due parti, una relativa all'aritmetica pratica, l'altra alle proprietà dei numeri. È vano cercarvi novità di metodi e di concetti; si tratta di un lavoro didattico, scritto con mirabile chiarezza da persona che conosceva perfettamente la scienza del suo tempo. Nella I Parte sono esposti i vari sistemi di numerazione, non soltanto quelli usati dai Greci e dai Romani, ma anche uno assai strano tratto, a quanto si dice, dall'astronomia caldaica, ma da tempo immemorabile scomparso e dimenticato; l'autore espone lungamente come si operi sui numeri, non senza far menzione degli ausiliari naturali (« loquela digitorum » del venerabile Beda; v. p. 136) e artificiali (abachi). La mancanza di dimostrazioni, spiegabile nella I Parte dell'opera, non è giustificata nella II, ove l'autore ha seguìte le orme di Teone Smirneo, mentre avrebbe meglio provveduto agli interessi dei lettori scegliendo a propria guida Euclide; benchè a sua giustificazione si possa citare il fatto che egli seguiva un costume generalmente adottato ai suoi tempi, non si può non rimpiangere che un uomo della sua autorità non siasi fatto autore di un sistema più razionale.

239 - Passando il Reno c'imbattiamo in una persona che conseguì grande celebrità in tutta Europa: Oronzio Fineo. Nato nel 1494 a Briançon (Delfinato) studiò a Parigi nel Collegio di Navarra; per ragioni politiche subì una lunga detenzione (1518-1524), durante la quale curò (1523) una nuova edizione della *Margarita philosophica*. Uscito di carcere insegnò in un collegio privato della capitale, sino al 1532, quando conseguì la carica di professore nel Collegio di Francia; ciò non gli impedì di morire in miseria, addì 6 ottobre 1555. Frutto e forse compendio del suo privato insegnamento (grazie al quale — a quanto egli afferma — impresse nuova vita alla matematica ormai sepolta in Francia) è un'opera d'insieme dal titolo *Protomathesis* (Parigi, 1532), nella quale sono successivamente esposti gli elementi dell'aritmetica, della geometria, della cosmografia, nonchè la costruzione degli orologi. Nell'aritmetica si può rilevare una tavola dei prodotti a due a due dei numeri 1, 2,..., 60, presentata sotto una forma quale si avrebbe se 60 si scegliesse come numero fondamentale di un sistema di numerazione; la parte geometrica ha soltanto il modesto scopo di agevolare l'intelligenza

([1]) Vedi Smith, op. cit., p. 156.

di Euclide; si è, dunque, in presenza di una delle numerose opere enciclopediche, nella cui compilazione si compiacevano i matematici medievali.

Se il Fineo si fosse limitato a pubblicare lavori di compilazione e commento, quali sono quella citata e altra su cui non è il caso di arrestarsi ([1]), non avrebbe certamente raggiunti i fastigi della rinomanza, ma sarebbe almeno sceso nella tomba senza lo screditο che colpisce gli autori di paralogismi. Sgraziatamente egli si lasciò sedurre dalla prospettiva di sciogliere il più celebre problema geometrico lasciatoci in eredità dagli antichi. Il suo infelice opuscolo *De quadratura circuli* (Parigi, 1554) venne subito vivacemente e giustamente criticato; ma il Fineo, con l'irriducibile ostinazione caratteristica dei pretesi quadratori, non si arrese alla logica evidenza. Ne è prova il suo volume intitolato *De rebus mathematicis hactenus desideratis* (Parigi, 1556), pubblicato da un amico dopo la sua morte e in esecuzione di un suo preciso ordine, e dedicato a Enrico II, allora re di Francia. Le questioni ivi trattate sono realmente, come dice il titolo, di quelle la cui soluzione era vivamente desiderata; ciò risulta dagli enunciati che giova qui riferire: I. Inserzione fra due segmenti rettilinei di due medie proporzionali; II. Determinazione del rapporto della circonferenza al diametro (l'autore trova $\pi = 245/78$ che è maggiore del valore archimedeo 22/7); III. Divisione di una circonferenza in 3, 5, 7, 11 o 13 parti eguali; IV. Divisione di una sfera in due parti i cui volumi abbiano un rapporto assegnato (problema d'Archimede, v. p. 52). Riguardo alle soluzioni esposte noteremo soltanto una particolarità stilistica che rivela una influenza italiana; la divisione in media ed estrema ragione è chiamata « divina proporzione », denominazione tratta evidentemente dalla *Summa* del Pacioli.

La notorietà del Fineo, come insegnante in una delle più celebri scuole del mondo, fece moltiplicare i lettori e quindi i critici delle sue opere; di questi faremo cenno in opportuni luoghi.

240 - Non è a credere che l'intensificazione nella produzione aritmetica, che notammo nell'esordio del presente Capitolo, siasi limitata all'Europa centrale: stanno a provarlo tre opere che è dover nostro segnalare.

L'una — il *Curcus mathematicarum artium* (Alcalà, 1516) — inaugura la non ricca letteratura matematica spagnola. Ne è autore Pedros Santos Ciruelo, nato a Daroca nel 1470, prima professore nell'Università di Alcalà e poi canonico della cattedrale di Salamanca. Si tratta di un'altra enciclopedia matematica, inferiore alla *Summa* del Pacioli, dall'autore certamente ignorata, nella quale merita di essere rilevata una giusta critica al valore $\pi = \sqrt{10}$ che già incontrammo nella letteratura indiana (v. p. 179) e che il Ciruelo trovò in un lavoro di C. de Bouvelles, di cui diremo nel Cap. seg.

---

([1]) Alludiamo alla pubblicazione intitolata *In sex priores Libros geometricorum elementorum Euclidis demonstrationes* (Parigi, 1536).

Alla letteratura inglese appartiene la seconda; essa porta il titolo *De arte supputandi libri quattuor* (London, 1522). Ne è autore Cuthbert Tonstall (n. nel Yorkshire durante l'anno 1474, m. nel 1559). Egli studiò successivamente a Oxford, Cambridge e Padova, nella quale ultima città prese notizia degli scritti di Regiomontano e di Pacioli. Quell'opera rappresenta, come l'autore ebbe ad esprimersi, un « addio alla matematica », che egli abbandonò divenendo capo della diocesi di Londra. Il Tonstall, che morì vescovo di Durham, fu una delle più eminenti personalità inglesi del tempo suo; la *National Biography* contiene un'estesa narrazione dei casi della sua vita e una completa esposizione delle sue opere, alcune delle quali tuttora inedite. Il *De arte* è un lavoro di carattere tutt'affatto elementare, il cui valore sta non nella sostanza, ma nella forma elementare in cui è scritto: le edizioni che ne furono fatte a Parigi e Strasburgo mostrano che anche sul continente fu in esse riconosciuto un distinto valore didattico.

Incontriamo la terza delle opere succitate sulla frontiera dell'Europa verso l'Asia, cioè a Costantinopoli. Per spiegarne l'origine giova tenere presente che l'occupazione di quella città per parte dei Turchi (1453) segnò la fine dello stato di schiavitù in cui gemevano gli Ebrei durante l'impero romano d'Oriente; in conseguenza trovarono ivi sicuro asilo i profughi dalla Spagna (1492) e dal Portogallo (1496), quando i seguaci di Mosè vennero banditi dalla penisola Iberica. Ora i Turchi, che riponevano maggior fiducia negli Ebrei che nei Cristiani, ricorsero ad essi per procurarsi molte delle cognizioni di cui sentivano il bisogno. In particolare riguardo all'aritmetica si giovarono grandemente del sapere di Elia Misrachi [1], rabbino maggiore di Costantinopoli durante il periodo 1495-1526. A lui devesi un trattato d'aritmetica, stampato dopo la morte dell'autore, che, grazie a una recente versione libera in tedesco, conseguì ai giorni nostri una sufficiente diffusione. Per comporlo il Misrachi si giovò non solo di quanto scrisse il correligionario Abraham ben Esdra (v. p. 140), ma anche delle opere di Euclide e Nicomaco. Devesi osservare che, al pari del Pacioli (ma probabilmente indipendentemente da lui), egli escluse la duplicazione e la bisezione dal novero delle operazioni fondamentali; in conseguenza nella I Parte della sua opera dedicò un capitolo a ciascuna delle consuete operazioni aritmetiche, e queste insegnò a eseguire successivamente sopra gli interi, le frazioni e i numeri misti. Nella II Parte trattò successivamente le frazioni astronomiche, le radici quadratiche e cubiche, e le proporzioni. Il rimanente è costituito da una buona collezione di problemi aritmetici e di applicazioni numeriche alla geometria. Che cosa si può osservare, se non in senso laudativo, riguardo a un tale programma e all'ordinamento della materia?

---

[1] Questi fu discepolo di Mardocheo Comtino (1402-1482) di cui fu di recente (v. *Bibliografia*) fu studiato un trattato di matematica.

## C. Rudolff e M. Stiefel

241 - Ritorniamo in Germania, ove ci chiamano due matematici che, se anche non possono equipararsi ai grandi di cui ci occupammo nel Cap. preced., meritano un posto cospicuo nella storia dell'algebra.

Dell'uno, Cristoforo Rudolff, è nota la patria, Jauer (Prussia), ma sono ignote le date estreme dell'esistenza; soltanto può ritenersi che questa ebbe termine poco prima il 1552, chè in quell'anno era esaurita una delle sue opere e a lui la sorte vietò di curarne una nuova edizione, che era insistentemente richiesta.

Uno dei suoi più reputati lavori porta la data 1525 e un titolo (*Die Coss*) evidentemente derivato dal termine tecnico « arte della cosa », con cui l'algebra veniva designata in Italia all'alba dell'epoca moderna; in tal modo viene dall'autore implicitamente riconosciuto che alla parte più elevata della scienza del numero spetta un marchio di fabbrica italiano. Sono ivi usati i segni cossici nella forma indicata dalla Fig. 38, ove essi sono fedelmente riprodotti.

φ dragma oder numerus
𝔯 radix
𝔷 zensus
𝔠 cubus
𝔷𝔷 zensdezens
ß sursolidum
𝔷𝔠 zensicubus
bß bissursolidum
𝔷𝔷𝔷 zenszensdezens
𝔠𝔠 cubus de cubo

Fig. 38.

Allo stesso autore si deve una raccolta di problemi numerici (1530) e un manuale di calcolo pubblicato una prima volta nel 1526 e più volte ristampato. Nel primo di questi volumi è insegnato che la divisione di un numero per 10, 100, si effettua agevolmente collocando una virgola in una posizione opportuna, osservazione che pone il Rudolff fra coloro che preparano l'odierno sistema delle frazioni decimali; giova anche rilevare che, per indicare le radici terze, quarte, ecc., egli con mediocre coerenza logica ripete il segno $\surd$ usato per la radice quadrata, scrivendo cioè $\sqrt{}\sqrt{}$, $\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}$, ...

È generalmente ammesso che nel comporre i propri scritti il Rudolff siasi largamente giovato di un lavoro intitolato *Regulae Cosae vel Algebra* che risale al secolo XVI e che trovasi tuttora manoscritto in pubbliche Biblioteche di Vienna e Monaco. Ivi, sotto il nome generico di « cautele » sono enumerate le operazioni che si possono eseguire sulle equazioni senza alterarle; basandosi su di esse vengono risolte alcune particolari equazioni cubiche, ricorrendo ad artifici tanto poco naturali che, anche nel lettore meno maligno, fanno nascere la persuasione che il risolutore conoscesse in anticipo almeno una delle radici delle equazioni considerate.

Fra i problemi ivi trattati noteremo alcuni che si risolvono applicando la regola « Tayen » dei matematici Cinesi (v. p. 152), ed altri che, nel fondo, non differiscono dal « problema dei cento uccelli » che già incontrammo più volte. Nel citato manoscritto tali questioni si presentano sotto la seguente forma: « una comitiva composta di un dato numero di uomini, donne e ragazze, ha un certo debito; cono-

scendo la parte che grava sopra ciascun uomo, ciascuna donna, ciascuna ragazza, si tratta di trovare i numeri degli uomini, delle donne e delle ragazze costituenti la comitiva ». Dal nome di « gemeinsame Zeche » (conto collettivo) ivi usato trae origine quello di « regula coeci », ben noto a coloro che conoscono l'*Algebra* di L. Euler [1].

242 - Assai più del Rudolff gode di alta e ben meritata celebrità Michele Stiefel, nato a Essling nel 1486, morto a Jena nel 1567. Agostiniano al pari di Lutero, ne abbracciò le idee riformatrici e, in conseguenza, ebbe vita randagia e non priva di tribolazioni. La sua rinomanza riposa in gran parte sull'*Arithmetica integra,* pubblicata per la prima volta a Norimberga nel 1544, con prefazione di Melanchtone (1497-1560), il celebre « praeceptor Germaniae » e composta utilizzando (è l'autore stesso che lo dichiara) Euclide (di Campano) e Dürer, Riese e Rudolff.

Dei tre Libri di cui consta, il I tratta dei numeri razionali, il II degli irrazionali e dell'algebra il III. Un'analisi completa di quell'opera essendo inconciliabile con i limiti impostici, restringiamoci a segnalare quei punti che ci sembrano per qualche ragione notevoli. Tale è indubbiamente quello ove è stabilito un paragone fra due progressioni, una aritmetica, geometrica l'altra, chè ivi il lettore moderno ravvisa una antecipazione delle considerazioni che guidarono al concetto di logaritmo. Pure degno di menzione è quanto dice lo Stiefel sopra i coefficienti binomiali, chè, oltre una tabella che si spinge sino al XVII ordine, vi si legge l'importante relazione ricorrente che scrivesi oggi come segue

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Non arrestiamoci sopra alcuni sedicenti criteri di divisibilità, chè, quello che sarebbe più interessante (parliamo di quello per 7) non è generale. Al pari di Tartaglia (v. p. 312), lo Stiefel errò nelle applicazioni da lui fatte della regola euclidea per determinare i numeri perfetti; mentre nella determinazione del numero dei divisori di un numero che sia il prodotto di un certo numero di fattori primi, egli non fece che trascrivere un risultato già ottenuto da Cardano. Originale è invece la considerazione dei « numeri diametrali », nome dato ai numeri ognuno dei quali misura il doppio dell'area di un triangolo rettangolo a lati interi. Finalmente valore permanente possiedono le regole da lui date per costruire i quadrati magici; le applicazioni di esse arrivano sino al quadrato di $13^2$ caselle.

Tutto ciò leggesi nel I Libro dell'*Arithmetica integra.* Nel II rileviamo l'uso dei segni + e — e l'introduzione di caratteri speciali per indicare le radici dei vari ordini, ottenuti combinando il simbolo di radice con i segni cossici; l'algebra gradatamente assurgeva dalla fase « sincopata » allo stadio « simbolico »! Nel medesimo Libro si leggono alcune considerazioni sopra certe figure di così scarso interesse da por-

[1] Veggasi il II Cap. della II Parte di detta opera.

tare a concludere che nello Stiefel il geometra non era di pari statura del calcolatore.

Nel III Libro l'incognita è designata con un segno speciale che sembra essere una deformazione della lettera *r* iniziale di *res* (= cosa); nei problemi a più incognite egli indica queste con lettere differenti. Incidentalmente lo Stiefel, come già il Bombelli, scrive un'equazione col secondo membro 0, ma, al pari dell'algebrista bolognese, non adotta regolarmente un siffatto sistema; i numeri negativi vengono da lui riguardati come minori di zero e bollati con l'epiteto di « assurdi ». Al termine dell'opera si trovano alcuni problemi che conducono ad equazioni di 3° e 4° grado, tratti dall'*Ars magna*, e che stabiliscono fra Cardano e Stiefel una dipendenza da maestro a discepolo.

Dal seguente prospetto che trovasi nell'opera in questione

| Numero. | — 4 | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Esponenti | $^1/_{16}$ | $^1/_8$ | $^1/_4$ | $^1/_2$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

risulta che lo Stiefel ha insistito sull'utilità di paragonare i termini corrispondenti di due progressioni, una aritmetica e l'altra geometrica.

L'*Arithmetica integra* trovò un acuto commentatore in Gemma Frisius [1] (nato a Dukkumin in Frisia l'8 dicembre 1508, m. in qualità di professore universitario a Louvain il 25 maggio 1555); nella sua *Arithmeticae praticae methodus facilis* egli ha rilevato l'abbaglio preso dallo Stiefel nell'illusione di avere insegnato a duplicare il cubo *regula et circini* e lo ha spiegato per il fatto che il matematico tedesco aveva ritenuto, basandosi sopra una figura errata, che tre certe linee concorressero in un punto. La fama di Gemma Frisio riposa specialmente sull'invenzione di alcuni strumenti utili nella geografia astronomica e più ancora sul *Libellus delineorum describendorum ratione* (Antwerpeen, 1533) donde si apprendono norme sicure per eseguire una triangolazione. Così egli si pose alla testa di una scuola di geografi olandesi a cui appartenne il celebre Mercatore.

243 - L'*Arithmetica integra*, essendo scritta in latino, era destinata alle classi più elevate della società. Ora per diffondere la conoscenza delle teorie algebriche anche fra coloro a cui non era familiare la lingua dei dotti, lo Stiefel pubblicò (1545) una *Deutsche Arithmetica* contenente il calcolo usuale, l'arte della cosa e il computo ecclesiastico. Restringiamoci a notare ivi l'uso, oltre che dei segni + e —, delle lettere gotiche *M* e *D* per indicare la moltiplicazione e la divisione; altro sintomo della lenta metamorfosi che andava subendo l'algebra prima di divenire completamente simbolica.

L'ultima e non piccola benemerenza dello Stiefel riguardo alle

(1) È questo il nome sotto cui egli è generalmente noto; ma di famiglia era un Van den Steen.

scienze esatte è di avere curata (1553) una nuova edizione di *Die Coss* del Rudolff, corredandola di aggiunte rilevanti e apportandovi modificazioni pregevoli. Ad onore dello Stiefel si può notare che fra le addizioni citate si legge la dichiarazione che lo spazio a quattro dimensioni, benchè inammissibile geometricamente, è aritmeticamente accettabile. Fra le modificazioni va segnalato un perfezionamento dei simboli usati dal Rudolff per indicare le radici, e fra le aggiunte il metodo per risolvere le equazioni cubiche, illustrato con esempi tratti dalla grande opera del Cardano. Da ciò una novella conferma dell'influenza che, durante il secolo XVI, le opere dei nostri maggiori algebristi esercitavano sul resto d'Europa.

## In Francia prima di Viète

244 - Mentre lo Stiefel procedette come un trionfatore nel regno del numero, incespicò e cadde occupandosi del problema di costruire geometricamente un cubo doppio di un cubo dato. Lo rilevò un monaco nato a Romans (Delfinato) nel 1492, in un volume dal titolo *Opera geometrica* (Lugduni, 1554); parliamo di Giovanni Butéon (latinizzato in Buteus) che, dopo avere studiato a Parigi, rientrò nel chiostro degli Agostiniani, da lui lasciato soltanto a scopo d'istruzione; cacciatone dai protestanti, si rifugiò a Carrar, ove si spense nel 1572. Dal suo acuto spirito critico porge una conferma l'opera in due libri *De quadratura circuli* (Ludguni, 1559) intesa a confutare (ma, ahimè! senza successo; v. p. 330) i pretesi trovati di Oronzio Fineo.

Come cultore della scienza del numero il Butèon ha una posizione modesta, ma non del tutto insignificante, grazie a un volume intitolato *Logistica quae arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta* (Ludguni, 1559). Va ivi notato che egli critica e abbandona il sistema di usare i vocaboli « res », « census », ecc. ecc. e li sostituisce con le parole « linea », « quadrato », « cubo »; in conformità a tale proposta indica la prima con la lettera greca $\rho$ le altre con due segni speciali, che rappresentano rispettivamente un quadrato con una diagonale verticale e un parallelepipedo rettangolo. Originale è eziandio l'introduzione dei vocaboli « continens » e « contentum » per i due membri di un'equazione scritta in modo che i suoi coefficienti siano tutti positivi. Il Butéon risolve buon numero di problemi; non giova riferirne gli enunciati, chè non differiscono sostanzialmente da quelli che si leggono in opere coeve a noi già note.

Alla medesima epoca appartiene un pensatore che, se anche non arrecò alcun incremento alla totalità delle verità matematiche, esercitò non trascurabile influenza sul movimento generale del pensiero: Pietro de la Ramée (nome latinizzato in Petrus Ramus). Nato nel 1515 nei pressi di Soissons, fu barbaramente trucidato il 26 agosto 1572 da sicari assoldati dal suo più implacabile nemico, il quale volle e seppe profittare del disordine in cui versava Parigi nei giorni che seguirono la spaventosa notte di S. Bartolomeo [1]. Spirito insofferente di ogni vin-

[1] Per ulteriori dati biografici si ricorra a C. WADDINGTON, *P. de la Ramée; sa vie, ses écrits, ses opinions* (Paris, 1856).

colo, ben prima di Descartes proclamò l'impero della ragione sul principio d'autorità; in conseguenza insorse contro il feticismo per Aristotele e poi contro la cieca adorazione per Euclide. Benchè della grande opera del sommo alessandrino egli abbia curata una versione francese, sostenne la necessità di arrecare radicali riordinamenti al piano, secondo cui veniva insegnata allora la geometria. Per esempio nella più celebre delle sue opere scientifiche — le *Scholae mathematicae* — egli osservò quanto fosse didatticamente opportuno il distribuire gli assiomi e i postulati nel corso dell'opera, invece di accatastarli nell'esordio come fece Euclide; si attribuisce poi a lui la prima considerazione delle punteggiate che nascono su due lati di un triangolo segandoli con rette parallele al terzo. Quasi presago di una morte inattesa, egli destinò una somma cospicua per istituire una nuova cattedra nel Collegio di Francia, da conferirsi di tre in tre anni, per pubblico concorso: e infatti, la « cattedra di Ramus » durò per circa due secoli e ancora esisterebbe ove non fosse stata distrutta nel 1789 dall'irresistibile turbine rivoluzionario.

Notiamo che il primo ad occuparla (1576) fu Maurizio Bressieu, il quale la tenne sino alla sua morte (1608), e che incontreremo nella storia della trigonometria per un trattato dal titolo *Metrices astronomicae* (Parigi, 1581); chi la illustrò più di ogni altro fu il Roberval, di cui tratteremo più avanti, e che seppe conservarla per più di quarant'anni (1634-1675); altro non indegno occupante è L. Pothénot, che la tenne da 1711 sino alla morte (1732) e legò il proprio nome a un problema di geometria pratica. Cosicchè la benefica influenza del Ramus si mantenne ben oltre la sua barbara morte.

245 - Restiamo ancora in Francia ove incontriamo Giovanni Pélétier (o Peletarius che dir si voglia), poeta e matematico, nato nel Mans il 25 luglio 1517. Il desiderio di sapere lo indusse a soggiornare in varie città della Francia e poi a Roma, mentre la irrequieta versatilità dell'ingegno lo spinse a dedicarsi successivamente alla giurisprudenza, alla medicina e alla matematica; morì a Parigi nel 1582. Nella storia della geometria viene ricordato per una edizione dei primi sei Libri degli *Elementi* di Euclide (Lione, 1571), mentre nella storia dell'algebra va posto insieme al Butéon, a noi già noto, e al Gosselin, di cui parleremo nel prossimo n., nella schiera dei precursori di Viète. Tale posizione viene a lui conferita da un trattato che ebbe parecchie edizioni, la terza delle quali reca la data 1556 e il titolo *L'Arithmétique de Jacques Pélétier du Mans, départie en quatre livres*. L'autore cita con riverenza alcuni algebristi anteriori; ma l'ignoranza del tedesco gli tolse di sfruttare direttamente le opere di Adamo Riese e Cristoforo Rudolff, e quella dell'italiano di trarre profitto dalla *Summa* di L. Pacioli; per compenso mostra famigliarità con Cardano e Stiefel, che scrissero in latino. Da quest'ultimo egli apprese il sistema di designare con lettere differenti le varie incognite di un problema; di suo osservò, almeno in un caso, che, se una equazione algebrica ha l'unità per coefficiente della massima potenza dell'incognita e interi tutti gli altri coefficienti, ogni sua radice intera sarà un divisore del termine noto; però egli non seppe

comprendere la generalità e l'importanza di questa osservazione. Per designare le varie potenze dell'incognita di un problema il nostro autore si serve dei segni cossici, e per indicare l'addizione e la sottrazione usa le lettere ***p.*** e ***m.*** (ognuna seguita da un punto) quantunque i segni + e — fossero allora già in uso generale, almeno in Germania. A suo onore va osservato che egli non rifuggì dall'uso dei numeri negativi; « vous voyez », egli dice, « les nombres feincts au dessous de rien, n'estre sans usage; car par eux se fait la preuve des exemples et se montre la verification des reigles ». Egli non usa metodicamente le equazioni col secondo membro nullo; però non rifiuta un posto nel suo libro all'equazione

$$216 + 41472 \sqrt{x} - 18\,x - 648 \sqrt{x} = 0\,,$$

tratta da Stiefel. La teoria generale dei numeri irrazionali essendo tuttora ignota ai tempi del Pélétier, egli giudicò fosse il caso di esporre le proprietà della classe di quantità a cui è dedicato il X Libro di Euclide, e così facendo incorse nel biasimo ingiustificato del matematico di cui parleremo nel prossimo n. A proposito di radicali si può notare che il Pélétier ha insegnato a rendere razionale il denominatore di una frazione anche nel caso in cui questo è trinomio, il che, a sua insaputa, era stato fatto anteriormente dal nostro Pacioli.

246 - Dell'autore dell'opera intitolata *Gvilelmi Gosselini Cadomensis Bellocasii de arte magna, seu de occulta parte numerorum quae & algebra & almucabala vulgo dicitvr libri qvuatvor* (Parisiis, 1577) nulla si conosce tranne che nacque a Caen e diffuse in Francia l'« opus magnum » di Tartaglia. L'opera citata non emerge per originalità, ma si raccomanda per una grande chiarezza. Le abbreviazioni usate dal Gosselin sono basate sull'uso di lettere maiuscole; ma queste, siccome servono tanto per indicare le due prime operazioni aritmetiche (*P* per l'addizione, *M* per la sottrazione) quanto per indicare le varie potenze dell'incognita (*L* la prima, *Q* il quadrato), le formole risultanti sono un po' confuse; prova ne sia l'equazione

12 *L M I Q P* 48 *aequalia* 144 *M* 24 *L P* 2 *Q* ,

che oggi scriverebbesi

$$12\,x - x^2 + 48 = 144 - 24\,x + 2\,x^2\,.$$

Senza dimostrazione è insegnata l'espressione del numero poligonale di dato lato e di dato numero di vertici; sappiamo che essa era nota, se non prima, a Diofanto (v. p. 113), ma l'autore dice di averla avuta da Maurizio Bressieu (v. p. 336); il Gosselin ne fa alcune applicazioni. Strano che, dopo avere citata con lode l'*Algebra* di Nunes (v. n. 248) « in cujus verba juravit », critica il matematico portoghese per avere considerate equazioni algebriche di tutti i gradi, mentre, secondo lui, ci si deve arrestare al terzo: idea abbastanza bislacca, che egli presenta come parto del suo ingegno, ma che gli fu probabil-

mente ispirata dal Cardano (*Opera,* t. IV, p. 222). Ad onore del Gosselin va notato che egli fu uno dei primi che seppero apprezzare l'alto valore dell'*Aritmetica* di Diofanto, da poco data alle stampe, e che, in presenza di un sistema di equazioni con parecchie incognite, seppe procedere con maggior sicurezza del Butèon.

### R. Recorde

247 - Varchiamo la Manica e troveremo un matematico di notevole valore e di larga influenza: Roberto Recorde. Nato a Tenby (paese di Galles) verso il 1510, studiò successivamente a Oxford, a Cambridge e a Londra, ove divenne medico del re Edoardo VI e in seguito della regina Maria, nonchè sovraintendente delle miniere irlandesi; ma il favore regale doveva essere per lui di scarsa difesa se nel 1558 egli morì in prigione, ove trovavasi per ragioni non ancora bene accertate. Il Recorde viene considerato come il fondatore della matematica inglese, anche perchè è il primo matematico britannio che siasi servito della lingua materna. In inglese è infatti scritta l'opera *The Grounds of Artes* (London, 1542) (1). È un trattato di aritmetica scritto in forma di dialogo e contenente quanto è necessario per l'impiego dei numeri: le numerose edizioni che ne furono fatte (2) stanno a provare che veniva a soddisfare un bisogno generalmente sentito.

Più alto è il tema di un'altra sua opera stampata nel 1557 e destinata, come dice il titolo, ad « aguzzare gli spiriti »; tale titolo comincia infatti con le parole *The whetstone of witte* (3) e le linee seguenti, fra cui leggonsi le parole « the cossike praise » mostrano che neppure il Recorde si sottrasse alla influenza degli algebristi italiani, sia pure probabilmente attraverso i tedeschi; in esso si incontrano, per la prima volta in Inghilterra, i segni + e —; inoltre per indicare l'eguaglianza il Recorde usa « per evitare tediose ripetizioni », il segno = a noi famigliare, ma allora nuovo, e ne giustifica la scelta osservando che nulla può porgere meglio l'idea di eguaglianza, di due rette parallele; così l'algebra compiva un nuovo passo verso la stadio di scienza simbolica. È questo un merito del Recorde che devono riconoscergli anche coloro che notano che il suo volume, per il livello a cui giunge, sembra appartenere piuttosto all'epoca di L. Pacioli, che al secolo in cui furono risolte le equazioni di 3° e 4° grado; devesi anche rilevare che quella ragionevole proposta non fu accolta dai matematici che circa un secolo dopo che il Recorde era sceso nella tomba. I suoi biografi ricordano che a lui devonsi altre opere intitolate *Pathway to knowledge, Principles of geometry* e *Mensuration* — per non parlare che di quanto si riferisce al nostro tema — senza però notarvi innovazioni meritevoli di ricordo.

(1) Il frontispizio trovasi riprodotto a p. 214 della più volte citata opera di D. E. Smith.

(2) Se ne conoscono infatti ristampe che recano le date seguenti: 1542, 1543, 1549, 1551, 1552, 1556, 1558, 1561, 1570, 1571, 1573, 1577, 1579, 1582, 1586, 1590, 1594, 1596, 1618, 1623, 1636, 1646, 1652, 1654, 1662, 1668, 1673, 1699.

(3) Il frontispizio trovasi riprodotto a p. 287 del volume dello Smith.

## P. Nunes

248 - Fra gli uomini che, con i loro lavori, prepararono efficacemente l'avvento dell'algebra simbolica si trova l'unica eminente personalità matematica che, nei secoli scorsi, abbia visto la luce in Portogallo: Pietro Nunes (in latino Nonius o Nonnius, in spagnolo Nuñez). Nato nel 1502 vicino a Lisbona, in Alcacer de Sal (la Salacia dei Romani) da famiglia israelitica, grazie alla protezione che la sua dottrina gli procurò da parte della casa regnante, riuscì a sfuggire alle persecuzioni dell'onnipotente Inquisizione. Non appena compiuti i suoi studi all'università di Lisbona gli fu conferita ivi una cattedra, nonchè la carica di cosmografo governativo, titolo mutato più tardi in quello sommamente onorifico di « grande cosmografo ». Peregrinò poi in vari istituti d'istruzione superiore sparsi nella penisola iberica, e morì nella sua terra natale l'11 agosto 1578, circondato dalla universale ammirazione. Un suo *Tratado de sphera,* pubblicato nel 1537, è un commento alla nota opera cosmografica del Sacrobosco (n. 176). Sono estranei alla nostra storia i molti suoi scritti di navigazione; li citiamo soltanto perchè vi si trova la nozione di « linea lossodromica »; un lieve errore ivi commesso dal Nonio fu poi corretto dallo Stevin; nelle stesse opere si trova la descrizione di uno strumento che fu a torto identificato con altro inventato nel 1631 da P. Vernier (1580-1637); è quello chiamato tuttora « nonio ».

Alla scienza pura appartiene la stringente confutazione fatta dal Nunes dello scritto in cui Oronzio Fineo erasi illuso di avere risolti i tre problemi classici dell'antica geometria e scoperta una costruzione generale con riga e compasso di tutti i poligoni regolari: l'eccellenza dei ragionamenti ivi esposti è dimostrata ben più dalle due edizioni (1546-1571) del relativo scritto, che dalla loro forza di convinzione verso il Fineo (v. n. 239). Il Nunes è uno dei molti che si occuparono di commentare il V Libro di Euclide, ma il relativo lavoro non venne mai dato alle stampe e finì per andare perduto.

Verso l'anno 1532 egli scrisse un trattato d'algebra in portoghese, ma non ne curò la pubblicazione; quando si decise a darlo alle stampe, pensò di tradurlo prima in spagnolo, lingua allora assai più nota e diffusa, e in pari tempo vi fece importanti aggiunte ove trovansi tracce di lavori pubblicati nel frattempo.

Quest'opera è certamente una delle migliori sull'argomento che siano state pubblicate in quel tempo, sia per la chiarezza e il rigore dell'esposizione, sia perchè l'autore seguì Giordano Nemorario nel sistema di indicare le quantità mediante lettere, senza restare vincolato all'ipotesi euclidea che queste rappresentassero segmenti di retta. Altra caratteristica è l'abbandono del costume seguìto dal Pacioli, dal Tartaglia, dal Cardano ed altri di supporre che i problemi trattati si riferissero a casi concreti della vita. Anche il sole ha delle macchie; anche Nunes non è esente da mende; tali sono le critiche da lui mosse al Pacioli per avere ammessa la possibilità di soluzioni negative. A un altro matematico italiano egli muove appunti privi di base: è Tartaglia, la

cui formola risolutrice delle equazioni cubiche viene da lui criticata perchè talora dà risultati di forma più complicata del necessario: la fondatezza di tale appunto viene da lui stabilita citando esempi di equazioni di terzo grado le quali, avendo una radice che si pone facilmente in evidenza, possono abbassarsi al secondo grado e quindi risolversi senza ricorrere alla formola succitata: di tali equazioni singolari egli porge molteplici esempi, i quali sono interessanti, ma non diminuiscono il valore generale di detta formola. Il Nunes ha evidentemente studiati i migliori algebristi italiani, ma ne parla non come discepolo, ma come se fossero suoi eguali; ad esempio egli si occupa del problema che conduce al sistema di equazioni

$$x + \frac{y+z}{2} = 32 \quad , \quad y + \frac{z+x}{3} = 28 \quad , \quad z + \frac{x+y}{4} = 31 \; ,$$

risolto dal Cardano tanto nella sua *Practica arithmeticae,* quanto nella sua *Ars magna,* e ne indica una soluzione che vanta come superiore a quelle dianzi note. Similmente, nella sezione dedicata a problemi geometrici (e, notiamolo per incidenza, fondata sul *De triangulis* di Regiomontano) egli si imbatte nella questione di determinare l'area di un triangolo di dati lati; essa era stata già trattata dal Pacioli, ma in modo oscuro e confuso; altrettanto non può ripetersi riguardo alla soluzione nuniana; ma si osservi che questa abbraccia non meno di ventun pagine, mentre poche linee di luminosa prosa erano bastate ad Erone Alessandrino (v. p. 92) per conseguire lo stesso scopo.

Luci e ombre si alternano, dunque, nella produzione matematica di P. Nunes; ma quelle superando queste, a lui, per universale consenso, viene accordato un posto distinto fra gli algebristi del sec. XVI.

## Nei Paesi Bassi

249 - Nelle prime pagine della storia della scienza del calcolo in Olanda, s'incontra il nome di un matematico nato a Deventer e che noi (scegliendo fra le varie ortografie usate) designeremo così: Nicola Petri. Maestro di grande reputazione, egli non ha alcuna pretesa di originalità; ma egli va ricordato per un manuale di aritmetica e algebra il quale, pubblicato nel 1567 e nel 1583, fu posto sotto forma definitiva nel 1591 e ricevette poi numerose edizioni (1596, 1598, 1603, 1605, 1635). Nulla si conosce di preciso intorno alla sua vita, ma tutto fa credere che egli sia morto poco dopo il 1603. Avendo scritto in olandese, quell'opera (al pari di altre sue di minor conto) rimase del tutto ignota in Europa; d'altra parte nulla avrebbe potuto insegnare a chi già conosceva i lavori di Pacioli, Cardano, Pélétier, Stiefel, ecc., ai quali egli candidamente riconosce di avere attinto a larga mano.

Grazie all'influenza che esercitò sopra i propri compatriotti e più ancora per le sue ricerche sulla meccanica dei solidi e dei fluidi, Simone Stevin passa per il più grande dei geometri belgi del Rinascimento. Nacque a Bruges nel 1548 e — a somiglianza di quanto accadde

a Leonardo Pisano — occupò da giovane, ad Anversa, la carica di cassiere e ragioniere di una grande casa di commercio; a 25 anni — al pari del nostro illustre compatriotta — compì lunghi viaggi in vari paesi d'Europa (Svezia, Polonia, ecc.). L'insofferenza del pesante giogo spagnolo lo indusse a recarsi nella parte più settentrionale dei Paesi Bassi; così venne in contatto con Maurizio di Nassau, che, avendone misurato l'alto valore, gli affidò importanti uffici; morì probabilmente all'Aja, nel 1620.

Le sue opere scritte in fiammingo non tardarono a venire tradotte in latino e in francese e, sotto quest'ultima forma, vennero riunite da Alberto Girard (v. n. 329) e pubblicate, con abbreviazioni, commenti e aggiunte, in una splendida edizione.

Alcuni degli scritti dello Stevin si risentono delle sue occupazioni commerciali. Tale è la tavola d'interessi (1582), la quale fu veramente provvidenziale per i commercianti, i quali erano prima obbligati a compilarne per proprio conto (e infatti non eravi allora casa di commercio che non ne possedesse e che considerava quale prezioso tesoro, da tenersi gelosamente segreto). Nella raccolta delle *Opere complete* dello Stevin quella tavola appare inquadrata in un lavoro di carattere generale intitolato *La practique de l'arithmétique,* un'altra sezione della quale (intitolata *La Thiende* in fiammingo, *Le Disme* in francese) fece da molti riguardare lo Stevin per l'inventore delle frazioni decimali; in realtà queste non erano ignote prima, onde il merito dello scienziato belga consiste nell'avere esposte metodicamente regole sicure per eseguire col loro aiuto tutte le operazioni aritmetiche. Sono le regole ancor oggi in uso; ma la notazione da lui usata venne col tempo molto semplificata, chè ad esempio il numero 32,57 viene da lui indicato con uno dei tre sistemi seguenti

$$\overset{(0)}{32}\ \ \overset{(1)}{5}\ \ \overset{(2)}{7}\ ,\quad 32^{(0)}\ \ 5^{(1)}\ \ 7^{(2)}\ ,\quad \underset{(0)}{32}\ \ \underset{(1)}{5}\ \ \underset{(2)}{7}$$

indubbiamente ispirati da Bombelli (v. p. 318) di cui, come vedremo, lo Stevin era un sincero ammiratore. Ancora più originale è il nostro autore quando suggerisce la metodica introduzione della divisione decimale dei pesi e misure; conscio delle difficoltà che avrebbe incontrata l'attuazione di questa ardita riforma, egli si esprime come colui che sa di deporre un germe che l'avvenire avrebbe portato a maturità; e infatti due secoli passarono prima che quel suggerimento tanto ragionevole cominciasse a venire tradotto in atto e ancor oggi incontra opposizione in alcuni paesi. Come chiusa della *Practique de l'arithmétique* si trova un *Traité des incommensurables grandeurs,* scritto nell'intento di agevolare l'intelligenza del X Libro di Euclide, da molti, e non a torto, riguardato come « la croix des mathématiciens » (la frase è dello Stevin medesimo).

Più elevati sono i temi svolti in un esteso trattato modestamente intitolato *Arithmétique,* ma che abbraccia tutto quanto sapevasi verso la fine del secolo XVI sulla scienza dei numeri; fu pubblicato nel 1585, ma nel 1594 fu ristampato una importante appendice. Per scrivere

quest'opera, l'autore (che, onesto sino allo scrupolo, non si è mai attribuite scoperte altrui) dichiara di essersi giovato degli scritti di Mohammed ben Musa (già tradotti in latino da Gherardo da Cremona e Roberto da Chester), di P. Nuñes, Tartaglia, Cardano, Ferrari (da lui chiamato « Louys de Ferrare »), e Bombelli (« grand arithméticien de notre temps »).

Le potenze e le radici vengono indicate ponendo accanto al numero relativo un circoletto con entro l'indice corrispondente. Quelle però il cui indice è un multiplo di 2 sono designate ripetendo più volte il segno √ ; e poichè lo Stevin non esclude che questo sia frazionario, si vede che egli ha veduto chiaramente la possibilità di usare potenze con indici frazionari in luogo di radicali. La notazione da lui usata per rappresentare l'incognita e le sue varie potenze assomiglia a quella di Bombelli, consistendo in un circolino entro cui stanno i relativi esponenti; essa però viene applicata con maggiore astrattezza giacchè, p. es., lo Stevin per caratterizzare le equazioni risolte dal Ferrari scrive semplicemente (4) *e g a* (3) (2) (1) (0), sottintendendo che i vari termini sono affetti da coefficienti qualunque e i termini devono essere addizionali. Certe volte Stevin (in ciò poco bene ispirato) scrive un'equazione sotto forma di proporzione con l'intesa che risultino fra loro eguali i due termini di ciascun rapporto; così la scrittura

$$\frac{x^3}{u\,x^2 + p\,x + q} = \frac{x}{x}$$

significa essere

$$x^3 = u\,x^2 + p\,x + q\,.$$

Di fronte al caso irriducibile, dopo qualche tentativo per fare scomparire gli immaginari, lo Stevin candidamente dichiara di lasciare ad altri di spiegare questo mistero. Originale e di grande importanza è il metodo da lui usato per risolvere un'equazione numerica, il quale fondasi sul fatto che se due valori dell'incognita fanno assumere al primo membro di un'equazione valori di segni opposti, fra essi cade una radice dell'equazione. Così per risolvere l'equazione $x^3 = 300\,x + 33915024$, egli pone anzitutto alla prova le successive potenze di 10 e ne conclude che una radice è compresa fra $10^2$ e $10^3$, cioè che la radice domandata avrà *tre* cifre; esperimenta poi i numeri 100, 200, 300, 400, e poichè questi ultimi dànno risultati di segni opposti ne conclude che la radice è compresa fra 300 e 400, ecc.

Va anche notato che se anche lo Stevin, indulgendo al costume del tempo, usò di regola equazioni a coefficienti positivi, ma non rifuggì dal considerare anche quelle a coefficienti negativi. Degno di nota è che, a complemento del suo trattato, egli ha posto la traduzione dei primi quattro Libri di Diofanto (il Girard vi aggiunse quella degli altri due) intitolandoli *Les quatre premiers livres d'algèbre de Diophante*.

Mentre a noi non interessano gli scritti dello Stevin sopra la fortificazione, la navigazione con la bussola e la tenuta dei libri (ove è visibile l'influenza italiana), è dovere far noto che Maurizio di Nassau, suo

protettore e sincero ammiratore, volle ricevere da lui lezioni sulle varie parti della matematica; non contento di ascoltarle, le volle per iscritto: così ebbero origine alcuni quaderni che egli portava sempre seco. Ma il pericolo corso da essi durante una scaramuccia a cui quel principe partecipò, lo indusse a ordinarne la stampa (1586), oltrechè in fiammingo, in francese e in latino. Così ebbe origine l'opera intitolata *Wisconstighe Ghedachtenissen, Mémoires mathématiques* o *Hypomnemata mathematica,* nella quale sono trattate le seguenti materie: cosmografia e trigonometria (v. Cap. XIX), geografia, geometria, statica, ecc. Un cenno speciale meritano le pagine relative alla prospettiva, le quali fecero accordare al grande matematico belga un posto fra i precursori di noti geometri del secolo XIX. Benchè la meccanica non entri nel nostro programma, pure dobbiamo menzionare il fatto che allo Stevin devesi la prima sodisfacente teoria del piano inclinato e che egli, nelle sue ricerche baricentriche, ispirandosi alle opere di Archimede e ai commenti di F. Commandino (v. p. 357), mostrò di sapere maestrevolmente servirsi degli antichi metodi infinitesimali, onde merita pure un posto fra i precursori di Leibniz e Newton. In un quadro completo dell'attività del pensatore in discorso dovrebbe eziandio prender posto anche qualche cenno di un suo trattato di logica e di un volume postumo dal titolo *Vita pubblica,* nel quale egli, raccogliendo i frutti delle esperienze da lui fatte occupando le molteplici cariche che gli furono affidate, diede saggie norme di condotta per il buon cittadino in tempi difficili, quali erano quelli in cui egli visse. Ma quanto abbiamo detto è sufficiente a mostrare che lo Stevin non sfigura al paragone dei sommi che resero illustre il secolo in cui egli visse.

250 - Restiamo nei Paesi Bassi per occuparci di uno fra i più intrepidi calcolatori di cui siasi serbata memoria: Adriano van Roomen (detto anche Adrianus Romanus o Adrien Romain). Egli nacque a Louvain il 29 settembre 1561, insegnò successivamente nella sua città natale, a Würzburg e a Zamosk (Polonia) e morì a Magonza addì 4 maggio 1615. Presenta un notevole interesse un lavoro nel quale egli diede notizia degli artifici a cui ricorse per eseguire con sicurezza i più estesi calcoli; esso è intitolato *Nova multiplicandi, dividendi, quadrata componendi, radices extrahendi ratio, multo quam pervulgata certior, faciliter et majoribus maxime numeris accomodatior,* soltanto di recente dato alle stampe per cura di H. Bosmans: notevole è la dichiarazione dell'autore che egli nel calcolare sagrifica la rapidità del procedere alla sicurezza delle conclusioni. Invece di esporre diffusamente le regole applicate, egli ne mostra il funzionamento su opportuni esempi. Per dare un'idea ai lettori del suo metodo di procedere, esponiamo la procedura che egli segue per eseguire il cubo di un numero costituito di un certo numero $u$ di unità e di un numero qualunque $d$ di decine; la via da lui seguita è tracciata dalla formola seguente:

$$(d + u)^3 = d^3 + [3\,d^2 + (3\,d + u)\,u]\,u\ ;$$

così per calcolare il cubo del numero 1234 egli assume $d = 123$ e $u = 4$

e procede come emerge dal seguente quadro:

$$d^3 = 1\ 860\ 867\ 000$$
$$3\,d^2 = 4\ 538\ 700$$
$$3\,d + u = 3\ 694$$
$$(3\,d + u)\,u = 14\ 776$$
$$3\,d^2 + (3\,d + u)\,u = 4\ 553\ 476$$
$$[3\,d^2 + (3\,d + u)\,u]\,u = 18\ 213\ 904$$
$$(d + u)^3 = 1\ 879\ 080\ 904.$$

La passione dello stesso geometra per il calcolo numerico è confermata dalla parte più originale (ci esprimiamo così perchè s'inizia con alcune pagine filosofiche e storiche) di un suo frammento ancora esistente di *Commento all'algebra di Mohammed ben Musa,* che sembra sia stato pubblicato a Würzburg nel 1598 o 1599. In tale lavoro egli si spinge più oltre della terza potenza, occupandosi del calcolo di potenze superiori, ma attenendosi a criteri del tipo di quelli adottati per le potenze quadratiche e cubiche. Così per calcolare $(d + u)^6 = d^6 + 6\,d^5\,u + 15\,d^4\,u^2 + 20\,d^3\,u^3 + 15\,d^2\,u^4 + 6du^5 + u^6$ egli considera successivamente le seguenti espressioni, per poi farne in definitiva la somma:

$$d^6\ ,\ 6\,d^5\ ,\ 15\,d^4\ ,\ 20\,d^3\ ,\ 15\,d^2\ ,\ 6\,d + u\ ,\ 6\,d + u)\,u\ ,$$
$$15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2\ ,\ (15\,d^2 + 6\,d\,u + u^2)\,u\ ,$$
$$20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3\ ,$$
$$(20\,d^3 + 15\,d^2\,u + 6\,d\,u^2 + u^3)\,u\ ,$$
$$15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4\ ,$$
$$(15\,d^4 + 20\,d^3\,u + 15\,d^2\,u^2 + 6\,d\,u^3 + u^4)\,u\ ,$$
$$6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5\ ,$$
$$(6\,d^5 + 15\,d^4\,u + 20\,d^3\,u^2 + 15\,d^2\,u^3 + 6\,d\,u^4 + u^5)\,u\ ;$$

ciascuna di queste operazioni reca un nome speciale; ad es., l'ultima precedente l'operazione finale viene chiamata col nome *Prostasferesi* (da πρόσθεισις = addizione e αφαίρεσις = sottrazione) destinato a prendere posto più tardi nella trigonometria, sia pure con altro significato. Per agevolare i calcoli relativi alla estrazione di radice, il matematico belga dà, sotto il nome di *Postulati,* due estese tabelle ausiliari; una contiene le prime 33 potenze dei nove numeri naturali, la seconda i primi 69 coefficienti binomiali. La stampa di queste due tavole presentava allora non indifferenti difficoltà; furono anzi tali che diedero luogo ad uno sciopero tipografico, che il nostro autore giudica con parole giustamente amare. Ad onore del van Roomen, considerato quale algebrista, va rilevato l'uso da parte sua di ottime notazioni, le quali non saranno state senza influenza sopra Descartes, il quale, come vedremo a suo tempo (v. n. 340 e segg.) nei Paesi Bassi passò gli anni della sua più intensa operosità; nè

va taciuto che le notizie storiche sull'algebra da lui date mostrano che egli si accinse al suo lavoro dopo avere presa notizia di quanto era stato scritto dai suoi predecessori.

## F. Viète

251 - La teoria delle equazioni algebriche la quale, nella prima metà del secolo XVI, compiè in Italia mirabili progressi, trovò in Francia, nell'ultimo quarto dello stesso secolo, una persona in grado di arricchirla di metodi e risultati della più alta importanza. Parliamo di Francesco Viète, signore della Bigotière il quale, nato nel 1540 a Fontenay-le-Comte (capoluogo del Poitou), fu avvocato e poi consigliere al Parlamento di Bretagna. Senza arrestarci a enumerare tutti gli altri uffici privati e pubblici da lui disimpegnati con plauso (1), noteremo soltanto che il prezioso servigio da lui prestato ad Enrico IV decifrando i dispacci inviati attraverso la Francia dal Governo spagnolo ai propri funzionari nei Paesi Bassi lo fece salire in alta rinomanza e lo mostrò degno di un posto nel Consiglio privato della Corte di Francia; si spense a Parigi nel 1603 (2). Il Viète, che non occupò mai alcuna cattedra e che alla scienza dedicava soltanto i rari momenti che lasciavangli liberi le sue occupazioni ufficiali, scrisse quasi sempre sotto forma talmente oscura che il Vaset, il quale tentò di tradurne alcune opere dal latino in francese, confessava « qu'il faudrait un second Viète pour traduire le premier ».

A tale oscurità non sono estranei i numerosi neologismi tratti dal greco da lui usati e le molte parole greche adoperate in luogo di termini tecnici allora in uso generale. Va anche rilevato che soltanto alcuni dei suoi lavori furono pubblicati durante la sua vita (Viète li lasciò in eredità al suo segretario Pietro Aléaume, dalle mani del quale passarono al figlio Giacomo, che li fece pubblicare da lui), mentre altri non si conoscono che attraverso compilazioni fatte sopra appunti sparsi da lui vergati, dodici anni dopo la sua morte, da Alessandro Anderson (1582-?) un inglese vivente allora a Parigi. Alla diffusione delle sue idee nocque certamente il fatto che anche gli scritti da lui dati in luce furono stampati in una città secondaria (Tours, 1591) e si diffusero soltanto quando un benemerito matematico olandese — F. van Schooten — le ristampò in una collezione completa degli scritti del grande matematico francese. Al quale non si può risparmiare l'appunto di avere completamente taciuto le fonti a cui attingeva; però l'attento lettore non tarda a riconoscere l'influenza esercitata su di lui da Diofanto e la conoscenza da parte sua

(1) Ad esempio, a soli 24 anni e quantunque cattolico, entrò come avvocato al servizio dell'ugonotta Antonietta d'Anbeterre signora di Soubise e così fu trascinato a partecipare alle lotte del tempo fra cattolici e calvinisti. Si occupò dell'educazione di Caterina (poi di Rohan) figlia di Antonietta, di cui rimase per tutta la vita consigliere ascoltatissimo; dalle lezioni da lui impartite traggono origine i suoi *Principeses de Cosmographie*, pubblicate nel 1637.

(2) Alcune frasi oscure scritte dall'Anderson nel 1615 — « *praecipiti et immaturo autoris fato (nobis certe iniquissimo)* » — indussero qualche storico a congetturare che la morte del Viète non sia stata naturale.

(almeno) di Cardano, le cui opere non erano allora ignote ad alcuna persona colta.

252 - A porre i fondamenti dell'algebra è dedicato l'opuscolo di Viète che porta il titolo *In artem analyticem isagoge.* Ivi il dotto autore prende le mosse da quanto lasciò scritto Platone sul metodo (analitico) per la ricerca della verità e alle due forme (« zetetica » e « poristica ») sotto cui tale procedura viene esposta da Teone Smirneo (v. p. 78); una terza egli ne aggiunge (« retica » o « esegetica »), a cui affida l'ufficio di determinare i valori delle incognite dei problemi in base ad assegnate condizioni (equazioni). Per procedere in qualsiasi ricerca matematica, il Viète, ad imitazione di Euclide, stabilisce un certo numero di assiomi: giova qui riferirne alcuni: « il tutto è eguale alla somma delle sue parti », « quantità eguali ad una stessa sono eguali fra di loro »; « eseguendo qualunque operazione aritmetica sopra quantità eguali si ottengono risultati pure eguali », ecc. La serie si chiude con la proprietà caratteristica di quattro numeri in proporzione, dell'essere il prodotto dei medi eguale a quello degli estremi. Maggiore originalità il Viète manifesta stabìlendo la « legge di omogeneità », secondo cui non si possono paragonare fra loro che grandezze geometriche di eguale dimensione; in omaggio a tale vincolo egli ritenne doveroso di indicare in ogni relazione le dimensioni delle grandezze considerate; valga d'illustrazione l'equazione seguente: A *cubis* — B *in* A *quad.* + B *quad. in* A *aeq.* B *quad. in* Z, che oggi scriverebbesi $a^3 - b\,a^2 + b^2\,a = b^2\,z$.

Egli aggiunge che l'ignoranza o la trascuranza di tale legge portò gli antichi a gravi errori: va però notato che i grandi seppero evitarli, chè Erone e Diofanto addizionarono liberamente aree e volumi, intendendo che ogni grandezza entrasse nei calcoli col numero che la misura. Per guidare nelle applicazioni di detta legge, il Viète dovette enumerare le grandezze su cui operare successivamente (sono quelle da lui chiamate « scalari »); e per sottrarsi al disagio proveniente dal fatto che lo spazio ambiente ha solo tre dimensioni, egli — dopo il lato o radice, il quadrato e il cubo — ha introdotta la considerazione del quadrato-quadrato, del quadrato-cubo, ecc. sino al cubo-cubo-cubo: lontana antecipazione della considerazione di spazi a più dimensioni!

I matematici precedenti il Viète fecero della « logistica numerosa » (evidentemente egli pensava, così scrivendo, a Diofanto), risolvendo questioni in cui i dati sono numeri; il matematico francese invece (e in ciò consiste uno dei meriti suoi più grandi) volle fare della « logistica speciosa », in cui cioè i dati fossero quantità qualisivogliano; e convenne di indicare con le vocali maiuscole *A, E, I, V, Y,* le incognite e le quantità date con le consonanti *B, D, L,* ecc. Nella nuova logistica, come nell'antica, le operazioni da effettuarsi sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione; la somma viene da lui indicata con + e la differenza con —, il che prova che al Viète non era ignoto un costume che dalla Germania erasi già diffuso sino in Inghilterra e fors'anche altrove; quando però è incerto il senso in cui deve eseguirsi la sottrazione, Viète usa un nuovo simbolo, cioè =, onde la scrittura $a = b$ equivale all'altra moderna $|a - b|$. Nulla di diverso dall'uso comune vi è

nella simbolica vietana relativa alle altre due operazioni aritmetiche; cosicchè il quoziente di un cubo per un quadrato è indicato dal matematico francese come da noi con la scrittura $\frac{A \text{ cubo}}{D \text{ piano}}$. In altra opera posteriore egli sentì il bisogno di parentesi e usò in loro vece le sbarre orizzontali scrivendo ad es. $E\ \overline{3B^2 + D^2}$ invece di $E\ (3B^2 + D^2)$. Nessun segno speciale è usato per indicare l'eguaglianza, mentre la parola « equazione » è usata da lui nello stesso significato che da noi. Sulle equazioni egli insegna a eseguire le operazioni ancor oggi in uso e che egli designa con nomi speciali. Sono:

1. *L'antitesi,* trasporto di un termine da un membro all'altro, con mutazione di segno;

2. *L'ipobibasmo,* soppressione di un fattore comune a tutti i termini;

3. *Il parabolismo,* divisione di tutti i termini per un numero arbitrario.

Le quattro operazioni aritmetiche fondamentali si possono eseguire geometricamente con riga e compasso; ma questi strumenti non sono sufficienti quando si sia in presenza di equazioni di grado superiore al secondo e Viète, ispirandosi ad Apollonio, conviene di potere eseguire anche l'operazione di *inserzione* fra due rette complanari di un segmento rettilineo di data lunghezza e passante per un punto dato. Fra le questioni che grazie a tale ampliamento si possono risolvere, il Viète cita la determinazione di due medie geometriche fra due segmenti rettilinei dati, la trisezione dell'angolo e l'inscrizione in un cerchio di un ettagono regolare. Il cenno, a dir vero poco chiaro, che egli fa nella chiusa, del problema delle sezioni angolari induce a ritenere che sino da allora egli fosse in possesso delle formole per la moltiplicazione degli archi. Le parole di chiusa (« nullum non problema solvere ») mostrano l'importanza che egli dava al suo lavoro.

253 - Dell'opuscolo testè compendiato forma un naturale proseguimento lo scritto *Ad logisticen speciosam notae priores* (le « posteriores » non furono rintracciate, ond'è dubbio se siano state scritte). Esso apresi con la determinazione di quantesivogliano medie proporzionali fra due lunghezze date; segue una lunga serie di problemi di 1° grado che oggi si risolvono con tutta facilità, ma che esigono speciali artifici da chi usa l'algebra sincopata; il risultato di ciascuno è compendiato in un teorema; così il matematico francese si è procurato una ricca collezione di risultati equivalenti alle formole che oggi usiamo nelle trasformazioni algebriche. I primi risultati ottenuti si possono oggi esprimere con le formole seguenti:

$$(a+b)+(a-b)=2a \quad , \quad (a+b)-(a-b)=2b \ ,$$
$$(a-c)-(a-d)=d-c \quad , \quad (a+c)-(a+d)=c-d \, .$$

Si leggono poi gli sviluppi di $(a+b)^n$ per $n = 2, 3, \ldots, 6$; inoltre tra-

sformazioni analoghe alle seguenti

$$(a - b)\ (a^2 + a\,b + b^2) = a^3 - b^3\ ,$$
$$(a + b)\ (a^2 - a\,b + b^2) = a^3 + b^3\ ,$$

per esponenti superiori a 3; finalmente molti altri teoremi insegnano gli sviluppi di espressioni della seguente forma:

$$(a + b)^n \pm d^m (a + b)^{n-m}\,.$$

Il seguito del medesimo scritto sembra a prima giunta appartenere all'analisi indeterminata diofantea, avendo per iscopo immediato la costruzione di triangoli rettangoli in numero; ma vedremo che ben più vasta ne è la portata. Si trova anzitutto la dimostrazione del seguente teorema: $|A^2 - B^2|$ e $2\,A\,B$ sono cateti di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa $A^2 + B^2$; segue un metodo per dedurre da due triangoli in numeri $B, D, Z$ e $F, G, X$ ($Z$ e $X$ ipotenuse) un terzo; Viète suppone che l'ipotenusa del nuovo triangolo sia $Z\,X$, si basa sulla seguente duplice identità (non ignota a Diofanto; v. p. 112)

$$(B^2 + D^2)\ (F^2 + G^2) = (B\,G + F\,D)^2 + (B\,F - D\,G)^2 =$$
$$= (B\,G - F\,D)^2 + (B\,F + D\,G)^2\,,$$

e ne deduce come espressioni dei cateti del nuovo triangolo una o l'altra delle coppie seguenti:

$$B\,G + F\,D\ ,\ \ |\,B\,F - D\,G\,|\ \ ;\ \ |\,B\,G - D\,F\,|\ ,\ B\,F + D\,G.$$

Se i due triangoli di partenza vengono a sovrapporsi, queste due coppie si identificano nella coppia $2\,B\,D$, $|\,B^2 - D^2\,|$ e si giunge a un nuovo triangolo rettangolo avente un angolo acuto doppio di uno di quelli del primitivo triangolo. Combinando questo col nuovo nel modo dichiarato sopra, si arriva a un triangolo rettangolo con un angolo acuto triplo. Procedendo nello stesso modo si giunge a risultati la cui importanza risulta dal fatto che non differiscono dalle formole di moltiplicazioni delle funzioni seno e coseno.

254 - Nei cinque Libri intitolati *Zetetica* si direbbe che Viète siasi proposto di mettere in luce la portata dei metodi esposti nell'*Isagoge* col farne applicazione a un grande numero di problemi aritmetici. La materia svolta è nel fondo diofantea; ma la possibilità che aveva il matematico francese di ragionare sopra dati letterali [1] e di rappresentare simbolicamente parecchie incognite gli permise di dare a tutta l'esposizione considerevole snellezza, ai calcoli maggiore speditezza e ai risultati una generalità dianzi ignota. Altra superiorità di Viète su Diofanto consiste nell'avere schiettamente distinto (anche senza un'esplicita dichiarazione al riguardo) i problemi determinati dagli altri e in generale presentata la materia svolta in quell'ordinamento razionale che indarno cer-

[1] Però egli non manca di dare per ogni soluzione un esempio numerico.

cammo, non solo in Diofanto, ma anche in Bombelli (v. p. 321). Così mentre nel I Libro si tratta esclusivamente di sistemi formati da due equazioni lineari, nel II sono considerati analoghi sistemi in cui entrano anche equazioni di gradi superiori: l'eleganza degli artifici usati sta a provare quanto profondamente il matematico francese abbia studiata l'*Aritmetica* di Diofanto. Per mostrare sopra un esempio la natura degli artifici da lui usati, consideriamo il sistema

$$x\,y = k^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = a^2 \ ;$$

per risolverlo il nostro autore introduce la variabile ausiliare $u$ definita come segue: $x^2 + y^2 = u^2$; in virtù delle relazioni date, da essa traesi

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\,x^2\,y^2 = u^4 - 4\,k^4\,, \quad \text{cioè}\ a^4 = u^4 - 4\,k^4\ ,$$

onde

$$u^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^4 + 4\,k^4}\ ;$$

essendo ora note la somma $x^2 + y^2$ e la differenza $x^2 - y^2$, nulla di più agevole di trovare $x^2$ e $y^2$, e poi $x$ e $y$.

Questioni somiglianti sono trattate nel Libro III; esse hanno come carattere comune la considerazione di tre o quattro numeri in proporzione. I due ultimi Libri appartengono all'analisi indeterminata di 2° grado, esclusion fatta degli ultimi problemi del IV Libro, ove si tratta di trovare due cubi di cui la somma o la differenza siano eguali alla somma o la differenza di due cubi dati. I problemi che trovansi nel IV Libro si riferiscono in gran parte a triangoli rettangoli in numeri; esso apresi appunto con la risoluzione di due problemi che oggi traduconsi nell'una o nell'altra nelle equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2\,.$$

Il primo (alla cui trattazione per brevità ci limitiamo) viene risolto dal Viète con l'aiuto di un triangolo rettangolo ausiliare $m^2 + n^2 = p^2$ facendo $x = a\,m/p$; $y = a\,n/p$. I seguenti sono più elevati e tratti da Diofanto; per esempio nel V Libro si trova la ricerca di tre numeri $x, y, z$ tali che si abbia

$$y^2 + z^2 = \square \quad , \quad z^2 + x^2 = \square \quad , \quad x^2 + y^2 = \square \ ,$$

ricerca che incontrasi già nell'antico autore greco. Emerge da tutto ciò che i *Zetetica* rappresentano piuttosto una geniale metamorfosi dell'opera di quest'ultimo, che un passo in avanti nella via da questo aperta e spianata.

255 - Gli scritti algebrici di Viète a cui ora ci volgiamo fanno parte di quelli che, dopo la sua morte, furono redatti dall'Anderson (v. p. 345) sopra semplici appunti del grande matematico: ammesso anche che qualche cosa di quanto vi si trova sia proprietà del compilatore, essi provano che Viète vide chiaramente come la teoria delle equazioni algebriche costituisse una delle colonne della matematica tutta, che urgeva allora rendere sempre più robusta e perfetta.

Il primo degli scritti che egli vi ha dedicato ha per titolo *De recognitione aequationum*. Ripieno come è di termini nuovi tratti dal greco, esso riuscì e riesce tuttora di lettura ostica, tanto più che non mancano le ripetizioni e che, invece di teoremi generali, vi si trovano serie di proposizioni congeneri di complicazione sempre maggiore. In molti punti di questo lavoro sembra affiorare il concetto di molteplicità delle radici di un'equazione algebrica, ma si direbbe sia balenata alla mente di Viète come un inafferrabile fantasma o come una visione tentatrice che urgeva respingere (1). Un progresso notevole di cui l'algebra è a lui debitrice è la considerazione di equazioni a coefficienti negativi e irrazionali (ciò non ostante egli non seppe emanciparsi dal considerare i tre soliti tipi di equazioni di 2° grado a coefficienti tutti positivi, e gli analoghi per quelle del 3°). Vita effimera ebbe invece la considerazione (*Syncresis*, letteralmente *paragone*) delle coppie di equazioni della forma

$$b\,x^m - x^n = c \quad , \quad b\,y^m - y^n - y^n = 0 \ ,$$

che egli combina, non è ben chiaro con quale scopo, per trarne relazioni della forma

$$b = (x^n - y^n)\ /\ (x^m - y^m)\,.$$

Sorte analoga ebbero gli sforzi compiuti dal Viète per stabilire una relazione fra due progressioni, una aritmetica e l'altra geometrica. Rimasero invece nella scienza, a gloria del Viète, gli artifici da lui proposti per fare scomparire il secondo termine da un'equazione, e va notato che per enunciare più semplicemente le regole relative egli scrisse le equazioni, considerate sotto le forme

$$x^2 = 2\,a\,x + b \quad , \quad x^3 = 3\,a\,x^2 + b\,x + c \quad , \quad \text{ecc.}$$

256 - L'altro dei lavori di Viète a cui facemmo allusione in principio del numero precedente ha per titolo *De emendatione aequationum* e tratta, in quattordici capitoli, delle trasformazioni che si possono far subire alle equazioni, tema questo che egli aveva già toccato nel precedente lavoro. Le operazioni di cui sopra sono di cinque specie. La prima (*expurgatio per uncias*) non è che quella che serve a far scomparire il secondo termine da un'equazione algebrica ordinata secondo le potenze discendenti dell'incognita. Inversa della precedente è la *transformatio* πρῶτον ἔσχατον grazie a cui ad es. dall'equazione $x^3 + p\,x = q$ si passa alla $y^3 + p'\,y^2 = q'$; la si esegue ponendo $x = q/y$; a Viète non sfuggì che ad essa si può ricorrere anche per far scomparire il secondo termine dell'equazione $x^3 + p\,x^2 = q$. Osservò inoltre che ad essa si può pure far appello per eliminare i coefficienti irrazionali; valga a provarlo la equazione $x^3 - 10\,x = \sqrt{48}$ che riducesi a coefficienti razionali facendo $x = \sqrt{48}/y$. *L'anastrofe* è un'operazione che scomparve dalla scienza perchè riconosciuta di nessuna utilità, onde ne facciamo grazia al lettore. Altrettanto non può ripetersi riguardo all'*isomeria*, avendo essa lo scopo

(1) Così in presenza dell'equazione $12\,x - x^2 = 20$ egli, quasi a malincuore, nota la possibilità di assumere $x = 6 \pm 4$.

di liberare un'equazione dalle frazioni. L'ultima delle trasformazioni insegnate dal Viète serve a ridurre la risoluzione di un'equazione di 4° grado a quella di una del 3°; si tratta in fondo dell'artificio inventato dal Ferrari e che Viète apprese senza dubbio dall'*Ars magna* di Cardano. Più originale si dimostrò il Viète nel risolvere l'equazione cubica

$$x^3 + 3\,b^2 x = c^3 ,$$

chè egli pose $x = b^2/y - y$ e così giunse alla trasformata $y^6 + c^3 y^3 = b^6$, che si abbassa subito al 2° grado. Artifici analoghi si possono applicare a qualunque equazione cubica. Riguardo a queste va anche rilevato che a Viète non sfuggì che nel caso irriducibile esse riduconsi alla trisezione dell'angolo.

Le ultime pagine della *De emendatione* mostrano che il Viète giunse sino alla soglia della scoperta della decomposizione di qualunque polinomio in fattori lineari, avendo egli stabilita la forma sotto cui può scriversi un polinomio di grado $n$ che si annulla per $n$ dati valori della indeterminata da cui dipende; vero è che considera separatamente le equazioni di 2°, 3° e 4° grado, ma l'uniformità dell'argomentazione e dei risultati prova che altrettanto accade in generale; breve era il cammino che dovevasi compiere per stabilire le relazioni fra radici e coefficienti.

257 - Allo stesso matematico devesi anche un tentativo per approssimare le radici delle equazioni numeriche di tutti i gradi: a questo problema è dedicato l'esteso lavoro dal titolo *De numerosa potestatum purarum resolutione*. Se $f(x) = k$ è l'equazione proposta, $n$ il suo grado, $a$ un valore approssimato di una radice e $s$ l'ultima cifra di questa, allora secondo Viète un valore più approssimato è dato dall'espressione

$$a - \frac{f(a)}{|\, f(a+s) - f(a)\,| - s^n} ;$$

il lettore noterà l'analogia di questa regola con quella notissima che porta il nome di Newton.

Finalmente lo scritto intitolato *Effectionum geometricarum canonica recensio* ci trasporta in un campo di pertinenza della scienza dell'estensione, chè sono ivi risolti alcuni problemi di 1° e 2° grado. Congenere ma più alto è il tema del lavoro *Supplementum geometriae*; infatti sono ivi trattati problemi di grado superiore, per risolvere i quali Viète rinnova (v. p. 347) la richiesta di aggiungere alle operazioni geometriche concesse da Euclide quella di eseguire ogni inserzione; così egli si assicura i mezzi per dividere qualunque angolo in tre parti eguali e per determinare due medie proporzionali fra due rette date: a questi due problemi egli riduce qualunque questione cubica o biquadratica (ad esempio quella dell'inscrivere un ettagono regolare in un cerchio), risultato generale della più alta importanza che corona degnamente i contributi dati da Viète alla teoria delle equazioni algebriche. Vedremo nei Capitoli seguenti che orme altrettanto profonde egli ha saputo imprimere in altri campi dello scibile matematico.

# BIBLIOGRAFIA

GREGORIUS REISCH, *Aepitoma omnis philosophiae, alias Margarita phylosophica tractans de omni genere scibili* (Freiburg, 1503).

G. FRIZZO, *De numeris Libri duo, authore* JOANNE NOVIOMAGO, esposti e illustrati (Verona-Padova, 1901). Appendice (Ivi, 1903).

*De arte supputandi Libri quattuor* CUTHBERTI TONSTALLI (London, 1522).

ORONTII FINEI *delphinatis, Protomathesis* (Parisiis, 1532).

ORONTII FINEI, *In sex priores Libros geometricorum Elementorum Euclidis demonstrationes* (Ivi, 1536).

ORONTII FINEI, *De quadratura circuli tandem inventa* etc. (Ivi, 1544).

ORONTII FINEI, *De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII, quibus inter caetera circuli quadratura centum modis et supra, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur* (Ivi, 1556).

P. S. CIRUELO, *Tractatus arithmetice practice qui dicitur Algorismus* (Parisiis, 1505).

G. WERTHEIM, *Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik* (Braunschweig, 1896).

P. SCHUB, *A mathematical Text by Mordecai Comtino* (Isis, n. 50, 1932).

*Die Coss* CHRISTOFFS RUDOLFS, *die schönen Exempeln der Coss durch* MICHAEL STIFEL *gebessert und sehr gemehrt* (Königsberg, 1553).

*Arithmetica integra Authore* MICHAELE STIFELIO, *Cum Praefatione* P. Melanchtonis (Norimberga, 1544).

R. RECORDE, *The Grovnd of Artes* (London, 1540 circa).

R. RECORDE, *The whestone of witte is the seconde parte of Arithmetike* (London, 1557).

P. NONII, *Salaciensi, De erratis Orontii Finoei* (Coimbra, 1546).

*Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria, compuesto per el Doctor* PEDRO NUNES (Anvers, 1567).

*Euclides* (I ed., Parigi, 1544; II ed., id., 1549, senza nome d'autore; la II edizione porta una *Prefazione* del Ramus).

P. RAMI, *Arithmeticae Libri tres* (Parisiis 1555; altre edizioni 1557, 1562, 1569, 1577, 1580, 1581, 1586, 1591, 1592, 1596, 1599, 1611, 1612, 1613, 1627).

P. RAMI, *Scholarum mathematicarum Libri unus et triginta* (Basilae, 1569); altre edizioni 1573, 1599, 1627.

H. BOSMANS, *La « Practiqve om te leeren cyphern » de Nicolas Petri de Deventer* (Revue des questions scientifiques, t. XXXII, 1908).

H. BOSMANS, *La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres* (Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, t. XXVII, I, 1904).

H. BOSMANS, *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Mahumed ben Musa el-Chevârezmi* (Id., t. XXX, 1906).

*Les Oeuvres mathématiques de* SIMON STEVIN. Le tout revu, corrigé et augmenté par Albert Girard (Leyde, 1634).

FRANCISCI VIETAE, *Opera mathematica.* In unum volumen congesta ac recognita, opuere atque studio Francisci Schooten (Lugd, Batav., 1646).

## CAPITOLO XVIII

# L'UMANESIMO NELLA SUA INFLUENZA SUGLI STUDI MATEMATICI

### Le prime edizioni dei classici greci

258 - La tendenza umanistica che, a partire da Petrarca e Boccaccio, indusse tanti valentuomini a ricercare, studiare e porre in circolazione poeti e filosofi, storici e naturalisti, oratori e tragici delle antiche età, col progredire del tempo raggiunse anche i cultori delle scienze esatte: ma le loro meritorie fatiche non esercitarono tutta l'influenza di cui erano capaci se non dopo l'invenzione della stampa; a misurarne l'entità basti osservare che durante il secolo XVI uscirono dalle polverose biblioteche ove erano rinchiusi da secoli tutti i grandi matematici dell'antica Grecia e anche alcuni dei minori. Così nel 1505 per cura del veneziano Bartolomeo Zamberti vennero pubblicati gli *Elementi* « Euclidis Megarensis philosophi platonici » poi (1573) gli scritti ottici dello stesso e di Eliodoro da Larissa per cura di Egnatio Danti (1537-1586). Nel 1533 vide la luce a Basilea il testo greco degli *Elementi* di Euclide accompagnato dal *Commento* di Proclo. Undici anni più tardi veniva fatto altrettanto riguardo alle opere superstiti di Archimede e all'*Almagesto* di Tolomeo. Nel 1544 veniva pubblicata in Roma anche la versione araba degli *Elementi* di Euclide dovuta a Nassir-ed-Din [1].

A Francesco Barozzi devesi la prima versione del citato *Commento* di Proclo, che fu pubblicata postuma a Venezia nel 1560; altri scritti dello stesso autore confermano la sua profonda conoscenza della scienza antica: limitiamoci a osservare che in uno, avente per soggetto gli asintoti, si legge la descrizione di uno strumento per delineare le coniche, somigliante al « compasso perfetto » degli Arabi (v. p. 206). La versione latina della *Sferica* di Teodosio, compiuta dall'arabo sino dal 1120, era finalmente stampata nel 1518 e poi nel 1557; altrettanto accadeva riguardo all'analogo lavoro fatto su un testo greco da un discepolo di Ramus, professore a sua volta al Collegio di Francia, Giovanni de la Pène (1528-1558), al quale devesi eziandio un'edizione greca e latina dell'*Ottica* di Euclide. Finalmente l'anno 1575 nella storia delle ricerche

[1] *Euclidis Elementorum geometricorum Libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabicè impressi.* Il frontispizio (di cui una parte in arabo) trovasi riprodotto di fronte alla pag. 104 dell'opera di JOSE A. SANCHEZ PEREZ, *Las matematicas en la Biblioteca del Escorial* (Memor. de la R. Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid, Ser, t. VII, 1929).

sulle proprietà dei numeri è ricco di non comune importanza per la pubblicazione (per quanto imperfetta) allora avvenuta dell'*Aritmetica* di Diofanto, in veste latina; ne è autore Guglielmo Holzmann, generalmente noto sotto il nome latinizzato di Xylander, nato da genitori poveri ad Augsburg nel 1532, morto nel 1576 professore all'Università di Heidelberg; vedemmo (n. 249) che dieci anni erano appena passati, che un belga illustre, S. Stevin, eseguiva la versione francese dei primi quattro Libri. La pubblicazione (1570) della prima traduzione inglese degli *Elementi* di Euclide per merito di Sir Enrico Billingsley [1] ci dà occasione di notare che essa, al pari di quelle in altre lingue moderne, mentre sta a provare che il desiderio di conoscere le antiche opere scientifiche si diffondeva rapidamente anche fra coloro che non erano in grado di leggere un libro scritto in una delle lingue classiche, sarà stata indubbiamente veicolo utilissimo per la diffusione nelle masse del pensiero matematico greco.

Dovremmo aggiungere la notizia della pubblicazione (Venezia, 1537) dei primi quattro Libri delle *Coniche* di Apollonio, in una traduzione latina dovuta al patrizio veneto G. B. Memo; ma la stampa, essendo avvenuta dopo la sua morte per cura del figlio Gianmaria, totalmente digiuno di matematica, risultò talmente scorretta da doversi dire inintelligibile, onde il merito dei due Memo può ridursi a quello di avere spinto altri a fare meglio di loro.

La generalità di queste prime edizioni, tratte da originali scritti da amanuensi rozzi e ignoranti, presenta imperfezionoi talmente considerevoli che il pensiero dell'autore risultava oscuro e svisato; tale circostanza fece nascere, in alcuni eruditi famigliari col ragionamento matematico, l'idea di rivedere e correggere i testi pubblicati, di commentare le opere più insigni e finalmente di sforzarsi di divinare quelle di cui altro non conoscevasi se non quanto ne riferiscono Pappo e Proclo; così facendo essi furono indotti a ricerche originali le quali, anche se non possono reggere al paragone dei lavori algebrici discorsi nei due Capitoli precedenti, sono sempre sintomi certi di un risveglio dello spirito di ricerca geometrica: l'Italia ha la gloria di avere dati i natali a due eminenti pensatori di tale specie. Prima di occuparcene siaci lecito rilevare essere un fatto degno della più seria considerazione (e di cui incontreremo numerose conferme) che ogni qualvolta in un paese comincia a ridestarsi lo spirito di ricerca geometrica, gli scienziati non riescono a sottrarsi al fascino su di essi esercitato dai più antichi investigatori ed in conseguenza si sforzano di calcarne le orme, di imitarne persino le movenze e gli atteggiamenti. Si sarebbe perciò indotti a pensare che nella vita intellettuale delle nazioni avvenga qualche cosa di analogo e ciò che l'embriologia insegna verificarsi nella vita fisica degli animali: nello stesso modo che ogni essere organizzato, avanti di acquistare vita autonoma e indipendente, ripassa per tutte quelle fasi di sviluppo che attraversò la specie a cui egli appartiene prima di raggiungere lo stato fisico della generazione di cui dovrà essere un elemento, così parrebbe che ogni po-

(1) Il frontispizio trovasi riprodotto nel corpo dell'articolo di W. Walter F. Shenton, *The first English Euclid* (The Amer. mathem. Monthly, vol. XXV, 1928).

polo, prima di acquistare la capacità di accrescere le nostre cognizioni sui fenomeni dello spazio, debba per qualche tempo assumere le parvenze e i modi di agire di chi dianzi battè la medesima strada.

## Maurolico e Commandino

259 - In Messina, centro di estesi e profondi studi sopra la lingua e la letteratura greche, e da famiglia oriunda di Costantinopoli, ebbe culla, dimora e onorata sepoltura Francesco Maurolico. Matematico e astronomo, poeta e storico, la venerazione che gli tributarono i contemporanei risulta dalla dichiarazione scolpita sulla sua tomba, secondo la quale egli fu prodotto « affinchè la Sicilia unicamente chiara e illustre non fosse per un solo Archimede ». Egli vide la luce addì 16 settembre 1494, nel 1521 vestì l'abito ecclesiastico, per due volte (1528 e 1553) i suoi concittadini lo chiamarono a occupare una pubblica cattedra di matematica; l'imperatore Carlo V lo volle a colloquio quando nel 1535 traversò Messina, reduce da Tunisi ove aveva sconfitto il corsaro Barbarossa; morì il 21 di luglio del 1575. Per numero di scritti originali, di edizioni di classici e di commenti egli può reggere al paragone del Regiomontano (1); ma, avendo goduto di lunghi anni di lavoro, ben più numerosi di quelli che la sorte concesse al matematico di Könisberg, ebbe la soddisfazione di vedere i propri scritti girare per il mondo e assicurargli rinomanza universale.

Il primo geometra greco che attrasse la sua attenzione fu Euclide, di cui la edizione zambertiana (v. p. 353) egli giudicò non molto pregevole; avendo scelti gli *Elementi* come tema di pubbliche lezioni, mutò radicalmente l'ordinamento della materia svolta nel XIII Libro e suggerì notevoli aggiunte ad essa e a quanto contengono i cosidetti Libri XIV e XV.

Con ben maggiore ragione il Maurolico trovò poco soddisfacente l'edizione memiana (p. 354) delle *Coniche* di Apollonio; di quest'opera erano allora noti soltanto i primi quattro Libri, e il nostro fu punto dal desiderio di compiere una divinazione dei due successivi, giovandosi perciò delle informazioni date da Pappo; scoperte che furono le versioni arabe di quei due Libri, si notò che, riguardo al V (il lettore ricorderà che esso tratta delle rette massime e minime che si possono condurre a una conica da un punto del suo piano), il matematico messinese si era molto scostato dal Pergeo, mentre, per quanto concerne il VI (eguaglianza e similitudine delle sezioni coniche) il distacco è assai meno considerevole. Da siffatti studi sopra quelle celebri curve il Maurolico fu indotto a concepire e svolgere un nuovo metodo per studiarle, considerandole, cioè, direttamente nel cono, metodo che rappresenta per avventura il primo progresso compiuto, nel suo insieme, da quella disciplina, a partire da Apollonio.

(1) Un elenco delle opere scritte dal Maurolico sino al 1543 leggesi nella lettera con cui egli dedicò la sua *Cosmografia* al Cardinale Bembo; fra esse si trova un trattato d'algebra che oggi considerasi come perduto; da quanto ne dice lo stesso autore doveva contenere soltanto i rudimenti della materia.

L'attenzione di Maurolico si portò poi sul terzo dei legislatori della geometria, in particolar modo sopra le ricerche baricentriche dell'immortale Siracusano; a complemento delle stesse egli si occupò di determinare il centro di gravità di una piramide, di un emisfero e di un conoide parabolico; era la via che, per far progredire la scienza, avevano da tempo scelta alcuni arabi (v. pag. 196), allora del tutto ignoti in Europa, e che scelsero poco dopo altri due matematici di cui parleremo in questo stesso Capitolo (Commandino e Clavio), il che osserviamo piuttosto per accrescere che per diminuire il merito di chi tale strada percorse con plauso. Ma imparzialità storica esige che si osservi che il Maurolico s'illuse che considerazioni baricentriche potessero anche guidare alla quadratura del cerchio; egli, infatti, scompose un quadrante (figura 39) $O\,A\,C\,D$ in un triangolo rettangolo $A\,O\,B$ e in un segmento circolare $A\,B\,C$ e considerò i centri di gravità delle parti e del tutto; ma ebbe il torto di trascurare il fatto essenziale che la determinazione della posizione del baricentro di un settore circolare era allora un problema irresoluto, e vedremo a suo tempo (n. 322) che la soluzione si fonda sulla rettificazione di un arco circolare, cioè, in fondo, sopra la stessa questione che Maurolico aspirava di risolvere.

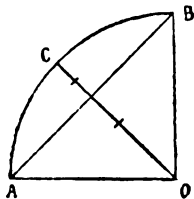



Fig. 39.

260 - Lo zelo per la scienza che animava il Maurolico lo indusse pure a meditare anche sui geometri greci minori (quale Sereno), mentre la sua propensione per lo studio dei fenomeni celesti lo indusse ad occuparsi di Autolico da Pitane, Teodosio da Tripoli e Menelao d'Alessandria. Ma — da pensatore indipendente quale egli era — non si limitò a pubblicarne le opere, chè aggiunse a quanto aveva appreso una considerazione importante: mentre erano da tempo entrate nell'uso le funzioni *seno* e *coseno*, mentre il Regiomontano aveva aggiunta la considerazione delle *tangenti*, egli — incontratosi, come vedremo (n. 272), col Retico — fece notare l'opportunità di considerare metodicamente anche le *secanti*; della nuova linea trigonometrica egli segnalò la connessione con le altre, stabilendo le relazioni seguenti:

$$\mathrm{Sec} = \frac{\mathrm{raggio}^2}{\cos}, \quad \mathrm{Sec} = \frac{\mathrm{raggio} \times \mathrm{tangente}}{\mathrm{sen}},$$

e, per agevolarne l'uso nella pratica, calcolò una tabella dei valori che essa assume, alla quale impose il nome di *Tavola benefica*.

Il nostro autore si occupò ancora di altre due discipline ausiliari dell'astronomia: la gnomonica e l'ottica; grazie alla sua famigliarità con le sezioni coniche egli impresse alla prima un indirizzo veramente scientifico, che fu mantenuto dai trattatisti posteriori (citiamo ad esempio il Clavio); meditando invece sulla seconda, egli avvertì l'esistenza di una curva toccata dagli infiniti raggi riflessi da quelli emananti da un punto, così preludendo alla teoria delle caustiche che reca il nome di Tschirnhausen.

Emerge da tutto ciò che nello studio di tutte le discipline connesse a considerazioni spaziali il Maurolico, dall'intensa meditazione sulle opere antiche, trasse, non soltanto preziosi lumi, ma anche stimolo e ispirazioni a proprie scoperte.

Altrettanto non si può ripetere riguardo all'aritmetica. Le opere dei Neo-Pitagorici, a cui egli si volse, dopo di avere esauriti i libri aritmetici di Euclide, erano realmente poco indicate per indurlo a occuparsi delle questioni che erano all'ordine del giorno durante il periodo aureo dell'algebra italiana; in conseguenza egli si mantenne fedele all'indirizzo che vedemmo (v. p. 107) seguito da Teone da Smirne e Nicomaco da Gerasa e ritenne prezzo dell'opera studiare le serie di numeri (quadrati, cubi, poligonali, ecc.) da essi considerate, soltanto aggiungendo qualche proprietà a quelle da essi avvertite; ma si tratta di semplici gingilli che i posteri collocarono nella vetrina delle curiosità, onde di nulla accrescono le benemerenze di colui che tante se ne era acquistate meditando sulle opere dei geometri dell'Ellàde antica.

261 - L'altro dei benemeriti studiosi italiani a cui precedentemente (p. 355) fecesi allusione, è Federigo Commandino. Egli nacque ad Urbino nel 1509; per un decennio studiò a Padova, poi a Ferrara, ove si addottorò in medicina. Ritornato nella città natale, salì rapidamente in fama per ingegno e sapere; visse qualche tempo a Roma, all'ombra benefica del trono pontificio, ma finì la vita nella città ove era nato (1565). Tutta la vita egli spese nel pubblicare e commentare gli antichi geometri, in ogni occasione dimostrandosi dotato di perfetta cognizione del greco, di acuto senso critico e di vigore matematico.

Fra gli scritti archimedei da lui editti ricorderemo i *Galleggianti,* perchè lo studio di esso indusse il Commandino a determinazioni baricentriche congeneri di quelle compiute dal Maurolico (con cui il nostro mantenne una cordiale e feconda corrispondenza epistolare), al quale anzi dedicò l'operetta *De centro gravitatis solidorum,* ove, oltre alcuni risultati di indiscussa novità, va ammirato lo stile modellato su quello dei sommi matematici dell'antica Grecia. Se anche egli, nella determinazione del centro di gravità della piramide, al pari del citato geometra messinese, ebbe un precursore in Leonardo da Vinci, tenga presente il lettore che erano allora ben lontani i tempi in cui furono scoperti e decifrati i preziosi taccuini vergati dal celebre pittore-scienziato.

È anche merito del Commandino di avere pubblicato in latino e in italiano un rifacimento dovuto a Maometto di Bagdad (v. p. 210) del noto lavoro di Euclide, *Sulla divisione delle figure* (v. p. 48). Una copia del relativo manoscritto esistente nella Cotton Library di Londra fu recata ad Urbino da Giovanni Dee (n. a Londra il 13 luglio 1527, m. in miseria a Mortlake nel dicembre 1608) (¹), il quale, essendo in grado di comprendere la lingua in cui era scritta, guidò il nostro compatriotta nel volgerla in latino. Debbonsi anche a lui ottime versioni latine dell'unica opera superstite di Aristarco Samio (v. p. 82) e della *Collezione*

(¹) I trascorsi astrologici di questo dotto inglese non debbono fare dimenticare il cospicuo suo merito di essere stato uno dei primi che abbracciarono le idee di Copernico.

*matematica* di Pappo; nè va taciuto che ben meritato fu l'onore di parecchie edizioni che ebbero le versioni in latino e in italiano da lui compiute degli *Elementi* di Euclide.

262 - Potremmo aggiungere a questo elenco dei lavori eruditi del Commandino alcune sopra opere di Erone, ma ne siamo dispensati dal fatto che non si riferiscono alla disciplina di cui seguiamo lo svolgimento. Però sopra un'ultimo è dover nostro arrestarci perchè contrassegna il passaggio della prospettiva dalle mani dei pittori in quelle dei geometri. Parliamo del volume in cui egli raccolse la versione latina del *Planisfero* di C. Tolomeo (v. p. 90) (1), l'opera cosmografica di Giordano Nemorario (v. p. 239) e i propri commenti su entrambe. Ora l'opera del celebre astronomo greco notoriamente contiene i fondamenti del metodo (detto oggi « proiezione stereografica ») che serve a rappresentare la superficie della terra proiettandola da uno dei suoi poli sopra il piano dell'equatore; invece i commenti del dotto Urbinate costituiscono un compendio delle proprietà caratteristiche della prospettiva lineare, scritto nell'intento di assicurare a questo metodo di rappresentazione basi solide. A tale scopo egli suppose di riferire le figure considerate a due piani fra loro perpendicolari, uno orizzontale e l'altro verticale, e di scegliere come quadro un piano perpendicolare ad entrambi, che viene poi ribaltato sul piano orizzontale mediante una rotazione di 90°; centro è un punto situato al disopra del piano orizzontale. In base a tali convenzioni, il Commandino insegnò a determinare la prospettiva di un punto, e mostrò come ne segua un metodo per delineare le prospettive dei cerchi di una sfera.

È dovere dello storico notare che questo scritto non riscosse l'approvazione degli artisti, che lo giudicarono astruso e incompleto. A soddisfare le loro esigenze si accinse Daniele Barbaro, patriarca di Aquileja (n. a Venezia l'8 febbraio 1513, m. ivi il 12 aprile 1570) col volume intitolato *La pratica della prospettiva: opera molto profittevole a pittori, scultori ed architetti* (Venezia, 1559), scritto con l'aiuto di Giovanni Zamberti (che ci è già noto come editore di Euclide) e sfruttando largamente il lavoro di P. della Francesca (v. p. 261).

Negli studi sullo stesso argomento, al Barbaro tien dietro un architetto di grande fama, Jacopo Barozzi (n. a Vignola il 1° ottobre 1507, m. a Roma il 7 luglio 1573); *Le due regole della prospettiva pratica*, da lui composte, dopo avere girato a lungo manoscritte e subìto considerevoli miglioramenti, furono pubblicate (Roma, 1582) per cura di Egnatio Danti (1537-1586). Esse poggiano sull'ipotesi che il quadro sia verticale e che ogni punto dello spazio sia determinato mediante la sua proiezione orizzontale e la relativa altezza. Enorme fu il successo che ebbe questo scritto; il contenuto di esso si diffuse in tutto il mondo, grazie alle versioni in francese, inglese, tedesco, latino e persino in russo che ne furono fatte; che più? se la fama non mente, Pietro il Grande non avrebbe sdegnato di occupare le proprie ore d'ozio, commentandolo.

---

(1) È noto che questo lavoro fa sistema con l'*Analemma* (proiezione ortogonale) dello stesso autore, pure tradotto in latino dal Commandino.

## G. B. Benedetti

263 - L'interesse crescente in tutti gli ambienti per la prospettiva è documentato da una memoria di un patrizio veneto che dicemmo discepolo del Tartaglia (v. n. 236). Sembra che malgrado le pubblicazioni citate nel n. prec. fra gli artisti avessero corso procedimenti errati per costruire la prospettiva di un oggetto, e appunto per porre argine al loro diffondersi il Benedetti scrisse la seconda parte del suo *Diversarum speculationum liber*, a noi già noto. Nei ritocchi da lui proposti alle pratiche in uso egli s'incontrò col Danti; ma a suo merito va notato che, nell'intento di rendere più chiara l'esposizione, per ogni questione egli dà una figura « corporea » e una « superficialis », cioè, per usare la nomenclatura moderna, una figura « schematica » e una « effettiva ».

L'orientamento verso la geometria che già avvertimmo nel Benedetti e che le or citate pagine confermano, appare nella sua più vivida luce in un opuscolo da lui pubblicato, quando era poco più che ventenne. Scopo e contenuto di esso risultano chiaramente dal titolo che porta: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum una tantummodo circini data apertura* (Venetiis, 1553); da esso trasse certamente profitto il Tartaglia nello scrivere le pagine su questo argomento della V Parte del suo *General trattato* (v. p. 314). Degno di rilievo è il fatto che al Benedetti e al Tartaglia sembra essere sfuggita la circostanza importante che, risolti col detto vincolo, alcuni dei problemi di Euclide, per gli altri nulla è necessario innovare in quanto scrisse il sommo Alessandrino.

L'intento propostosi dal giovane geometra può dirsi pienamente raggiunto; non riferiremo le soluzioni dei 54 problemi trattati e nemmeno i loro enunciati (la maggior parte desunti da Euclide); solo notiamo che le difficoltà incontrate traspaiono dalle superbe parole da cui è accompagnata la costruzione di un triangolo di dati lati: « Et contra illos omnes eccellentissimos mathematicos, priscos, modernosque, qui dixerunt impossibile esse hoc problema alio modo concludi, quam ut docet XXII primi Euclidis, ergo vero deo dante labente Anno Divinae incarnationis MDLII Die XV octobris illud inveni ».

Per dare un'idea dei procedimenti diversi dagli euclidei da lui escogitati, riferiremo la seguente costruzione della media proporzionale fra due segmenti dati $A\ B$, $B\ C$ (Fig. 40): si porti su una retta qualunque uscente da $C$ il segmento $C\ D$ eguale al doppio della data apertura di compasso; si unisca $A$ a $D$ e si conduca $B\ E$ parallela a $A\ D$; si descriva il semicerchio di diametro $C\ D$, si conduca $E\ F$ perpendico-

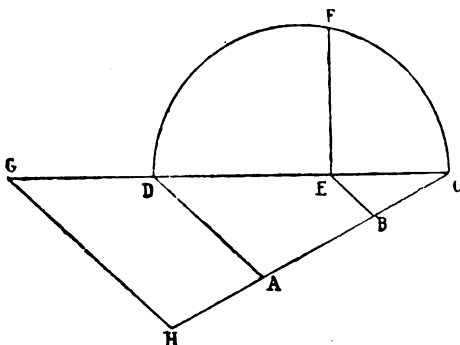



Fig. 40.

lare a $C\,D$ e si porti sul prolungamento di $C\,D$, $D\,G = E\,F$; la parallela condotta da $G$ a $A\,D$ tagli la retta $A\,B$ in $H$; $A\,H$ è il segmento cercato.

264 - Le rosee previsioni sull'avvenire scientifico del Benedetti, sorte in conseguenza dell'ora analizzata pubblicazione, furono in processo di tempo confermate, come è provato dal favore che egli seppe conquistare e conservare in due Corti italiane. Era un tempo nel quale la matematica andava riacquistando il favore di cui godeva nell'antichità e facevasi sempre più generale il convincimento che agli uomini di scienza dovessero ricorrere gli uomini d'armi al pari dei costruttori di macchine e di edifici, per sormontare le difficoltà che incontravano nel loro quotidiano lavoro. Di questo fatto, che lo storico deve segnalare, porgono ripetute prove molte pagine dei *Quesiti et inventioni diverse* del Tartaglia; altre traggonsi da numerosi passi del *Diversarum speculationum liber* del Benedetti, ove ad ogni passo si incontrano articoli intesi a rispondere a questioni proposte all'autore da persone di svariate condizioni sociali. Nell'impossibilità in cui ci troviamo di entrare in particolari troppo minuti, limitiamoci a qualche cenno. Segnaliamo anzitutto le osservazioni del Benedetti sul V Libro di Euclide (tratte forse dalle lezioni da lui impartite ai duchi di Savoia Emanuele Filiberto e Carlo Emanuele), perchè rappresentano gli inizi di una serie di lavori semifilosofici sopra i rapporti e le proporzioni, di cui indicheremo in seguito i principali elementi. Va poi ricordata una pregevole soluzione del problema, allora all'ordine del giorno, di costruire un quadrilatero inscrittibile di dati lati. Una costruzione ideata dal Benedetti per le radici dell'equazione $(a + b)\,x = x^2$ lo fece considerare (secondo noi a torto) da M. Chasles e G. Libri come un precursore di Descartes, riguardato come inventore della geometria analitica. Più lungo discorso da parte nostra esige un notevole complemento da lui dato a una costruzione scoperta di A. Dürer (e pubblicata nell'opera citata a pag. 263) per il pentagono equilatero di dato lato $A\,B$ (Fig. 41). Ecco in che cosa consiste: si descrivano le circonferenze di centri $A$ e $B$ e raggio $A\,B$; $O$ ne sia una delle intersezioni: si descriva, ancora con lo stesso raggio, la circonferenza di centro $O$ e se ne determinino le intersezioni $P$, $Q$ con le precedenti; sia $M$ il punto medio dell'arco sotteso in questa circonferenza dalla corda $A\,B$. Siano poi $C$, $E$ le intersezioni delle rette $P\,M$ e $Q\,M$ con le prime due circonferenze tracciate: nasce così la linea poligonale aperta $E\,A\,B\,C$, che è facile trasformare in un pentagono equilatero. Sorge naturalmente la questione: è desso anche equiangolo? Il Benedetti risponde negativamente a tale questione, mostrando che, mentre tutti gli angoli di un pentagono regolare valgono

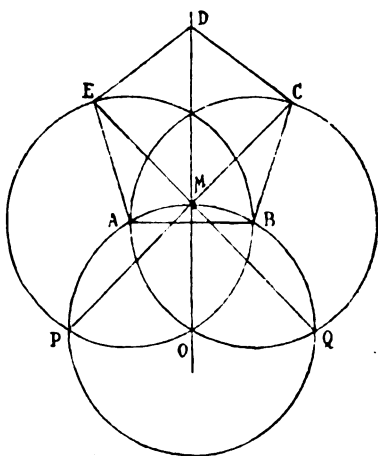



Fig. 41.

108°, l'angolo in $D$ vale 109°12′, quelli in $E$ e $C$ 107°7′, e quelli in $A$ e $B$ 108°22′. Il pentagono di Dürer non è, dunque, regolare, ma è mirabilmente prossimo ad esserlo [1].

Prima di lasciare il geometra ora considerato è dover nostro di accennare, sia pure di sfuggita, che gli storici della meccanica accordano a lui un posto notevole fra coloro che studiarono, prima di Galileo, la teoria dei moti e delle forze.

## Guidobaldo del Monte

265 - Ritorniamo a occuparci della prospettiva, per osservare come il più notevole progresso da essa compiuto nel corso del secolo XVI sia opera di Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte. Questo eminente scienziato nacque a Pesaro l'11 gennaio del 1545 da una delle più illustri famiglie del tempo; in Urbino ebbe a maestro il Commandino; studiò anche a Padova e poi abbandonò l'Italia per combattere i Turchi. Rimpatriato si dedicò tutto agli studi, dell'intensità e fecondità dei quali fanno fede le opere seguenti: *Mechanicorum liber* (Pesaro 1577), *Planisphaeriorum theorica* (Id., 1579), *In duos Archimedis libros aequiponder. Paraphrasis* (Id., 1588), il primo dei quali lo colloca fra i più eminenti cultori della meccanica pregalileiana [2], mentre gli altri mostrano che neppur lui seppe sottrarsi al fascino che esercitavano allora i grandi pensatori dell'antica Grecia sopra tutti coloro che sapevano misurarne l'indiscutibile valore. L'alta fama di valoroso scienziato raggiunta dal del Monte in conseguenza delle citate pubblicazioni, indusse il Governo toscano ad affidargli (1588) l'ufficio di ispettore generale delle fortezze: è durante il suo soggiorno a Firenze, reso necessario da tale carica, che egli ebbe occasione di conoscere Galileo, al quale predisse una fulgida carriera e che aiutò in momenti difficili. Ritiratosi da ogni sorta di pubblici uffici, ritornò nella città nativa per dedicarsi totalmente agli studi: ivi morì il 6 gennaio 1607.

Nell'impossibilità in cui ci troviamo di esporre per intero l'opera matematica del del Monte, restringiamosi a parlare dello scritto dal titolo *Perspectivae libri sex* (Pisauri, 1600) che è una delle gemme più preziose della letteratura matematica italiana del secolo XVI. A stabilirne l'importanza rileveremo che nel I Libro di essa trovasi dimostrato in generale che la proiezione centrale di un sistema di rette parallele è un fascio di rette concorrenti, fatto questo che dianzi era stato constatato empiricamente, ma la cui spiegazione non era stata neppure tentata. Che l'importanza di questo risultato non sia sfuggita all'autore è dimostrato da un'incisione posta nel frontispizio dell'opera (è riprodotta nella nostra Fig. 42; nell'originale è accompagnata dal motto « citra dolum fallimur »), dalla quale risulta ancora che il del Monte scoperse che se si considerano parecchi sistemi di rette parallele fra loro e paral-

[1] Il Clavio, avendo poco dopo rifatto lo stesso calcolo, trovò di dover diminuire di 20′ gli angoli di 107°7′ e di accrescere di 40′ quelli di 109°12′.

[2] In quest'opera (scritta nello stile degli antichi) Lagrange trovò traccie del principio delle velocità virtuali.

lele al medesimo piano, i loro punti di concorso vengono a cadere sulla medesima retta; nè va taciuto che il termine « punctum concursus » da lui usato era destinato a rimanere nella scienza.

Nel II Libro della medesima opera la nozione di punto di concorso è applicata alla delineazione di figure situate in un piano orizzontale, il quadro essendo al solito verticale; ribaltando questo sul piano orizzontale stesso l'autore arriva a una costruzione della prospettiva, eseguibile completamente sul foglio del disegno e che egli presenta sotto ben *ventitrè* forme differenti e da cui egli desume la soluzione, in alcuni casi, del problema inverso della prospettiva.

Il Libro III ha per iscopo la costruzione della prospettiva delle altezze sul piano orizzontale; del Monte ne deduce le costruzioni analoghe relative a figure poste comunque nello spazio, senza neppure limitarsi

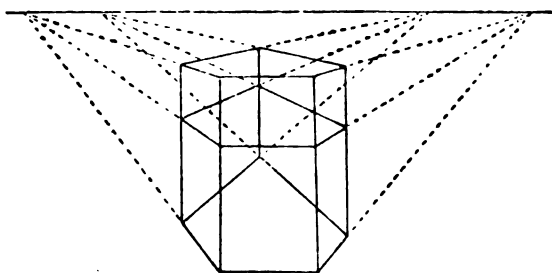



Fig. 42.

all'ipotesi che il quadro sia piano. Da quanto si legge nel citato Libro risulta che, volendo costruire la prospettiva di un punto, è necessario e sufficiente conoscerne la proiezione ortogonale sul piano orizzontale e la corrispondente altezza; ora nel seguente Libro IV il nostro autore si addentra nel maneggio di siffatti elementi, e così inconsciamente getta le basi del metodo dei piani quotati. Che tutto ciò abiliti anche a trovare le ombre è provato dal V Libro, mentre l'ultimo ha un carattere pratico, avendo per contenuto le regole da applicarsi nella delineazione delle scene dei teatri.

Dal fin qui esposto risulta che con G. del Monte i metodi per rappresentare su un piano le figure a tre dimensioni toccarono un livello così elevato che ben poco rimaneva da aggiungervi per toccare l'altezza a cui essi arrivarono oggi; e che tale fine sia stato conseguito, battendo una via rigorosamente scientifica, risulta dal fatto che nell'opera in discorso s'incontrano alcune costruzioni che si ritrovano nel capitolo sull'omologia dei moderni trattati di geometria proiettiva.

L'alta stima conseguita dall'autore di cui ci occupiamo indusse alcuni suoi ammiratori a frugare fra le carte da lui relitte per vedere se vi si trovasse qualche lavoro degno di essere pubblicato: la ricerca non fu vana, come è dimostrato dalle opere postume intitolate *Problematum astronomicum libri VI* (Venetiis, 1609) e *De cochlea libri sex* (Id., 1615). La messe fu certamente cospicua; però sfuggì all'attenzione dei ricercatori una miscellanea scritta in italiano ma recante il titolo *De rebus mathe-*

*maticis*; di essa esistono copie in parecchie biblioteche e uno squarcio ne fu pubblicato da G. Libri [1]. Similmente sono tuttora inediti i risultati degli assidui studi fatti dal geniale patrizio marchigiano sul V Libro degli *Elementi* di Euclide: di essi dovrà tenere il debito conto chi si accingerà alla meritoria impresa di scrivere una storia completa dei commenti che ricevette il più profondo e sottile dei capitoli scritti dal sommo alessandrino.

## La prospettiva in Olanda

266 - Nel paese che Rubens e van Dyck resero illustre nella storia della pittura non si è rinnovato il fenomeno che vedemmo (Cap. XIV) essere accaduto in Italia, ove le basi scientifiche di quell'arte furono gettate da coloro che erano famigliari con l'uso del pennello; chè l'esistenza del « punto di concorso » relativo a un sistema di rette parallele venne insegnato ai pittori olandesi da Sebastiano Serlio (1475-1552), autore di un mediocre trattato di architettura, non esente da errori. Malgrado ciò il Belgio e l'Olanda diedero alla prospettiva contributi degni di nota, anzitutto per merito di quel Simone Stevin che già conosciamo (p. 340) come aritmetico originale. Nel *Traitè d'optique* pubblicato nella raccolta delle sue opere complete si trova, come I Libro, una trattazione prettamente scientifica della disciplina ivi indicata come « Scénographie, vulgairement dite Perspective ». Vi si legge, fra l'altro. la soluzione in parecchi casi particolari della seguente questione, che è l'inversa del problema fondamentale della prospettiva: « Date in un piano due figure qualunque che siano la prospettiva l'una dell'altra, si domanda di collocarle nello spazio in modo che la prospettiva abbia effettivamente luogo e determinare la posizione dell'occhio ». Aggiungasi che nello stesso scritto s'incontra dimostrato la seguente proposizione importante, che è giustizia venga chiamata *Teorema di Stevin*: « Se il quadro ruota intorno alla sua intersezione col piano orizzontale e se l'osservatore ruota nello stesso senso attorno al proprio piede, conservandosi sempre parallelo al quadro, la relazione di prospettiva non verrà turbata e sussisterà anche quando il quadro si sarà adagiato sul piano orizzontale ». Della stessa lo Stevin fa parecchie notevoli applicazioni. Giova ancora rilevare che la prospettiva viene dal detto autore presentata come ausiliare nel tracciamento delle ombre nei disegni di fortificazione.

## F. Viète

267 - Alla potente attrattiva esercitata dai grandi geometri dell'antica Grecia non si sottrasse nemmeno il pensatore di spiccata originalità che risponde al nome di Viète; ciò è visibile nei suoi lavori algebrici a noi già noti (n. 251 e segg.), ove tutto manifesta uno scrittore famigliare con Cicerone e Omero, nonchè saturo dei metodi diofantei; ciò è poi confermato da alcuni opuscoli prettamente geometrici che, ove non por-

[1] *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. IV (Paris 1846), note VII, p. 369-398.

tassero il nome d'autore, potrebbersi ritenere come prodotti dell'antica Scuola d'Alessandria.

Il primo, dal titolo *Effectionum geometricarum canonica recensio*, è una collezione di problemi geometrici di 1° e 2° grado, i quali sembrano essere stati suggeriti da ricerche meccaniche. Più alto è il tema del successivo *Supplementum geometriae*, dedicato a problemi di 3° e 4° grado; per giungere a risolverli Viète rinnova (cfr. p. 347) la proposta che sia concesso al geometra di eseguire, oltre alle note operazioni euclidee, quella che consiste nell'inserire fra due rette date un segmento che abbia una lunghezza data e passi, eventualmente prolungato, per un dato punto. Con ciò egli è in grado di risolvere il problema di Delo, di dividere un angolo in tre parti eguali e di inscrivere un ettagono regolare in un cerchio. Assurgendo poi a considerazioni di più vasta portata, egli mostra che qualunque problema cubico e biquadratico è riducibile alla duplicazione del cubo ovvero alla trisezione dell'angolo. Un tema somigliante ha la memoria intitolata *Pseudo-Mesolabum*; per rendere ragione dell'intento che l'autore si è proposto scrivendola, fa d'uopo ricordare (v. p. 68) che ad Eratostene da Cirene si attribuisce una soluzione del problema di Delo fondata sull'uso di uno speciale strumento detto appunto « mesolabio »; il lavoro eratostenico essendo andato perduto, il nostro autore si è proposto di ricostruirlo, spinto a far ciò dal desiderio di confutare un'opera di Giuseppe Scaligero (v. più avanti n. 281): e, affinchè il suo lavoro assumesse anche l'aspetto di un'opera del periodo aureo della geometria greca, diede a parecchie delle proposizioni esposte il nome di « dati ».

Al detto scritto segue un'appendice intitolata *Adjuncta capitula* e dedicata ad alcuni altri problemi. Il primo è quello che vedemmo avere occupato anche il Benedetti (p. 360) e che trovavasi, verso la fine del secolo XVI, all'ordine del giorno; parliamo della costruzione di un quadrilatero inscrittibile di lati conosciuti; Viète comincia dal dimostrare falsa la soluzione datane da un anonimo chirurgo e poi ne espone una esatta di sua invenzione, la quale consiste nella determinazione di una delle diagonali della figura cercata. Notiamo per incidenza che, circa nello stesso tempo (1598), la questione fu risolta dal matematico tedesco Giovanni Richter (1537-1616), dal cui nome latinizzato (Pretorius) trae origine il nome di « tavoletta pretoriana » che porta uno strumento ancora di uso comune fra gli agrimensori. Ritorniamo a quello scritto del Viète per segnalarvi costruzioni meccaniche approssimate dei poligoni regolari di 5, 7 o 9 lati.

268 - Un altro notevole problema geometrico attrasse l'attenzione del Viète, il quale lo propose in risposta ad una sfida che vedremo (n. 276) avere il matematico belga A. van Roomen (v. p. 343) rivolta a tutti i matematici del mondo. Si tratta della costruzione di un cerchio tangente a tre altri, che sappiamo (v. p. 83) essere stato argomento di un opuscolo di Apollonio Pergeo, di cui lamentasi amaramente la perdita. Avendola il van Roomen eseguita mediante l'intersezione di due iperboli, il Viète gli mosse rimprovero per essersi servito di mezzi più elevati di quanto fosse strettamente necessario, giacchè egli mostrò la possibilità

di risolverlo col solo uso di rette e circoli: gli è appunto quanto leggesi nella pregevole memoria intitolata *Francisci Vietae Apollonius Gallus*, la quale prende un posto eminente nella collezione di opere di divinazione di antichi scritti scomparsi. Ivi l'autore considera le seguenti ipotesi relativamente ai dati (ove con $x$ *p*. $y$ *r*. $z$ *c* indichiamo che si tratta di costruire un cerchio il quale passi per $x$ punti dati e tocchi $y$ rette e $z$ circonferenze date): 3 *p*; 2 *p*, 1 *r*; 3 *r*; 1 *p* e 2 *r*; 2 *r* e 1 *c*; 1 *p*, 1 *r*, 1 *c*; 1 *r* e 2 *c*; 2 *p* e 1 *c*; 1 *p* e 2 *c*; 3 *c* [1]. In un'appendice leggonsi le soluzioni dei seguenti problemi che il Regiomontano in una sua opera ben conosciuta (v. p. 252) aveva confessati superiori alle sue forze: Costruire un triangolo conoscendone la base, l'angolo opposto e la somma, la differenza, il prodotto o il quoziente degli altri due lati; oppure conoscendone la base, la somma e la differenza degli angoli alla base e l'altezza; costruire un triangolo rettangolo i cui lati siano in proporzione. Una seconda appendice è dedicata ad alcuni problemi che gli astronomi avevano lasciati intatti o malamente risolti; crediamo non sia il caso di attardarci a riferirne gli enunciati, data la loro limitata importanza.

Ben diversamente deve giudicarsi il contenuto di una miscellanea in molte parti, di cui una sola (pubblicata nel 1593) giunse in possesso dell'editore delle opere complete del Viète; ivi essa reca il titolo *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. L'ultimo dei venti Capitoli di cui consta si riferisce alla cronologia, argomento all'ordine del giorno nel momento in cui maturava la riforma gregoriana del calendario, ma estraneo al piano della presente *Storia*; altri verranno esaminati nel Capitolo seguente; i rimanenti sembrano contenere i frutti di studi sull'antica letteratura matematica. Molte pagine sono dedicate ai tre problemi classici, a cui Viète mostrò come si applicassero le curve note agli antichi, non esclusa la spirale d'Archimede, e dei quali egli non mancò di indicare anche alcune soluzioni meccaniche approssimate. Vi s'incontra anche il problema d'inscrivere un ettagono regolare in un cerchio, che (imitando quanto fece Euclide riguardo al pentagono) egli riduce alla costruzione di un triangolo isoscele in cui gli angoli alla base siano tripli di quello che sta al vertice. Lo stile dell'autore, reso più oscuro dall'uso promiscuo del latino e del greco, impedì divenissero di generale dominio molte sue considerazioni acute e geniali. Tale è la seguente quadratura approssimata del circolo, che noi citiamo come esempio fra molte altre cose degne di menzione. Nel cerchio (Fig. 43) di

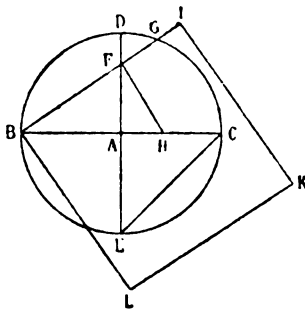



Fig. 43.

(1) L'esempio di Viète non tardò a essere seguito da due discepoli: A. Anderson (che incontrammo a p. 345 come editore del grande analista francese) e Marino Ghetaldi (n. a Ragusa nel 1566, m. ivi l'11 aprile 1626); il primo nel *Supplementum Apollonii redivivi* (Parigi, 1612) tentò la ricostruzione dell'opuscolo apolloniano *Sulla sezione di spazio*, mentre nel *Supplementum Apollonii Galli* (Venezia, 1607) del secondo è trattato nuovamente il problema dei contatti e l'*Apollonius redivivus* (Id. Id.) dello stesso, è dedicato alle *Inserzioni* (v. p. 60) del Pergeo.

centro $A$ si concucano due diametri $B\,C$ e $D\,E$ fra loro perpendicolari; si porti sul raggio $A\,D$, $A\,F = 1/2\,C\,E$ e si conduca la retta $B\,F\,G$. Sia poi $A\,H$ la parte minore dal raggio $A\,C$ diviso in media ed estrema ragione, e sia $I$ un punto della retta $B\,F\,G$ tale che si abbia

$$\overline{BH}\,/\,\overline{BF} = \overline{BC}\,/\,\overline{BI}\,. \tag{1}$$

Viète afferma, senza dimostrarlo, che il quadrato $B\,I\,K\,L$ descritto su $B\,I$ come lato è « proxime aequalis » al dato cerchio. Per verificare l'esattezza di questa asserzione e giudicare del grado di approssimazione raggiunto, si supponga essere $= 1$ il raggio del dato cerchio e si osservi che in virtù dell'esposta costruzione si ha:

$$A\,F = \frac{1}{2}\cdot C\,E = \frac{1}{\sqrt{2}}\;,\quad B\,F = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,,$$

$$A\,H = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\;,\quad B\,H = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\,,$$

in conseguenza la (1) dà

$$B\,I = \frac{\sqrt{6}\,(5+\sqrt{5})}{10}\,,$$

e quindi

$$10\,\overline{B\,I}^2 = 6\,(3+\sqrt{5}) = 6 \times 5{,}236068 \quad \text{e} \quad \overline{B\,I}^2 = 3{,}1416.$$

Ma, per essere il raggio del dato cerchio $= 1$, la sua area è appunto espressa da $\pi$; secondo Viète è dunque $\pi = 3{,}1416$, valore certamente (come egli dice) « proxime aequalis » a 3,14159...

## L'alba della Storia delle matematiche

269 - Mentre nel campo della politica è accettabile come vera la massima « beati i popoli che non hanno storia », l'apparizione di esposizioni storiche di una disciplina è sintomo certo della notevole importanza assunta da questa; e infatti vedemmo (v. pag. 41) che la prima storia della geometria di cui siasi serbata memoria apparve alla vigilia del giorno in cui Euclide stava per raccogliere e coordinare la somma delle verità ormai acquisite dalla scienza dell'estensione figurata. Sgraziatamente quell'opera è scomparsa senza lasciare alcuna traccia di sè, onde bisogna giungere alla seconda metà del secolo XVI prima d'incontrare lavori in cui la nostra scienza fosse presentata al lettore insieme ai più eminenti cultori di essa.

Il primo scritto del genere che abbia ottenuto l'onore della stampa è la *Scholae mathematicae*, lavoro a noi già noto (p. 336) di P. de la Ramée. Ivi l'esposizione dottrinale della materia è preceduta da uno sguardo d'insieme, ove la storia della matematica è ripartita in quattro periodi; il primo, detto caldaico, va da Adamo ad Abramo; il secondo è

chiamato egiziano, per ricordare il trasporto in Egitto fatto da Abramo della scienza assiro-babilonese; il terzo, greco, da Talete a Teone Alessandrino; per il quarto, il periodo moderno, il citato autore lascia ad altri di proclamarne le benemerenze.

Esclusivamente storica è l'opera di un discepolo di F. Commandino, Bernardino Baldi, poliglotta che conosceva (riferiamo quanto sta inciso sulla sua tomba) dodici lingue ed ha un posto nella storia della letteratura come poeta e come storico. Egli nacque ad Urbino il 6 giugno 1553; andò ventenne a perfezionarsi nell'Università di Padova; ma la peste ne lo cacciò, onde egli compì i proprii studi nella sua città natale. La fama di alta e profonda dottrina che non tardò ad acquistarsi indusse Ferrante II Gonzaga, duca di Guastalla, a chiamarlo alla sua corte; ivi nel 1586 fu elevato al grado di primo abate, carica che egli conservò sino al 1612, quando vollte ritornare in Urbino, ove morì il 12 ottobre 1617. Nella presente opera egli ha diritto ad un posto per una grande opera in cui egli divisava raccogliere le biografie dei matematici vissuti sino ad allora, dei quali fece un elenco che comprendeva 366 nomi. Soltanto la *Vita di F. Commandino* egli diede alle stampe; dopo la sua morte fu pubblicato uno schema della grande progettata fatica, cioè una *Cronica*, ove di quei pensatori sono indicati soltanto i nomi e qualche caratteristica scientifica. Essa comincia con un personaggio leggendario, Euforbio Frigio, anteriore a Talete, e si chiude con un matematico ancora vivente quando il Baldi scriveva, Guidobaldo del Monte. È un lavoro non esente da inesattezze nelle persone, nelle opere e nelle date, ond'è mediocremente utilizzabile oggi, tanto più che i nomi dei matematici stranieri, in omaggio alle abitudini del tempo, sono talmente storpiati in versioni italiane, da riuscire in certi casi difficilmente riconoscibili.

Di 221 matematici il Baldi, morendo, lasciò scritte biografie complete (1), due copie delle quali vennero in possesso di B. Boncompagni; molte ne furono pubblicate da E. Narducci nel *Bullettino di bibliografia e storia* (2); ci è ignoto quale fine abbiano fatto gli originali di questa preziosa raccolta, dopo la dispersione della biblioteca del dotto principe romano. Benchè nella scala dei valori delle produzioni dell'ingegno umano la biografia occupi ragionevolmente un posto inferiore alla vera storia, pure la comparsa di scritti quali quelli del Baldi va segnalata come sintomo certo del fatto che sino dalla seconda metà del secolo XVI era stata riconosciuta la grande importanza delle matematiche, epperò era sorto il desiderio di conoscere per intero la vita e le opere di coloro cui queste scienze sono debitrici dei loro più segnalati progressi.

L'esempio dato dal Ramus, inserendo notizie storiche in un'esposizione dottrinale delle scienze esatte, fu seguito da altri, fra cui in questo momento citiamo Claudio Francesco Milliet Deschales (n. a Chambery nel 1621, m. a Torino il 28 marzo del 1678) grazie al suo *Cursus seu*

(1) Di esse parlasi in lettere scritte nel 1673 e pubblicate dal RIGAUD nel t. I (Oxford, 1841, p. 206 e 210) dell'opera *Correspondence of scientific men of the XVII Century.*

(2) Per risparmio di spazio non ne riferiamo qui l'elenco; il lettore che desidera conoscerla ricorra all'Indice che chiude il Vol. XX del succitato *Bullettino.*

*mundus mathematicus* (Lugduni, 1674), ove trovansi indicati i nomi di molti celebri matematici.

Al pari di lui appartenne alla Compagnia di Gesù Giuseppe Biancani (n. nel 1566, m. a Parma il 7 giugno del 1624) il quale nella sua opera (essenzialmente storica) intitolata *Aristotelis loca mathematica, ex universis ipsius operibus collecta et explicata* (Bonon., 1615) inserì un elenco cronologico dei più insigni matematici vissuti sino allora.

## BIBLIOGRAFIA

*The Elements of Geometrie of the most ancient Philosoph Euclid of Megara Faithfully* (*now first*) *translated into the Englishe tong, by* H. BILLINGSLEY, *Citizen of London* (London, 1570).

B. BALDI, *Vita di F. Commandino* (Giornale dei Letterati d'Italia, t. XX, Venezia).

B. BALDI, *Cronica de matematici ovvero Epitome dell'istoria delle vite loro* (Urbino, 1707).

G. B. BENEDETTI, *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessarie inventorum una tantummodo circini data apertura* (Venetiis, 1553).

THEODOSII, *Sphaericorum Elementorum Libri III. Ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici.* MENELAI, *Sphaericorum Lib. III. Ex traditione ejusdem.* MAUROLYCI, *Sphaericorum Lib. II.* AUTOLYCI, *De sphaera quae movetur Libri.* THEODOSII, *De Habitationibus.* EUCLIDIS, *Phaenomena brevissime demonstrata. Demonstratio et praxis trium tabellarum scilicet Sinus recti, Fecundae et Beneficae ad Spheralia triangulis pertinentium. Compendium mathematicae mira brevitate ex clarissimis authoribus.* MAUROLYCI, *De Sphaera sermo* (Messenae, 1558).

FRANCISCI MAUROLYCI, *Opuscula mathematica* (Venetiis, 1575).

MAUROLYCI, *Enodatio et Restitutio Conicorum* APOLLONII PERGAEI (Messenae, 1554).

*Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica, quae exitant, ex traditione* D. FRANCISCI MAUROLYCI (Panormi, 1685).

FEDERICO NAPOLI. *Scritti inediti di Francesco Maurolico* (Bullettino di bibl. e storia delle scienze mat. e fis., t. IX, 1876).

PTOLEMAEI, *Planisphaerium*; JORDANI, *Planisphaerium*; F. COMMANDINI *in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius* (Venetiis, 1558).

ARCHIMEDIS, *Opera non nulla a* F. COMMANDINO *nuper in Latinum conversa et Commentariis illustrata* (Venetiis, 1558).

PAPPI ALEXANDRINI, *Mathematicae Collectiones a* F. COMMANDINO *in latinum conversae* (Pisauri, 1558).

CLAUDII PTOLEMAEI, *Liber de Analemmate* (Romae, 1562).

ARCHIMEDIS, *De iis quae vehuntur in aqua Libri duo. A* F. COMMANDINO *in pristinum nitorem restituti et Commentariis illustrati* (Bononiae, 1565).

FEDERICI COMMANDINI, *Liber de centro gravitatis solidorum* (Bononiae, 1565).

APOLLONII PERGAEI, *Conicorum Libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitae.* SERENI, *Antissensis Libri duo. Quae omnia nuper* F. COMMANDINO *illustravit* (Bononiae, 1566).

*De superficierum divisionibus Liber Machometo Bagdedino ascriptus nunc primum* JOANNIS DEE *et* F. COMMANDINI *Opera in lucem editus.*

F. COMMANDINI, *De eadem re libellus* (Pisauri, 1570; versione italiana, Pesaro, 1570).

ARISTARCHI, *De magnitudinibus et distantiis solis et lunae Liber. A* F. COMMANDINO *in latinum conversus ac commentariis illustratus* (Pisauri, 1572).

EUCLIDIS, *Elementorum Libri XV, una cum Scholijs antiquis. A.* F. COMMANDINO *in latinum conversi* (Pisauri, 1572; trad. italiana, Urbino, 1575).

## CAPITOLO XIX

# TRIGONOMETRIA E CICLOMETRIA DURANTE IL SECOLO XVI

### Werner, Copernico, Retico, Pitisco

270 - Da quanto esponemmo nei Capitoli precedenti emerge che il Secolo del quale ragioniamo, mentre fece compiere mirabili progressi all'algebra, arrecò alla geometria soltanto quei perfezionamenti che erano insistentemente richiesti da pittori e architetti, chè le discussioni sulla natura dell'angolo di contingenza (di cui facciamo ora, per incidenza, menzione) appartenevano piuttosto alla filosofia delle matematiche e soltanto ai dì nostri ne fu reso manifesto il legame con le nozioni d'infiniti di vari ordini. Ora, il carattere rivelato dal secolo XVI nei suoi sforzi di dare basi scientifiche a una disciplina ausiliare della pratica (la Prospettiva), si ritrova nei contributi che esso diede ad un altro capitolo della nostra scienza (la Trigonometria) che, sino dai tempi di Ipparco e Tolomeo, costituiva il più prezioso ausiliare per gli studiosi dei fenomeni celesti. Invero, di quella disciplina, fu pubblicata nel 1533 per cura di Giovanni Schöner (1477-1547) la prima trattazione dovuta a penna europea; parliamo della nota opera di Regiomontano (v. Vol. I, p. 434) intitolata *De triangulis omnia modis libri quinque*: e si può dire che gli è appunto dal 1533 che la trigonometria procedette regolarmente verso la perfezione che doveva toccare durante il secolo XVIII.

Questo lavoro, che l'avvenuta stampa riconduce dinanzi a noi, è la prima trigonometria europea basata sull'uso dei « seni »; con essa si diffuse ovunque la nozione di « seno-verso » (saetta, esprimibile come differenza fra il raggio e il coseno di un arco), linea trigonometrica destinata ad avere vita non lunga nè gloriosa. Ma l'opera *De triangulis* non compendia la totalità dei lavori trigonometrici del Regiomontano. Per rendere conto degli altri giova tener presente che Giovanni di Gemunden e Peuerbach (v. p. 249) avevano calcolati i valori dei seni degli archi di 10′ in 10′, per il raggio 600000, e che l'astronomo G. Bianchini aveva fatto altrettanto nel 1463 per il raggio 60000. Dal canto suo il Regiomontano calcolò, onde perfezionare gli ausiliari a disposizione degli astronomi, tre tavole procedenti di 1′ in 1′, una per il raggio 60000, l'altra per il raggio 6000000 e finalmente una terza per il raggio 10000000 (1); quest'ultima è notevole perchè rappresenta, e forse deter-

(1) Ciò equivale a dire in linguaggio moderno che si hanno i valori dei seni con sette decimali.

mina, la completa emancipazione dei matematici dal sistema sessagesimale, per adottare definitivamente la base 10 con le sue potenze. Tutte queste tavole rimasero a lungo manoscritte, giacchè apparvero soltanto in appendice alla grande opera *De triangulis*. Ancora più a lungo attesero l'onore della stampa i risultati dei calcoli eseguiti dallo stesso Regiomontano per fissare i valori delle tangenti degli archi procedenti di grado in grado per il raggio 100000; essi videro la luce, raccolti sotto il nome di *Tabula foecunda,* in una pubblicazione (1490) a scopi astrologici.

Che l'opera maggiore del Regiomontano abbia esercitata qualche benefica influenza anche prima di avere fruito dell'invenzione del Gutenberg, sembra dimostrato da un trattato di trigonometria sferica intitolato *De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V,* dovuto a un modesto prelato di Norimberga, Giovanni Werner (1468-1528); sgraziatamente, la vana ricerca di un coraggioso editore condannò quest'opera all'inedito, benchè i contemporanei che poterono prenderne conoscenza l'avessero giudicata molto favorevolmente; col tempo essa andò smarrita ed ora si considera per irremissibilmente perduta [1]. Che questo fatto si debba giudicare sommamente deplorevole emerge da quel poco che, per vie indirette, si conosce intorno al contenuto di quell'opera; infatti risalgono al Werner le formole che servono a trasformare in un prodotto la somma o la differenza di due coseni, quelle cioè che si scrivono oggi come segue:

$$\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2} \left\{ \cos(x - y) - \cos(x + y) \right\},$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left\{ \cos(x - y) + \cos(x + y) \right\};$$

è superfluo rilevare che fa ivi la sua comparsa l'artificio, detto *prostaferesi* (per l'etimologia di questa parola v. p. 344), artificio che, pertanto, deve farsi risalire al citato matematico, il quale, a quanto viene riferito, avrebbe anche risolto il problema di determinare la distanza di due punti della terra, di note coordinate geografiche.

271 - Il giusto riconoscimento dei suoi meriti, che un avverso destino negò al modesto parroco di Norimberga, fu invece largamente concesso ad un altro ecclesiastico circa contemporaneo: Nicolò Koppernigk (o Copernico secondo la grafia più diffusa), colui che, inspirandosi alle idee rivoluzionarie di Aristarco di Samo (v. p. 82), sostituì alla concezione geocentrica dell'universo l'ipotesi che fosse il sole centro del

(1) Nella Biblioteca di Cracovia ne furono scoperte alcune pagine col titolo IOANNIS VERNERI *mathematici norimbergensis, De triangulis sphoericis Libri quatuor. De meteroscopiis Libri sex, Nunc primum studio et diligentia* G. I. RHETICI *in lucem editi* (Cracovia, MDLVII); ma non vi si trova altro che il proemio scritto dall'editore. Da un manoscritto proveniente da fonte ignota, che dalla Biblioteca della Regina Cristina di Svezia passò nella Vaticana, fu tratta da A. A. Björnbo la pubblicazione citata nella Bibliografia relativa al presente Capitolo.

nostro sistema planetario; così facendo pose l'astronomia sulla via che doveva condurre Kepler e Newton alla creazione della geometria e della meccanica celesti.

Nato a Thorn il 19 febbraio 1473, dal 1491 al 1494 studiò a Cracovia [1]; ma ben presto, attratto dall'alta fama di cui allora godevano le università italiane, passò le Alpi e durante un decennio osservò il corso degli astri sotto la direzione di Domenico Maria Novara; passò poi a Padova, a Roma e da ultimo a Ferrara, ove conseguì (31 maggio 1503) il grado di dottore in giurisprudenza. Richiamato in patria, ebbe il grado di canonico della cattedrale di Frauenberg, località ove si dedicò completamente agli studi [2]; essi ebbero quale luminoso risultato la celebre opera *De revolutionibus orbium coelestium* (Nürnberg, 1543), che egli ebbe la soddisfazione di contemplare stampata nel momento (24 maggio 1543) in cui stava per essere sfiorato dall'ala inesorabile della morte.

Sono i Capitoli XII-XIV di questo classico lavoro che fanno accordare a Copernico un posto nella storia della trigonometria; due di essi avevano già vista la luce l'anno precedente per merito di colui che sorvegliò e diresse la stampa dell'« opus magnum » copernicano. Personaggio di cognome incerto (secondo alcuni van Leuchen), Giovanni Gioachino Retico è così chiamato per essere nato (1514) a Feldkirch nel Vorarlberg (Rezia); professore di matematica a Wittenberg nel 1537, due anni appresso ottenne il permesso di recarsi presso Copernico e vi rimase sino al 1542; rientrato nei patri lari, portò seco il manoscritto dell'opera succitata, onde curarne la stampa.

Della trigonometria il celebre astronomo insegna soltanto quanto è necessario per esporre il sistema del mondo. Però alcune sue pagine da lui lasciate manoscritte mostrano che egli s'incontrò col Maurolico (v. p. 356) nell'introdurre la metodica considerazione della secante e si spinse sino a calcolare una tavola dei valori di questa linea trigonometrica.

272 - È al Retico che si è debitori della prima pubblicazione di una siffatta tavola. A lui, infatti, si devono tavole delle sei funzioni circolari di 10 in 10 secondi, il raggio essendo eguale a $10^7$; esse recano il titolo *Canon doctrinae triangulorum, nunc primum a G. J. Rhaetico in lucem edidit* (Lipsiae, 1551). Notevole che ivi, per la prima volta in Europa, le linee trigonometriche trovansi definite mediante un triangolo rettangolo; in tal modo ne è posta in luce la connessione, non con gli archi di cerchio, ma con gli angoli da essi sottesi. Per le funzioni tangente, cotangente e cosecante non sono proposti nomi particolari; esse sono considerate, insieme alla secante, in base alle seguenti relazioni che esse

---

[1] Sulla nazionalità di Copernico si agita da tempo una violenta controversia fra Polacchi e Tedeschi.

[2] Alcuni di questi si riferiscono alla pubblica economia e diedero per frutto un lavoro sulla moneta, ancor oggi citato con onore e consultato dagli studiosi di economia politica.

hanno col seno e coseno ($r$ essendo il raggio del circolo fondamentale):

$$\frac{\text{tg } x}{r} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \quad \frac{\text{cotg } x}{r} = \frac{\cos x}{\text{sen } x},$$

$$\frac{\sec x}{r} = \frac{r}{\cos x}, \quad \frac{\text{cosec } x}{r} = \frac{r}{\text{sen } x}.$$

Questo lavoro e la parte avuta dal Retico nella stampa della grande opera di Copernico sono ben lungi dall'esaurirne le benemerenze di fronte alle scienze esatte. A Wittemberg, ove erasi restituito nel 1542, egli non rimase a lungo, chè nello stesso anno ricevette e accettò l'offerta di una cattedra nell'Università di Lipsia. Qui egli intraprese il calcolo dei seni, delle tangenti e delle secanti di 10 in 10 secondi, il raggio essendo $10^{10}$, e poichè ebbe bisogno di ricorrere all'aiuto di calcolatori prezzolati, così si assoggettò alla spesa, come egli scrisse, di « multa florenorum milia ». Quattro anni prima della sua morte, cioè nel 1573, era stato presentato a lui come collaboratore da Giovanni Richter (che conosciamo anche sotto il nome latinizzato di Pretorio (v. p. 364); un certo Valentino Otho nato a Magdeburgo verso il 1550, e la proposta fu accettata con soddisfazione di entrambi i contraenti. Va ora notato che l'imperatore Massimiliano, il quale erasi mostrato disposto ad assumere le spese della stampa del lavoro a cui erasi accinto il Retico, morì nel 1576, ed il suo successore dichiarò di non disporre del denaro necessario per un'impresa, di cui certamente non era in grado di misurare l'importanza. In conseguenza maestro e discepoli decisero di partire per Kaschen (Ungheria) nell'intento di conferire con Giovanni Ruber, signore in cui speravano di trovare un mecenate. Ma il Retico, che era già indisposto al momento della partenza, non tardò a soccombere (1577) nelle braccia dell'Otho, che lasciò erede dei propri lavori, imponendogli di sottoporli a un'ultima ripolitura prima di darli alle stampe. Le speranze riposte nel Ruber non andarono deluse, essendosi egli dichiarato pronto ad assumere la stampa della grande opera, non appena compiuta. Ma, essendo nel frattempo stato l'Otho chiamato a insegnare a Wittemberg, l'elettore Augusto di Sassonia si mostrò disposto di fare altrettanto; sgraziatamente, controversie religiose avendo impedito che la cosa avesse un seguito, l'Otho fu costretto a rivolgersi all'elettore palatino Federico IV, e grazie alla sua generosità potè vedere la luce (1596) il celebre *Opus palatinum de triangulis*, così chiamato appunto in onore di quel Sovrano.

È un'opera che, oltre le sopraindicate tavole, contiene un trattato di trigonometria piana e sferica, ove va rilevata la prima segnalazione del caso ambiguo nella risoluzione dei triangoli sferici. Vi si apprende inoltre che, per il calcolo dei valori delle funzioni circolari, furono applicate le formole seguenti:

$$\text{sen } n\,x = 2\,\text{sen } (n-1)\,x \cdot \cos x - \text{sen } (n-2)\,x\ ,$$

$$\cos n\,x = 2 \cos (n-1)\,x \cdot \cos x - \cos (n-2)\,x\ .$$

L'impresa a cui il Retico dedicò parecchi anni della sua vita era di

tale imponenza e di tanta importanza che poteva ragionevolmente appagarlo. Ma i grandi calcolatori hanno per caratteristica l'incontentabilità; animato da un sentimento siffatto il Retico negli ultimi mesi della sua esistenza intraprese il calcolo delle linee trigonometriche supponendo il raggio $10^{15}$. L'immane lavoro non fu compiuto da lui e nemmeno dal fedele Otho, sibbene da un nuovo personaggio: Bartolomeo Pitisco.

Questi, nato a Grüneberg (Sassonia) nel 1561, fu predicatore alla corte dell'elettore palatino Federico IV e morì nel 1613. Alcune sue pubblicazioni relative alla materia di cui stiamo trattando (e nelle quali s'incontra per la prima volta il vocabolo « trigonometria ») lo raccomandano alla nostra attenzione; ma la sua massima benemerenza consiste nell'avere completato, perfezionato e dato in luce, nell'anno stesso della sua morte, il grande lavoro lasciato incompiuto dal Retico. Rileviamovi l'uso costante dei termini « tangente » e « secante » che erano stati poco prima diffusi fra gli scienziati dalla *Geometria rotundi* (Basileae, 1593) di Tommaso Finck (cfr. n. 277). Ma ciò che ivi è straordinariamente ammirabile è l'imponenza dei calcoli eseguiti e l'esattezza dei risultati conseguiti; vi sono infatti registrati non meno di 32400 valori e soltanto 110 furono in progresso di tempo riconosciuti inesatti. Nessuna opera esiste di tale ampiezza e di tale valore, nè prima, nè dopo; onde ben a ragione il Pitisco poteva affermare nella Prefazione che il volume da lui pubblicato avrebbe servito a correggere tutte le analoghe tavole, presenti e future (¹).

## Ticone Brahe

273 - Emerge da quanto precede che la trigonometria nell'epoca di cui parliamo era sempre considerata come un'ausiliare dell'astronomia: niuna meraviglia, pertanto, se fra i cultori di essa troviamo un altro astronomo di fama mondiale: Ticone Brahe. Egli nacque a Knudstorp (Danimarca) il 14 dicembre 1546, morì a Praga il 13 ottobre 1601. Il favore di un re, Federico II, gli concesse di presiedere alla costruzione del celebre osservatorio di Uraniburg, ove egli lavorò nel periodo 1576-1597. Le male arti di cortigiani invidiosi, divenuti potenti, dopo la morte di quel Sovrano, in un periodo di reggenza, lo costrinsero a emigrare e finire la vita fuori dei confini della propria patria, a Praga, ospite dell'imperatore Rodolfo. Se non inventore, fu efficace promotore della prostasferesi. Ciò risulta da un breve trattato che risale al 1591, ma che soltanto nel 1896 si diffuse nel mondo in una riproduzione litografica (²).

(¹) Fu creduto e detto che Pitisco avesse usato il punto per separare gli interi dalle frazioni decimali, in realtà egli se ne servì con altro scopo.

(²) Esso fu redatto da T. Brahe con l'aiuto del suo assistente P. Wittich ad uso esclusivo di coloro che lavoravano sotto la sua direzione. Si trovava fra questi NICOLA RAYMARO URSUS (v. p. 384) che, essendosi disgustato col propio maestro, violò il preso impegno di mantenere il segreto sulla prostasferesi e ne pubblicò le formole essenziali nel suo *Fundamentum astronomicum* (Argentorati, 1588); da notarsi che quest'opera non attrasse subito la meritata considerazione, giusto castigo per uno spergiuro.

Per dare un'idea del come la prostasferesi venga applicata dall'eminente astronomo danese, vediamo come egli se ne serva nella risoluzione di un triangolo sferico determinato da due lati $b, c$ e dall'angolo compreso $A$. A tale scopo egli si serve della formola

$$\cos a = \frac{1}{2}\left[\cos(b-c) + \cos(b+c)\right] + $$
$$+ \frac{1}{2}\left[\cos(A+\varphi) + \cos(A-\varphi)\right],$$

ove l'angolo ausiliare è dato dalla relazione

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(b-c) - \cos(b+c)\right].$$

Ticone Brahe merita ancora di venire da noi ricordato perchè, se non l'introduttore nella scienza del « triangolo supplementare » di un dato, gli compete certamente, a questo riguardo, il nome di precursore di Viète (v. n. 278), avendo avvertita e usata la relazione

$$\cos A = \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C.$$

che deriva dal teorema del coseno applicato appunto al triangolo supplementare.

Aggiungiamo che della prostasferesi ebbe notizia dal succitato N. R. Ursus, uno svizzero, Jobst Bürgi, che incontreremo ancora (v. n. 298), quando trovavasi insieme a lui assistente nell'Osservatorio di Kassel, e ne congegnò soddisfacenti dimostrazioni; di queste giunse notizia al Clavio (v. n. 285) che, inserendole nelle sue opere, vi diede ampia diffusione.

## Viète, Stèvin, Snellius

274 - I perfezionamenti nei particolari di calcolo dati dagli astronomi a una scienza a cui essi dovevano giornalmente ricorrere e gli enormi calcoli a cui essi si assoggettarono per poter descrivere e prevedere con precisione sempre maggiore i fenomeni celesti, per quanto pregevoli ed ammirandi, appaiono di valore più modesto di fronte ai progressi di cui la trigonometria è debitrice a un grande cultore della matematica pura a noi già noto, F. Viète; scienza alla quale egli consacrò le proprie forze considerando, come ebbe a dichiarare, essere dessa massima gloria dei matematici, perchè abilita a sottomettere ad un calcolo meraviglioso cielo, terra e mare. Sgraziatamente la totalità dei suoi scritti sull'argomento non trovasi a disposizione di tutti; infatti il *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendici*, da lui pubblicato nel 1579 (la stampa durò otto anni!), fu escluso dalla collezione delle sue *Opere* complete, avendolo l'autore stesso dichiarato « infeliciter editus »; ora, siccome realmente non vi si riscontra una quantità eccezionale di errori di stampa, è a credere che altri motivi, destinati a ri-

manere perennemente ignoti, devono avere indotto l'autore a sconfessare quella propria creatura. Che, in contrasto con l'opinione del Viète, il pubblico la giudicasse non indegno di lui, sembra dimostrato dalla fedele ristampa che ne fu fatta a Parigi nel 1609 a soddisfazione dei molti richiedenti. L'esame di questo lavoro prova che il Viète conobbe e utilizzò il minore dei « Canoni » del Retico; ciò è provato dalla ripartizione in tre coppie delle sei funzioni trigonometriche, dall'avere scelto per raggio $10^5$ e anche dall'ordinamento generale delle tavole; però i metodi di calcolo da lui adoperati sono per fermo originali, e se noi non ci arrestiamo ad esporli non è perchè non li riteniamo pregevoli, ma soltanto perchè non ce lo consentono il piano di questa opera.

275 - Alle succitate tavole è allegato, come seconda parte, un lavoro dal titolo *F. Vietaei universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis,* la cui importanza deriva dal contenere le prime prove del fatto che all'autore devesi la creazione di una goniometria per sè stante, nonchè la prima esposizione sistematica che s'incontri nella letteratura occidentale dei metodi per calcolare gli elementi di un triangolo piano o sferico; tuttavia, i documenti più decisivi al riguardo si leggono nella memoria a noi già nota (n. 268) intitolata *Variorum de rebus mathematicis responsorum lib. VIII* (1593).

Nel dare notizia delle innovazioni arrecate dal grande scienziato francese alla disciplina di cui ci occupiamo, notiamo la proposta di nomi speciali per le linee trigonometriche; ma ci dispensiamo dal trascriverli perchè essi non conseguirono benevola accoglienza da parte dei competenti non ottennero stabile nella scienza. Riferiamo invece alcune delle relazioni da lui esposte nello scritto del 1579:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(60^\circ + x) - \operatorname{sen}(60^\circ - x) ;$$

$$\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\frac{x}{2} \quad ; \quad \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad ;$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos y - \cos x = 2 \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}.$$

Per quale via egli vi sia giunto non è noto; ma chi ha presente che il Viète aveva fatto sangue e midollo dei metodi antichi, è naturalmente portato a supporre che egli siasi servito allo scopo di considerazioni geometriche; notiamo per incidenza che le lacune lasciate dal Viète furono colmate da B. Bressieu, nel trattato che citammo precedentemente (p. 336).

Altre relazioni, che appaiono pure quali meteoriti cadute dal cielo, incontriamo a gruppi nello scritto del 1593. Un primo gruppo contiene le relazioni fondamentali per la prostasferesi; un secondo abbraccia relazioni tra funzioni trigonometriche di uno, due o tre angoli; di maggior valore è il terzo gruppo, chè ivi s'incontra, fra le altre, la relazione oggi

ben nota

$$\frac{\text{sen}\, x + \text{sen}\, y}{\text{sen}\, x - \text{sen}\, y} = \frac{\text{tg}\,\frac{x+y}{2}}{\text{tg}\,\frac{x-y}{2}} .$$

Dovrebbe trovare posto qui il ricordo delle formole di moltiplicazione degli archi, appunto scoperte dal Viète, ma già le citammo analizzando (n. 253) le *Notae priores ad logisticen speciosam*. Esse si ritrovano, enunciate a parole e prive di dimostrazione, in un suo scritto postumo, esso pure redatto dall'Anderson, recante il titolo bilingue *Ad angulares sectiones theoremata* καθολικωτερα *demonstrata*. Esse non sono enunciate sotto la forma generale ben nota ai nostri lettori, ma con una serie (in due colonne) di relazioni congeneri, di cui è evidente la legge di formazione; giova riferirle:

$$2 \cos x = u \ ,$$
$$2 \cos 2\, x = u^2 - 2 \ ,$$
$$2 \cos 3\, x = u^3 - 3\, u \ ,$$
$$2 \cos 4\, x = u^4 - 4\, u^2 + 2 \ ,$$
$$2 \cos 5\, x = u^5 - 5\, u^3 + 5\, u \ ,$$
$$2 \cos 6\, x = u^6 - 6\, u^4 + 9\, u^2 - 2 \ ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$2\, \text{sen}\, x = u \ ,$$
$$2\, \text{sen}\, 2\, x = v \ ,$$
$$2\, u\, \text{sen}\, 3\, x = v^2\, u^2 \ ,$$
$$2\, u^2\, \text{sen}\, 4\, x = v^3 - 2\, u^2\, v \ ,$$
$$2\, u^3\, \text{sen}\, 5\, x = v^4 - 3\, u^2\, v^2 + 3\, u^4 \ ,$$
$$2\, u^4\, \text{sen}\, 6\, x = v^5 - 4\, u^2\, v^3 + 3\, u^4\, v \ ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le dimostrazioni che si leggono nell'edizione più volte ricordata sono dell'Anderson, fedele interprete del grande matematico; ma di questo sono le superbe parole di chiusa e che giova di qui riferire: « ergo a nemine prius agnita Mysteria, tam in Arithmeticis quam Geometricis, pandit Analyticesectionum Angularium »; scrivendole egli certamente ignorava di essere stato preceduto da un distinto matematico noi già conosciamo (n. 273), Jobst Bürgi. Il Viète però si è spinto ancora più oltre, mostrando, da quel grande analista che era, che le stabilite formole di moltiplicazione degli archi somministrano i mezzi anche per risolvere la questione inversa; vero è che egli si limita alla divisione in 3, 5 e 7 parti, ma dalle sue parole emerge che egli ben vedeva che similmente dovevasi procedere in ogni caso.

276 - La famigliarità del Viète con le formole di moltiplicazione degli archi lo pose in grado di risolvere nel 1593 « immediatamente » (« ut legi, ut solvi » egli scrisse) il *problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus* (1). Il problema era il seguente: « Se il rapporto di due numeri è eguale a quello di $x$ a

$$45\,x - 3795\,x^3 + 95634\,x^5 - 1138500\,x^7 - 7811375\,x^9 - 34512075\,x^{11} + \\ + 105306075\,x^{13} - 232676280\,x^{15} + 384942375\,x^{17} - 488494125\,x^{19} + \\ + 483841800\,x^{21} - 378658800\,x^{23} + 236030652\,x^{25} - 117679100\,x^{27} + \\ + 46955700\,x^{29} - 14945040\,x^{31} + 3764565\,x^{33} - 740259\,x^{35} + 111150\,x^{37} - \\ - 12300\,x^{39} + 945\,x^{41} - 45\,x^{43} + x^{45}\ ,$$

trovare il primo termine del rapporto conoscendo il secondo ».

Il proponente aggiunse tre esempi, richiedendo da ultimo la soluzione del problema per il caso in cui il secondo termine del rapporto considerato fosse eguale a

$$\sqrt{1^3/_4 - \sqrt{^5/_{16}} - \sqrt{1^7/_8 - \sqrt{^{45}/_{64}}}}\ .$$

L'enunciato problema si traduce evidentemente nell'equazione

$$\frac{a}{b} = x : (45\,x - 3795\,x^3 + \ldots + x^{45})\ ,$$

cui $b$ è dato, onde per qualunque valore di $x$ porge subito il corrispondente valore di $a$; a ragione, pertanto, il Viète disse il problema « ridicolo ». Ma, avendo riconosciuto nel polinomio scritto dal Romano l'espressione che proviene dalla moltiplicazione di un arco per 45, corresse l'enunciato ricevuto, trasformando la questione proposta in quella di risolvere la seguente equazione

$$45\,x - 3795\,x^3 + \ldots + x^{45} = c\ ,$$

$c$ essendo una costante assegnata; ammesso che questa non superi 2, la si può indicare con $2\ sen\ a$; allora il Viète non tardò a riconoscere che si era in presenza di un problema di divisione di un angolo in 45 parti eguali e subito espresse sotto forma trigonometrica le $\left(2\ \mathrm{sen}\ \frac{\alpha}{45}\right)$ ventitrè radici positive di quell'equazione; nè mancò di rilevare che la questione poteva risolversi in tre tempi, cioè con due trisezioni e una cinquesezione; avvertì da ultimo che il succitato caso particolare corrisponde all'ipotesi che la data costante sia la corda di 24°. Per ritorsione, il Viète propose al van Roomen la costruzione di un cerchio tangente

(1) I particolari intorno alle circostanze in cui il Viète risolse questo problema si trovano registrati da due storici del tempo e riferiti da A. Quetelet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Bruxelles, 1864), p. 134.

a tre altri e, non avendone avuta che la soluzione basata sull'uso di due iperboli, propose quella di sapore prettamente classico che espose nel suo *Apollonius Gallus* (v. n. 268).

277 - Lasciamo ora la teoria delle funzioni circolari, per esaminare quanto debba al Viète la trigonometria propriamente detta.

Riguardo a quella piana, già nel *Canon* del 1579 si leggono le relazioni fondamentali che passano fra gli elementi di un triangolo rettangolo; da esse, mediante un notissimo ragionamento (fondato sulla considerazione della circonferenza circoscritta) si giunge al teorema dei seni per un triangolo qualunque, che il Viète scrive sotto una forma equivalente alla seguente:

$$\frac{a}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=\frac{a}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}=\frac{a}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}.$$

Sino dal detto anno Viète conosceva il teorema del coseno; esso però trovasi, sotto la forma

$$\frac{2\,b\,c}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{\cos A},$$

soltanto nel *Var. de reb. math. resp.*, ove leggesi eziandio l'importante relazione

$$\frac{b+c}{b-c}=\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}:\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

Riguardo a questa, va qui rilevato che essa era stata pubblicata in un'opera che godette di una invidiabile diffusione e che già incidentalmente nominammo (n. 272), cioè la *Geometria rotundi* (Basilea, 1583) di Tommaso Finck: costui, nato a Flensburg il 6 gennaio 1561, dopo avere soggiornato per ragioni di studio in Isvizzera e poi in Italia, divenne medico del duca dello Schleswig-Holstein e poi (1590) professore nell'Università di Kopenhagen, città nella quale morì, quasi centenario, nel 1656.

Ritorniamo al Viète per notare che due equazioni da lui scritte, mediante l'eliminazione di una variabile ausiliare, guidano alla relazione

$$\operatorname{tg} C=\frac{c \operatorname{sen} B}{a-c\cos B} \quad \text{cioè} \quad a=b\cos C+c\cos B,$$

la quale, benchè scoperta poco prima da Ticone Brahe, apparve la prima volta stampata nel citato scritto del matematico francese di cui ci occupiamo.

278 - Non meno rilevanti sono i contributi dati dal medesimo alla trigonometria sferica. Già nel *Canon* egli trattò la teoria e la risoluzione dei triangoli rettangoli in un modo tanto completo che solo può reggere

al paragone con quella di Nasir ed Din (v. p. 208); infatti nelle tabelle da lui redatte si trovano le relazioni fondamentali che intercedono fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo, nonchè altre che ne sono conseguenze e persino alcune (lo rileviamo perchè è dovere dello storico segnalare anche le mende dei grandi) che sono semplici identità osservazione del Delambre. Nella risoluzione dei triangoli sferici obbliquangoli il Viète fece uso del « triangolo supplementare », accoppiando i casi di risoluzione che si ottengono uno dall'altro per lo scambio di lati con angoli; tale interdipendenza egli indicò con un vocabolo speciale (πλευρογίκη), ma definì detto triangolo in termini talmente oscuri che riuscirono intelligibili soltanto quando allo stesso concetto si giunse per altra via. Congenere è l'artificio usato dal Viète sostituendo ad un triangolo sferico avente un angolo ottuso o un lato maggiore di un quadrante, un triangolo adiacente in cui non si verifica siffatta circostanza, la quale poneva nell'imbarazzo chi non era in grado di usare le funzioni circolari di archi superiori al quadrante [1]. Per risolvere un triangolo sferico di dati lati egli si serve del teorema del coseno, già noto a Regiomontano (v. p. 254) che egli scrive sotto la seguente forma

$$\frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\cos c \mp \cos a \cos b} = \frac{1}{\cos C},$$

mentre, per venire a capo della questione correlativa, ricorre all'analoga relazione

$$\frac{\text{sen } A \cdot \text{sen } B}{\cos A \cdot \cos B \pm \cos C} = \frac{1}{\cos c},$$

la quale, sotto questa forma, fa così il proprio ingresso nella scienza, ov'era destinata a rimanere. È però dovere nostro rilevare che questa formola era stata resa di pubblica ragione prima del Viète; la si trova infatti, con una esplicita affermazione di originalità, nell'opera dal titolo *Triangulorum geometriae libri quatuor* (Lugd. Bat., 1591) del geometra belga Filippo van Landsberg (1561-1632); la sola differenza consiste nell'essere ivi scritta come segue:

$$\frac{1}{\text{sen } A \cdot \text{sen } B} = \frac{\text{sen ver } C}{\text{sen ver } C - \text{sen ver } (180^\circ - A - B)}.$$

Similmente, per calcolare l'angolo $C$ di un triangolo sferico di cui si conoscono due lati $b, c$ e l'angolo compreso $A$, Viète fa uso della relazione

$$\frac{\text{sen } A \text{ cosec } b}{\text{cotg } c \mp \cos A \cdot \text{cotg } b} \quad \frac{1}{\text{cotg } C},$$

la quale, scritta sotto la forma

$$\text{sen } A \text{ cotg } C \pm \cos A \cos b = \text{sen } b \cdot \text{cotg } c \ ,$$

---

[1] Tale incertezza spiega la presenza dei doppi segni nelle formole seguenti.

palesa la propria identità con un altro dei cardini dell'odierna trigonometria sferica. È appena necessario avvertire che, per trattare il caso di risoluzione correlativo al precedente, il Viète ricorre alla nuova formola corrispondente

$$\frac{\text{sen } a \cdot \text{cosec } B}{\text{cotg } C \pm \cos a \cdot \text{cotg } B} = \frac{1}{\text{cotg } c}.$$

Non basta tutto ciò a provare che nel Viète il cultore della trigonometria non è per nulla inferiore al grande algebrista che imparammo a conoscere nel Cap. XVII?

279 - E poichè per valutare il valore di un pensatore nulla serve di meglio che considerare l'influenza da lui esercitata, a conforto di questo nostro apprezzamento possiamo citare un'opera (*Diclides coelometrica*, Londini, 1632) dovuta ad un inglese, Nataniele Torpeley (m. nel 1632) che da giovane visse a lungo in casa del Viète in qualità di segretario (« famulus »); è un'opera imbevuta delle idee di questo grande, ma in cui furono notate alcune celebri formole, che, come vedremo, furono scoperte poi dal Napier, di cui di consueto recano il nome.

Degli scritti del Viète, come di tutta la letteratura del tempo, seppe abilmente profittare il ben noto astronomo Giovanni Antonio Magini (n. a Padova il 13 giugno 1555, m. a Bologna l'11 febbraio 1617) nel comporre l'egregia opera intitolata *Primum mobile duodecim libris contentum*, pubblicata a Bologna nel 1609 e contenente tavole di valori delle funzioni trigonometriche che erano state calcolate circa un decennio prima. È un lavoro che fa fede dell'energia calcolatrice dell'autore, nel quale limitiamoci a rilevare i nomi « sinus secundus », « tangens secunda » e « secans secunda » usate per designare il coseno, la cotangente e la cosecante.

Altra prova della benefica influenza esercitata dal Viète in tempi a lui vicini è offerta dalle *Opere* dello Stévin, nelle quali si trova un trattato di *Cosmografia*, i cui primi tre Libri sono dedicati ad un'esposizione della trigonometria inspirata all'*Isagoge* dell'eminente matematico francese. Ivi detta disciplina si presenta come semplice ausiliare della Cosmografia, della quale riempie i tre primi libri. Il I tratta « De la constructions des sinus », il II « Des triangles plats » e il III « Des triangles sphériques ». Un'Appendice ha per iscopo di rettificare qualche inesattezza commessa da trattatisti anteriori, non tutti, perchè (sono sue parole) « il n'est point besoin de s'amuser et de perdre son temps aux corrections des erreurs des autres », ma soltanto quelle da lui giudicate essenziali. Il IV Libro della « Cosmographie » tratta dei problemi di astronomia sferica che si risolvono mediante calcoli sopra triangoli sferici. Si vede dunque che si è in presenza di una esposizione dell'indicata materia, certamente non indegna dell'eminente matematico dei Paesi Bassi, ma che non presenta notevole originalità.

280 - Contemporaneo dello Stévin è Michele Coignet, il quale nacque ad Anversa nel 1549 e morì il 24 dicembre 1623. Una lettera da lui scritta a Galileo il 31 marzo 1588, mostra in lui uno dei primi ammira-

tori del grande fiorentino. Fu matematico e ingegnere degli arciduchi austriaci Alberto e Isabella e sembra avere occupata alla loro corte una posizione somigliante a quella ottenuta dallo Stévin alla corte di Maurizio di Nassau. Godette in patria ottima reputazione come insegnante di vaglia, ma altrove rimase del tutto ignoto, perchè (malgrado i sussidi avuti all'uopo dal governo del tempo) i suoi scritti non ottennero l'onore della stampa. Soltanto ai giorni nostri un dotto belga diede in luce una operetta, recante la data 19 dicembre 1612, destinata a far conoscere i procedimenti che si devono seguire per costruire una tavola di seni (il raggio essendo 100000) e quindi calcolare i valori delle tangenti e delle secanti. Si tratta di un lavoro di un esperto insegnante, i cui pregi risiedono piuttosto nella lucida esposizione, che nella novità di concetti e di metodi.

Di ben maggiore celebrità gode Willebrod Snellius; nato a Leida circa nel 1581, viaggiò lungamente in Europa e nel 1613 succedette al padre nella cattedra di matematica da lui occupata nell'Università di Leida; in questa città morì il 30 ottobre 1626. A lui viene attribuita la scoperta della legge della rifrazione della luce e viene assegnato il posto di creatore della geodesia, grazie alla fondamentale opera intitolata *Eratosthenes Batavus, De terrae ambitus vera quantitate,* pubblicata nel 1614 (¹).

A noi interessa il volume postumo *Doctrinae triangulorum canonicae Libri quatuor* (Lugd. Bat., 1627) dato in luce dal suo discepolo Martino Hortensius (1605-1639). Benchè non sia difficile misurarvi l'influenza del Viète, pure esso è in molti punti di indiscutibile originalità. Ivi infatti il calcolo delle corde e delle tangenti è basato sulle seguenti nuove formole:

$$1 : \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} (90^\circ - n\,\alpha) : \left[\operatorname{sen} \frac{(2\,n+1)\,\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2\,n-1)\,\alpha}{2}\right]$$

$$1 + 2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} 2\,\alpha + \ldots + 2 \operatorname{sen} n\,\alpha = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

supposto $(n+1)\,\alpha = 90^\circ$,

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{3\,\alpha}{2} + \ldots + 2 \frac{\operatorname{sen} (2\,n-1)\,\alpha}{2} = \operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

nella ipotesi $n\,\alpha = 90^\circ$.

Nella stessa opera si trova, oltre alla nota formola approssimata (che incontrammo in uno scritto del Cardinale di Cusa, v. p. 250).

$$\alpha = \frac{3 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \alpha},$$

(¹) Correzioni a questo lavoro, preparate in vista di una nuova edizione (che non potè vedere la luce per la morte improvvisa dell'autore) furono pubblicate da H. Bosmans nella nota intitolata *Le degré du méridien terréstre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-zoom et de Malines, par* W. Snellius (Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, T. XXIV, 1900).

l'altra nuova

$$\alpha = \text{tg}\,\frac{\alpha}{3} + 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{3}.$$

Lo Snellius, a imitazione del Viète, usa il triangolo supplementare di un dato, ma definito con la precisione e la chiarezza che indarno cercasi nel citato geometra francese. Notiamo finalmente che nell'opera in discorso s'incontrano per la prima volta quei problemi di geometria pratica che a torto portano di consueto i nomi di Pothénot (v. n. 244) e Hansen.

### Il problema della quadratura del cerchio nel secolo XVI

281 - Era ragionevole la speranza che, rimesso in circolazione l'opuscolo di Archimede sopra la *Misura del cerchio,* fossero per scomparire i pretesi risolutori del secolare problema o che agevol fosse il ridurli al silenzio; i fatti smentirono questa rosea previsione, ma dai contrasti risultanti la scienza nostra trasse cospicui giovamenti, come ora passiamo ad esporre.

La serie dei nuovi pretesi quadratori del cerchio si apre con Giuseppe Scaligero, un francese (n. a Agen il 5 agosto 1540), ma trasferitosi in Olanda, perchè chiamato a professare nell'Accademia di Leida, città in cui trascorse il resto della sua vita (ivi morì il 24 gennaio 1609). Gli è nell'opera *Cyclometrica elementa duo* (Lugd. Bat., 1584) che egli credette di avere stabilito il teorema « quadratum ab ambitu circuli decuplum est quadrati a diametro »; siccome ciò equivale ad ammettere $\pi = \sqrt{10}$, così si ricade nell'approssimazione indiana (v. p. 179). Interessante è rilevare le ragioni sofistiche addotte dallo Scaligero per giustificare il proprio dissenso da Archimede: secondo lui la quadratura del cerchio deve effettuarsi in base ai principi geometrici; ora è quanto il Siracusano non fa; giacchè egli opera aritmeticamente, senza fondarsi sopra alcun principio tratto dalla geometria; perciò lo Scaligero, pieno di boriosa soddisfazione, afferma che la dimostrazione archimedea deve riguardarsi come non avvenuta.

Pure francese è Simone du Chesne (nacque a Dosmes); egli, per sottrarsi alle persecuzioni di cui erano vittime allora i calvinisti, si trasferì in Olanda ove tradusse il proprio cognome in van Eycke, nome sotto cui è più di frequente designato. L'opera in cui egli si illuse di avere dimostrato essere $\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2$ portò il titolo *Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné et au contraire* (Delft, 1584) (1); le critiche di cui fu fatta segno quest'opera lo indussero a modificare la propria tesi, ammettendo cioè essere $\pi = \sqrt{\sqrt{300} - 8}$, nella II ed. (1586) del suo infelice lavoro.

(1) Del valore da lui dato per $\pi$ non è esatta neppure la prima cifra decimale.

282 - Contro le pretese scoperte del van Eycke insorse un tedesco pure stabilitosi in Olanda, Ludolph van Ceulen; dal suo nome trae origine l'impropria designazione Ludolph's Zahl per $\pi$. Egli nacque a Hildesheim (Sassonia) addì 28 genn. 1540, da famiglia talmente umile che egli soffrì durante tutta la propria vita per l'ignoranza in cui fu lasciato del latino e del greco. Insegnò matematica saltuariamente, perchè principale sua professione fu l'insegnamento della scherma e della ginnastica; questa professione esercitò successivamente a Breda, Amsterdam, Delft, Arnheim e Leida. La sua sala d'armi era frequentata da ricchi mercanti olandesi e per riposarsi, fra un assalto e l'altro, egli risolveva con sorprendente facilità complicati problemi aritmetici che venivangli proposti. La reputazione di abile calcolatore che egli si acquistò in tal modo fu tale e tanta che, quando Maurizio di Nassau decise di fondare a Leida una scuola del genio, non esitò a chiamarvi il van Ceulen; il quale appunto a Leida si spense il 31 dicembre 1610.

Dell'opuscolo archimedeo egli, per ragioni già dette, non potè prendere notizia che quando un celebre borgomastro di Delft, il Grozio, lo tradusse in olandese. Allora egli si propose di confutare il lavoro del van Eycke. Calcolatore di un coraggio pari alla forza, riprese il procedimento usato da Archimede per applicarlo a poligoni di un maggior numero di lati; arrivato al poligono di $2^{62}$ lati, ottenne un valore $\pi$ con 35 decimali che, per suo volere, venne inciso sulla sua tomba [1]. Il metodo da lui seguìto, essendo stato esposto in un opuscolo (*Del cerchio*) scritto in olandese (Delft, I ed., 1596; II ed., 1615), non raggiunse la notorietà di cui aveva diritto che quando W. Snellius ne pubblicò (1621) una versione latina (a quanto pare piuttosto libera). Il punto di partenza dei calcoli eseguiti dal citato matematico consiste in una « grande scoperta » (sono sue parole) da lui fatta nel settembre 1586; essa consiste nelle formole fondamentali per la bisezione degli archi che oggi scrivonsi come

---

[1] Riferiamo l'epigrafe incisa sulla sua tomba esistente nella Chiesa di S. Pietro di Leida, perchè, secondo il voto dell'illustre calcolatore, serba memoria dei risultati da lui conseguiti.

Hic jacet sepultus Mr. Ludolph von Ceulen, professor belgicus, dum viveret mathematicarum scientiarum in Atheneaeo huius orbis, natus Hildesheim anno 1540 die XXVIII Januarii, et denatus XXXI Decembris 1610, qui in vita sua multo labore circumferentiae circuli proximam rationem ad diametrumin venit sequentem.

Quando diameter est 1, tum circuli circunferentia plus est quan

$$\frac{3141592653589793238462643383277950288}{1000000000000000000000000000000000000}$$

et minus quan

$$\frac{314159265358979323846264338327950289}{100000000000000000000000000000000000}$$

sed quando diameter est

100000000000000000000000000000000000

tum est circuli circumferentia plus quam

314159265358979323846264338327950288

et minus quam

314159265358979323842643382275950289.

segue:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\ , \quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\,.$$

Applicandole, egli, partendo dal pentagono regolare, con successive bisezioni, giunse al poligono di 10 485 760 lati e così ottenne $\pi$ con undici decimali esatte; non contento di ciò, ricominciò da capo partendo dal quadrato e usando le medesime formole giunse al poligoni di 1 073 741 824 lati; così arrivò a un valore di $\pi$ con quattordici cifre decimali; partendo invece dal triangolo equilatero giunse al poligono di 6 442 450 944 lati e a $\pi$ con diciassette decimali; finalmente prendendo le mosse dal pentedecagono regolare arrivò similmente al poligono di 32 512 254 720 lati e a un valore di $\pi$ con diciannove decimali. Il surricordato valore di $\pi$ con trentacinque cifre fu pubblicato dalla moglie, nell'opera postuma intitolata *Fondamenti d'aritmetica e geometria*.

È nostro dovere notare che il citato scritto che tratta *Del Cerchio* contiene, oltre quanto riferimmo, altre cose notevoli, cioè un procedimento pratico per eseguire divisioni approssimate con numeri grandi, che è il primo del genere che s'incontra nella letteratura matematica, e delle tavole dei valori delle linee trigonometriche per un cerchio di raggio $10^7$, destinate agli agrimensori che non potevano ricorrere a quelle di maggior mole destinate agli astronomi. Meno spiegabile sembra la presenza di tavole d'interesse, di cui l'autore vanta l'importanza e la novità, dal momento che ne erano già state pubblicate prima dallo Stévin (n. 249): la giustificazione sta forse in ciò che il van Ceulen le calcolò prima, per rispondere a questioni rivoltegli nella sua sala di scherma. Ma la parte della massima importanza della medesima opera è quella in cui l'autore risolse le questioni sulle sezioni angolari che tanta fama diedero al Viète; quanto egli scrisse su questo argomento supera le pagine congeneri del matematico francese inquantochè tutto vi è completamente dimostrato. Giova osservare che il Viète e il van Ceulen non erano in corrispondenza diretta, ma avevano un amico comune in A. van Roomen (v. n. seg.); il matematico francese seppe così che il van Ceulen era giunto a risolvere la celebre equazione di 45 gradi (n. 276) e che proponevasi di pubblicare un lavoro sulle funzioni angolari; gli è allora che, cedendo alle esortazioni di Pietro Aléaume (p. 345), allora avvocato al Parlamento di Parigi (il quale rimproveravagli di lasciarsi rapire la gloria da un Belga), il Viète diede in luce la risposta da lui immaginata per la citata questione.

283 - Il van Eycke trovò (strano a dirsi) un ammiratore e seguace nell'astronomo già a noi noto (n. 273) Raymarus Ursus (m. a Praga il 15 agosto 1600), il quale nel suo *Fundamentum astronomicum* (Argentorati, 1588) non esitò a chiamarne il metodo di rettificazione « divinum artificium ». Trovò invece un oppositore in un matematico già da noi più volte citato: Adrian van Roomen (v. p. 343).

Lo si apprende da un'opera il cui titolo riferiamo perchè porge una idea esatta del contenuto: *Ideae mathematicae, pars prima, sive metho-*

***dus polygonorum, qua laterum, perimetrorum et arearum cujuscumque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima; una cum circuli quadratura continentur*** (Amberes, 1593). Essa, indipendentemente dal valore polemico, ne possiede uno storico, contenendo l'enunciato della famosa questione che vedemmo risolta dal Viète (p. 377) e dal van Ceulen (pag. prec.), e uno matematico in quanto mostra che fu il problema della quadratura del cerchio che condusse alla ricerca delle formole per la divisione degli archi. E appunto servendosi delle formole relative il van Roomen giunse al poligono di $3.\ 5.\ 2.^{24} = 251\ 658\ 240$ lati, grazie a cui trovò $\pi = 3{,}1415926535897931$.

Fra gli infelici quadratori del cerchio dovrebbesi anche annoverare F. van Landsberg (v. n. 278), ma (*rara avis!*), a differenza degli altri di cui parlammo, riconobbe il proprio errore in seguito ad osservazioni di W. Snellius.

Un'attitudine diversa assunse un altro olandese con cui chiuderemo per ora questa serie di oppositori al van Eycke: parliamo di Adriano Anthonisz (1527-1607 circa); essendo la sua famiglia oriunda da Metz, suo figlio, che aveva pure nome Adriano (n. a Alkmaar il 9 dicembre 1557, m. a Francker il 6 ottobre 1635) ebbe dai condiscepoli il nomignolo di Metius, che era destinato a conservare; devesi a questi la conoscenza del notevole valore $\pi = \frac{355}{113}$, a cui era giunto il padre, chè lo si trova nell'opera di Mezio figlio, pubblicata nel 1646 col titolo *Manuale arithmeticae et geometriae practicae*. Se anche non è escluso che a quella espressione sia giunto Archimede (v. p. 51), rimane intatto il merito di chi la ritrovò e la riconoscenza per colui che, avendone riconosciuto il pregio, la rimise in circolazione.

284 - Le lunghe e fruttifere meditazioni del Viète sulla teoria delle funzioni circolari lo condussero, quasi involontariamente, ad occuparsi più volte del problema della quadratura del cerchio. Già riferimmo (numero 268) una sua notevole costruzione di un quadrato prossimamente eguale ad un circolo. Ora aggiungiamo che, seguendo le tracce di Archimede, ma spingendoci sino al poligono di 393216 lati, egli arrivò al notevole valore $\pi = 3{,}1415926536$. Perfezionando, invece, un vago accenno di Antifonte (v. p. 35), egli (nel Cap. XVIII del *Var. de reb. mathem.*) paragonò le aree dei poligoni di $n$, $2n$, $2n^2$ lati, con una procedura basata sulle formole di bisezione, la quale può continuarsi senza limite, partendo da qualunque valore di $n$; nella ipotesi $n = 4$, egli potè così concludere la notevolissima relazione seguente:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots ;$$

è importante rilevare che questo prodotto infinito è convergente. È questa la prima espressione analitica che sia stata assegnata per $\pi$; con lo scoprirla il Viète presentò sotto un nuovo aspetto il problema della quadratura del cerchio; mentre i matematici dell'antichità si proposero di

*costruire* una retta avente la stessa lunghezza della circonferenza o un quadrato avente la stessa superficie di un dato cerchio; mentre, a partire da Archimede, si volle *calcolare* $\pi$ con precisione sempre maggiore; da questo momento si apre una nuova êra che (dette rispettivamente « geometrica » e « aritmetica » le due prime) si può a ragione designare per « analitica », in quanto è caratterizzata dalla ricerca di una espressione di $\pi$ mediante i segni dell'analisi, ripetuti infinite volte [1]; è gloria di Viète di avere così indirizzati i matematici per una via che, come vedremo, diede splendidi risultati.

## Epilogo: Clavio

285 - Giunti ormai al termine della disamina dell'opera matematica compiuta nel corso del sec. XVI, se la contempliamo nel suo insieme non tarderemo a riconoscere confermato che essa fu estremamente importante per quanto riguarda l'algebra, essendo stata allora oltrepassata una barriera che molti ritenevano non superabile, e arrecato notevoli miglioramenti nella simbolica algebrica, sì da far prevedere prossimo il momento in cui l'algebra cesserebbe di meritare l'epiteto di sincopata. Pure di grande importanza furono i progressi compiuti dalla trigonometria, la quale raggiunse un grado di perfezione ancora superiore a quello da essa conseguito presso gli Arabi e (grazie alle meritorie fatiche di calcolatori veramente eroici) porse agli astronomi tavole numeriche di insperata precisione. Progressi altrettanto cospicui non vanta nella stessa epoca la geometria, chè la risoluzione di problemi con una sola apertura di compasso non era cosa del tutto nuova nè di grande importanza, e gli sforzi per divinare antiche opere perdute attestano piuttosto dottrina che genio inventivo; solo la prospettiva, passata nelle mani di valorosi geometri, divenne più perfetta e così preparò da lungi la geometria proiettiva. Però la diffusione mediante la stampa di antiche opere classiche, largamente avvenuta nell'epoca in discorso, va rilevata come fattore, sia pure indiretto, di risveglio nello spirito di ricerca nel campo geometrico.

A tale diffusione provvidero i dotti di cui parlammo nel Cap. precedente; ad essi va aggiunto, in posizione eminente il gesuita Cristoforo Clavio (n. a Bamberg nel 1537 col nome Schlüssel, m. nel 1612 a Roma, ove insegnava da dodici anni nel Collegio del suo ordine). La sua efficace partecipazione alla riforma gregoriana non può dar luogo da parte nostra a lungo discorso; va invece da noi ricordata con onore la sua edizione latina degli *Elementi* di Euclide, di cui in breve volger d'anni si fecero non meno di sei edizioni (1574, 1589, 1591, 1603, 1607, 1612). Tale favore da parte del pubblico matematico era ben meritato, chè, a tacere delle sue doti di stile, essa è ricca di un grande numero di commenti, in parte originali e in parte riferiti e discussi; vi si notano anche tentativi di miglioramenti e correzioni di antichi errori; riguardo a questi notiamo

[1] Da quest'ultima fase rampollano le moderne ricerche sulla materia aritmetica di $\pi$.

che è al Clavio che devesi la definitiva scomparsa dell'erronea identificazione dell'autore degli *Elementi* con Euclide da Megara; fra quelli rileviamo la proposta di fondare la teoria delle parallele sopra il concetto di « rette equidistanti ».

Ma al Clavio, scrittore fecondissimo, si devono anche lavori di più spiccata originalità. Così nell'opera dal titolo *Astrolabio* (Roma, 1593) [1] egli, servendosi della proiezione stereografica, non ignota a C. Tolomeo, insegnò per primo la costruzione piana degli elementi di un triangolo sferico; se anche tale procedura venne giudicata di lieve momento dagli astronomi calcolatori, è dotata di un valore dottrinale che è giustizia riconoscere. Nella medesima opera è per la prima volta messa in chiara luce la prostasferesi che il Clavio apprese da un'opera a noi nota (v. p. 374) di Raymaro Ursus. Dopo Clavio le formole relative furono perfezionate nell'*Astronomia danica* (Amstelodami, 1640) di Cristiano Longomontano (1564-1647).

Inoltre nella sua *Geometria practica* (Roma, 1606) egli seppe coordinare metodicamente quanto allora sapevasi su una materia che, in tutti i tempi, fu riconosciuta di notevole interesse. A una pregevole versione latina della *Sferica* di Teodosio egli fece seguire un trattato delle funzioni circolari, con estese tavole numeriche e quindi una sua trattazione della trigonometria piana e sferica. Nè trascurò di esporre metodicamente i fondamenti dell'aritmetica e dell'algebra. Senza entrare in più minuti particolari, ci sentiamo di asserire che, se il lettore ricorrerà ai poderosi volumi in-folio in cui è raccolta la produzione matematica del Clavio, ravviserà in lui uno di quei benemeriti che, esponendo con metodo e chiarezza la scienza del proprio tempo, resero piano e agevole il cammino di coloro che aspiravano a conoscerla nella nobile ambizione di farla progredire [1].

(1) È stato rilevato in quest'opera da J. GINSBURG il primo uso del punto per separare in un numero la parte intera dalla parte decimale. La pagina relativa fu riprodotta in fac-simile nel Fascicolo di Agosto-Settembre 1928 du *The American mathematical Monthly*.

(2) Giova qui rilevare che gli scritti di Antonio di Monforte (n. in Basilicata nel 1644 e m. nel 1717) e Giacinto Cristoforo (nato a Napoli nel 1650, visse ivi sino al 1720) mostrano che, anche nelle provincie meridionali d'Italia, sino dal secolo XVI la matematica era tenuta nel debito onore.

## BIBLIOGRAFIA

*Thesaurus mathematicus sive Canon sinuum ad radium* 1000000000000000 a I. G. RHETICO *supputatus, at nunc primum in lucem editus a* B. PITISCO (Francoforte, 1613).

B. PITISCO, *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum Libri quinque* (Francoforte, 1509).

REGIOMONTANO, *Tabulae directionum perfectionumque*, ed. E. RADOLT (Ausgburg, 1490).

TYCHONIS BRAHE, *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica. Nunc primum edidit* Dr. F. STUDNICKA (Pragae, MDXCVII).

H. BOSMANS, *Le traité des sinus de Michiel Coignet* (Revue des questions scientifiques, t. XXV, 1901).

COPERNICO, *Dissertatio de optima monetae cudendae ratione, anno* 1526 *scripta* (nuova ediz., Varsavia, 1816).

THOMAE FINKII *Flenspurgensis, Geometria rotundi Libri XIV* (Basileae, M. D. LXXXIII).

IOANNIS VERNERI, *De triangulis sphaericis Libri quatuor, De metereoscopiis Libri sex, cum Proemio* G. I. RHETICI. *I. De triangulis sphaericis, herausgegeben von A.* A. BJÖRNBO (Abhand. zur Gesch. der Mathematik, Heft, XXIV, 1907).

C. CLAVIUS, *Opera mathematica* (Moguntiae, 1612. Vol. I: *In Euclidem et in Theodosium Commentarii. De sinibus et lineis tangentibus et secantibus. Triangula rectilinea et triangula sphaerica.* Vol. II: *Geometria practica. Arithmetica practica. Algebra.* Vol. III: *In sphaeram J. de Sacro Bosco commentarius. Astrolabium.* Vol. IV: *Gnomonices Libri octo.* Vol. V: *Romani calendarii a Gregorio XIII restitutio*).

A. DI MONFORTE, *Epistola ad clarissimum virum* A. MAGLIABECXI *continens solutiones problematum, quae Leidensis geometra post tabulam latens proposuit* (Napoli, 1676).

GIACINTO CRISTOFORO, *De constructione aequationum* (Napoli, 1699).

GIACINTO CRISTOFORO, *Della dottrina dei triangoli* (Venezia, 1720).

## CAPITOLO XX

# AUSILIARI PER LA RICERCA SCIENTIFICA CREATI DURANTE IL SECOLO XVII

### Corrispondenza scientifica e stampa periodica

286 - Il secolo del quale imprendiamo lo studio fu così fecondo per le scienze esatte, che per trovare un'altra epoca capace di reggere al paragone di esso fa mestieri risalire a quella in cui fiorirono i sommi geometri dell'antica Grecia. Che con l'alba di esso si delineasse un'êra novella sembra indicato non soltanto dal subito apparire di alcune personalità di eccezione, ma anche dal moltiplicarsi di investigatori minori, collaboratori efficaci dei grandi capitani del tempo; ma questo inaudito fervore di lavoro rese necessaria la creazione di veicoli per la diffusione delle scoperte, dei quali è indispensabile tener conto da chi voglia rendersi ragione di episodi caratteristici verificatisi allora.

Già, esaminando alcuni volumi del Tartaglia e Benedetti, abbiamo fatto cenno di lettere di terzi ivi menzionate, come documenti del credito sempre maggiore e sempre più largamente diffuso di cui godevano gli scienziati ai quali erano dirette e, d'altra parte, come prova del fatto che sempre più vivo facevasi il bisogno di contatti fra i cultori della stessa materia. Ma, aumentando il numero degli studiosi, la corrispondenza scientifica si manifestò sempre più utile, anzi necessaria a chi voleva far conoscere le proprie scoperte e tenersi a giorno di quanto accadeva nel mondo dei pensatori; si aspirava a conoscere non soltanto quanto andavano scoprendo gli studiosi con cui si avevano relazioni dirette, ma persino con coloro con cui si avevano avuti rapporti non amichevoli e persino contese. Le lettere a contenuto scientifico andarono in conseguenza aumentando di numero e di importanza, assumendo l'ufficio disimpegnato oggi dalle comunicazioni preliminari; onde la spiegazione del fatto che nelle edizioni veramente complete dei maggiori scienziati del secolo XVII molti volumi siano occupati dal carteggio. Tale fenomeno fu reso possibile dalla comparsa di persone che assunsero spontaneamente l'ufficio di raccogliere e diffondere notizie sui lavori scientifici in gestazione. Fra esse, almeno per quanto riguarda le matematiche, occupa il primo posto Marino Mersenne. Nato a La Soultière (Maine) l'8 settembre 1588, sembra sia stato nel Collegio delle Flèche condiscepolo di Descartes; continuò i propri studi alla Sorbona e il 17

luglio 1611 vestì l'abito di minimo di S. Francesco di Paola; dopo avere insegnato in varie città della Francia (fra le altre a Nevers negli anni 1615-17), nel 1619 si fissò a Parigi. Venne parecchie volte in Italia, e si trovò implicato in tutte le principali dispute scientifiche che ebbero luogo nel corso dell'epoca in cui visse, assumendo piuttosto la parte di intermediario, non sempre imparziale, che quella di utile paciere. A suo merito va notato che, benchè ecclesiastico tradusse in francese i *Dialoghi sui massimi sistemi,* due anni dopo la condanna di Galileo, rendendo così popolare in Francia il grande pensatore. Morì il 1° settembre 1648.

Il suo posto di informatore fu allora assunto da P. de Carcavy (oriundo di Coliers ma n. a Lione nei primi anni del secolo XVII). Suo padre era banchiere, ma lo avviò alla magistratura, e in data 20 luglio 1632 fu nominato consigliere al Parlamento di Tolosa; qui venne in contatto con Fermat, che l'orientò verso la matematica. Per stabilirsi a Parigi, comperò un posto di membro del Gran Consiglio del Regno, ma dovette rivenderlo nel 1648 per pagare i debiti del padre. Si dedicò per qualche tempo al commercio dei libri rari; avendo poi ottenuto il favore di Colbert, esercitò importanti funzioni governative, specialmente nella Biblioteca del Re. Alla morte del Mersenne offrì a Descartes di sostituirlo; fu accettato; ma avendo prese le difese del Roberval, fu messo ben presto in disparte; con Huygens conservò invece relazioni epistolari per circa quattro anni. Dopo la morte di Colbert cadde in disgrazia di Luigi XIV. Morì nel 1684.

Anche l'Inghilterra ebbe, circa nello stesso tempo, un congenere ufficio scientifico d'informazioni per merito di un tedesco che vi aveva preso dimora: Enrico Oldenburg. Nato a Brema circa nel 1615, passò a Londra gli anni 1640-1648; rimpatriato, fu nel 1653 inviato ambasciatore presso Cromwell dalla nativa città anseatica; si inscrisse allora come studente nell'Università di Oxford e ivi rimase sino al 1657. In qualità di precettore viaggiò poi sul continente, ma nel 1660 ritornò in Inghilterra. Fu uno dei primi membri della Società Reale di Londra (decreto del 26 dicembre 1660) e ne divenne subito segretario. Tale carica lo portò a stabilire estesi rapporti epistolari con scienziati dell'isola e del continente; se non che il dubbio, sorto in un sospettoso governo, che egli trattasse anche questioni politiche, lo fece incarcerare (20 giugno 1667). Uscito di prigione, le difficili sue condizioni finanziarie lo indussero a dedicarsi a tradurre in inglese e in latino opere di varia specie. Morì improvvisamente nel 1677.

Del tutto somigliante fu l'azione svolta da John Collins, il quale, grazie alla vasta corrispondenza scientifica da lui tenuta con eminenti personalità quali Newton, Leibniz, Gregory, Barrow, Flamsteed (l'astronomo) e de Sluse; perciò fu chiamato « il Mersenne dell'Inghilterra ». Nacque nella contea di Oxford il 5 marzo 1625, fu ammesso nella Società Reale il 24 ottobre 1667 e morì il 10 novembre 1683. Degno di ammirazione per lo zelo infaticabile da lui spiegato nel raccogliere e diffondere le nuove conquiste della scienza, lo è altrettanto per la sua opera intesa ad ottenere che venissero pubblicate opere scientifiche minacciate dal

pericolo dell'inedito, cosicchè è generale l'opinione che in un modo e nell'altro egli contribuì efficacemente al progresso della scienza [1].

287 - Gli inconvenienti del sistema informativo basato sopra lettere private non tardarono a manifestarsi (è colpa di esso un grande numero di querele sorte durante il secolo XVII), onde si pensò di ricorrere a mezzi migliori: sorse allora la stampa periodica a scopi scientifici.

Questa si può far datare dal 1665, chè il primo giorno di detto anno s'iniziò la pubblicazione del *Journal des Sçavants* per iniziativa e sotto la direzione di Dionigi de Sallo. Ma, per l'irresistibile opposizione della potente Compagnia di Gesù, egli dovette cedere il posto all'abate Giovanni Gallois (n. a Parigi il 14 giugno 1632, m. ivi il 19 aprile 1707), al quale, a partire dal 1674, seguirono altri due ecclesiastici, il de la Roque (1675) e il Bignon (1702). Quella pubblicazione, soddisfacendo ad un bisogno generalmente sentito, riscosse il favore del pubblico; ne è prova il fatto che, prescindendo da alcune interruzioni, esiste ancora, sia pure con organizzazione ed intenti notevolmente differenti.

Altra prova del medesimo favore è il sorgere di altri periodici di egual tipo; citiamo infatti la fondazione a Roma di altra rivista congenere, in parte tradotta dalla francese, in parte originale; è il *Giornale dei letterati* pubblicato dal 1668 al 1681 dall'abate Nazari e seguito poi da altri di egual titolo a Parma, Modena, ecc. Questi periodici, le cui deficienze emergono dalla vita effimera che ebbero, servirono, a tacer d'altro, a porre in evidenza la somma utilità di un'effemeride che contenesse resoconti fedeli intorno al movimento scientifico in Italia e fuori. Niuna meraviglia pertanto se un letterato di grande fama, Apostolo Zeno, sia stato sedotto dall'idea di porsi alla testa di una siffatta impresa: così nacque in Venezia il *Giornale de' letterati d'Italia,* che durò non meno di trenta anni, anche dopo il trasferimento a Vienna del suo creatore; integrato da appositi *Supplementi* e da una *Raccolta di opuscoli scientifici e filologici* dovuta alle solerti cure di Angelo Calogerà, esso costituisce una non spregevole fonte di notizie intorno alla storia delle matematiche in Italia, come emerge dall'Indice dei lavori relativi alla materia che c'interessa, che ne venne dato alle stampe.

In Germania non si tardò ad avvertire un bisogno analogo a quello

[1] Uno dei mezzi proposti per ovviare a quegli inconvenienti è il *sistema dei criptogrammi*. Sotto questo nome s'intesero frasi sapientemente stabilizzate per annunciare (non già per far conoscere) invenzioni o scoperte; esse venivano comunicate a chi vi si interessava, non già esplicitamente, ma indicando il numero delle lettere di ciascuna specie di quelle frasi. Ad es. Huygens annunziò un importante risultato conseguito nella costruzione dei cannocchiali, col seguente modo:

| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *h* | *i* | *l* | *m* | *n* | *o* | *p* | *r* | *s* | *t* | *u* | *y* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 1 |

che, soltanto molto più tardi si seppe avere il seguente significato: « lens e durabo composita hyperbolicam aemulatur ». Il lettore avvertirà immediatamente che il passare da una serie di lettere dell'alfabeto alla frase donde essa trasse origine è opera che supera le forze umane; ma quando anche un Edipo di eccezione vi fosse riuscito, ben poco avrebbe saputo in che cosa consistesse il nuovo risultato. Perciò questo artificio, basato sopra la diffidenza ed il sospetto, quantunque sia stato usato anche da Galileo e Newton, venne ben tosto abbandonato come uno strumento che non serviva all'intento propostosi.

a cui provvidero le pubblicazioni ora citate, e vi si soddisfece in modo superiore ad ogni elogio; infatti nel 1682, sotto gli auspici del Duca di Sassonia, vennero fondati gli *Acta eruditorum,* periodico al quale collaborarono, con lavori originali e con analisi critiche, i più eminenti pensatori del tempo. Altre riviste congeneri sorsero poi in Prussia, nell'epoca in cui ivi il francese era la lingua generalmente usata dai dotti; alludiamo alle pubblicazioni intitolate *Bibliothèque germanique, Journal littéraire de l'Allemagne* e *Nouvelle bibliothèque germanique;* anche da essi si possono trarre preziose informazioni sulla storia delle matematiche.

Col *Journal des Sçavants* possono competere, riguardo a diffusione, *Nouvelles de la republique des lettres* dal 1684 pubblicate sotto la direzione di Pietro Bayle, francese che insegnava storia e filosofia nell'Università di Rotterdam; tale periodico fu continuato da H. Basnage de Beauval col titolo di *Histoire des ouvrages des savants* (1687-1704) e poi dal Leclerc nella *Bibliothèque universelle et historique.*

Questi esempi vennero sempre più largamente seguiti nei tempi posteriori; ma è estraneo al còmpito nostro il tessere una completa storia del giornalismo a scopi informativo e scientifico; tuttavia le scaturigini non potevano venire passate sotto silenzio, in vista della influenza da esso esercitato. Notiamo soltanto che in questa rapida rassegna testè fatta non comparve l'Inghilterra per un motivo che emergerà da quanto stiamo per dire.

## Accademie e Società scientifiche

288 - Chi ha presente le condizioni in cui attualmente si svolge la vita scientifica e osserva che in questi ultimi tempi furono le Università la culla delle maggiori scoperte e invenzioni, potrà essere indotto a ritenere che un fatto analogo sia accaduto anche ne' secoli precedenti il nostro. Al contrario le Università, imbavagliate dalla Chiesa e controllate dallo Stato, generalmente conservarono per lungo tempo i caratteri d'intolleranza che avevano al loro nascere (1); donde la spiegazione del fatto che parecchi dei maggiori matematici del secolo di cui trattiamo — Viète, Napier, Descartes, Fermat, Leibniz, ecc. — e alcuni dei minori, non ebbero relazione alcuna con le Università del tempo.

Tuttavia, col crescere incessante del numero dei cultori delle scienze positive durante il secolo XVII, si rese palese la convenienza di costanti scambi di idee fra coloro che coltivavano la medesima disciplina e, possibilmente, di una loro cordiale collaborazione. Gli è specialmente fra gli studiosi delle scienze sperimentali che si avvertì un siffatto bisogno e fu l'Italia la nazione che per prima congegnò un espediente per soddisfarlo. Tacendo di una Accademia degli Oziosi sorta in Napoli e di cui fu anima il noto fisico G. B. della Porta (1538-1615), il più antico sodalizio dell'indicato tipo è l'Accademia dei Lincei, fondata a Roma nel 1601 dal

(1) Naturalmente questo fenomeno presenta splendide eccezioni; basti, infatti, a dimostrarlo citare gli esempi di Bologna e Padova.

Principe Federico Cesi, duca d'Acquasparta. Con i *Gesta lyncaeorum* che ne riassumono i primi lavori, essa diede il primo esempio di un resoconto regolare di lavori accademici; con la pubblicazione di due grandi opere di Galileo (che andava superbo del titolo di accademico linceo), essa si acquistò benemerenze che non furono, nè saranno mai più dimenticate. Ma, forse appunto la sua intimità col sommo scienziato, nel momento in cui ne maturavano i suoi dissensi con la Chiesa, le fu di nocumento. Fu specialmente l'esodo da Roma del suo creatore, avvenuto nel 1618 per gravi difficoltà economiche della famiglia, ciò che costituì la prima minaccia per la sua esistenza; e alla morte di lui (2 agosto 1630), col cessare delle adunanze, si può dire che l'Accademia dei Lincei lo abbia seguito nel sepolcro. Nel secolo seguente essa risorse per qualche tempo in Rimini; e nel 1801, mentre il fremito del liberalismo venuto dalla Francia andava ridestando in Roma lo spirito della latinità, un altro patrizio romano, il duca Francesco Caetani di Sermoneta, le diede nuova vita: così ebbe origine la Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei, che ancor oggi vive accanto alla Nazionale dei Lincei.

Nel momento in cui spegnevasi questo prezioso focolare di studio. altro accendevasi in Firenze per merito di due principi illuminati, Ferdinando II Granduca di Toscana e Leopoldo de' Medici; sgraziatamente, neppure l'Accademia del Cimento ebbe lunga vita, ma nel decennio di sua esistenza fece compiere alle scienze fisiche progressi così importanti da renderla immortale.

289 - Sia che il bisogno sentito in Italia siasi avvertito anche al di là dell'Alpi, sia che gli stranieri che frequentarono le nostre Università abbiano recata notizia delle Accademie scientiche nostrane, fatto sta che non tardarono a sorgere altrove corporazioni di egual genere e con scopi somiglianti. Datano infatti dal 1645 alcune riunioni tenute alternativamente a Londra e Oxford da persone che si interessavano a ricerche di fisica (preso questo vocabolo nel senso più ampio della parola); la loro serietà ed importanza risulta dal fatto che fra gli intervenuti si trovavano G. Wallis, C. Wren e lord Brouncker, delle opere dei quali avremo occasione di parlare. Quei convegni ebbero luogo saltuariamente durante quindici anni; ma è datato 11 novembre 1660 un atto impegnativo fra i partecipanti, che li fissava regolarmente a Londra tutti i mercoledì in una sala del Gresham College. Questa deliberazione richiamò l'attenzione del governo inglese, e re Carlo II, con Decreto del 15 luglio 1662, conferì a quella corporazione privata un carattere permanente e statale, decorandola del nome di Royal Society of London, che porta ancora oggi. Fra i compiti imposti ai suoi membri (« fellow » o brevemente F.R.S.), oltre a quello di eseguire, promuovere o dirigere ricerche originali e darne notizia, vi era anche quello d'informare il grande pubblico di tutti gli avvenimenti scientifici per qualche motivo importanti. Così fu deliberata la pubblicazione regolare delle *Philosophical Transactions* (citate in seguito con l'abbreviazione P.T.) e la direzione ne fu affidata all'Oldenburg, che ne redasse i primi 136 fascicoli durante gli anni 1664-77. Le *Philosophical Transactions* sono circa contemporanee al

*Journal des Sçavants* e per un puro caso occupano il secondo invece che il primo posto nell'elenco cronologico delle riviste scientifiche. A meglio corrispondere alle vedute governative la Royal Society diede in luce opere importanti dei suoi membri e mediante versioni latine diffuse in Inghilterra lavori che non vi sarebbero penetrati; così essa non tardò a divenire la forza dominatrice del pensiero scientifico in Inghilterra e poi anche nelle colonie. A provare l'autorità che essa in breve raggiunse basti dire che il registrare una scoperta nei suoi atti era sufficiente per stabilire incontrovertibilmente i diritti di proprietà dell'autore. Grande luce di gloria fu proiettata su di essa dalla presenza nel suo seno di Isacco Newton, che vi fu chiamato l'11 gennaio 1672 e ne fu per lunghi anni presidente Va da ultimo rilevato che l'essere la compagnia di cui parliamo una emanazione governativa non significa che essa fosse finanziata dallo Stato; al contrario, precipuo suo cespite fu ed è ancora rappresentato dai contributi dei soci, i quali erano tenuti al pagamento di uno scellino per settimana e lo sono oggi a quello di quattro lire sterline annue; la modestia di questo contributo dà ragione del fatto che il bilancio della Royal Society si manifestò più volte sproporzionato alla grandezza delle imprese che essa avrebbe voluto assumere a vantaggio della scienza.

290 - Alle riunioni scientifiche donde nacque la Royal Society fanno riscontro quelle tenute a Parigi nella cella del P. Mersenne o nel palazzo di Hubert de Montmort (v. n. 543), alto funzionario governativo. le une e le altre determinate, non soltanto dal desiderio generale di favorire la ricerca scientifica, ma anche da quello speciale di commentare e popolarizzare la filosofia cartesiana. Esse finirono con l'attrarre l'attenzione del Governo francese e il ministro Colbert, sempre sollecito di accrescere la gloria di Luigi XIV, dava esistenza legale a quell'assemblea di dotti, creando (1666) un'Accademia delle Scienze gemella dell'Accademia francese a scopi letterati, già da tempo esistente; a farne parte furono chiamati anche illustri stranieri (in origine vi appartennero Carcavy, Huygens, Roberval, Frénicle, Auzout, Picard e altri), molti dei quali furono attratti a trasferirsi a Parigi dalle laute pensioni ad essi largite [1]. Nella storia delle scienze biologiche vengono enumerate le benemerenze del nuovo istituto per avere incoraggiata la raccolta e la classificazione di piante e animali, frutto in gran parte di peregrinazioni in paesi lontani da essa promosse; noi ricordiamo che ad essa risale il merito della fondazione dell'Osservatorio astronomico parigino, in cui G. D. Cassini (1625-1712) fece le sue più importanti scoperte e la pubblicazione dell'*Horologium oscillatorium*, grande opera di uno dei suoi più celebri membri stranieri. Con l'avvento al potere del ministro Louvois (1683) ebbe principio un periodo di decadenza dell'Accademia in discorso, chè allora venne ad essa imposto dal Governo di occuparsi

[1] La revoca dall'editto di Nantes fu fatale all'Accademia come a tutta la scienza francese; ad esempio, come vedremo (n. 410), fu conseguenza di quella stolta deliberazione l'allontanamento di Huygens che era considerato da tutti come il membro più eminente di quella corporazione.

esclusivamente di questioni aventi una pratica applicazione, lasciando in disparte « ce qui n'est qu'une pure curiosité ou qui est pour ainsi dire un amusement du chimiste ». Fortunatamente esso, non ebbe lunga durata; chè nel 1699 fu dato all'Accademia un nuovo statuto, che le assicurò durante un secolo (cioè sino al giorno in cui essa fu abbattuta dalla rivoluzione francese) un'esistenza tranquilla e feconda. *L'Histoire* da essa pubblicata, con le annesse *Mémoires*, dà notizia dei lavori dei suoi membri, ma non porge che una pallida idea delle discussioni talvolta violente che ebbero luogo nel suo seno fra i sostenitori del traballante cartesianismo e i fautori del sorgente newtonianismo.

291 - Questa istituzione, creata nell'epoca in cui un grande re con l'aiuto di un ministro di genio aveva portato la Francia ai fastigi della potenza, esercitò una grande e benefica influenza anche oltre i confini della Francia, e provocò la creazione di altre istituzioni congeneri.

In Germania, le corporazioni scientifiche che ivi sorsero durante il secolo XVII furono modellate sopra le Accademie italiane (Lincei e Cimento) onde si occuparono esclusivamente di scienze sperimentali (e anche in questo campo con risultati mediocri); perciò non meritano da parte nostra se non una menzione fugace. Soltanto, mentre quel secolo stava agonizzando, per precipuo merito di Leibniz venne fondata (11 luglio 1700) l'Accademia delle Scienze di Berlino, i cui statuti manifestano un'evidente derivazione da quelli che governavano le congeneri compagnie di Londra e Parigi, che il filosofo dell'ottimismo aveva veduto funzionare nel corso dei suoi viaggi. Ma ne differiva per ciò che fra i suoi compiti era indicata la cura della patria lingua; ne differiva anche per ciò che le sue rendite provenivano, non da contributi dei soci nè da provvidenze governative, ma dal ricavato della vendita dei calendari, di cui veniva ad essa conferito il monopolio. I primi anni di vita dell'Accademia di Berlino furono poco felici e ancor meno gloriosi; soltanto a partire dal 1710 essa diede pubblici saggi della propria operosità pubblicando annualmente le *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum;* i cenni biografici dei molti matematici — non tutti tedeschi — che ne furono membri durante il secolo XVIII serviranno a porgere una idea delle sue vicende nel periodo successivo a quello di cui attualmente trattiamo.

Finiremo notando che alla creazione, avvenuta più tardi, delle Accademie di Pietroburgo e di Vienna non fu estraneo lo stesso Leibniz, il quale tenne attiva corrispondenza epistolare con Pietro il Grande e passò lungo tempo, a scopo di studio, nella capitale austriaca.

## BIBLIOGRAFIA

*Correspondance du P. Marie Meucane réligieux minime, publiée par M.me Paul Tannery éditée et annotée par C. de Waard avec la collaboration de R. Pintard* (Paris, t. I, 1932, t. II, 1937). Continua *Correspondence of scientific men of the XVIII Century* Due vol. (Oxford, 1841).

P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle.* Due vol. (St. Pétersbourg, 1943).

G. Loria, *Il « Giornale de' Letterati d'Italia » di Venezia e la « Raccolta Calogerà » come fonti per la storia delle matematiche nel Secolo XVIII* (Abhandl. z. Gesch. der Mathematik, t. IX, 1899).

F. Müller, *Die « Bibliothèque germanique », das « Journal littéraire d'Allemagne » und die « Nouvelle Bibliothèque Germanique » als Quellen für die Geschichte der Mathematik im XVIII Jahrhundert* (Festschrift M. Cantor, Leipzig, 1909).

G. Loria, *Gli « Acta eruditorum » durante gli anni 1687-1740 e la storia delle matematiche* (Archeion, t. XXIII, 1941).

## CAPITOLO XXI

# PRIMI ANNI DI UN SECOLO GLORIOSO

### J. Napier

292 - Ben poco si conosce intorno ai casi della vita di Giovanni Napier (vulgo Nepero). Discendente da cospicua famiglia protestante scozzese, egli nacque nell'avito castello di Merchiston (nei pressi di Edimburgo) nel 1550; studiò nel Collegio di S. Salvatore annesso all'Università di St. Andrews ove si laureò nel 1563. Per ragioni di studio viaggiò in Europa, di preferenza in paesi protestanti come i Paesi Bassi, ma non escludendo la Germania; così prese conoscenza delle opere di Pascal, Stevin, Schenbel e Stiefel, e conobbe Diofanto (1). Prese moglie a ventidue anni e divise il proprio tempo fra gli studi e l'amministrazione del suo cospicuo patrimonio e il disimpegno di pubblici uffici, a cui lo chiamò la fiducia dei suoi concittadini. Delle sue meditazioni di carattere teologico è frutto un'opera dal titolo *A plaine discovery of the whole revelation of St. John* (1593), avente lo scopo di mostrare che il papa è l'anticristo; le molte edizioni e traduzioni che ebbe sono altrettanti documenti del successo di cui godè lungamente. Napier morì il 3 aprile 1617.

L'oscurità che regna sul « curriculum » degli studi compiuti dal nostro scienziato rende impossibile determinare come, perchè e in quale epoca della sua vita la sua mente siasi orientata verso le matematiche. Rimane di lui un frammento dal titolo *De arte logistica,* di cui una copia, di mano del figlio Roberto e destinata al suo più fedele collaboratore (parliamo del Briggs), essendosi miracolosamente salvata, fu pubblicata nel 1839, se la parola pubblicata è applicabile ad una stampa fatta sotto gli auspici di un Club inglese ed esclusivamente destinata ai soci di esso (2).

Essa comprende cinque Libri, non tutti completi, tre di aritmetica e due di algebra, i quali nulla di essenzialmente nuovo apprendono a chi conosca la letteratura matematica del secolo XVI; così il triangolo aritmetico che vi si trova (v. Fig. 44) ha una disposizione del tutto somi-

---

(1) Per maggiori particolari sugli studi di Napier rinviamo i lettori all'articolo di A. Inglis, *Napier's educationem a speculatim* inserito nel Vol. XX, 1936 di *The mathematical Gazette.*

(2) Le seguenti notizie intorno al *De arte log,* sono desunte dall'articolo di J. E. D. Steggall, *A short account of the treatise « De arte logistica » in Napier Tercentenary memorial* (London, 1915).

gliante a quella datavi dal Tartaglia (v. fig. 35, p. 312), e chi attribuisce al Napier una vera originalità di vedute riguardo alla natura dei numeri immaginari dimentica quanto sta scritto nell'*Algebra* del Bombelli (pubblicata, giova ricordarlo, quando egli era circa ventenne); aggiungasi che lo scozzese si è arrestato sulla soglia di una misteriosa teoria, nella quale il nostro connazionale è coraggiosamente penetrato. Ci dispensiamo dal riferire i simboli da lui usati per indicare le varie specie di radici, essendo essi nati-morti; ne citiamo l'esistenza come nuovo

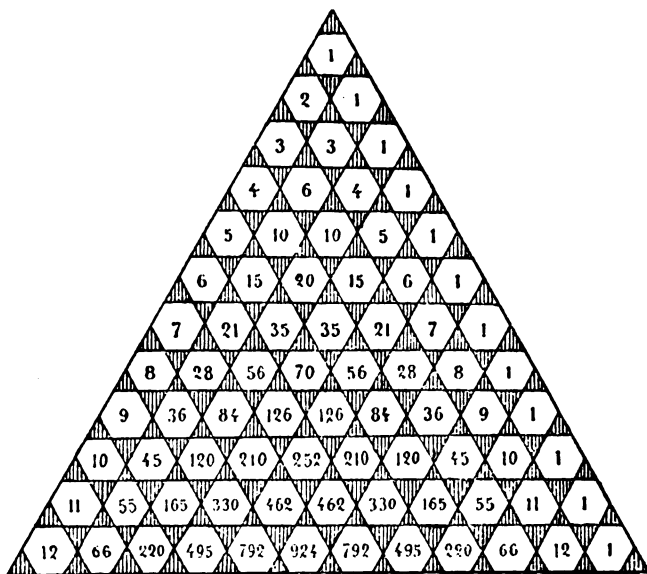



Fig. 44.

sintomo del bisogno, che si faceva sentire dovunque sino dalla seconda metà del secolo XVI, di agevolare l'esecuzione dei calcoli algebrici mediante segni « ad hoc ».

293 - La stessa oscurità che avvolge le origini del frammento testè brevemente analizzato si affaccia a chi cerca d'indagare il momento nel quale il Napier si propose di scoprire espedienti per rendere meno grave il compito affidato ai calcolatori. Per sua dichiarazione egli fu indotto a occuparsi di siffatta questione avendo riconosciuto che nulla è così penoso nella matematica pratica, nè reca maggiori molestie e imbarazzi ai calcolatori, quando le moltiplicazioni, le divisioni e le estrazioni di radici quadratiche e cubiche, operazioni che, oltre ad esigere grande dispendio di tempo, sono esposte al pericolo di errori.

Il primo artificio da lui escogitato nell'indicato scopo raggiunse grande e forse immeritata fama sotto il nome di « bastoncini di Nepero ». Particolari al riguardo si traggono da un'opera dal titolo *Rabdologia*, la quale, probabilmente perchè pubblicata quando (1617) l'autore aveva

per altra ragione conseguita un'immensa rinomanza, fu onorata da edizioni e traduzioni senza numero. Egli si decise a scriverla — così egli dichiara nella prefazione — perchè molti amici, con cui egli aveva tenuto parola degli apparecchi da lui inventati, se ne erano mostrati talmente soddisfatti che quei bastoncini non tardarono di divenire di uso comune in Inghilterra. Il principio semplicissimo che serve di fondamento alla macchina calcolatrice ideata dal Napier si può esporre agevolmente immaginando dieci cartoncini rettangolari divisi ciascuno in nove quadrati. Nel quadrato superiore di ognuno sta scritta una delle cifre 0, 1, 2..., 9; ciascuno degli altri è diviso, mediante una diagonale, in due parti, destinate una alle unità, l'altra alle decine. La figura 45 riproduce i cartoncini relativi ai numeri 2, 0, 8, 5, posti a contatto e accompagnati da un quinto cartoncino nelle cui caselle (nessuno bipartito) stanno scritte le cifre 1, 2..., 9; il cartoncino relativo al numero 2 contiene, sotto a questo numero, i suoi prodotti per i primi nove numeri naturali; similmente dicasi riguardo a quelli intitolati 0, 8, 5. I cartoncini così disposti danno i primi nove multipli del numero 2085, quando si convenga di addizionare i numeri situati nel medesimo parallelogrammo; così, volendo il prodotto per 6 noi troviamo in corrispondenza 0,8 + 3,0 + 4,2,1 che dànno 0, 1, 5, 2, 1, cioè, in ordine inverso le cifre del prodotto 6 × 2085 = 12510. Se ora si vuole moltiplicare 2085 per un numero di più cifre, ad es. per 736, dalla stessa figura noi tragghiamo i prodotti di 2085 ordinatamente per 6, 3, 7 i quali devono essere addizionati come sta qui scritto:

Fig. 45.

$$\begin{array}{r} 12510\phantom{00} \\ 6255\phantom{0} \\ 14595\phantom{000} \\ \hline 1534560 \end{array}$$

in tal modo qualunque moltiplicazione viene ad essere ridotta a una addizione.

Ciò premesso, i « bastoncini neperiani » sono parallelepipedi di legno o di altra sostanza, a base quadrata; ognuna delle facce di uno qualunque di essi è formata da nove quadrati, precisamente come uno dei cartoncini dianzi descritti. Essi sono in numero di dieci; che noi designeremo coi numeri I, II..., X; le quattro facce di ciascuno contengono i multipli dei numeri sottoindicati:

I : 0, 1, 9, 8 ; II : 0, 2, 9, 7 ; III : 0, 3, 9, 6 ;
IV : 0, 4, 9, 5 ; V : 1, 2, 8, 7 ; VI : 1, 3, 8, 6 ;
VII : 1, 4, 8, 5 ; VIII : 2, 3, 7, 6 ; IX : 2, 4, 7, 5 ;
X : 3, 4, 6, 5 .

Emerge da ciò che ogni bastoncino porta sopra due faccie opposte i multipli di due numeri complementari; la disposizione delle scritture emerge dalla figura 46 costituita dallo sviluppo della superficie laterale del V bastoncino. Le faccie dei bastoncini essendo in totale quaranta, dieci compendiano quattro serie di cartoncini quali abbiamo descritti.

Fig. 46.

294 - Il semplice apparato di cui testè tentammo di dare un'idea è largamente sufficiente nelle ordinarie contingenze della vita, ma esso è indubbiamente sproporzionato al compito diurno degli astronomi calcolatori; onde è naturale che il matematico scozzese siasi proposto di offrire a questi qualche ausiliare più raffinato e potente. Sono ignote le fasi degli studi che condussero all'invenzione dei *Numeri artificiali* o *logaritmi* (secondo il neologismo da lui introdotto nella scienza), che egli fece conoscere nel 1614 nell'opera famosa dal titolo *Mirifici logarithmorum canonis descriptio,* frutto di un ventennio d'indefesso lavoro. Ma è naturale pensare che egli riguardasse l'addizione e la sottrazione come operazioni ulteriormente irriducibili; è lecito ritenerlo esaminando il meccanismo dei suoi bastoncini, ove la parte riserbata al calcolatore è appunto l'addizione; ma vi sono altri fatti che confermano tale supposizione. Anzitutto a quel concetto s'ispirò l'astronomo Antonio Magini (v. p. 380) nel concepire e calcolare (1592) la sua *Tavola tetragonica*: infatti questa consiste in una serie formata dai quadrati dei numeri naturali, col mezzo della quale il calcolo del prodotto di due numeri è ridotto a quello di una differenza, grazie all'identità

$$a\,b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Inoltre lo stesso concetto è il fondamento della prostasferesi, che, appunto nell'epoca neperiana, cominciava ad essere largamente conosciuta e usata dai calcolatori. Si tenga finalmente presente che nell'*Arenario* di Archimede (v. p. 186) trovasi applicata una proposizione che oggi si esprime mediante la formola

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}, \tag{1}$$

donde emerge che *almeno per certi numeri privilegiati* la moltiplicazione può ridursi a un'addizione, e che corrispondenti metamorfosi possono subire la divisione, l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice. Ora è presumibile che il Napier siasi proposto di estendere la portata della relazione anche ad esponenti non interi e positivi, mediante una operazione nel fondo identica a un'interpolazione. Tale intento sarebbe stato raggiunto quando si fosse dimostrato che qualunque numero $N$ si può riguardare come una potenza di 10 (o di altro numero costante), purchè l'esponente sia scelto convenientemente. Detto « logaritmo di N » quell'ipotetico esponente, la questione veniva ridotta a dimostrare che

a ogni numero $N$ compete un logaritmo e poi a calcolarlo. Questo teorema di esistenza non fu enunciato e tanto meno dimostrato dal nostro autore, ma tacitamente applicato con quel sereno coraggio che è una delle più spiccate caratteristiche del genio. Inoltre, fondandosi sul paragone fra due progressioni, geometrica l'una e aritmetica l'altra, che già incontrammo in un'opera dello Stiefel (v. p. 333), potè stabilire la proposizione fondamentale secondo cui se quattro numeri formano una proporzione geometrica i loro logaritmi costituiscono una proporzione aritmetica. Del resto, tutta la relativa teoria si presenta nell'opera di Napier sotto forma totalmente differente da quella nella quale viene oggi esposta in tutti i manuali scolastici.

295 - L'accoglienza che ricevette l'invenzione neperiana è quale essa ben meritava. Edoardo Wright (1560-1615), matematico al servizio della Compagnia delle Indie e noto come viaggiatore audace e cartografo eminente, ne misurò subito la cospicua portata pratica e se ne mostrò talmente entusiasta da proporre che l'uso dei logaritmi fosse adottato da tutti i calcolatori. A tale scopo tradusse in inglese la *Descriptio*; il suo scritto, inviato in esame al Napier, ne ottenne un'approvazione così completa che egli volle arricchirlo di una propria prefazione; la sopravvenuta morte del Wright ne ritardò la stampa, che fu completa soltanto nel 1616.

Fortuna volle che un giudizio analogo sull'invenzione neperiana fosse pronunciato da Enrico Briggs (n. nel febbraio 1556 nei pressi di Halifax, m. a Oxford il 26 gennaio 1630), il quale allora insegnava nel Gresham College di Londra e che poi (1619) fu il primo titolare della cattedra di geometria fondata a Oxford da E. Savile. Egli non esitò a proclamarla originale e meravigliosa e si propose di dedicare tutta la sua vita a diffonderla e perfezionarla. A tale scopo nel 1615 fece al Napier una visita, che si protrasse per un mese; una seconda ebbe luogo nel seguente anno, e una terza sarebbe avvenuta nel 1617 ove nel frattempo il grande inventore non fosse morto.

È nel corso della sua prima visita che il Briggs suggerì una modificazione al sistema neperiano la quale ebbe per definitivo risultato la creazione dei logaritmi a base 10, dopo che il Napier vi ebbe dato il proprio assenso. Il Briggs stesso intraprese i calcoli relativi e nel 1617 pubblicò l'opera intitolata *Logarithmorum chilias prima,* ove sono calcolati con 8 decimali i logaritmi dei primi mille numeri; sette anni più tardi egli diede un importante complemento a questo lavoro, pubblicando l'*Arithmetica logarithmica,* ove si trovano i logaritmi con quattordici decimali dei numeri da 1 a 20 mila e da 90 mila a 100 mila; da essa si apprendono eziandio i procedimenti di calcolo adoperati e, sopra svariati e interessanti esempi, l'utilità dei logaritmi. Nel frattempo (1619) era stata pubblicata per cura di Roberto Napier, figlio dell'inventore dei logaritmi, l'altra fondamentale opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio,* dalla quale si apprendono i particolari dei calcoli i cui risultati trovansi esposti nella citata *Constructio.*

296 - Alla diffusione sul continente del nuovo metodo di calcolo contribuì assai efficacemente un gentiluomo olandese, Adriano Vlacq, n. a Gouda nei primi anni del secolo XVII. Non soltanto egli ristampò e tradusse gli scritti del Napier e del Briggs, ma completò i calcoli eseguiti da quest'ultimo, determinando i logaritmi con 10 decimali dei numeri compresi fra 20 mila e 90 mila. Inoltre con la sua *Trigonometria artificialis* — contenente i logaritmi, pure con dieci decimali, delle linee trigonometriche — egli si procurò la soddisfazione di vedere i logaritmi non soltanto diffondersi in Europa, ma giungere persino in Cina, grazie alle innumerevoli edizioni e traduzioni che ebbe la principale delle sue fatiche.

297 - Le due grandi opere del Napier possiedono una cospicua importanza anche riguardo alla trigonometria, giacchè il matematico scozzese non ritenne indegno di sè lo scendere in alcuni particolari per agevolare l'applicazione della sua invenzione alla ricerca degli elementi incogniti di triangoli piani o sferici.

Nulla vi è da dire riguardo ai triangoli piani rettangoli, perchè le relazioni che passano fra i loro lati e angoli sono immediatamente calcolabili per logaritmi; soltanto si può notare che, scrivendo sotto forma di equazioni le relazioni che dianzi solevansi porre sotto forma di proporzioni, il Napier ha introdotto il sistema delle equazioni trigonometriche. Pure calcolabili per logaritmi sono il teorema dei seni e la celebre formola del Finck

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Per ottenere lo stesso risultato riguardo al teorema del coseno per un triangolo qualunque $ABE$, il nostro autore introduce la nozione di « basis alterna »; questo nome è da lui dato (Fig. 47) al segmento $CE = a_1$ che si ottiene descrivendo col centro in $A$ la cinconferenza avente per raggio il minore dei segmenti $AB$, $AE$; allora la equazione

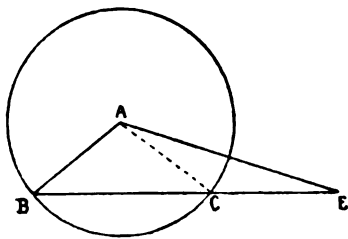



Fig. 47.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos B$$

assume il seguente aspetto

$$\log(b+c) + \log(b-c) = \log a + \log a_1,$$

epperò soddisfa alla condizione suindicata.

Riguardo alla trigonometria sferica il Napier ha il merito di avere compendiate in un enunciato unico le relazioni, scoperte da Viète, che hanno luogo fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo; tale risultato fu conseguito mediante una figura che destò l'ammirazione di Gauss, il quale la designò col nome di « pentagramma mirificum ».

Per risolvere un triangolo sferico di dati lati il Napier scrisse le for-

mole oggi classiche

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} c}},\ \text{ecc.}$$

sotto la forma

$$2\log\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\log\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}+\log\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}-$$
$$-\left\{\log\operatorname{sen} b+\log\operatorname{sen} c\right\},\ \text{ecc.}$$

A lui debbonsi poi le importanti relazioni, dette oggi « analogie di Napier »,

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}},\ \text{ecc.}$$

che però egli scrisse dopo di avere presi i logaritmi dei due membri; le formole analoghe, che se ne traggono considerando il triangolo supplementare, furono scoperte dal Briggs. Stabilendo queste relazioni il Napier mosse un nuovo passo nella via che egli percorse durante tutta la sua vita, sotto l'impulso del desiderio di rendere più facili e più sicure le calcolazioni che, col progredire della ricerca astronomica, aumentavano costantemente di ampiezza e d'importanza.

## J. Bürgi

298 - Alcuni storici si credettero in diritto di contestare al Napier la gloria dell'invenzione dei logaritmi, attribuendola invece al matematico svizzero Jobst (Giusto) Bürgi (1552-1632 o 33) [1], il quale nel 1620 pubblicò delle tavole di numeri analoghi, le quali sarebbero state calcolate negli anni 1603-1611, cioè prima della pubblicazione della *Descriptio* neperiana. Ma giustizia impone si tenga presente che quest'opera rappresenta il compimento di ricerche le cui origini si fanno risalire a vent'anni prima. Tutto, dunque, fa credere che si sia in presenza di una di quelle coincidenze fortuite che servono di fondamento all'opinione

---

[1] Di questo matematico, a cui nocque l'ignoranza del latino, già citammo i contributi alla prostasferesi (p. 374) e al problema della moltiplicazione degli archi (p. 376).

che le scoperte avvengono quando i tempi sono maturi; e va osservato che alla ricerca di espedienti intesi ad abbreviare e alleggerire i calcoli aritmetici si doveva essere naturalmente spinti esaminando i frutti delle immani fatiche durate dai costruttori di tavole delle funzioni circolari. Quello che merita di essere rilevato è che il Bürgi, come il Napier, s'inspirò all'esempio dato da Stiefel, di considerare simultaneamente una progressione aritmetica e una geometrica; ma quelle da lui usate sono differenti da quelle utilizzate dal matematico scozzese; donde un nuovo argomento per ritenere la completa indipendenza dei due matematici.

## P. A. Cataldi

299 - Mentre il Napier arricchiva l'aritmetica di un ultrapotente ausiliare di calcolo, un professore della gloriosa Università di Bologna, degno successore di Scipione dal Ferro, prendendo forse le mosse da un passo dell'*Algebra* del Bombelli, segnalava una procedura di calcolo destinata a prendere posto accanto alle somme d'infiniti addendi e ai prodotti d'infiniti fattori, fra gli algoritmi utili alla valutazione approssimata di numeri irrazionali. Parliamo di Pietro Antonio Cataldi, nato a Bologna il 25 aprile 1552, professore prima a Firenze, poi a Perugia, e nel patrio Ateneo a partire dal 1583 sino alla sua morte avvenuta l'11 febbraio 1626. Fra le trenta pubblicazioni grazie a cui egli seppe conservare la cattedra ottenuta in patria [1], quella che forse pone in più chiara luce la forza e originalità del suo pensiero è l'opuscolo intitolato *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri,* chè ivi per la prima volta vengono usate le frazioni continue, anzi sotto una forma più generale della consueta giacchè i numeratori non sono costantemente eguali a 1. Benchè il Cataldi, adottando le abitudini del tempo, non esponga in termini generali la procedura da lui usata [2] per estrarre mediante frazioni continue la radice quadrata di un numero $N$, che egli scrive sotto la forma $a^2 + b$ ($a$ essendo il massimo quadrato contenuto in $N$), è facile vedere che egli parte dal valore approssimato $M = a - \frac{b}{2a}$ e applica poi una trasformazione analoga alla differenza $N - M^2$ e così prosegue, arrivando in tal modo a un risultato equivalente al seguente:

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \dots}} \quad ;$$

ad esempio egli trova così

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \dots}} \quad , \quad \sqrt{32} = 5 + \cfrac{7}{10 + \cfrac{7}{10 + \dots}} \quad .$$

[1] L'elenco completo di esse trovasi nella *Biblioteca matematica italiana* del Riccardi (p. 302-310).

[2] Se ne era servito prima il Bombelli.

Calcolando in ogni caso grande numero di ridotte consecutive egli giunge a risultati di cui la complicazione attenua l'utilità; valga a provarlo il seguente valore di $\sqrt{78}$:

$$8 \frac{3073763825935885490683681}{3695489834122985502126240}.$$

Questa espressione tanto complessa induce a credere che il Cataldi non abbia osservato che le frazioni continue offrono un mezzo eccellente per esprimere comodamente i rapporti fra numeri di molte cifre. Tale osservazione venne fatta poco dopo (1625) in un caso speciale e senza pretese di originalità, da un professore dell'Università di Altdorf, Daniele Schwenter (n. in detta città il 31 gennaio 1585, m. ivi il 19 gennaio 1636), il quale, certamente contro ogni sua aspettazione, fu in conseguenza decorato del nome di «secondo inventore» delle frazioni continue.

Ritorniamo al nostro connazionale per osservare che a lui non rimase ignota la legge di formazione delle ridotte successive, nè gli sfuggì, almeno in casi speciali, il fatto importante che due ridotte consecutive sono una maggiore (*eccedente*) e l'altra minore (*scarsa*) del numero che vuol calcolare. Per altre osservazioni da lui fatte, ci è forza rinviare il lettore all'opera originale.

300 - Alcune delle altre pubblicazioni cataldiane hanno uno scopo esclusivamente didattico (tale una sua edizione di Euclide e due volumi di soggetto algebrico), onde non esigono un esame speciale, ma altre meritano da parte nostra un cenno, sia pure fugace. In una egli mostra di cullarsi nella dolce illusione di avere resa perfetta la teoria delle parallele, definendo queste come linee equidistanti; la scrisse tanto in latino quanto in italiano e ne pose quattrocento copie a disposizione gratuita di chi vi s'interessasse [1]. In un'altra egli riesaminò, dal punto di vista dell'esattezza, la costruzione del pentagono equilatero inventata dal Dürer (v. p. 360). In una terza egli si propose di agevolare l'applicazione della regola data da Euclide (v. p. 46) per costruire numeri perfetti (alludiamo a quella che traducesi nella formola $N = (2^n - 1) 2^{n-1}$), che presentava e tuttora offre difficoltà, perchè esige si riconosca se il numero $2^n - 1$ sia o non primo, come emerge dal fatto che rilevammo, di alcuni usi erronei di essa in opere apprezzate e diffuse. Ora il Cataldi fa l'osservazione, ovvia ma utilissima, che affinchè $N$ sia un numero perfetto è necessario (ma non sufficiente) che $n$ sia un numero

---

[1] La surriferita definizione di rette parallele s'incontra già prima in Clavio, come già rilevammo (vedi p. 386); quantunque questi non sia citato, è improbabile che sia rimasto ignoto al professore bolognese, data la grande notorietà di quell'autore. La stessa osservazione va fatta relativamente all'opera *Della nuova geometria* di Francesco Patrici (n. nel 1529 a Clisso [Istria] e m. nel 1597 a Roma). L'autore, nel tempo in cui insegnava nell'Università di Ferrara, credette di avere scoperta la via regia per giungere alla conoscenza della matematica, che re Tolomeo aveva chiesto indarno a Euclide, e pieno di gioia ed orgoglio la rivelò in quel volume: nel quale però si cerca indarno, fra una congerie di divagazioni metafisiche, qualche idea di vero pregio e di indiscutibile originalità.

primo; ciò gli permise di riconoscere subito che un numero dato come perfetto dal Pacioli (v. p. 277) perfetto non è. Basandosi su quella osservazione il Cataldi determinò esattamente i primi sette numeri perfetti, e per agevolare i futuri calcoli dello stesso genere espose una tabella dei divisori di tutti i numeri compresi nell'intervallo 1... 750, aggiungendovi come corollario l'elenco dei numeri primi che cadono entro gli stessi limiti. Va anche rilevato che in un'Aggiunta il matematico bolognese esaminò un'opera (*Liber de numeris perfectis*) sullo stesso argomento pubblicata a Parigi nel 1510 da un matematico a noi già noto (p. 313 e 330), Carlo de Bouvelles (1470-1533), rilevandone gli errori e munendo di convincenti dimostrazioni alcuni enunciati che vi si leggono. Precisamente il Cataldi dimostrò non esser vero: 1° che $2^n - 1$ è primo se termina con 1 o 7; 2° che se il numero $2^n$ termina con 4 o 6 la formola euclidea dà un numero perfetto; 3° che i numeri perfetti terminano alternativamente con 6 e 8; 4° che tutti i numeri delle forme $6n \pm 1$ sono numeri primi. Per converso il Cataldi dimostrò avere il de Bouvelles a ragione affermato che, se $N$ è un numero primo, uno dei numeri $N \pm 1$ è divisibile per 6 e che la somma delle cifre di un numero perfetto divisa per 9 dà per resto 1. Si può, quindi, affermare che l'opuscolo del Cataldi rappresenti la prima effettiva aggiunta che sia stata fatta alla teoria dei numeri perfetti euclidei.

Il Cataldi, oltre proporsi nuovi problemi, fu studiosissimo di quanto veniva allora pubblicato in Italia e fuori. Ciò gli diede occasione (come testè vedemmo) di rilevare e rettificare errori registrati in pubblicazioni del tempo. Così, alla vigilia della sua morte, difese Euclide contro lo spagnolo Molina Cano, il quale nell'opera dal superbo titolo *Descubrimintos geometricos* (Amberes, 1598; tradotta in latino nel 1620) aveva, fra l'altro, negato che la retta perpendicolare al raggio di un cerchio nel suo estremo fosse tangente al cerchio stesso. Prima aveva difeso Archimede contro Giuseppe Scaligero, che, come sappiamo (v. p. 382), intese dimostrare essere $\pi = \sqrt{10}$; a tale scopo egli rifece il calcolo dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad un cerchio, giungendo così a confermare il risultato ottenuto dal Siracusano. Finiamo notando che il Cataldi, in luogo di parentesi, usa le due *L*, una diritta e l'altra rovescia, cioè il sistema che incontrammo in Bombelli (p. 316); perciò si può dire che i miglioramenti da lui arrecati alla nostra scienza concernono più la sostanza che la forma, nulla avendo egli fatto per accelerare la metamorfosi che andava ai suoi tempi incessantemente subendo la simbolica algebrica.

## Galileo Galilei

301 - Alla scarsità di particolari biografici relativi all'inventore dei logaritmi fa stridente contrasto la perfetta conoscenza dei casi della vita dell'istauratore del metodo sperimentale. Ciò non deve recare meraviglia, perchè, mentre il Napier visse in un paese che non era allora riguardato come importante centro di studi e quindi non ebbe commercio diretto con gli scienziati continentali del suo tempo, il nostro illustre

connazionale, professando in Atenei celebri in tutto il mondo ed essendo ospite di potenti della terra, attrasse gli sguardi di tutti coloro a cui stanno a cuore le scienze e le loro applicazioni. Si aggiunga che le scoperte fatte in cielo colpiscono le masse ben più dei procedimenti di calcolo, e che i perfezionamenti arrecati da Galileo al patrio linguaggio, creando la prosa scientifica, gli fecero accordare un posto nelle storie della letteratura italiana [1]; si noti da ultimo che le contese che egli ebbe con privati, e specialmente la lotta con la Chiesa in cui fu impigliato, gli fecero accordare un posto eminente nel Pantheon dei martiri per la libertà di pensiero. Per tutti questi motivi doveva riuscire generale la curiosità di conoscere la sua vita nei suoi più minuti particolari: noi dobbiamo limitarci a registrare alcune date che lo concernono.

Egli nacque il 15 febbraio 1564 in una famiglia cospicua, ma caduta in basso stato; il padre (che gli insegnò a ribellarsi contro il principio d'autorità) lo aveva destinato alla medicina, epperò inviato nel 1583 a studiare nell'Università di Pisa. Sino a vent'anni egli rimase del tutto digiuno di matematica, ma, non appena ne ebbe appresi i rudimenti, decise di abbandonare Ippocrate e Galeno per Euclide e Archimede; e gli è appunto dal Siracusano che egli (seguendo il consiglio di G. del Monte), trasse ispirazione per le ricerche baricentriche, che contrassegnano il suo ingresso nell'arringo scientifico. Scopo di tali ricerche era di perfezionare le aggiunte fatte dal Commandino (v. n. 261) agli scritti stereometrici di Archimede. Ora è da credere che la necessità di tali miglioramenti fosse allora generalmente sentita se, contemporaneamente a Galileo, pensò di soddisfarla un egregio insegnante dell'Università della Sapienza, Luca Valerio (n. a Napoli di padre ferrarese nel 1552, m. a Roma il 17 gennaio 1618), il quale vi dedicò le due eccellenti opere *De centro gravitatis solidorum libri tres* (Roma, 1604) [2] e *Quadratura parabolae per simplex falsum* (Ivi, 1606). Avuta notizia di questi lavori del « novello Archimede » (come Galileo ebbe a chiamare il Valerio), il giovane geometra decise di lasciare inedito quanto aveva pensato e scritto; si decise a renderlo di pubblica ragione soltanto verso il tramonto della sua esistenza, in appendice ai suoi *Dialoghi sopra due nuove scienze*.

302 - Riprendiamo dopo questa disgressione, la narrazione dei casi della vita di Galileo; essendo riusciti infruttuosi vari tentativi da lui fatti per ottenere una cattedra a Padova, si acconciò ad accettare un modesto ufficio in quella di Pisa, che gli fu conferito dietro suggerimento del marchese del Monte. Ma, prima che fosse spirato il triennio fissato, egli ottenne (26 settembre 1592) l'ambita « lettura » nell'Ateneo patavino, con stipendio in origine modesto, ma che andò gradatamente aumentando durante i diciotto anni che egli passò al servizio della Repubblica Veneta. Benchè questa, con provvedimento insolito (e giusti-

[1] Questa faccia dell'attività galileiana, su cui noi non possiamo dilungarci, è largamente studiata nel volume di L. Olschki, *Galileo und seine Zeit* (Halle, 1927).

[2] Ivi i vocaboli *abscissae* e *ordinatim applicatae* sono per la prima volta usati nel senso di ascissa e ordinata.

ficato dalle clamorose scoperte astronomiche fatte da Galileo servendosi del cannocchiale che porta il suo nome), lo avesse confermato « a vita » nella cattedra, Galileo lasciò Padova (10 luglio 1610) per trasferirsi a Firenze in qualità di « primario matematico dello Studio di Pisa e primario matematico e filosofo del Granduca di Toscana ». Mentre il soggiorno di Galileo a Padova non presenta altri episodi notevoli se non le grandi scoperte che egli andava incessantemente compiendo, agitatissimi furono gli anni fiorentini, per le critiche incessanti a lui rivolte da malevoli invidiosi; sicchè egli in una delle più celebri sue opere polemiche (*Il saggiatore*) melanconicamente osservava: « Io non ho mai potuto intendere onde sia nato, che tutto quello che de' miei studi, per aggradire, o servire altrui, mi è convenuto mettere in pubblico, ebbe incontrato in molti una certa animosità in detrarre, defraudare e vilipendere quel poco di pregio, che se non per l'opera, almeno per l'intenzione mia mi ero creduto di meritare ». Fu la segreta simpatia che trapela dai suoi scritti per il sistema astronomico copernicano che i suoi nemici prescelsero per colpirlo, e fu durante un suo soggiorno a Roma che egli dovette presentarsi al Sant'Uffizio (26 febbraio 1616) per avere comunicazione di un decreto, emanato tre giorni prima, nel quale dichiaravasi stolta e assurda in filosofia e formalmente eretica la proposizione che il sole sia centro del mondo e immobile. A questo episodio (detto di consueto « primo processo di Galileo ») non si arrestarono i suoi nemici. L'occasione per sferrare una nuova offensiva fu loro offerta dai *Dialoghi sopra i massimi sistemi Tolemaico e Copernicano*; facendo credere al Cardinale Barberini, divenuto papa Urbano VIII, che nel personaggio di Simplicio, Galileo avesse inteso effigiarlo, lo trasformarono da ammiratore sincero in acerrimo nemico. Da ciò la nuova più grave condanna (21 febbraio 1632) (¹) e il carcere nei pressi di Firenze, che egli dovette subire, ad onta della sopravvenuta cecità (autunno del 1637) e di altri gravi acciacchi, sino al termine della sua gloriosa ma tribolata esistenza (8 gennaio 1642). Neppure la morte del sommo pensatore disarmò i suoi implacabili nemici, chè alla Corte di Toscana fu imposto di abbandonare il progetto, da essa accarezzato, di elevare a lui un degno monumento.

303 - Se a Platone si è accordato un posto nella storia delle matematiche (v. p. 37) per le esortazioni da lui date allo studio di esse, con frasi entusiastiche in loro onore, altrettanto devesi fare per Galileo, il quale scrisse che « è forza confessare che il voler trattare le questioni naturali senza geometria è un tentar di fare quello che è impos-

(¹) Secondo una voce largamente diffusa, il grande scienziato, non appena ne ebbe conoscenza, avrebbe esclamato, di fronte ai suoi giudici, *Eppur si muove!* Questo aneddoto sembra ben poco verosimile perchè nelle condizioni fisiche e morali in cui egli si trovava, ben difficilmente poteva trovare in sè stesso la forza e il coraggio per affrontare una nuova volta il terribile tribunale che lo aveva condannato. L'aneddoto in questione s'incontra, forse per la prima volta, in un volume di un profugo italiano vivente in Inghilterra, *The Italian Librairy* (London, 1757) di GIUSEPPE BARETTI (1719-1780), donde si diffuse in tutto il mondo.

sibile esser fatto », chè « il discorso matematico serve a schivar quegli scogli, ne' quali talvolta il puro fisico porta pericolo d'incontrarsi e rompersi ». Altrove ironicamente plaudiva il costume dei « peripatetici, di distorre i loro scolari dallo studio della geometria perchè non ci è arte alcuna più accomodata per scoprire le fallacie loro ». In altra occasione dichiarò: « Non convien egli confessare, la virtù della geometria esser il più potente strumento d'ogni altro per acuir l'ingegno e disporlo al perfettamente discorrere e specolare e che con gran ragione voleva Platone i suoi scolari ben fondati nelle matematiche? ». Talmente radicato era in lui il convincimento intorno alla fecondità del connubio della matematica con la fisica che, nel desiderio (che rimase inappagato) di vedere raccolte in un *corpus* tutte le sue opere, lasciò le frasi seguenti da porvisi come motto: « Di qui si comprenderà in infiniti esempi quale sia l'utilità delle matematiche in concludere circa alle proposizioni naturali, e quanto sia impossibile il poter bene filosofare senza la scorta della geometria, conforme al vero pronunciato da Platone ».

Ma, da quanto stiamo per dire, risulteranno ben altre ragioni per parlare in quest'opera del sommo fisico e astronomo.

304 - Infatti la sua prima pubblicazione (1606) ha un tema che sta sul confine tra matematica pura e matematica applicata. Ha per soggetto *Le operazioni del compasso geometrico e militare*, apparato che è un perfezionamento del « compasso di proporzione » ideato da Guidobaldo del Monte ([1]). Come curiosità notiamo che di esso si cerca indarno una descrizione e una figura illustrativa nel citato volume ([2]); la ragione sta in ciò che ad ogni acquirente dello stesso veniva dato un modello di quell'ordigno; in conseguenza il testo è redatto nell'ipotesi che il lettore lo abbia tra mano e le soluzioni dei problemi pratici risolti col suo aiuto sono semplicemente enunciate, ammettendo che sulla loro esattezza niun dubbio poteva sorgere in chi le eseguisse secondo i dettami galileiani ([3]).

Se tutto il contenuto di questo lavoro offre oggi un interesse molto limitato, ben diverso doveva essere il giudizio dei contemporanei, se un giovane patrizio milanese, Baldassare Capra, attinse informazioni intorno alla struttura e all'uso di quello strumento, non seppe resistere alla tentazione di farne oggetto di un lavoro con pretese di originalità. Galileo non era uomo da soffrire soprusi; onde, non soltanto difese me-

---

([1]) Scopo analogo, ma struttura ben diversa ha il *pantometro* di M. Coignet (v. p. 380), come emerge dalla figura annessa alla nota di A. Favaro, *Per la storia del compasso di proporzione* (Atti del R. Istit. Veneto, T. LXVII, 1908).

([2]) Parecchie riuscitissime figure si trovano nella ristampa dell'opuscolo galileiano facente parte del Vol. II dell'edizione nazionale delle *Opere* di Galileo.

([3]) Una descrizione del compasso geometrico e militare e la dimostrazione delle soluzioni date da Galileo si trovano in alcune *Annotazioni* di Matteo Bernegger, pubblicate per la prima volta a Bologna nel 1656 e riprodotte nei t. I dell'edizione delle *Opere* di Galileo che fa parte della « Collezione dei Classici italiani ». L'autore (n. a Hallstadt (Austria) l'8 febbraio 1582, m. a Strasburgo il 3 febbraio 1640), benchè non sia mai stato in Italia, va considerato come benemerito discepolo di Galileo, avendone tradotte in latino parecchie opere.

diante la stampa i suoi diritti di proprietà, ma ricorse ai tribunali; e il magistrato veneto non esitò a proclamare il plagio commesso dal Capra, condannandone l'infelice scrittura al sequestro e alla distruzione.

305 - Altri elementi per considerare Galileo quale matematico sono offerti dai frutti che egli raccolse dallo studio delle opere archimedee; tacendo che così egli fu condotto a inventare la bilancia idrostatica (da lui modestamente chiamata « bilancetta »), vanno ricordate alcune pregevoli postille ai libri *Sopra la sfera e il cilindro,* rintracciate fra le carte da lui relitte. La medesima origine hanno i suoi studi sopra gli « indivisibili », vocabolo da lui tolto a prestito dal Bradwardine (v. p. 243) per usarlo in luogo di « atomi », la cui troppo evidente derivazione dal greco feriva il delicato orecchio di chi preferì sempre il termine « supposizione » all'ellenismo « ipotesi ».

Tali studi avevano per oggetto la costituzione della materia e dovevano dare l'argomento a un'opera speciale di cui è ripetutamente parola nel carteggio tenuto da Galileo col suo grande discepolo Bonaventura Cavalieri (v. le lettere di quest'ultimo in data 21 marzo 1626, 4 aprile 1626, 10 gennaio 1634) (1); altre ricerche e i dolori fisici e morali gli vietarono di effettuare questo progetto. Ma che egli abbia meditato anche sopra l'intervento dell'infinito in matematica risulta da alcuni passi dei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze.* Vi si trova anzitutto una pagina in cui egli vuole « farci accorti quanto gravemente si erri mentre altri voglia discorrere intorno agli infiniti con quei medesimi attributi che noi usiamo intorno ai finiti, le nature dei quali non hanno veruna convenienza fra loro ». E per mettere in luce questa osservazione egli cita il fatto che, mentre ad ogni numero della serie naturale corrisponde un quadrato determinato e unico, i quadrati sono sempre più rari di mano in mano che procedesi nella serie anzidetta: i paradossi dell'infinito affiorano sin da questo momento nella scienza!

Nei medesimi *Discorsi* s'incontrano due genesi meccaniche della parabola: una esatta e notevole, l'altra irremissibilmente errata; infatti, secondo Galileo, è una parabola la traiettoria di un punto pesante libero su un piano inclinato, il che è vero; ma è falso che sia una parabola la posizione secondo cui si dispone una fune omogenea pesante fissata per i suoi estremi (oggi è noto che trattasi invece di una catenaria).

La stessa opera contiene un altro passo prettamente geometrico, che giudichiamo riferire, dopo di avere notato che alcune allusioni che vi si trovano al principio fondamentale della geometria degli indivisibili del Cavalieri non possono giudicarsi come un'antecipazione, dal momento che i *Discorsi* galileani furono pubblicati tre anni dopo la *Geometria degli indivisibili.*

(1) Secondo un appassionato biografo del sommo fiorentino, G. B. Nelli, il calcolo degli indivisibili sarebbe completamente opera di Galileo; ma, a quanto ci consta, si tratta di un'opinione che, tranne il Libri, per quanto crediamo, nessuno condivise nè condivide.

« È necessario farne la figura, perchè la prova è pura geometria. Per tanto intendasi (Fig. 48) il mezzo cerchio *A F B*, il cui centro *C*, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo *A D E B*, e dal centro ai punti *D E* siano tirate le linee *C D*, *C E;* figurandoci poi il semidiametro *C F*, perpendicolare a una delle due *A B*, *D E* immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura: è manifesto che dal rettangolo *A D E B* verrà descritto un cilindro, dal semicerchio *A F B* una mezza sfera, e dal triangolo *D C F* un cono. Inteso questo, voglio che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella; della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali; e poi, un piano tirato parallelo al cerchio che è base della scodella, il cui diametro è la linea *D E* e centro *F*, dimostreremo, tal piano, che passasse, v. g., per la linea *G N*, segando la scodella nei punti *G*, *I*, *O*, *N*, ed il cono ne' punti *H*, *L*, tagliare la parte del cono *C H L* eguale sempre alla parte della scodella, il cui profilo ci rappresentano i triangoli *G A I*, *B O N*; e di più si proverà la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio il cui diametro è *H L*, essere eguale a quella circolar superficie che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza quanta è la linea *G I* (notate intanto che cosa sono le definizioni dei matematici, che sono una imposizione di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate ed introdotte per levar lo stento tedioso e che voi ed io sentiamo di presente per non aver convenuto di chiamare, v. g., questa superficie nastro circolare, e quel solido acutissimo della scodella rasoio rotondo): or comunque vi piaccia chiamargli, bastivi intendere che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, purchè sia parallelo alla base, cioè al cerchio il cui diametro *D E* taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono *C H L*, e la superficie parte della scodella, eguali tra loro, e parimenti le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro e il cerchio *H L*, pur tra loro eguali ».

Fig. 48.

La natura matematica dell'opera in discorso viene confermata dalla circostanza che Galileo aveva in animo di aggiungervi una Giornata relativa alla teoria dei rapporti e delle proporzioni; vedremo più avanti (n. 325) che il relativo schizzo fu utilizzato da un suo discepolo; perciò Galileo va annoverato fra i numerosi commentatori del V Libro di Euclide.

Chiuderemo quanto concerne il sommo fisico fiorentino notando che le considerazioni prettamente matematiche da lui istituite sulla stima di un cavallo devono essere tenute presenti da chi intende applicare la matematica a casi della vita; e che alcuni calcoli trovati fra le sue carte, per determinare il numero delle volte in cui si può ottenere un punto assegnato gettando tre dadi, gli accordano un posto anche nella preistoria del calcolo delle probabilità.

## G. Kepler

306 - Non meno tribolata dell'esistenza di Galileo fu quella dell'altro luminare dell'astronomia nei primordi del secolo XVII: Giovanni Keppler o Kepler, secondo la grafia più comune. Egli nacque a Weil der Stadt (Württemberg) il 27 dicembre 1571 da povera famiglia protestante; sin dall'epoca in cui frequentava le scuole secondarie diede prova di così fervido ingegno da attrarre su di sè l'ammirazione dei maestri. Recatosi nel 1589 a Tübingen per studiarvi teologia in quel seminario, passò poco dopo all'Università, ove destò l'attenzione dell'astronomo M. Moestlin (1550-1631) che, insegnandogli il sistema copernicano, lo orientò verso la scienza in cui doveva illustrarsi. Nel 1591 conseguì il grado di « magister » e nel gennaio 1594 occupò una cattedra di matematica nel ginnasio di Graz (Stiria). Iniziò le sue lezioni il 25 maggio di detto anno, ma la scolaresca era così scarsa che gli fu dato di dedicare molte ore allo studio; avendo egli anche l'obbligo di compilare il calendario, con previsioni di varia specie sopra gli avvenimenti futuri, ed avendo alcune sue predizioni avuto indiscutibili conferme, egli, che era dotato di fantasia fervidissima, fu preso nei lacci dell'astrologia, da cui non riuscì mai a emanciparsi, tanto più che questa gli fornì spesso il mezzo per combattere la miseria, altra compagna da cui non giunse mai a liberarsi. La sua prima pubblicazione astronomica (1596) lo pose in relazione con Ticone Brahe e Galileo; con questo egli stabilì allora un carteggio che non cessò se non con la sua morte; di quello chiese non indarno protezione ed appoggi quando le persecuzioni contro i protestanti gli resero impossibile il soggiorno nella cattolica Austria. Insieme al famoso astronomo danese egli, a partire dal 1599, passò a Praga qualche tempo in feconda collaborazione con lui e alla sua morte (1600) l'imperatore Rodolfo II lo nominò di lui successore, con l'obbligo di curare la stampa dei suoi scritti inediti.

307 - Benchè la scienza degli astri non entri nel piano della presente opera, pure ci corre l'obbligo di segnalare la comparsa dell'*Astronomia nova* (1609), chè ivi dallo studio del moto di Marte il Kepler fu condotto a formulare due delle leggi che portano il suo nome (ellitticità delle traiettorie degli astri e proporzionalità al tempo delle aree descritte dai raggi vettori uscenti da un fuoco); esse, mostrando l'importanza pratica delle ricerche degli antichi sulle sezioni del cono, furono stimolo potente a riprendere con rinnovato impegno le indagini su queste celebri curve.

Morto Rodolfo II, il successore Mattia mantenne il Kepler nella carica che occupava, e lo volle presso di sè nel 1613 alla Dieta di Ratisbona, ove si doveva discutere della riforma del calendario. Nel 1620 lasciò Praga per il Württemberg, onde difendere la propria madre, accusata a torto di stregoneria (riuscì effettivamente a farla assolvere). A Linz, ove si stabilì nel 1612, fu fatto segno a nuove persecuzioni da parte del clero cattolico. Sempre in cerca di una situazione lucrosa, essendo riuscito infruttuoso un tentativo da parte sua per ottenere la cattedra

di Padova già illustrata da Galileo, accettò la carica di astrologo del Wallenstein, uno degli eroi della guerra dei Trent'anni: ma ben presto si accorse che la vita del campo e le esigenze di corte non erano conformi all'indole di uno studioso di carattere indipendente quale egli era. Le controversie, da un lato con gli eredi di T. Brahe — che a torto lo accusavano di approfittare del prezioso materiale raccolto da quell'infaticabile osservatore — e dall'altro col Governo imperiale, dal quale non riusciva a riscuotere i suoi stipendi arretrati, resero tribulatissimo l'ultimo periodo di vita del sommo astronomo; sicchè la morte, avvenuta a Ratisbona il 15 ottobre 1630, sarebbe stata forse da lui accolta come una liberazione, ove egli non fosse stato angustiato dal pensiero di lasciare la sua famiglia nella più squallida miseria.

308 - Il titolo fondamentale del Kepler per ottenere un posto in una storia della matematica è la sua *Stereometria doliorum* (1), la quale rappresenta il primo notevole progresso compiuto in Europa dalla teoria creata da Archimede nei suoi libri *Sopra i conoidi e gli sferoidi*. È curioso notare che a scriverla il grande astronomo fu indotto, non dalla nobile ambizione di proseguire nella via aperta dal sommo Siracusano, ma da preoccupazioni di « pater familias »; trasferitosi, infatti, a Linz e contratto un secondo matrimonio, egli si trovò in Austria in un'annata in cui avevasi avuto un raccolto di vino straordinariamente abbondante, cosicchè arrivavano in quella città per via del Danubio numerose botti ripiene del dolce liquore; avendo Kepler deciso di acquistarne un certo numero per la sua famiglia, ebbe ad osservare che, per determinare il contenuto di ogni vaso vinario, il venditore (invece di fare una determinazione diretta del contenuto, come praticavasi sul Reno), si limitava a misurare, mediante una « virga mensoria » posta attraverso il cocchiume, la distanza di questo dal punto diametralmente opposto della botte (evidentemente le botti austriache erano o consideravansi come fra loro simili). Tre giorni d'intensa meditazione bastarono a scoprire la ragione di questa procedura e frutto di essa fu l'opera succitata. Per pubblicarla egli contava sull'appoggio di un personaggio noto per le sue amichevoli relazioni con Galileo, annodate durante uno dei suoi soggiorni in Italia: Marco Welser (n. in Augusta il 20 giugno 1588, m. ivi il 23 giugno 1614); ma la sopravvenuta morte di questo, e le tergiversazioni di un editore di Augusta su cui faceva assegnamento, lo decisero ad assumere egli stesso la parte di editore; così nel 1615 quell'opera potè essere pubblicata a Linz.

Essa si apre con un'esposizione di quanto gli antichi conoscevano intorno alla misura delle aree e dei volumi dei corpi rotondi; cominciando col calcolo della lunghezza della circonferenza (non soltanto in base alle ricerche di Archimede, ma anche tenendo conto del risultato conseguito da A. van Roomen (v. p. 385), secondo cui, dice Kepler un cerchio di diametro 20000000000000000 ha per circonferenza 62831853071795862) e passando poi alle figure esaminate nei libri di Ar-

(1) Anche nel *Mysterium cosmographicum* (Tübingen, 1596) si trovano considerazioni matematiche, ma improntate a un tardo misticismo pitagorico.

chimede *Sulla sfera e il cilindro*; va notato che in generale il procedere dell'astronomo moderno è molto meno rigoroso di quello usato dagli antichi, giacchè egli tratta con grande disinvoltura infiniti e infinitesimi, ritenendo, ad esempio, che la circonferenza abbia tante parti quanti punti, cioè infinite (« partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas »).

Ben più originale è il seguito ove, sotto il titolo *Supplementum ad Archimedem de stereometria figurarum conoidibus et sphaeroidibus proxime succedentium,* sono studiate le figure generate dalla rotazione di un cerchio attorno a una retta qualunque del proprio piano, o di una delle tre coniche, attorno a una retta parallela a un asse. Per classificare e denominare le superficie così nascenti da un cerchio, il nostro distingue cinque casi: I. L'asse della superficie non incontra la curva generatrice; la superficie ha la forma di un anello (« annulus »); II. L'asse è tangente alla generatrice; si ha allora un anello chiuso (« annulus strictus »); III e V. L'asse taglia la generatrice; la superficie generata ha allora la forma di una mela (« malum ») o di un limone (« malum citrum ») secondochè si considera come generatrice l'uno e l'altro dei due archi in cui l'asse decompone la data circonferenza; IV. Nel caso in cui l'asse passi per il centro del cerchio mobile, si ottiene una sfera.

Distinzioni congeneri vengono fatte quando la linea generatrice è una conica; in totale si ottengono 92 specie di superficie, a ognuna delle quali Kepler impone un nome, tratto da quelli usati per certi frutti.

Per calcolare il volume di uno dei detti solidi, egli immaginava di segarlo con infiniti piani passanti per l'asse, così decomponendolo in infiniti straterelli infinitesimi che assimilava a cilindretti; se ora s'immagina di deformare l'anello riducendolo a un cilindro col rettificare la circonferenza luogo dei centri di tutte quelle sezioni, si conclude che il volume cercato è $2 \pi d r^2$, $r$ essendo il raggio della circonferenza generatrice e $d$ la distanza del suo centro dall'asse: si ritrova dunque il ragionamento usato allo stesso scopo da Erone (v. p. 93), escludendo però qualsiasi influenza di questo (allora inedito) sopra il Kepler. Metodi così disinvolti sono però pericolosi [1]. Inoltre Kepler in un'occasione (Teor. XXV) dovette confessare di avere indarno cercato una « demonstrationem legitimam » di una proposizione da lui supposta, invitando altri a trovarla; ma tale ragionamento è irreperibile, perchè il teorema in questione è inesatto e il Kepler era stato indotto ad enunciarlo ammettendo che, quanto aveva verificato in due ipotesi di figura, sussistesse in tutti i casi intermedi di essa.

La II Parte dell'opera in esame tratta appunto la questione donde

---

[1] Ciò è confermato dal seguente esempio. Per calcolare la superficie di un emisfero di raggio $r$ Kepler considera il cono retto avente la stessa base e raggio $r$ e un secondo cono circoscritto all'emisfero e con le generatrici parallele a quelle del primo: le loro superficie laterali valgono $\pi \sqrt{2}\, r^2$ e $2 \pi \sqrt{2}\, r^2$ e Keplero ammette che la superficie dell'emisfero sia la loro media geometrica; ottiene così $\sqrt{\pi^2 \cdot 4 r^4} = 2 \pi r^2$, risultato esatto. Ma se si applicasse il medesimo ragionamento per calcolare il volume dell'emisfero si otterrebbe un risultato falso.

l'autore aveva prese le mosse avendo per titolo *Stereometria Dolii Austriaci in specie*; la conclusione a cui egli arriva è che la forma data in Austria alle botti è la più conveniente, giacchè con una data quantità di legname permette di ottenere il massimo volume. Egli, dunque, ha risolto un problema di massima, che richiama alla mente il V Libro della *Collezione matematica* di Pappo, che il Kepler non manca di citare. Si può ben dire che si trovi nella *Ster. Dol.* il primo contributo dato dai moderni alla teoria geometrica dei massimi e minimi; ad esempio il nostro dimostra che fra tutti i parallelepipedi inscritti in una sfera il massimo è il cubo. Ma ciò che è della più grande importanza è che, per giungere ai risultati a cui mirava, egli si servì del fatto che, in prossimità di un massimo, è nulla la variazione della corrispondente funzione; è un'osservazione che egli probabilmente tolse da un lavoro di N. Oresme (v. p. 247), le cui opere (giova notarlo), benchè ancora manoscritte, trovavansi allora alla portata di tutti; al Kepler rimane però sempre il merito di avere per primo ravvisato nella geniale osservazione del prelato francese il germe di un metodo di ricerca dei massimi e minimi.

309 - Di indole più elementare sono alcune pagine dell'*Harmonice mundi*, l'opera celebre specialmente perchè vi si legge la cosidetta « terza legge di Kepler » (proporzionalità fra i quadrati delle durate delle rivoluzioni planetarie e i cubi degli assi maggiori delle ellissi-trajettorie); essa direbbesi scritta da un superstite della Scuola pitagorica, chè ivi sono cercati rapporti di armonia nella geometria e nella musica, nell'architettura e nell'astrologia, nella metafisica e nell'astronomia; essa è prova di una straordinaria forza di fantasia, che in altri non avrebbe condotto che a ravvicinamenti pazzeschi, ma che guidò il Kepler al grande risultato rappresentato dalla surriferita legge di natura. Già nel I Libro dell'opera in discorso troviamo cose degne di ricordo, chè ivi è completato e ulteriormente svolto il concetto di « poligono stellato » a cui, almeno in un caso, giunse il filosofo di Samo (v. p. 30), che vedemmo essere stato ulteriormente svolto da T. Bradwardine (v. p. 244) e che lo fu poi da C. de Bouvelles (p. 406) ([1]).

Kepler distingue i poligoni (convessi e stellati) che si possono costruire con riga e compasso da quelli che esigono mezzi più elevati; in particolare si arresta sull'ettagono regolare, dimostrando che il rapporto fra il suo lato e il raggio del cerchio circoscritto è radice dell'equazione

$$7 - 14\,x^2 + 7\,x^4 - x^6 = 0.$$

Inoltre egli acutamente osservò che la molteplicità delle radici di essa corrisponde all'esistenza di tre pentagoni regolari di dati vertici, uno convesso e due stellati; fatti analoghi avvengono per gli altri poligoni, chè l'equazione analoga ha per il pentagono due radici, quattro per l'ennagono, ecc. Kepler ha, dunque, scoperto che la medesima equazione conduce ad un tempo a tutti i poligoni congeneri, convessi e stellati.

([1]) Questi, nei suoi *Geometricae introductionis Libri VI* (Paris, 1503), ha notato che i poligoni stellati si possono ottenere prolungando i lati dei poligoni convessi.

Nel II Libro della stessa opera queste considerazioni vengono estese allo spazio. Il Kepler considera anzitutto i cinque poliedri convessi, adottando la fantastica corrispondenza (v. p. 30) stabilita dagli antichi fra essi e i quattro elementi e il cosmo; accenna poi almeno ad alcuni dei poliedri semiregolari archimedei e si slancia poi a considerare le figure analoghe nello spazio ai poligoni regolari non convessi, giungendo a due dei quattro poliedri stellati (v. Fig. 49 e 50). Su altre figure dotate di parziale regolarità considerate dal nostro astronomo non ci è possibile arrestarci.

Mentre aperta ad accogliere le nuove idee per quanto rivoluzionarie, animo esente da qualunque traccia d'invidia, il Kepler, come plaudì entusiasticamente alle scoperte fatte da Galileo mediante il suo cannocchiale, seppe subito misurare la grande portata dell'invenzione dei

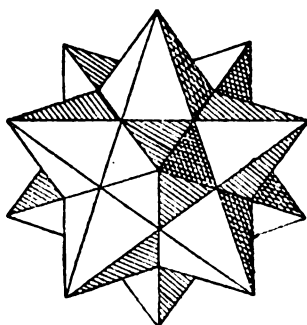



Fig. 49.

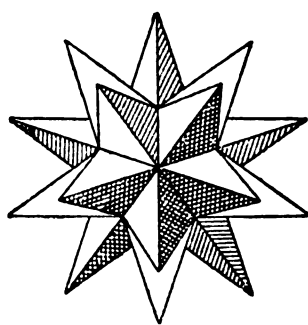



Fig. 50.

logaritmi. Va al proposito notato che, quantunque abbia convissuto parecchio tempo col Bürgi a Praga, non ebbe notizia alcuna degli studi che questi andava compiendo, onde di quel nuovo ordigno aritmetico ebbe cognizione soltanto attraverso gli scritti del Napier. Avendo però ravvisato ivi un elemento geometrico-meccanico evidentemente estraneo, si propose e riuscì a esporre la relativa teoria sotto una forma modellata su quella adottata da Euclide per il V Libro dei suoi *Elementi,* aggiungendo del suo un nuovo metodo per calcolare i logaritmi. Conosciuto che ebbe il perfezionamento arrecato dal Briggs all'invenzione neperiana, non esitò a riconoscere la superiorità dei logaritmi decimali su quelli da lui calcolati. Donde una nuova prova della nobiltà dell'animo del grande astronomo, di cui il genio e il carattere meritano in egual misura la più schietta ammirazione.

## F. d'Aguillon

310 - Dei lavori ottici del Kepler non giudicammo opportuno di tener parola perchè ivi il fenomeno della visione è studiato esclusivamente nel senso e nella misura che interessano l'astronomo osservatore [1]. La

---

[1] Tuttavia va notato che nel lavoro dal titolo *Ad Vitellionem Pèalipomena* etc. il Kepler introdusse il concetto di cerchio di curvatura e usò per primo il vocabolo *focus* nel senso oggi adoperato nella teoria delle sezioni coniche.

stessa considerazione non può nè deve applicarsi ad un mastodontico volume in-f.° stampato ad Anversa nel 1613 col titolo *Opticorum libri VI*. Ne è autore Francesco d'Aigullion (o d'Agullion); egli nacque da nobile famiglia a Bruxelles nel 1556, entrò decenne nell'Ordine dei Gesuiti, visse qualche tempo in Ispagna, insegnò matematiche ad Anversa e ivi morì il 20 marzo 1617. Era suo intendimento lo scrivere una grande opera comprendente l'Ottica, la Diottrica e la Catottrica, ma la morte gli vietò di comporre le due ultime parti. Dei sei Libri in cui è ripartita la trattazione dell'Ottica è soltanto l'ultimo che interessa lo storico delle matematiche. Sono ivi studiati i due tipi fondamentali di projezione, cioè l'ortogonale e la centrale; per questa viene adottata l'antica denominazione di « scenografia » e ne è considerato il caso speciale in cui essa è applicata alla rappresentazione su un piano della superficie della terra; grazie alla sua importanza il metodo risultante viene designato col nome di *Proiezione stereografica*, neologismo che rimase nella scienza. Ma il dotto gesuita non si limitò a questa innovazione linguistica, giacchè della proiezione stereografica fece uno studio approfondito, grazie a cui egli giunse a stabilirne le proprietà caratteristiche: in tale modo richiamò l'attenzione dei geometri sopra un metodo di trasformazione delle figure che nel secolo XIX conseguì importanti generalizzazioni e grande sviluppo.

## Bachet de Méziriac

311 - La tendenza verso nuovi orizzonti che — come risulta dalle pagine precedenti — delineavasi nel secolo XVII sino dai suoi primi anni di vita, non spense la venerazione per i classici. Una prima prova di persistenza delle tendenze umanistiche è offerta da Claudio Gaspare Bachet de Méziriac (n. a Bourg-en-Bresse nel 1581, m. nel 1638), il quale nel 1621 diede una nuova edizione dell'*Aritmetica* di Diofanto, tratta da un manoscritto parigino, ma frutto di profondi studi compiuti sulla edizione di Xylander (v. n. 258) e su altri manoscritti dianzi inesplorati. È opera di un erudito, ma anche di uno scienziato, chè non mancano commenti sostanziali e sviluppi di valore matematico permanente; a provarlo basti dire che è ivi per la prima volta introdotta la condizione, per le radici delle equazioni indeterminate, di essere non soltanto razionali e positivi, ma anche interi.

Questo lavoro è cronologicamente inserito fra le due edizioni (1612, 1624) di altra ancor più nota opera del medesimo autore, quella cioè intitolata *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. Questo titolo è appropriato essendo l'opera una raccolta di problemi che lontanamente ricorda l'*Antologia greca* (v. p. 54), problemi che può risolvere chi conosca i Libri aritmetici di Euclide o gli *Elementi di aritmetica dell'autore* (questi, però, non conseguirono l'onore della stampa). I problemi trattati non sono tutti originali, come il Bachet riconosce quando cita il Tartaglia per criticarlo; alcuni di essi rientrano nella categoria dei cento uccelli (v. p. 154) che, sotto svariate forme, già incontrammo in parecchie occasioni. Bachet ha anche insegnata la costruzione dei quadrati magici di $3^2$ e $5^2$ caselle, applicando una regola

da lui inventata per tutti i quadrati analoghi di $(2n + 1)^2$ elementi; egli confessa candidamente di non essere riuscito a trovarne una applicabile anche ai quadrati di $4n^2$ elementi; quando avremo aggiunto che egli ha anche insegnato un metodo per risolvere il « problema dei resti » (determinazione di un numero conoscendo i resti che si ottengono dividendolo per dati numeri) avremo, non esaurita l'enumerazione delle cose notevoli che leggonsi nell'opera in discorso, ma raccolte prove sufficienti per stabilirne il valore.

## BIBLIOGRAFIA

*Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio.* Authore ac Inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1614).

*A Description of the admirable Table of Logarithmes. With a declaration of the most plentiful easy and speedy use there of in both kindes of trigonometrie as also in all mathematical calculations. Invented and published in latin by that honorable* L. IOHN NEPAIR *and translated into English by* EDWARD WRIGHT. *With an Addition by* HENRY BRIGGS (London, 1616).

*Mirifici Logarithmorum Canonis constructio, ejusque usus, in utraque Trigonometria: ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio.* Authore et inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1619).

*The Construction of the wonderful Canon of Logarithms by* JOHN NAPIER *translated from Latin into English by* WILLIAM RAE MACDONALD (Edinburgh, 1889).

*Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas libri duo: cum Appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario.* Authore et inventore JOANNE NEPERO (Edinburgh, 1619).

*De Arte logistica* JOANNIS NEPERI (Edinburgh, 1839).

*Arithmetica logarithmica sive logarithmorum Chiliades triginta. His numeros primus invenit clarissimus vir* JOHANNES NEPERUS *et usum illustravit* HENRICUS BRIGGIUS (Londini, 1624).

J(USTUS) B(YRG), *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen sambt gründlichem Unterricht wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen und verstanden werden sol* (Prag, 1620).

A. VLACQ, *Arithmetica logarithmorum sive logarithmorum chiliades centum pro numeris naturali serie crescentibus ad unitate ad* 100000 (Goudae, 1628).

*Trigonometria artificialis sive magnus canon triangolurum logarithmicus, ad radium* 100000,00000 *et ad dena scrupula secunda ab* ADRIANO VLACCO *Goudano constructus* (Goudae, M.DC.XXXIII).

P. A. CATALDI, *Trattato dei numeri perfetti* (Bologna, 1603).

P. A. CATALDI, *Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti* (Ivi, 1603), *Aggiunta alla stessa* (Ivi, 1604).

P. A. CATALDI, *Trattato dell'algebra proportionale, dove si mostrano le inventioni de' primi capitoli, o equatione di esse* (Id., 1610). l. 14 dal basso.

P. A. CATALDI, *Elementi delle quantità algebriche, dove si mostrano le inventioni e l'operationi loro, e come pervenute alle equationi elle si riducano alli capitoli ocorrenti* (Id. 1620).

P. A. CATALDI, *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati, con le cause & inventioni loro, et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari & altre* (Ivi, 1613).

P. A. CATALDI, *Trattato geometrico dove si esamina il modo di formare il pentagono sopra una linea retta, descritto da* ALBERTO DURERO (Ivi, 1620).

P. A. CATALDI, *Difesa d'Archimede. Trattato del misurare o trovare la grandezza del cerchio: dove si diffende Archimede Siracusano dalle oppositioni del Signor Joseffo Scaligero* (Ivi, 1620).

P. A. CATALDI, *Difesa d'Euclide, dove si dimostra le oppositioni date dal sig. Joan Alfonso Molino Cano a molte propositioni degli Elementi d'Euclide non essere di valore, & si mantiene chiara la certissima dottrina d'essi Elementi* (Ivi, 1626).

F. PATRICI, *Della nuova geometria Libri XV.* Nei quali *con mirabile ordine, e con dimostrazioni a maraviglia più facili, e più forti delle usate, si vede che le Matematiche per via regia e più piana che dagli antichi fatto non si è, si possono trattare* (Ferrara, 1587).

KEPLER, *Astronomia nova, seu physica coelestis tradita de commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus Tychonis Brahe* (Heidelbergae, 1609).

*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum imprimis austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus et plane singularis. Accessit Stereometriae Archimedeae Supplementum.* Authore JOHANNE KEPLERO (Lincii, MDCXV).

*Aussug aus der vralten Messe-Kunst Archimedes und deroselben newlich in Latein aussgangener Ergentzung betreffend Rechnung der köeperlichen Figuren, holen Gefessen vnd Weinfässer sonderlich dess Oesterreichischen, gestelt durch* JOHANN KEPLERN (Lintz, MDCXVI).

JOHANNIS KEPLERI, *Harmonices mundi Libri V* (Lincii Austriae, MDCIXIX).

J. KEPLER, *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos premissa demonstratione legitima ortus logarithmorum eorumque usus* (Marpurgi, 1624). *Supplementum chiliadis logarithmorum* etc. (Ivi, 1625).

JOHANNIS KEPLERI, *Astronomi, Opera omnia, edidit* C. FRISCH (Francfurti el Erlangae, 1858-1871), 8 volumi.

JOHANNIS KEPLERI, *Neue Astronomie; übersetzt und eingeleitet von* MAX CASPAR, Mit XIII und 68 Figuren (München-Berlin, 1929).

*Johannes Kepler in seinen Briefen. Herausgegeben* VON MAX CASPAR *und* WALTHER VON DYCK (München und Berlin, 1930).

F. AGUILONIUS, *Opticorum Libri VI* (Anversa, 1613).

BACHET DE MÉZIRIAC, *Problèmes plaisants et delectables qui se font par les nombres* (I ed., Lyon, 1612; II. ed., ivi, 1624. Un'altra edizione ne fu fatta da A. LABOSNE, Paris, 1884).

BACHET DE MÉZIRIAC, *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex et de numeris multangulis Liber unus* (Paris, 1621).

## CAPITOLO XXII

# DISCEPOLI DI GALILEO

### Esordio

312 - L'influenza quasi fascinatrice esercitata da Galileo, non soltanto sulle persone che ebbero la fortuna di avvicinarlo, ma anche sopra coloro che ne ammirarono le opere al loro apparire, è talmente estesa e profonda, che sono da riguardarsi come suoi discepoli la maggior parte di coloro che coltivarono le scienze sperimentali e di ragionamento nel primo trentennio del secolo XVII, anche se come tali non si dichiararono. Noi però ci limiteremo a considerare nel presente Capitolo coloro che ebbero con quel Grande relazioni dirette e comprovate da documenti sicuri, escludendo — come è superfluo avvertire — coloro che non lasciarono nelle matematiche alcuna traccia del loro passaggio.

Il lettore non troverà quindi menzione in queste pagine di alcune persone ben note ai lettori del carteggio di quel Sommo, quali Vincenzo Rainieri (n. a Genova il 30 maggio 1606, m. il 5 novembre 1647 a Pisa, nel cui Ateneo egli insegnava a partire dal 1640) e di Mario Guiducci (n. a Firenze il 18 marzo 1554 e m. ivi il 5 novembre 1646), perchè entrambi coltivarono esclusivamente l'astronomia; di Benedetto Castelli (date dell'esistenza incerte) non avremo occasione di parlare di proposito perchè la sua fama riposa sopra studi di idraulica pratica; lo stesso va detto per Nicolò Aggiunti (n. in Borgo S. Sepolcro il 6 dicembre 1600, m. a Pisa il 6 dicembre 1635), professore nell'Università di Pisa, di cui non conosciamo opera alcuna.

Una menzione, sia pure fugace, va fatta di quegli stranieri che usufruirono degli insegnamenti di quel Grande, chè soltanto tenendone conto si può formarsi un concetto della vastità della sua sfera d'influenza. Ricordiamo pertanto i francesi Giacomo Badouère e Francesco di Noailles, suoi ascoltatori a Padova verso il 1598; i tedeschi Martino Hasdale, che sembra avere vissuto a Padova nella casa stessa di Galileo, e Mattia Bernegger, che già ricordiamo (p. 409) come assiduo banditore del verbo galileiano; gli scozzesi Tommaso Segeth e Giovanni Wedderborn che, come inscritti nella Università di Padova, ebbero relazioni con lui; pure al periodo patavino dell'esistenza di Galileo appartengono gli inglesi Riccardo White (ricordato anche nel carteggio fra Huygens e de Sluse), Tommaso White (che incontreremo parlando di Fermat), Roberto Southwell e Riccardo Willoughby. Di tutti questi si è serbata memoria; ma tale e tanta era la rinomanza a cui era salita l'Università

di Padova quando v'insegnava il nostro immortale connazionale, che chi volesse redigere un statistica esatta di coloro che ne ascoltarono l'elevata parola dovrebbe, senza tema di errare, centuplicare il riferito elenco: così giungerebbe alla conclusione non esservi stato angolo d'Europa in cui egli non contasse ammiratori e seguaci.

## Bonaventura Cavalieri

313 - Sommo fra coloro che si onorarono di fregiarsi dell'epiteto di alunni di Galileo, benchè tale non sia stato nel significato più comune della parola, è Bonaventura Cavalieri. Nato a Milano, a quanto sembra, nel 1598, sino dal 1615 era inscritto nell'ordine dei Gesuiti dell'Ordine di S. Girolamo, che fu soppresso due anni dopo la sua morte. Nel 1621 lo troviamo a Pisa, ove usufruì degli ammaestramenti di Benedetto Castelli e strinse relazioni con Galileo, che allora trovavasi nella vicina Firenze. Per i suoi doveri religiosi abitò a Lodi nel periodo 1623-25; fu poi a Roma e nel 1626 si stabilì, dietro ordini superiori, per qualche tempo a Parma. All'appoggio di Galileo egli è debitore della cattedra principale di matematica, conferitagli nel 1629 dal Senato di Bologna [1]. Compiuto il triennio d'impegno, il Senato di Bologna riconfermò il Cavalieri per altri sette anni, e, prima della scadenza, cioè nel 1636, egli fu nuovamente confermato per un eguale periodo; nel 1640 il Cavalieri conseguì un aumento di stipendio e nel 1646 una nuova conferma per la durata di dodici anni; ma potè usufruirne per breve tempo, perchè addì 30 novembre 1647 ebbero termine le sofferenze che lo avevano tribolato gran parte della sua vita, rendendogli tormentoso il porre in carta le idee che agitavano la sua mente.

314 - B. Cavalieri ha prima e più d'ogni altro contribuito alla diffusione in Italia della teoria e della pratica dei logaritmi, di cui egli considerò in particolar modo le applicazioni alla trigonometria, disciplina alla quale egli arrecò perfezionamenti della più alta importanza. Questi due ordini di benemerenze non possono venire considerati separatamente, essendo documentati da opere nelle quali trigonometria e logaritmi sono trattati promiscuamente come soggetti che si prestano scambievoli aiuti.

La prima di tali opere ha per titolo *Directorium generale uranimetricum* e, per essere stata pubblicata nel 1632, ebbe senza dubbio grande peso nella deliberazione di prima conferma del Cavalieri da parte del Senato bolognese. È un volume formato di tre parti dedicate rispettivamente ai logaritmi, alla trigonometria piana e alla trigonometria sferica, seguite da Tavole di logaritmi delle funzioni trigonometriche per il raggio $10^{10}$. Vanno ivi rilevate in primo luogo alcune innovazioni nella nomenclatura: per indicare le tre cofunzioni, il Cavalieri, seguendo

[1] Era la cattedra vacante sin dal 1617 per la morte dell'astronomo Magini e che non era stata sino allora occupata per la mancanza di persona veramente degna di assidervisi; la cattedra secondaria era allora pure vuota per la morte del Cataldi, avvenuta, come ci è noto, nel 1628.

l'esempio dato dal Magini (v. n. 279), aggiunge la parola « secundus » a « seno », « tangente », « secante », nomi questi a cui, ove la chiarezza lo esiga, annette l'epiteto « primus »; per analogia distingue un « sinus versus secundus » dall'ordinario « sinus versus primus ». Seguono altri nomi speciali per designare i logaritmi di alcune funzioni trigonometriche, cioè: « mesologaritmus » per *log tg* (termine già usato dal Kepler), « tomologaritmus » per *log sec* e « versilogaritmus » per *log sen ver,* mentre la semplice parola « logaritmo » serve al Cavalieri come al Napier per indicare il *log sen.* Maggiore importanza ha il fatto che il nostro ha per primo date dimostrazioni soddisfacenti delle note « regole di Nepero » concernenti la risoluzione dei triangoli piani (v. numero 298). Per la risoluzione dei triangoli sferici egli stabilisce parecchie formole utilissime che nascono conducendo un'altezza; alcune di esse trovansi già in Regiomontano, mentre altre sono del tutto nuove. Ma il suo più cospicuo contributo alla conoscenza della sfera è rappresentato dalla scoperta e relativa dimostrazione dell'espressione dell'area di un triangolo sferico; se anche, come diremo a suo tempo, altri (Girard e Harriot) giunsero alla medesima conclusione, l'indipendenza da essi del Cavalieri è fuori di discussione, onde ben a ragione si trova memoria di quella sua scoperta nel monumento che Milano elevò nel palazzo di Brera alla memoria del grande Gesuato.

Argomenti congeneri sono svolti in altri scritti del medesimo autore. Nel *Compendio delle regole dei triangoli,* pubblicato sei anni appresso, troviamo la dimostrazione delle analogie neperiane indarno tentata quando il Cavalieri scriveva il *Directorium,* nonchè altre formole esatte, ma meno importanti, essendo semplici corollari di quelle per l'addizione o la sottrazione degli archi; altre si giudicherebbero errate dopo che alle linee trigonometriche si attribuisce un determinato segno, ma che sono esatte se prese in valore assoluto; le riferiamo affinchè il lettore ne tragga elementi per giudicare dello stato della trigonometria nella prima metà del secolo XVII:

$$\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,[y + (\pi - x)]\,;$$
$$\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,[y - (\pi - x)]\,.$$

A meglio stabilire l'utilità dei logaritmi il Cavalieri pubblicò nel 1639 una *Centuria di problemi,* ove l'invenzione neperiana è applicata con successo a cento problemi di astronomia, geometria pratica e aritmetica commerciale; non sono di tale importanza da meritare di venirne riferiti gli enunciati; soltanto ci corre l'obbligo di rilevare come il nostro autore siasi per primo proposto il problema di calcolare $log\,(a + b)$ conoscendo $log\, a$ e $log\, b$ (supposto $a > b$); è una questione di cui vedremo che altri (Cagnoli, Zecchini-Leonelli e Gauss) si sono occupati tra la fine del XVIII e il principio del XIX secolo; ma qui va riferita, sia pure brevemente, la soluzione datane dal professore dell'Ateneo bolognese. Il Cavalieri per raggiungere lo scopo introdusse un angolo ausiliare mediante la formola

$$\log b - \log a = \log \text{sen}\, \varphi \quad \text{ossia} \quad \text{sen}\, \varphi = \frac{b}{a}\,;$$

essendo l'angolo $\varphi$ conosciuto, altrettanto può dirsi riguardo alle espressioni

$$\log \operatorname{sen} \frac{90^\circ + \varphi}{2}, \quad \log 2 + 2 \log \operatorname{sen} \frac{90^\circ + \varphi}{2}.$$

Si ha allora

$$\log (a + b) = \log a + \log 2 + 2 \log \operatorname{sen} \frac{90^\circ + \varphi}{2},$$

e il problema è risolto. Volendo invece calcolare $\log (a - b)$, il Cavalieri pone

$$\log \operatorname{sen} \varphi = \frac{\log b - \log (2a)}{2},$$

onde

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{b}{2a}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a-b}{a};$$

in conseguenza

$$\log (a - b) = \log a + \log \left(1 - \frac{b}{a}\right) = \log a + \log \cos 2\varphi$$

e così, anche in questo caso si è raggiunto lo scopo voluto.

Notiamo da ultimo che, essendosi manifestato il bisogno di una seconda edizione delle Tavole annesse al succitato *Directorium*, il Cavalieri la fece precedere da una nuova esposizione scolastica delle regole per risolvere i triangoli sferici: così ebbe origine l'opera intitolata *Trigonometria* (1643), nella quale però nulla di veramente nuovo e notevole siamo riusciti a trovare; il Cavalieri aveva già dato quanto poteva sull'importante argomento.

315 - Quando nel 1632 si avvicinava il momento in cui, scadendo il primo impegno, il Senato accademico di Bologna avrebbe dovuto decidere se o meno confermare il Cavalieri nell'ufficio a cui era stato chiamato per un triennio, l'eminente matematico diede in luce, oltre il *Directorium*, un altro pregevole volumetto intitolato *Lo specchio ustorio*. Ivi, prendendo lo spunto dal racconto degli apparati mediante i quali Archimede avrebbe incendiata la flotta romana assediante Siracusa. egli, partendo dal supposto che tale risultato fosse stato ottenuto col mezzo di specchi parabolici, espose le più cospicue proprietà delle sezioni coniche, diffondendosi di preferenza sui procedimenti che servono a delinearle. Questo lavoro è scritto in un italiano così accurato ed elegante che può benissimo prendere posto, accanto alle *Opere* di Galileo, fra i testi di lingua; esso documenta poi la profonda ed estesa cultura letteraria dell'autore. Interessa a noi notare come alcune delle numerose costruzioni esposte dal Cavalieri furono immaginate da lui stesso; ma, alla vigilia della pubblicazione del suo lavoro, egli si accorse che alcune erano già state ideate da Kepler e da lui esposte senza dimostrazione, e a colmare tale lacuna provvide il nostro matematico; altre

costruzioni erano state prima di lui trovate da uno svizzero che aveva insegnato nell'Università di Padova dal 17 novembre 1624 alla sua morte (23 luglio 1629): alludiamo a Bartolomeo Souvey o Sovero e alla sua opera postuma *Curvi ac recti proportio* (Padova, 1630). L'indipendenza delle ricerche del Cavalieri dalle anteriori risulta da testimonianze di persone che conobbero le costruzioni cavalieriane sino dal 1629 e la specchiata onestà del Nostro risulta dalla citazione del Sovero da lui fatta, il che va rilevato in vista di una stolta accusa di plagio che vedremo (p. 427) essere stata rivolta al pio Gesuato.

316 - Per quanto pregevoli siano le opere del Cavalieri sin qui discorse, pure non è da esse che trae origine l'alta fama di cui egli gode; essa si basa specialmente sopra la sua *Geometria degli indivisibili* pubblicata per la prima volta nel 1635, ma che egli andava elaborando da più di un decennio, come risulta da alcune lettere da lui scritte a Galileo a partire dal 1626 (era il momento in cui cominciarono le sue aspirazioni a succedere al Magini). L'edizione postuma del 1653, che ci sta sott'occhio, rappresenta la forma definitiva delle sue idee sull'argomento; ma per farsi un concetto preciso delle stesse fa mestieri ricorrere alle sue *Exercitationes geometricae*, che videro la luce l'anno stesso della sua morte, non senza tacere delle numerose lettere, che egli scambiò con Galileo e Torricelli e che furono pubblicate nelle più recenti edizioni delle *Opere* di questi grandi; la soppressione dell'ordine dei Gesuati, avvenuta nel 1650, ebbe per conseguenza la scomparsa di altri elementi del carteggio da lui tenuto, nonchè quella di altri manoscritti importanti (1).

La *Geometria degli indivisibili* passa, e non a torto, per una delle opere più profonde ed oscure che annoveri la letteratura matematica (2). A spiegare questa particolarità alcuni addussero il fatto che l'autore, essendo di continuo tormentato da gotta alle mani, soffriva tenendo la penna fra le dita, epperò scriveva il meno possibile; ma l'esistenza di altre sue opere non meritevoli di un congenere appunto rende inaccettabile tale pietosa spiegazione. Questa deve forse ricercarsi nella difficoltà che il Cavalieri incontrava a dare forma concreta a certi alti concetti che balenavano alla sua mente; e quando si pensa che nelle sue opere cercasi indarno una definizione del vocabolo « indivisibile », si vedrà tale supposizione presentarsi come verosimile.

Non è questo l'unico concetto non definito usato dal nostro autore; giacchè nelle stesse condizioni trovansi le frasi « omnes lineae figurae »,

---

(1) Si poteva sperare che ne esistesse qualche scritto interessante la scienza nella biblioteca dell'ordine a cui egli appartenne. Ora è noto che questo fu soppresso circa due anni dopo la morte del Cavalieri e che tutte le carte esistenti nel convento che ne era sede a Bologna, dopo molte vicende, finirono nella Biblioteca marciana di Venezia. Il prof. Luigi Ferrari, che la dirige, per soddisfare un desiderio di chi scrive, esaminò accuratamente tutti quei documenti e giunse alla non desiderata conclusione che di Cavalieri non vi si trovano che pochi fogli di argomento architettonico recanti il titolo *De echeis, hoc est de vasis theatralibus.*

(2) Di recente fu ivi rilevata (Vacca) la proposizione che nei trattati di calcolo differenziale porta il nome di « primo teorema della media », sotto forma geometrica (parallelismo della tangente in un punto di un arco di curva alla corda corrispondente).

(nel piano) e « omnia plana solidi » (nello spazio) con le quali sono designate la totalità delle rette che si ottengono tagliando una figura piana con un fascio di rette parallele o la totalità delle figure che nascono segando una figura solida con un fascio di piani paralleli; e, d'altronde non è gravido di significato il fatto che il Cavalieri in parecchie occasioni accenna ai dubbi che sarebbero sorti nella mente del lettore, senza però riuscire a dissiparli? E in realtà come potevasi pensare che in una epoca in cui Euclide e Archimede erano, più che inspiratori, veri e propri direttori della ricerca geometrica, venisse accolta come conforme al rigore geometrico una proposizione quale la seguente che costituisce il nocciolo di molte argomentazioni cavalieriane: « due figure piane (o due solidi) stanno fra loro come la totalità delle loro rette (o dei loro piani) di data direzione (o rispettivamente giacitura) »? Era sufficiente giustificazione per l'uso di un metodo così lontano dalla concezione greca della geometria il mostrare che esso guidava alle medesime conclusioni degli antichi procedimenti? Vero è che un grande pensatore di poco posteriore, B. Pascal, dopo avere fatto esplicita adesione alle idee del Cavalieri, trovava che, se taluni « s'imaginent de pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes », ciò dipendeva da « leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnèe avec chacune des petites portions égales du diamètre »; ma è pur vero che una spiegazione del genere si cerca indarno nella *Geometria* del Cavalieri.

Questa è divisa in sette Libri, il I dei quali tratta dell'intersezione di coni e cilindri e contiene inoltre alcune proposizioni generali utili per il seguito; altre somiglianti incontransi nel II, dedicato a triangoli e parallelogrammi; di cerchi, ellissi e corpi generati dalla loro rotazione tratta il III; delle altre coniche e dei solidi da esse prodotti similmente si occupano il IV e V, il VI tratta della spirale d'Archimede, mentre nell'ultimo si trovano altri ragionamenti capaci di condurre ad alcune delle conseguenze anteriormente esposte. Fra queste emerge la quadratura della spirale d'Archimede, ottenuta col sussidio di una parabola opportunamente scelta, risultato questo non di grande importanza dal momento che il Siracusano vi era giunto per altra via; ma il Cavalieri aggiunge che anche un arco della spirale è eguale a uno di parabola, e ciò costituisce un notevole complemento alla conoscenza di quella curva, dal momento che la rettificazione è l'unico problema metrico relativo alla spirale da lui studiata che il Siracusano abbia lasciato intatto. Altri, come vedremo, pervenne circa nel medesimo tempo a questa importante conclusione, ma questa si legge in lavori pubblicati più tardi; ed è certo che, se Cavalieri ne avesse avuto sentore, non avrebbe mancato di dichiararlo, come fece in casi analoghi: sulla specchiata onestà del celebre Gesuato nessuno ha diritto di elevare il menomo sospetto! [1].

[1] Giova anche notare che il surriferito risultato trovasi in un opuscolo manoscritto inviato dal Cavalieri a Galileo sino dal 1629 e che oggi è conservato a Firenze nella celebre collezione dei *Discepoli di Galileo*.

317 - Che le citate *Esercitazioni* costituiscano un naturale complemento alla *Geometria degli indivisibili* risulta dalla semplice ispezione dei titoli delle sei parti in cui quell'opera è divisa e che sono: I e II. Sviluppi e chiarimenti sul metodo degli indivisibili; III. Sopra le critiche fatte agli indivisibili da P. Guldln; IV. Uso degli indivisibili nelle potenze cossiche (algebriche); V. Uso degli indivisibili nei solidi non omogenei; VI. Miscellanea di vari problemi. Limitiamoci a segnalare alcuni punti singolarmente importanti di quest'opera.

La III Parte di essa ha un carattere spiccatamente polemico, avendo lo scopo di confutare alcune critiche astiose fatte al nostro da un certo Guldin. Costui nacque a S. Gallen il 12 giugno 1577 da famiglia protestante: nel 1597 passò al Cattolicismo e allora cambiò il suo nome di Habakuk in quello di Paolo ed entrò nell'ordine dei Gesuiti, ove rimase sino alla morte, avvenuta il 3 novembre 1643. Dei vari suoi scritti il più noto ha per titolo *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* (Lib. I, Vienna 1635; Lib. II, id. 1641) e, conformemente allo stesso, ha per scopo la ricerca dei centri di gravità di alcune figure. Ivi il Cavalieri viene accusato di essersi appropriato idee e metodi del Kepler e del Sovero. Ora che il nostro connazionale abbia subita l'influenza del grande astronomo tedesco è indiscutibile e da lui stesso riconosciuto, ma un semplice paragone della sua *Geometria* con la *Stereometria doliorum* basta a misurare la distanza che corre fra le due opere; è poi certo che dal mediocre svizzero-padovano egli nulla di essenziale può avere appreso. Ed è curioso che un'accusa di plagio provenisse da un tale pulpito, visto che il Guldin (il quale, per sua confessione, conosceva la *Collezione* di Pappo) non si fece scrupolo di presentare come invenzione propria la proposizione, dovuta a questo commentatore (v. p. 76), secondo cui la superficie e il volume generati dalla rotazione di una linea o di una superficie piana sono espressi dal prodotto della lunghezza di quella linea o dell'area di quella superficie per il cammino descritto dal relativo baricentro. Nel difendersi il Cavalieri lamenta di dovere confutare e criticare un avversario già sceso nella tomba; ma di averlo fatto nessuno può muovergli rimprovero; si può invece lamentare che malgrado i suoi inoppugnabili rilievi il nome di Guldin venga ancora dato a un teorema su cui egli non ha alcun diritto di proprietà.

318 - Ancora più importante è la quarta delle *Esercitazioni*, giacchè ivi il Cavalieri è giunto a quadrare tutte le parabole, essendo per induzione giunto a un risultato che oggi esprimesi mediante la formola:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}.$$

Alla relativa ricerca egli fu indotto dallo studio della *Doliometria* kepleriana, in un punto della quale è proposta la ricerca dei volumi dei « fusi » parabolico o iperbolico; sforzandosi di compierla egli s'imbattè in un risultato che a ragione non esitò a considerare e chiamare « tesoro ». Riflettendo specialmente sul fuso parabolico, egli si avvide della

possibilità di giungere alla relativa cubatura sapendo calcolare (usiamo per brevità del linguaggio moderno) $\int_0^a x^4 \cdot dx$ ; il corrispondente risultato, $\frac{a^5}{5}$ , egli avvicinò agli altri già noti

$$\int_0^a x \cdot dx = \frac{a^2}{2} \ , \ \int_0^a x^2 \ , \ dx = \frac{a^3}{3}$$

e sí sforzò di colmare la lacuna esistente in questa serie di risultati mostrando essere $\int_0^a x^3 \cdot dx = \frac{a^4}{4}$ ; allora si ritenne in diritto di scrivere il risultato generale surriferito, anche se non era in grado di dimostrarlo. Egli nota poi che si ha pertanto la possibilità di quadrare tutte le parabole e prosegue come segue: « Nel tempo » (1640) « in cui io feci questa scoperta passò di qui il P. Niceron » (1613-1646) « celebre per il suo elegante trattato *La prospettiva curiosa.* Io gli comunicai la mia scoperta e, ritornato a Parigi, egli si compiacque di far conoscere quel risultato e la misura del fuso parabolico all'illustre Giovanni Beaugrand (v. nn. 344 e 353) « che io già conoscevo. Quanto a me, distratto da altre circostanze, mi volsi ad altri lavori e non vi pensai più che tanto. Ma da una lettera del dottissimo P. Mersenne io appresi inopinatamente la morte del suddetto Beaugrand. In pari tempo ricevetti da lui la soluzione che questo Beaugrand aveva data dei miei problemi per istigazione del P. Niceron. Io fui molto afflitto per la morte di un uomo tanto eminente. Le dimostrazioni da lui inviatemi mi provarono il suo merito. Siccome egli mi aveva prevenuto, io pensai ancor meno all'argomento. Vi ritornai molto dopo, per osservare che la teoria esposta nel II Libro della mia *Geometria degli indivisibili* poteva estendersi a tutte le potenze algebriche » (sottinteso intere positive) « delle figure piane. Postomi al lavoro io mi sono industriato a presentare le seguenti proposizioni nel migliore ordine possibile. Vi ho intercalate le scoperte di Beaugrand affinchè non vadano perdute » [1].

Altri punti notevoli si trovano nelle stesse *Esercitazioni.* Così, nella V, il Cavalieri ha per primo eseguite alcune determinazioni baricentriche nell'ipotesi che la densità delle figure considerate fosse, non costante, ma variabile secondo una determinata legge; mentre nella VI incontriamo il problema di determinare un punto del piano di un triangolo con la condizione che riesca minima la somma delle sue distanze dai vertici.

Con ciò non abbiamo esaurito l'elenco delle benemerenze del Cavalieri di fronte alle scienze esatte; ma quello che dicemmo intorno a quanto egli fece per diffondere l'uso dei logaritmi e far progredire la trigonometria, e soprattutto sull'azione da lui spiegata per perfezionare i metodi infinitesimali, è sufficiente a mostrare che con solido fondamento Galileo ebbe a proclamarlo « emulo di Archimede ».

---

[1] Questa Parte delle *Esercitazioni* fu commentata ed esposta in linguaggio moderno dal P. Bosmans (*Math sis*, t. XXXVI, 1922); all'articolo da lui scritto rinviamo il lettore desideroso di particolari su un argomento che, noi abbiamo potuto che sfiorare.

## Evangelista Torricelli

319 - Il primo che seppe comprendere e applicare a nuovi problemi il metodo indivisibile è Evangelista Torricelli. Egli nacque a Modigliana, nei pressi di Faenza, il 15 ottobre 1608. La sua famiglia, benchè di umile condizione, avendolo riconosciuto per dotato di non comune ingegno, volle fosse istruito nel modo migliore consentito dai tempi e lo affidò alle cure dello zio paterno Alessandro (meglio noto sotto il nome di Jacopo, da lui assunto vestendo l'abito religioso). Questo dotto e affettuoso congiunto si occupò degli studi umanistici del giovinetto, mentre la sua istruzione scientifica fu affidata ai Gesuiti. I rapidi progressi da lui compiuti nelle discipline fisico-matematiche indussero i suoi maestri a inviarlo (1627) a Roma, affinchè egli si perfezionasse sotto la guida di Benedetto Castelli. Un suo lavoro *Sul moto dei corpi naturalmente discendenti* mostrò non essere infondate le speranze riposte nel giovane faentino, e il Castelli, nel recarsi (aprile 1641) da Roma a Venezia per Pisa e Firenze (e durante tale assenza aveva eletto il Torricelli suo sostituto didattico), lo portò seco per mostrarlo a Galileo, che allora spegnevasi lentamente in Arcetri e propose all'immortale pensatore cieco di accogliere presso di sè il giovane autore per essere aiutato a redigere le ricerche meccaniche che in allora lo occupavano. Tale consiglio essendo stato accolto, il nostro Evangelista si trasferì a Firenze fra il 10 e il 15 ottobre 1641; ma un trimestre di convivenza non era peranco trascorso che Galileo già era sceso nella tomba! Rimasto, in conseguenza, privo di occupazione, il Torricelli apprestavasi á far ritorno a Roma, quando il Granduca di Toscana, seguendo il suggerimento del senatore Arrighetti, lo nominò proprio matematico al posto vacante per la morte di Galileo. Non pago di avere assicurata dignitosa esistenza al giovane scienziato, il sovrano assunse le spese per la pubblicazione dell'unico volume che raggiunse l'onore della stampa e costantemente lo incoraggiò e compensò nelle ricerche di fisica e di matematica che andava compiendo l'inventore del barometro. Il favore sovrano e la crescente universale estimazione sarebbero stati sufficienti ad assicurare una felice esistenza, ove le scoperte che il Torricelli andava compiendo non avessero fatto sorgere numerosi detrattori che lo trascinarono a dolorose polemiche. Queste, minando una salute già cagionevole, gl'impedirono di resistere all'attacco di un morbo violento (si trattava probabilmente di gravissima polmonite) che lo trasse alla tomba, non ancora quarantenne, addì 25 ottobre 1647.

Durante una tregua dell'implacabile malattia il Torricelli dettò (14 ottobre 1647) le sue ultime volontà al fido amico notaio Lodovico Serenai; da questo testamente risulta l'ardente desiderio che venissero pubblicati « tutti i suoi scritti, studi e fatiche di geometria » per cura di Bonaventura Cavalieri e Michelangelo Ricci. Ma la morte del primo, avvenuta, come sappiamo, circa un mese dopo, e il rifiuto del secondo (che addusse il pretesto di avere abbandonati gli studi) resero per il momento impossibile l'esaudimento del voto dell'illustre morente; sopra altri tentativi del Serenai per conseguire l'intento non giova arrestarsi;

soltanto notiamo che, dopo molte tergiversazioni, l'incarico fu assunto da Vincenzo Viviani, il quale però, causa gravi occupazioni, non lo adempì, cosa di cui alcuni giustamente lo rimproverarono. Ben più grave è la sua colpa di non avere provveduto alla conservazione dei manoscritti torricelliani di cui era depositario al momento della morte; onde questi subirono una dispersione che poteva condurre a irreparabile perdita. Per un complesso di fortunate circostanze questa potè essere evitata, sicchè oggi i fogli lasciati dal sommo faentino, postillati dal Viviani e in parte trascritti dal Serenai, si trovano nella raccolta fiorentina dei *Discepoli di Galileo* (1). Tuttavia si dovette attendere il terzo centenario della nascita di quel Grande perchè potesse venire effettuata la desiderata edizione di tutti i suoi scritti (2). In tal modo furono posti a disposizione di tutti gli studiosi elementi sufficienti per concludere che il « matematico » Torricelli non è per nulla inferiore al « fisico » di fama mondiale, giacchè di mano in mano che i fogli da lui rapidamente vergati vengono decifrati e commentati aumentano le prove che ben a ragione un suo contemporaneo trasse dal suo nome il significante (benchè soltanto approssimativo) anagramma *En virescit Galilaeus alter.*

320 - Un primo saggio della sua abilità come matematico fu data dal Torricelli col volume intitolato *Opera geometrica* (1644). Esso porge la prova che egli ideò per primo quell'utilissimo procedimento per costruire le tangenti alle curve piane che si fonda sulla composizione di due movimenti e che d'ordinario si attribuisce al Roberval, benchè questi l'abbia ideato ben più tardi. Inoltre la quadratura della parabola è ivi dimostrata in non meno di venti maniere, quanto espose Archimede nei suoi libri *Sopra la sfera e il cilindro* è completato in modo notevole in base alla considerazione di nuove figure (« solidi sferali »), è stabilita la finitezza del solido generato dalla rotazione di un arco indefinito d'iperbole equilatera attorno a un asintoto, finalmente è eseguita la quadratura della cicloide e la cubatura della coclea (superficie della vite a filetto quadrato); perciò il citato volume mise in luce la disinvolta sicurezza con cui l'autore sapeva applicare gli antichi metodi infinitesimali a note e nuove figure.

Delle pagine inedite di recente poste in circolazione, un numero cospicuo si riferisce a temi di pertinenza della geometria elementare. Infatti vi si trovano: una variopinta miscellanea dal curioso titolo *Campo di tartufi,* ove sono enunciati teoremi e problemi che completano in qualche punto quanto è esposto negli *Elementi* di Euclide; poi un opuscolo intitolato *De tactionibus,* perchè vi si trattano problemi differenti da quelli risolti da Apollonio nell'opera di eguale titolo (v. p. 59), ma sempre riferentisi alla costruzione di un cerchio soggetto a condizioni di contatto; finalmente un *De proportionibus liber,* nel quale la materia del V Libro degli *Elementi* trovasi esposta in modo differente e che meglio soddisfa le esigenze della scuola.

---

(1) Nell'Introduzione alla edizione delle *Opere* del TORRICELLI si leggono minuti particolari sulle vicende dei manoscritti e sui tentativi per pubblicarli.

(2) Soltanto alcune *Lezioni accademiche* da lui tenute a Firenze furono ivi pubblicate nel 1715 e, grazie al loro cospicuo valore letterario, ricevettero parecchie edizioni.

Questo opuscolo possiede pure un notevole valore storico, perchè contiene il piano particolareggiato di una completa esposizione (destinata a portare il titolo *De lineis novis*) delle proprietà delle curve allora note, cioè parabole, iperboli e spirali di grado superiore e cicloidi. Ora le *Opere* di recente pubblicate stanno a provare che il Torricelli era già in possesso di tutti gli elementi per tradurre in atto l'indicato programma, avendo risolte le principali questioni relative, in particolare quelle concernenti la quadratura di quelle linee. Siaci lecito limitarci a entrare in qualche particolare riguardo alle curve che nascono dal rappresentare i logaritmi tanto in coordinate cartesiane quanto in coordinate polari.

321 - Nella prima ipotesi nasce la curva che noi chiamiamo « logaritmica » e che il Torricelli, per una evidente considerazione di forma, chiamò « hemhyperbole logaritmica. Di questa curva egli scoperse la proprietà di avere costante la sottotangente e determinò inoltre la quadratura e la cubatura del solido generato dalla sua rotazione; antecipando su quanto fu scoperto alcuni decenni più tardi, osserviamo che questi notevoli risultati vennero in possesso del pubblico soltanto nel 1690, quando C. Huygens li pubblicò in appendice al suo lavoro *De la cause de la pesanteur*; va rilevato che il grande olandese non li presenta come parto del proprio ingegno e che delle indagini che andava compiendo sull'hemhyperbola il Torricelli tenne parola in una lettera scritta al Cavalieri il 15 agosto 1647 e in altra diretta nove giorni più tardi a Michelangelo Ricci; ricordando l'importante funzione disimpegnata allora dal carteggio scientifico, si troverà non priva di fondamento la supposizione di una influenza esercitata dal Nostro sopra il commilitone che aveva in Olanda.

Ricorrendo invece a coordinate polari per rappresentare graficamente i logaritmi, si arriva alla curva oggi chiamata « spirale logaritmica », detta invece da Torricelli « spirale geometrica ». Essa trovasi menzionata più volte nel carteggio torricelliano degli anni 1645 e 1647; vedremo più avanti che essa fu concepita anche da Descartes, ma poichè questi la riguardava come traiettoria obliqua di un fascio di raggi, non v'ha dubbio sull'indipendenza delle due considerazioni. Va aggiunto che il Torricelli, insegnando a determinare la lunghezza dell'arco della sua spirale geometrica, ha per primo risolto un problema di rettificazione, ed inoltre ha notato che un suo arco, contato dal polo, è di lunghezza finita; nè va taciuto che per la stessa curva egli ha anche trattata la questione di quadratura.

Benchè anche di ciò si abbia avuta completa notizia dopo la pubblicazione delle sue *Opere,* pure questi importanti risultati erano in dominio del pubblico da quasi tre secoli, trovandosene chiara menzione in alcuni fogli che ebbero indubbiamente larga diffusione mentre il Torricelli era ancora fra i viventi. Sono le pagine intitolate *Racconto d'alcuni problemi proposti e scambiati tra i matematici di Francia ed il Torricelli*; esse si riferiscono a questioni sorte in conseguenza dei rapporti che egli stabilì con geometri di Parigi, auspici i Padri Niceron e

Mersenne da lui conosciuti durante i viaggi fatti da costoro in Italia negli anni 1640 e 1647; tali questioni trovansi in parte risolute nella citata *Opera geometrica* ed in parte nei fogli destinati a formare la vagheggiata opera *De lineis novis*. Ma ve ne sono ancora altre concernenti i massimi e minimi, nelle quali è facile avvertire l'influenza di Fermat, ed altre ancora di pretta teoria dei numeri: notiamo fra queste l'asserzione, di consueto attribuita a Fermat, che tutti i numeri della forma $2^{2^n} + 1$ sono primi (del resto è oggi noto che questa proposizione è erronea, giacchè il numero $2^{32} + 1$ è composto). Nello stesso *Racconto* si trova il problema della ricerca di un punto per cui risulta minima la somma delle distanze da tre punti fissi, di cui si è occupato (probabilmente dopo il Torricelli) B. Cavalieri (v. p. 428). Ora questo problema trovasi studiato insieme ad altri nella memoria postuma *De Maximis et minimis,* onde non sono ingiustificati i nomi di « punto di Torricelli » dato a quello che risolve quel problema e di « cerchi di Torricelli » imposto alle linee che servono a determinare il punto richiesto. Non va taciuto che nella memoria ultimamente citata è risolto (mediante una parabola biquadratica) il problema del « vas quod aequabiliter exhauritur » proposto da M. Ricci.

322 - Mentre nella sua *Opera geometrica* il nostro svolse argomenti trattati da Archimede nei libri *Sopra la sfera ed il cilindro,* molte pagine intitolate *De solidis vasiformis* e di recente date in luce mostrano quanto vaste, profonde e fruttifere siano state le sue meditazioni intorno alle figure studiate dal Siracusano nell'altro suo lavoro *Sui conoidi e gli sferoidi*; è da lamentare che sull'argomento il Torricelli ci abbia lasciato non scritture definitive, ma semplici abbozzi.

Altrettanto non può ripetersi riguardo alla questione di determinare il baricentro di un settore circolare, che egli risolse in due modi, cioè tanto mediante i procedimenti classici, quanto col metodo degli indivisibili; la memoria in cui il Nostro dimostrò che l'anzidetto punto trovasi sulla corrispondente bisettrice alla distanza dal centro espressa da $\frac{2}{3}$ raggio $\frac{\text{corda}}{\text{arco}}$ era redatta, al momento della sua morte, sotto forma definitiva. Dal suo carteggio con R. Magiotti e B. Cavalieri emerge che egli cominciò ad occuparsi di quella ricerca sino dal 1643 e che non l'abbandonò che quando lo spense un morbo incurabile.

Giustizia vuole che si osservi che essa era stata compiuta prima e felicemente nell'opuscolo *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis,* pubblicato ad Anversa nel 1632 e noto al Torricelli (v. infatti la lettera al Magiotti del 14 febbraio 1643). Ne è autore Giancarlo della Faille, il quale, nato in quella città il 1° marzo 1597, entrò nella Compagnia di Gesù e, inviato dai suoi superiori in Ispagna il 26 marzo 1629, salì al grado di precettore dei paggi di Filippo IV e fu poi posto al seguito di Don Giovanni d'Austria; morì all'assedio di Barcellona il 4 novembre 1652. Al rimprovero di prolissità giustamente rivolto dal Montucla al della Faille, sfugge senza dubbio il nostro grande connazionale.

Prima di chiudere questi rapidi cenni sull'opera matematica del Torricelli vogliamo richiamare l'attenzione dei nostri lettori sopra la compilazione *De indivisibilium doctrina perperam usurpata,* tratta dal Viviani da appunti del Torricelli; benchè essa non contenga alcun risultato nuovo, dal punto di vista storico è del massimo interesse, giacchè è documento inoppugnabile dei dubbi e delle incertezze che tormentavano i matematici, nel momento in cui si sforzavano di piegare il concetto d'infinito alla risoluzione delle più elevate questioni geometriche.

## Vincenzo Viviani

323 - La gloria di avere confortato e aiutato Galileo nell'ultimo e più triste periodo della sua esistenza appartiene, più ancora che al Torricelli, a Vincenzo Viviani, il quale sino al termine della sua lunga esistenza si fregiò del nome di « ultimo discepolo » di quel Grande e che, dopo la morte di questo, scrisse un *Racconto storico* della sua vita e con lena affannata si adoperò a che vedesse la luce una completa edizione delle sue opere: che se anche, a cagione dell'irriducibile opposizione della Chiesa, egli non raggiunse questo intento, ne rese però possibile il conseguimento in tempi migliori.

Egli nacque in Firenze il 5 maggio 1622 da famiglia cospicua per censo e nobiltà; i suoi successi scolastici attrassero su di lui l'attenzione di Ferdinando II allora Granduca di Toscana, e appunto in seguito a una così alta raccomandazione, il giovane, nell'autunno 1639, si stabilì in Arcetri, quale segretario di quel Grande perseguitato. Il credito di cui continuò a godere presso la Corte gli procurò molti uffici, onorevoli ma così gravosi che gli fu tolto di coltivare con continuità ed impegno gli studi a cui erasi consacrato; in conseguenza i frutti da lui raccolti videro la luce nella seconda metà del secolo XVII, quando cioè la mente dei matematici erasi orientata verso investigazioni ben diverse da quelle che furono sempre a cuore di questo tardo epigono dei grandi geometri della Grecia: perciò noi, occupandoci in questo momento del Viviani, non cadiamo nell'anacronismo di cui ci potrebbe accusare un lettore che si limitasse a tener conto degli anni in cui furono pubblicati i lavori del Viviani. Benchè, pertanto, questo, riguardato come contemporaneo dei sommi che sono gloria del secolo XVII, ci si presenti come un fenomeno in ritardo di fase, forse per la notoria protezione di cui godeva presso il governo toscano, conseguì le più alte onorificenze del tempo: chè dal 1696 fu aggregato alla Società Reale di Londra e tre anni dopo venne scelto come uno degli otto soci stranieri della rinnovata Accademia delle Scienze di Parigi. Morì nella sua città natale il 22 settembre 1703.

324 - Il primo lavoro da lui dato alle stampe si riferisce ad Apollonio. Del grande trattato sulle coniche, che è gloria del geometra di Perga, erano stati scoperti e dati alle stampe i primi quattro Libri, ed il Maurolico (v. n. 259) si era provato in una divinazione del successivo. Questo tentativo essendo stato giudicato mediocremente soddisfacente,

il Viviani pensò di provarvisi quando era non ancora ventenne (1640-1642), ma, distratto da altre cure, per più di tre lustri cessò di occuparsi della questione. Ora accadde [1] che, ai primi di giugno del 1658, un professore dell'Università di Pisa, geometra di cui ci occuperemo più avanti (n. 328), G. A. Borelli, durante una sosta a Firenze, esaminasse i Codici orientali della Biblioteca granducale; la sua attenzione fu subito attratta da un incarto sul quale stava scritto in italiano « Otto Libri de' Conici di Apollonio »; egli, benchè ignaro dell'arabo, contemplando le figure illustrative e rilevandone l'identità con quelle dei Libri del Pergeo dati alle stampe, provò « un incomparabile gaudio » e, nel desiderio di far conoscere al mondo gli ultimi quattro, chiese ed ottenne dal Granduca di portare seco quel codice a Roma, sperando di trovare fra gli Orientalisti dell'Istituto di Propaganda Fide persona in grado di eseguirne la traduzione; però, interpellati alcuni Maroniti di passaggio per Firenze, si riconobbe che quel codice mancava dell'ultimo Libro. A Roma il Borelli trovò in Abramo di Echel (Siria) la desiderata persona capace e disposta a eseguire quella traduzione e, in data 29 giugno 1658, era in grado di scrivere al Viviani che tale lavoro proseguiva con la concorde collaborazione dell'orientalista col matematico. Allora il Viviani, desiderando a ragione che fosse inoppugnabilmente documentata l'originalità della sua divinazione, ottenne che il Principe Leopoldo esaminasse il suo antico lavoro e ne autenticasse i fogli, apponendovi la propria firma (8 luglio 1658). Il Borelli ritornò a Firenze alla fine del medesimo anno con la traduzione completa e ricevette dal Granduca l'ordine di non lasciarne nulla trapelare sinchè non fosse ultima la stampa del lavoro del Viviani; questo infatti fu pubblicato nei primi mesi del 1659, mentre la versione borelliana reca il millesimo 1661 [2].

Assicurata l'indipendenza dei due lavori si affacciò naturalmente la domanda in quale misura al Viviani era riuscito ad indovinare il pensiero dell'antico geometra. Orbene, il paragone dei due scritti porta a concludere che il lavoro moderno contiene più e meno dell'antico; più per la vastità del campo percorso, meno riguardo alla profondità delle indagini; più perchè vaga nel piano e poi assurge allo spazio; meno perchè sfiora soltanto le questioni sulle normali alle coniche che il geometra greco ha trattato a fondo, acquistando così gloria imperitura.

325 - Altro saggio della famigliarità del Viviani con l'antica geometria è un suo pregevole commento a un dialogo di Galileo *Sopra le definizioni delle proporzioni di Euclide,* pubblicato col titolo *Quinto libro di Euclide spiegato con la dottrina del Galileo.* Come appendice si trovano alcune pagine recanti il titolo *Diporto geometrico,* nelle quali sono risolti, col rigore e la prolissità degli antichi, molti altri problemi

---

(1) Ci limitiamo a riferire gli ultimi episodi delle laboriose trattative che ebbero per risultato la rivelazione all'Europa della grande opera di Apollonio. Riguardo alle fasi precedenti rinviamo il lettore a due articoli di E. BORTOLOTTI e A. AGOSTINI inseriti nei volumi IV (1924) e XI (1931) del *Periodico di matematiche.*

(2) In Appendice si trova la prima versione dall'Arabo dei *Lemmi* di ARCHIMEDE (Vol. I, p. 111).

relativi a costruzioni di triangoli proposti ai matematici d'Italia e di Germania da un geometra di Leida, che nascondevasi « sotto la tavola ». Questi problemi erano tanto semplici che il Viviani era riluttante a farne oggetto di apposita pubblicazione [1]; si decise a tal passo di compiacere il Principe Leopoldo de' Medici, l'attenzione del quale era stata attratta sopra quelle questioni dalle acerbe critiche rivolte ad Alessandro Marchetti (1632-1714) — professore a Pisa e noto come traduttore di Lucrezio — il quale ne aveva risolti soltanto sei e poco felicemente. A quei problemi il Viviani ne aggiunse del proprio altri ventiquattro, la cui analogia con altri pubblicati nel *Journal des Sçavants* da un ecclesiastico chiamato Comiers lo indusse poi a ritornare sull'argomento con altra apposita pubblicazione. Le ultime pagine del *Quinto Libro* concernono i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo; il primo viene risolto mediante l'elica cilindrica, la cicloide o una sinusoide, questa ottenuta segando con un piano un cilindro circolare retto e poi svolgendo lo stesso su di un piano, l'altro mediante le coniche o con l'aiuto della cubica $x\,y^2 = cost.$ detta per tale ragione *iperbole mesolabica*; l'autore aggiunge che allo stesso scopo il Padre Villapaudo usò un'altra linea, da lui chiamata *proporzionatrice secondaria,* e che in coordinate cartesiane può rappresentarsi con una equazione della forma $(x^2 + y^2)^2 = l\,x^3$.

Al Viviani devesi anche (1690) una versione italiana degli *Elementi* di Euclide; nulla diremo in nome nostro riguardo ad essa, perchè il suo alto valore è documentato dal fatto che, quando nel 1867 E. Betti e F. Brioschi, per elevare il livello dell'istruzione geometrica in Italia, deliberarono il ritorno al sommo alessandrino, nulla trovarono di meglio del ristampare la versione fattane dall'ultimo discepolo di Galileo. Al quale poi si è anche debitori di traduzioni italiane della maggior parte dei lavori di Archimede; esse sono tuttora inedite, e sarà il caso di ricorrervi il giorno in cui si penserà finalmente a pubblicare nella nostra lingua tutti gli scritti del famoso Siracusano.

Seguendo l'esempio dato da altri del tempo suo, egli propose un problema che, sotto il nome di « enigma fiorentino », conseguì una notevole celebrità quando se ne occuparono i più grandi matematici della fine del secolo XVII. Si trattava di traforare una volta sferica (o « cielo », secondo la nomenclatura del tempo) con quattro finestre fra loro eguali in modo che la superficie residua fosse quadrabile; il Viviani ne diede la soluzione in un'opera speciale che riscosse grande plauso, non soltanto da parte dei matematici, ma anche dagli artisti, i quali vi appresero nuove notevoli forme che possono darsi ai soffitti.

326 - La buona accoglienza che ricevette la divinazione del V Libro delle *Coniche* apolloniane incoraggiò il Viviani a chiudere la propria

---

[1] L'interesse che destano questi problemi proviene soltanto dalle persone che se ne occuparono, fra cui trovasi anche Leibniz; in tutti quei problemi si tratta di costruire un triangolo e si suppone conosciuta la differenza dei segmenti determinati dall'altezza calata dal vertice sulla base, e inoltre uno degli angoli alla base; quello che varia dall'uno all'altro dei dodici casi enumerati è il terzo dato, che è una funzione assegnata degli altri due lati.

carriera di autore pubblicando una restituzione dell'opera di Aristeo (v. p. 41) intitolata *Luoghi solidi*, restituzione a cui egli erasi accinto appena ventiquattrenne. Che il lavoro di cui parliamo colmi il vuoto prodotto dalla scomparsa dell'opera greca, non si può certamente affermare; chè, riguarda alla sostanza, nulla assicura che quanto è ivi esposto rispecchi la teoria delle sezioni coniche nella sua prima fase di sviluppo; e, riguardo allo stile, essendo essa scritta nella forma regolare di cui ci lasciarono modelli insuperabilmente perfetti i geometri del periodo aureo, nulla prova che esso fosse già stato adottato da un matematico vissuto molto prima. Ma, se si prescinde dallo scopo che si prefisse il Viviani e si considera il suo volume come opera originale intesa a rendere più perfetta la conoscenza di quelle celebri curve, si è indotti a riconoscere che esso prova esserne l'autore dotato di preziose qualità inventive, onde sorge spontaneo il rimpianto che egli non le abbia applicate ad elaborare i prodotti spontanei della propria fantasia geometrica, piuttosto che sforzarsi a ricostruire edifici di cui più non restava che un pugno di cenere. Ciò giustifica il voto, che manifestiamo finendo, che vengano studiati i numerosi manoscritti da lui relitti, per trarre dall'inedito quanto vi si trova di nuovo e pregevole, senza trascurare un accurato esame dell'esteso carteggio scientifico da lui tenuto con i più eminenti matematici del suo tempo.

## M. A. Ricci - G. A. Borelli

327 - Nell'esaminare l'opera scientifica dei più eminenti discepoli di Galileo ci accadde di citare due matematici che, se anche non usufruirono degli insegnamenti di quel Grande, vissero nell'orbita galileiana, epperò meritano un posto nel quadro che ci sforziamo di delineare nel presente Capitolo: uno, il Ricci, è collegato al Torricelli; l'altro, il Borelli, lo è al Viviani.

Michelangelo Ricci nacque a Roma il 30 gennaio 1619; ivi strinse amicizia coll'eminente faentino, quando entrambi studiavano sotto la guida sapiente di B. Castelli. Le lettere che essi si scambiarono dal 1643 sino a un mese innanzi la morte del Torricelli indurrebbero a ritenere che quel sentimento non si spegnesse per la lontananza; ma il reciso rifiuto opposto dal Ricci alla preghiera di pubblicare gli scritti del Torricelli fa ritenere che nella relazione che egli mantenne con questi il cuore non avesse parte alcuna. Il motivo addotto per giustificare quel rifiuto (cioè l'abbandono delle occupazioni scientifiche) sembra smentito dal fatto che nel 1666 il Ricci pubblicò una pregevole *Exercitatio geometrica* ove massimi, minimi e tangenti a curve sono determinati con metodi puramente geometrici. La pubblicazione delle *Opere* del Torricelli mostra poi che, nella risoluzione di parecchi problemi, questi aveva preceduto il suo antico condiscepolo; ma, quando quel lavoro vide la luce, parve tanto pregevole che la Società Reale di Londra lo fece ristampare in appendice alla *Logarithmotechnia* di N. Mercator (Londra, 1668). Va notato che un pregevole complemento a quanto è ivi esposto leggesi in una lettera del Ricci all'Huygens del 6 maggio 1674, ove è

fatta conoscere un'elegante proprietà metrica posseduta da una classe di curve più generali dell'ordinaria cicloide.

Da una lettera scritta dallo stesso nel 1665 al Principe Leopoldo di Toscana e che il Tiraboschi ha pubblicata nella sua *Storia della letteratura italiana*, emerge che il Ricci, a differenza degli altri appartenenti al cenacolo galileiano, era tanto famigliare col maneggio dell'algebra da potere risolvere in breve ora una questione propostagli come sfida da alcuni matematici stranieri durante una loro visita in Italia. Il dato surriferito sembra ricevere una conferma in un fascicolo manoscritto intitolato *Algebra del sig. Michel Angelo Ricci, che fu poi cardinale d. S. R. C.*, il quale, dopo la dispersione della Biblioteca Boncompagni, è finito nelle mani dell'autore della presente *Storia*; esso contiene gli elementi di quella scienza, esposti mediante le notazioni del Viète e illustrati su problemi tratti dal *De resolutione et compositione mathematica* di M. Ghetaldi, l'unico lavoro citato.

In data 1° settembre 1681 il Ricci fu elevato alla dignità di cardinale e morì il 12 maggio del seguente anno.

328 - Giovanni Alfonso Borelli, di cui già ci occupammo, nacque in Napoli [1] il 28 gennaio 1608 da un soldato spagnuolo, Michele Alonzo, e da Laura Perello. Al fonte battesimale ricevette i nomi di Giovanni e Francesco, ma il secondo cambiò in Alfonso, traduzione italiana del cognome paterno, in luogo del quale assunse quello della madre, corretto poi in Borelli. Seguì il padre in Roma e ivi fu scolaro del Castelli e condiscepolo del Torricelli. Insegnò matematiche a Messina negli anni 1635-36; in seguito passò a Pisa, dietro raccomandazioni di Galileo e del Castelli; la stima che egli seppe procacciarsi allora dal governo toscano è dimostrata dall'episodio relativo ad Apollonio, che narrammo più sopra. Costretto, a quanto pare, da motivi di salute ad abbandonare la Toscana, fece ritorno a Messina, ove rimase dal 1667 al 1672; vicende politiche lo costrinsero a lasciare anche questa città e rifugiarsi a Roma, ove morì il 31 dicembre 1679, ospite dei Padri Scolopi. Dei molti manoscritti da lui lasciati, soltanto una parte si salvò dalla distruzione.

Uomo di vivace ingegno, al Borelli arrise la speranza di stabilire le leggi che governano la meccanica del corpo umano, e con tanto successo trattò questa imponente questione che la sua opera postuma in due volumi *De motu animalium* (1680 e 1685) viene ancor oggi citata e riguardata per classica sull'argomento. Ma a noi maggiormente interessa il suo *Euclides restitutus*, che venne giudicato ai suoi tempi molto favorevolmente (ciò è documentato dalle numerose edizioni che ebbe nell'originale latino e in italiano). E siffatto giudizio può senza esitazione venire oggi ratificato; perchè la nuova teoria delle proporzioni ivi esposta si presenta come un tutto organico completo, che offre una sorprendente analogia con la moderna teoria dei numeri reali; cosicchè fra i molti che, durante il secolo di cui ragioniamo, si proposero di perfe-

(1) Alcuni vollero il Borelli nativo di Messina; ma gli argomenti addotti a sostegno di questa tesi non sembrano conclusivi.

**zionare la materia del V Libro di Euclide, al Borelli spetta una posizione eminente. Inoltre, riguardo alla teoria delle parallele, egli suggerì una modificazione al metodo di Euclide molto simile a quella che trovasi in Clavio e poi in Patrici e Cataldi; giacchè propose di sostituire al famoso postulato quest'altra proposizione: Se una retta (limitata) si muove in un piano conservandosi sempre perpendicolare ad un'altra supposta percorsa da un suo estremo, l'altro estremo descriverà una seconda retta.**

## BIBLIOGRAFIA


B. CAVALIERI, *Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta, ac regulae demonstrantur, astronomicaeque supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducuntur* (Bononiae, 1632).

B. CAVALIERI, *Compendio delle regole dei triangoli con le loro dimostrazioni* (Bologna, 1638).

B. CAVALIERI, *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilità de' logaritmi nella gnomonica, astronomia, geografia, altimetria, planimetria, stereometria e aritmetica pratica toccandosi anco qualche cosa nella meccanica, nell'arte militare e nella musica* (Bologna, 1639).

B. CAVALIERI, *Trigonometria plana, et sphaerica, linearis, et logarithmica* (Bononiae, 1643).

B. CAVALIERI, *Lo specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche e di alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono e moto* (Bologna, 1632).

B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilus continuorum nova quadam ratione promota* (Bologna, 1635; II ediz. postuma migliorata, Bologna, 1653).

B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae sex* (Bononiae, 1647).

*Opera geometrica* EVANGELISTAE TORRICELLI (Florentiae, 1644).

*Lezioni accademiche* di EVANGELISTA TORRICELLI (Firenze, 1715).

*Opere* di EVANGELISTA TORRICELLI, *edite da* G. LORIA e G. VASSURA, quattro vol. (Faenza, 1919-1942).

*De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum*, Auctore V. VIVIANI (Flor., 1659).

*Quinto Libro degli Elementi di Euclide ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo con nuov'ordine distesa e per la prima volta pubblicata da* V. VIVIANI (Firenze, 1674).

V. VIVIANI, *Enodatio problematum universis geometris praepositorum a D. Claudio Comiers* (Flor., 1677).

V. VIVIANI, *Formazione e misura di tutti i cieli con la scrittura e quadratura esatta dell'intero e delle parti di un nuovo cielo ammirabile* (Firenze, 1692).

*De Locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libres iniuria temporum amissos Aristaei Senioris Geometrae, auct.* V. VIVIANI (Flor., 1702).

*Apollonii Pergaei Conicorum Libri V, VI, VII. Paraphraste Abalphate Asphahanensis nunc primum editi. Additus in calce Archimedis Assumptorum Liber ex codicibus Arabicis m. ss.* ABRAHAMUS ECCHELLENSIS *latinos reddidit.* I. A. BORELLUS *curam in geometricis versioni contulit et notas uberiores in universum opus adiecit* (Flor., 1661).

M. RICCI, *Geometrica exercitatio de maximis et minimis* (Roma, 1666).

G. A. BORELLI, *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa, brevius et facilius contexta, in quibus praecipue proportionum theoriae, nova firmiorique methodo promuntur* (Pisis, 1658).

G. A. BORELLI, *Euclide rinnovato, ovvero ecc.* (Bologna, 1663).

G. GIOVANNOZZI, *La versione borelliana dei Conici di Apollonio.* Con 21 *Lettere* inedite di G. A. BORELLI (Roma-Firenze, 1916).

## CAPITOLO XXIII

# GLI ALGEBRISTI DELLA VIGILIA

### A. Girard

329 - Nel periodo che immediatamente precede la comparsa di Descartes sulla scena del mondo si incontra nella storia dell'algebra (per non parlare di coloro che calcarono fedelmente le orme del Viète) [1] un gruppo di matematici di notevole valore, la cui considerazione è indispensabile a chi voglia valutare con serena giustizia l'entità del contributo dato a quella scienza dal celebre autore del *Discours de la méthode*. Allo studio dell'opera meritoria di questi preparatori efficaci di un grande avvenimento è consacrato il presente Capitolo.

Il primo di essi è Alberto Girard. Questo matematico che incontrammo sotto la veste di editore e commentatore dello Stéviu (v. p. 340) nacque a St. Mihiel (Lorena), visse in Olanda a partire dal 1625 e ivi morì nel 1633. La sua opera (modesta di mole, ma riboccante di vedute originali), intitolata *Invention nouvelle en l'algèbre,* riassume e coordina le scoperte da lui fatte appunto quando fungeva da ordinatore e chiosatore di opere altrui. Per dichiarazione dello stesso autore, essa consta di tre parti, distinte non tipograficamente, ma tenendo conto della materia trattata.

La meno importante è senza dubbio la prima, che è di contenuto aritmetico. Essa si apre con una proposta, intesa a rendere possibile e relativamente agevole la lettura dei numeri grandi, basata sulla metodica introduzione di periodi aventi per base il numero 1000; nascono così i gruppi denominati come segue: unità, migliaia, milioni, migliaia di milioni, bilioni, migliaia di bilioni, trilioni, ecc.; sono i nomi tuttora in uso. Seguono le norme per eseguire le quattro operazioni con interi e poi con frazioni e quindi la regola del tre; le norme anzidette vengono poi estese al caso di numeri segnati e finalmente al calcolo con radicali, semplici o sovrapposti, monomi e binomi.

La seconda parte è di contenuto algebrico ed è ivi visibile l'influenza

---

[1] Fra questi merita un cenno Carlo Rinaldini grazie alla sua voluminosa e svariata produzione. Nacque in Ancona il 30 gennaio 1615, servì come ingegnere i papi Urbano VIII e Innocenzo X e poi (1649) ottenne una cattedra nell'Università di Pisa, che lasciò per una in quella di Padova. Ottenuto il collocamento a riposo nel 1698, si restituì nella città natale, ove si spense il 17 luglio dello stesso anno.

esercitata sul Girard da Viète e Stévin, dell'ultimo dei quali il nostro matematico adottò il sistema per rappresentare le incognite e le loro potenze. Una prima circostanza in cui egli manifestò chiaramente la propria originalità è nel suggerire di considerare come completa qualunque equazione algebrica anche se priva di qualche termine, riguardando i termini mancanti come affetti dal coefficiente zero, osservazione ovvia ma che abilita a enunciare alcuni teoremi senza alcuna restrizione. Se ne ha subito un esempio nell'operazione (« isomère ») di trasformare un'equazione algebrica

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots = 0$$

mediante la relazione $y = x/a$, chè così il Girard può affermare che i coefficienti dell'equazione trasformata si ottengono da quelli della primitiva moltiplicandoli per le successive potenze di $a$, dalla prima all'$n$-esima; egli non manca di rilevare l'utilità di siffatta operazione quando si voglia liberare un'equazione dalle frazioni, o renderne più piccoli i coefficienti, ecc. Riguardo alle equazioni cubiche il Girard ha insegnato con molta chiarezza il modo di ridurre alla trisezione dell'angolo l'equazione

$$x^3 = p\,x + q \tag{1}$$

supposta appartenere al caso irriducibile. Trovatene una radice $x$ le altre due si dedurranno mediante un'equazione quadratica dal momento che si ha

$$x_2 + x_3 = -x_1 \quad , \quad x_2\,x_3 = -\frac{q}{x_1}.$$

A queste considerazioni algebriche il nostro matematico fa seguire una costruzione geometrica che non tardò a divenire classica e che giova, quindi riferire: Si descriva (Fig. 51) una circonferenza di centro $O$ e diametro $AB = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$; si conduca in esso la corda $A\,C = q : \frac{p}{3}$ cosa possibile avendosi $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ dal momento che per ipotesi, la (1) appartiene al caso irriducibile; si chiami $3\,\alpha$ l'angolo $B\,A\,C$ e si divida l'arco $B\,C$ in tre parti eguali nei punti $D, E$; allora il segmento $A\,D$ misurerà la radice positiva della data equazione; e se il triangolo $D\,F\,G$ è equilatero, i segmenti $A\,F$ e $A\,G$ ne misureranno le radici negative cambiate di segno. Per convincersi dell'esattezza di questo risultato si osservi che, posto $A\,D = x$, si

Fig. 51.

avrà

$$\cos 3\alpha = \frac{A\,C}{A\,B} = \frac{q}{p/3} : 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot q}{2\,p\sqrt{p}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A\,D}{A\,B} = \frac{\sqrt{3}\,x}{2\sqrt{p}};$$

ed essendo

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

sostituendo, si ricade nella (1); onde la corda $A\,D$ misura la radice positiva di questa equazione; mentre le corde $A\,F$ e $A\,G$ ne dànno le altre due radici, mutate di segno.

330 - Sorvolando sopra altre osservazioni fatte dal Girard e che riescono utili nella risoluzione delle equazioni cubiche, segnaliamo tre teoremi fondamentali nella teoria delle equazioni algebriche (che l'autore scrive sotto la forma

$$x^n + a_2\,x^{n-2} + a_4\,x^{n-4} + \ldots = a_1\,x^{n-1} + a_3\,x^{n-3} + \ldots)$$

relazioni che il nostro autore ha la gloria di avere scoperte. Il primo afferma l'esistenza in ciascuna di $n$ radici; nel corso di questa *Storia* vedremo che non meno di centosettant'anni dovevano passare prima che questa proposizione fosse dimostrata con piena generalità e perfetto rigore, ma al Girard spetta il merito di averla enunciata. Il secondo insegna le relazioni che passano fra i coefficienti e le radici, cioè le identità $\Sigma\,x_i = a_1$, $\Sigma\,x_i\,x_k = a_2 \ldots$ Finalmente il terzo fa conoscere le somme delle potenze simili delle radici in funzione dei coefficienti; oggi ancora tali fondamentali relazioni portano a buon diritto il nome di « formole di Girard ».

Giova osservare che, per enunciare questi teoremi con piena generalità, il Girard si appoggiò sulla supposizione che l'equazione proposta fosse completa o resa tale con la previa introduzione di termini con coefficienti nulli. Aggiungiamo che quei teoremi hanno un senso soltanto quando si tenga conto anche delle radici negative e immaginarie; a tale proposito egli acutamente osserva: « on pourrait dire a quoi donc sert ces solutions qui sont impossibles, je reponds pour trois choses, pour la certitude de la règle generale, et qu'il n'y a point d'autre solution, et pour son utilité: l'utilité est facile, car elle sert à l'invention de semblables équations ».

Per mettere in luce l'utilità di considerare anche le soluzioni negative il Girard risolve il problema (Fig. 52) di condurre per il vertice $A$ di un quadrato $A\,F\,O\,B$ di lato 4 una trasversale $A\,N\,C$ tale che il segmento di essa intercetto fra i lati $O\,B$, $O\,F$ di quel quadrato abbia per lunghezza $\sqrt{153}$. Scelta $F\,N = x$ per incognita principale del problema, la considerazione dei triangoli simili $A\,F\,N$, $O\,N\,C$ dà subito la proporzione

$$\frac{\sqrt{16 + x^2}}{x} = \frac{\sqrt{153}}{4 - x}.$$

che traducesi nell'equazione

$$x^4 - 8x^3 - 121x^2 - 128x + 256 = 0 ;$$

questa ammette le due radici intere e positive 1 e 16; liberata da esse si trovano le altre due radici negative $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{4\frac{1}{4}}$, e il Girard interpreta questo risultato mostrando che il problema ammette quattro soluzioni reali, dal momento che vi soddisfano le quattro trasversali *N C, P D, H K, G L.*

Un ultimo perfezionamento apportato all'algebra dal Girard si riferisce ai sistemi determinati di equazioni algebriche e consiste in un

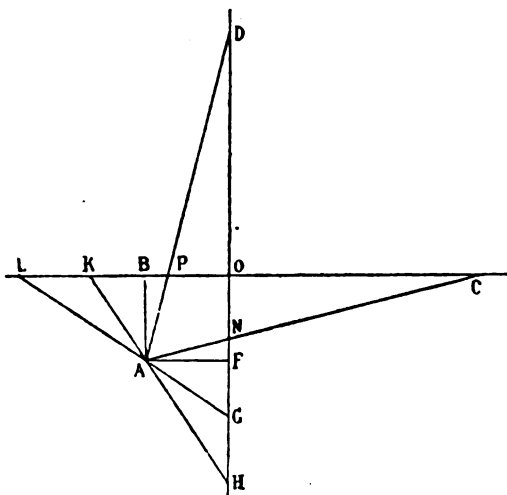



Fig. 52.

espediente che abilita a trattare simultaneamente parecchie incognite (si ricordi che ciò non era possibile usando la simbolica di Diofanto, sostanzialmente conservata dal Bombelli); egli lo fa conoscere applicandolo ad un problema già risolto da Cardano e Stévin; è quello che traducesi nel sistema

$$x + y + z = 26 \quad , \quad x^2 = yz \quad , \quad x^2 = 2xy + 6y ;$$

i rapidi progressi compiuti dall'algebra poco dopo, fecero abbandonare e dimenticare quell'artificio.

331 - Non meno originale ed importante è l'ultima parte dell'*Invention nouvelle* la quale tratta di una « science inconnue, si ce n'est devant le déluge », cioè la misura delle aree dei poligoni sferici. Quell'asserzione pecca di un po' di esagerazione, perchè non mancarono anteriori conati per giungere allo stesso risultato; ma è certo che gli è nella citata opera che si legge per la prima volta la fondamentale pro-

posizione seguente: « Ogni poligono sferico limitato da archi di circolo massimo comprende un numero di gradi espresso dalla differenza tra la somma dei suoi angoli interni e la somma degli angoli interni di un poligono piano dello stesso numero di lati, posta l'area totale della sfera uguale a 720° ». La dimostrazione, basata sull'uso di infinitesimi, lasciò l'autore perplesso sulla sua esattezza, onde dichiarò quel teorema « en conclusion probable »; a Lagrange stesso essa parve poco rigorosa, ma si è riusciti (Vacca) a esporla sotto forma pienamente rigorosa, cosicchè tutti convengono che il Girard fece compiere alla geometria della sfera un progresso della più alta importanza. Per il caso del triangolo sferico, si ricade in un risultato che vedemmo (p. 423) conseguito poco dopo da B. Cavalieri, senza conoscere quanto aveva pensato e scritto il collega lorenese.

332 - Prima di pubblicare l'opera testè discorsa il Girard aveva dato alla conoscenza della sfera un altro contributo di carattere differente: mentre l'*Invention* ha l'aspetto di una memoria scientifica destinata ai matematici già provetti, un carattere elementare ha lo scritto a cui alludiamo. È una tavola di valori delle linee trigonometriche calcolate nell'ipotesi che il raggio del cerchio fondamentale valga 10000, alla quale è annesso un *Traité succinct de la trigonometrie,* ove trovansi innovazioni meritevoli di venire qui registrate. Una particolarità di carattere generale è l'assenza di dimostrazioni, il che induce a credere che l'autore si rivolgesse a pratici incapaci di comprendere ragionamenti matematici.

Nell'esordio della sezione relativa alla trigonometria rettilinea s'incontra il teorema di Pitagora, poi quello dei seni e finalmente la fondamentale osservazione che quella scienza può compendiarsi nel problema seguente: « Dati tre elementi, che non siano i tre angoli, di un triangolo rettilineo, determinare gli altri ». Il caso in cui si conoscano due lati e l'angolo compreso viene dal Girard trattato sia giovandosi della formola del Finck (p. 402)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}\left(A+B\right)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}\left(A-B\right)}.$$

sia servendosi del teorema del coseno che egli scrive sotto la forma

$$c^2 = (a-b)^2 + \frac{2}{R}\,a\,b\ \text{sen ver}\ C$$

(ivi $R$ è il raggio del circolo trigonometrico), la quale egli dice essere « de mon invention ». Seguono alcune considerazioni concernenti i triangoli rettangoli e altre relative ai poligoni in generale, sulle quali per brevità non ci fermiamo, per passare a quanto concerne i triangoli sferici.

Questa parte si apre con alcune generalità di geometria sferica, che

non si leggono in Euclide; s'incontra poi il teorema dei seni per triangoli sferici e quindi i sei casi di risoluzione dei triangoli sferici rettangoli. Non mancano le formole fondamentali della prostasferesi

$$\text{sen}\, A \cdot \text{sen}\, B = \frac{1}{2} \left\{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \right\},$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \left\{ \cos(A - B) + \cos(A + B) \right\},$$

sulle quali, naturalmente, il Girard non può accampare alcun diritto di proprietà. Occupandosi della risoluzione di triangoli sferici obliquangoli egli insegna a dedurre da uno di essi altri, ricorrendo, quando è il caso al triangolo supplementare, l'importanza del quale risulta palese grazie all'osservazione che esso riduce a tre i sei casi fondamentali di risoluzione dei triangoli sferici. Superfluo avvertire che il nostro autore merita di venire rilevato è che egli insegna quattro nuove formole, che attribuisce al Viète, quantunque non s'incontrino in alcuna delle opere superstiti del grande matematico francese; esse si riferiscono a un triangolo sferico $ABC$, in cui sia calato da $A$ l'arco $AD$ perpendicolare al lato opposto; con le notazioni moderne esse si scrivono come segue:

$$\sec BAD / \sec CAD = \text{tg}\, AB / \text{tg}\, AC$$
$$\sec BD / \sec CD = \sec AB / \sec AC$$
$$\text{sen}\, CD / \text{sen}\, BD = \text{tg}\, B / \text{tag}\, C$$
$$\sec BAD / \text{sen}\, CAD = \sec C / \sec B.$$

Girard chiude il suo volume trattando il seguente problema: « Determinare il sesto lato di un quadrangolo sferico di cui sono noti gli altri cinque ». Stévin non vi era riuscito. E poichè, quando il suo libro fu finito di stampare restavano a sua disposizione alcune pagine, il Girard ne approfitta per risolvere due altre questioni; una, già trattata da W. Snellio, consiste nella risoluzione di un triangolo sferico rettangolo di cui si conoscono due lati, senza ricorrere alla tavola dei seni; l'altro ha per oggetto i tre quadrangoli piani, che nascono considerando, in tutti gli ordini possibili, quattro punti arbitrari di una circonferenza; il nostro autore dimostra che il prodotto delle loro diagonali divisa per il doppio del diametro eguaglia l'area di quello fra quei tre quadrilateri che non è intrecciato; risultato elegante che fa giudicare singolare fortuna che il tipografo abbia posto a disposizione del Girard alcune pagine, dopo che era ultimata la stampa della trigonometria.

## T. Harriot

333 - Passiamo dai Paesi Bassi all'Inghilterra per esaminare la vita e le opere di un illustre viaggiatore, il quale trascorse buona parte della sua vita nello studio e nella meditazione: Tommaso Harriot. Egli nacque a Oxford nel 1560 e in quell'illustre Università ottenne (12 febbraio 1580)

il grado di B. A. (Bachelier of Arts). Dietro invito di Sir Walter Raleigh nel 1586 si recò nella Virginia; rimpatriato dopo cinque anni, scrisse una relazione geografico-statistica intorno ai paesi da lui visitati che fu ed è tuttora riguardata come un modello del genere. Il Conte di Northumberland, suo ammiratore, gli diede ospitalità in un suo castello, ed ivi egli attese ininterrottamente a studi sull'algebra e sull'ottica e a fare osservazioni astronomiche e metereologiche, dei cui risultati dànno notizia alcune lettere da lui dirette a Kepler e pubblicate nelle *Opere* del grande astronomo. Fu sempre di salute cagionevole e morì di un cancro al naso il 1 luglio 1621, lasciando un'enorme quantità di monoscritti di carattere scientifico. Da essi fu tratto il volume intitolato *Artis analitycae praxis*, pubblicato dieci anni dopo la sua morte da un certo Warner, il quale, nella chiusa della prefazione, promise di trarre dall'inedito altro di quanto scrisse l'Harriot, ma sgraziatamente non mantenne la promessa. Quei fogli lasciati dal geniale viaggiatore andarono sgraziatamente dispersi; li rintracciò e raccolse nel 1784 il barone von Zach, ed ora si trovano nel British Museum nell'attesa che altri ne compia un completo esame.

Benchè nelle pagine da lui scritte non si trovi alcun cenno degli autori che posero l'Harriot al corrente dello stato dell'algebra, pure non v'ha dubbio che egli conobbe le opere di Viète. Al pari di questo egli indica le incognite mediante vocali e i dati mediante consonanti, ma in entrambi i casi minuscole invece delle maiuscole di Viète; da questo invece si stacca scrivendo le potenze successive di una stessa quantità come prodotti di altrettanti fattori fra loro eguali. E poichè egli si serve dei segni $+$, $-$, $=$ così egli scrive le equazioni sotto una forma che risulta dal seguente esempio:

$$aaa - baa + caa + daa - bca - bda + cda = bcd\,.$$

Egli è l'inventore dei segni $>$, $<$ e concepì il primo membro di un'equazione algebrica (il secondo essendo lo zero), supposto che il termine di grado massimo abbia per coefficiente 1, come prodotto di fattori della forma $x - a$; bandì però le radici negative, tanto che, di fronte ad equazioni che mancano di positive, si arestò a dimostrare l'inesistenza di quantità soddisfacenti alle condizioni del problema. Nell'opera dell'Harriot s'incontra per la prima volta il termine « aequatio canonica » per un'equazione della forma $f(x) = k$, il quale era destinato a rimanere nella scienza, sia pure con altri significati: vi si trova poi un metodo per approssimare le radici di una equazione algebrica, fondato sul concetto, già usato da Viète, di scomporre l'incognita nella somma di due parti, una scelta convenientemente, l'altra da determinarsi tenendo conto dell'equazione risolvenda. Finalmente vanno ivi rilevate, come nuove e importanti, le seguenti diseguaglianze:

$$a^3 + b^3 > a\,b\,(a + b)\,,$$

$$4\,(a^2 + a\,b + b^2)^3 > 27\,a^2\,b^2\,(a^2 + b^2)\,.$$

$$(a + b + c)^3 > 3\,a\,b\,c\,.$$

Dai manoscritti tuttora esistenti traesi la prova che l'Harriot, forse per primo, riuscì a calcolare l'area di un triangolo sferico; ma lasciò a Girard e Cavalieri la gloria di legare il proprio nome a questa importante scoperta. Dalla stessa fonte si desume la prima espressione in prodotti dei coefficienti binomiali, i quali sino allora venivano calcolati per via ricorrente. Emerge da ciò che le « inedita » harrotiana rappresentano una miniera non ancora sufficientemente esplorata e sfruttata e che potrà largamente compensare chi si accingerà a scavarla profondamente.

## W. Oughtred

334 - Il terzo dei matematici a cui si fece allusione nell'esordio del presente Capitolo è un inglese nato a Eton — la sede del celebre collegio — tra il 1573 e il 1575: Guglielmo Oughtred. In quel collegio egli entrò il 1° settembre 1592; tre anni dopo passò nel King's College di Cambridge, ove divenne nel 1596 B. A. e nel 1600 (M. A. (Magister of Arts). Avendo abbracciata la carriera ecclesiastica, fu nel 1604 inviato a Shalford (Surrey) in qualità di vicario; nel 1610 fu promosso rettore e destinato a Albury, ove rimase sino alla sua morte, avvenuta il 30 giugno 1660. Intorno ai suoi viaggi sul continente e su una sua chiamata da parte del Granduca di Toscana, nulla può dirsi di sicuro. Non occupò alcun posto nel pubblico insegnamento, ma numerose sono le persone che si dichiararono suoi discepoli: va in particolare rilevato che verso il 1628 egli fu incaricato dal conte di Arundel di istruire in matematica il proprio figlio, e appunto da tale insegnamento trae origine il trattato d'algebra che vedremo essere il suo maggior titolo di gloria.

Gli storici della gnomonica ricordano l'Oughtred grazie a metodi da lui inventati per tracciare le meridiane, mentre coloro che si occupano della storia delle macchine calcolatrici lo citano come primo inventore di un apparato, forma primitiva del regolo calcolatore: a questo proposito va notato che la priorità di tale invenzione gli venne contestata da un suo discepolo, R. Delamain, che fu professore di Carlo I; donde una vivace contesa, la cui sentenza fu pronunciata soltanto ai dì nostri senza alcuna condanna, essendosi riconosciuto che si trattava di invenzioni indipendenti per le quali i tempi erano maturi.

All'Oughtred viene anche attribuita un'anonima appendice alla versione inglese pubblicata a Londra nel 1618 della *Descriptio* neperiana, dovuta a E. Wright (v. p. 401); ivi la moltiplicazione è indicata con la lettera $x$, che è forse la forma primitiva di un simbolo che, come vedremo, fu introdotto nella scienza dal matematico di cui ci occupiamo. Quell'appendice tratta in parte dell'intervento dei logaritmi nella risoluzione dei triangoli e in parte di un nuovo metodo per il calcolo di questi. Devesi lamentare che questo metodo abbia conseguito allora scarsissima notorietà, chè esso è talmente pregevole che fu poi riscoperto indipendentemente più volte.

335 - La prima opera dell'Oughtred che sia stata pubblicata col suo nome è anche quella che doveva dargli maggior fama. Nella sua prima

edizione (1631) essa è intitolata *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio... quasi clavis est,* mentre le parole *Clavis mathematicae,* sotto cui è generalmente nota, trovasi nel posto d'onore delle altre due edizioni (1648, 1652) che uscirono mentre l'autore era in vita e nelle seguenti (1667, 1675 (¹); la prima differisce molto dalle seguenti (che sono sostanzialmente concordanti) ed è su di essa che deve basarsi principalmente quando vogliasi determinare il posto che compete all'Oughtred nella storia dell'algebra.

Nella sezione aritmetica dell'opera in questione si apprende quella procedura per eseguire una moltiplicazione approssimata che è nota in tutto il mondo col nome di « regola di Oughtred » (²).

Nella parte algebrica le innovazioni concernono più la forma che la sostanza, ma sono di grande importanza. All'Oughtred devesi, infatti, l'introduzione della croce di S. Andrea $\times$ per indicare la moltiplicazione; non seguiremo l'esempio degli storici che si sforzarono d'indovinare il motivo di tale scelta e ci limiteremo a constatare l'accettazione generale e permanente di siffatta innovazione. Invece ebbe vita effimera il sistema di indicare come segue

$$\mathrm{A}q \quad , \quad \mathrm{A}c \quad , \quad \mathrm{A}qq \quad , \quad \mathrm{A}qc \quad , \quad \mathrm{A}cc \quad , \quad \ldots$$

le potenze successive di $A$, il quale fu dall'Oughtred applicato anche quando la quantità su cui si opera è un segmento, epperò è designata con le due lettere che ne indicano gli estremi; questo sistema è una diretta derivazione di quello seguito da Viète, il quale, come sappiamo, scriveva ad esempio *A quadrato-cubum* invece di $Aqc$, per rappresentare $A^5$. E poichè l'Oughtred usava il segno : in luogo di parentesi, così per lui la scrittura $q:A - E$ significava $(A - E)^2$. Similmente per le radici: chè ad esempio $\sqrt{cccc}1000$ significava per lui $\sqrt[12]{1000}$ e $\sqrt{q}:A + E$ equivale al nostro $\sqrt{A + E}$.

Più originale è il modo in cui il nostro autore scriveva una proporzione, cioè

$$A \cdot B :: \alpha \cdot \beta \quad \text{e, in certi casi,} \quad A : B :: \alpha : \beta \ ,$$

il quale per lungo tempo fu adottato da molti autori in Inghilterra e sul continente. Non altrettanta larga diffusione ebbe il segno -:;- per indicare che una serie di numeri sono in progressione geometrica.

Postosi sulla via di introdurre nell'algebra nuovi simboli, l'Oughtred non si è arrestato a quelli surriferiti. Giacchè egli convenne di designare sempre con $A$ la maggiore di due rette date e con $E$ la minore, con $Æ$ il loro prodotto, con $Z$ la loro somma e con $X$ la loro differenza; inoltre altri simboli speciali furono da lui inventati per indicare le combinazioni $A^2 \pm E^2$, $A^3 \pm E^3$. La simbolica risultante paragonata a

(¹) Nel 1647 fu tradotta in inglese da E. Halley, di cui ci occuperemo in seguito.
(²) Per un certo tempo essa si diffuse nelle scuole italiane grazie all'*Appendice agli Elementi di algebra* di I. TODHUNTER (Napoli, 1879).

quella di Viète mostra che l'algebra dallo stadio di sincopata aveva ormai raggiunto quello in cui essa merita il nome di simbolica, onde con giusto orgoglio l'Oughtred poteva scrivere più tardi: « Il mio bel metodo simbolico non opprime la memoria con un grande numero di vocaboli: non grava l'immaginazione nè la distrae col paragone e la discussione di un grande numero di oggetti svariati; ma mostra d'un colpo tutta la successione delle operazioni e tutte le fasi successive del ragionamento. Finalmente gli enunciati dei teoremi possono essere compresi, non più soltanto da un unico popolo, ma da tutti i popoli, qualunque sia la loro lingua, purchè conoscano i significati dei simboli usati ».

336 - Della simbolica da lui ideata il nostro autore fece un'applicazione oggi talmente ovvia da sembrare banale, ma che egli ha il merito di avere suggerita per primo: cioè la traduzione in linguaggio algebrico di quanto contiene il II Libro degli *Elementi* di Euclide (v. p. 45); e poichè questo Libro ha, almeno nell'apparenza esterna, un contenuto geometrico, si è in presenza di una vera e propria applicazione dell'algebra alla geometria, ma non (si badi bene) ad una primordiale geometria analitica (metodo delle coordinate). In forma congenere è scritto il Cap. XXX dell'opera in questione, ove l'Oughtred, inspirandosi a quanto scrisse il Viète nella memoria intitolata *Effectionum geometricarum canonica recensio,* ha mostrato, fra l'altro, la possibilità di risolvere con la riga e il compasso quei problemi geometrici che conducono ad equazioni quadratiche e biquadratiche.

Va però notato che, più ancora che dal citato matematico francese, l'Oughtred trasse ivi profitto da quanto aveva scritto un suo discepolo, a noi già noto (v. p. 268), Marino Ghetaldi. Questi studiò a Roma sotto la direzione del Clavio, in Anversa sotto quella del Coignet (p. 380), mentre a Parigi subì l'influenza del Viète; a Venezia si legò d'amicizia col celebre Paolo Sarpi. Nel 1607 diede in luce due saggi di divinazione di antiche opere perdute: una concerne la memoria apolloniana *Sulle inserzioni* (v. p. 58), mentre l'altra integra l'*Apollonius Gallus* del Viète (p. 365). Dopo la sua morte fu pubblicato un suo lavoro di commento a quanto Viète aveva scritto nella citata *Effectionum,* grazie a cui dello stesso fu agevolata la intelligenza e diffusa la conoscenza; a torto il Ghetaldi fu annoverato quale precursore di Descartes nell'invenzione della geometria analitica, chè nelle sue opere di coordinate non trovasi alcun cenno. Appunto da quest'opera del Ghetaldi l'Oughtred tolse i primi dieci dei problemi trattati nel succitato Cap. XXX della *Clavis*.

337 - Ma nella medesima opera si trovano altre questioni ricche di maggiore originalità. Sorvolando sul calcolo del volume di un tronco di piramide, perchè era già stato effettuato da Erone e poi da Leonardo Pisano, va notato il problema della stazzatura di una botte. L'Oughtred considera questo solido come generato dalla rotazione di un arco d'ellisse attorno a un suo asse e così può giovarsi di teoremi di Archimede; ma per ciò bisogna previamente determinare la lunghezza dell'asse della curva, attorno a cui avviene la rotazione, in funzione dei tre numeri

$H, D, d$ caratteristici della botte (altezza e diametri delle basi); a tale scopo egli fa appello a quella proprietà caratteristica dell'ellisse che leggesi nelle *Coniche* di Apollonio e che noi oggi scriviamo sotto la forma di equazione, come segue:

$$\frac{y^2}{(c + x)\ (c - x)} = \text{cost.}\ ;$$

benchè l'Oughtred non vada oltre la determinazione di quell'asse, pure la formola di stazzatura

$$\frac{\pi}{12} H\ (2\ D^2 + d^2)$$

porta tuttora il suo nome. L'ultimo dei problemi trattati dal nostro autore ha per iscopo la cinquesezione dell'angolo; egli trova l'equazione di 5° grado che serve allo scopo, ma con molta diplomazia gira la difficoltà della risoluzione, dichiarando che non entra nel piano della sua opera la trattazione delle equazioni non riducibili a quadratiche. Va da ultimo rilevato che la chiarezza del dettato — che appare mirabile anche senza paragonare la *Clavis* agli scritti di Cardano e Viète — spiega lo straordinario successo che ebbe quest'opera e la grande influenza che essa esercitò.

338 - Le edizioni posteriori della stessa appartengono all'epoca postcartesiana; per non ritornare su di essa più avanti rileviamovi un'estesa pregevole memoria sopra la risoluzione delle equazioni numeriche, nella quale il metodo di Viète trovasi illustrato e svolto; non insistiamo sulle proposizioni espresse dalle formole

$$\log a\, b = \log a + \log b \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b\ ,$$

$$\log a^m = m \log a \quad , \quad \log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

che vi si leggono, chè esse erano di uso corrente verso la metà del secolo XVII. Nuovi sono i segni ⊏ ⊐ per indicare maggiore e minore, ma non furono preferiti a quelli più semplici dell'Harriot; nuovo è pure il segno $\sim$ per designare il valore assoluto della differenza di due numeri, che solo il Wallis adottò; dal segno $\pi/\delta$ per indicare il rapporto della periferia di un cerchio al suo diametro ebbe origine il $\pi$ usato nello stesso scopo. Passando in altro campo, notiamo che all'Oughtred appartiene il teorema « è costante il prodotto delle distanze di un punto fisso dai punti in cui una trasversale condotta per esso taglia una circonferenza del suo piano », il quale non trovasi esplicitamente in Euclide (ma in tutti gli altri trattati di geometria).

Altri nuovi simboli furono usati dallo stesso matematico in un suo commento al X Libro degli *Elementi* e in altre sue pubblicazioni; secondo F. Cajori [1] in totale ammonterebbero a 150; però non è certo

[1] V. la già citata *History of mathem. Notaticus.*

se tutti siano di sua invenzione o se alcuni non siano stati introdotti da editori posteriori. Non ci arresteremo ad enumerarli; rileveremo piuttosto che nella sua *Trigonometria* egli si è servito di abbreviazioni, da lui proposte nel 1632, le quali, nel loro insieme, rappresentano il primo stadio della simbolica oggi in uso nella teoria delle funzioni circolari; giova qui riferirle:

$s$ = seno , $t$ = tangente , $se$ = secante

$s \cdot$ co = coseno (cioè sinus complementi),

$t \cdot co$ = cotangente , $log$ = logaritmo.

Aggiungasi che ivi si leggono complete dimostrazioni delle due prime analogie neperiane; l'Oughtred in ciò s'incontrò casualmente col Cavalieri (v. p. 423).

Cercando accuratamente nei vari scritti dell'Oughtred si potrebbe rintracciarvi altre cose degne di menzione; ma quanto dicemmo, se non c'inganniamo, basta a dimostrare che, nell'esercito regolare dei matematici di professione, a questo volontario spetta un grado assai elevato. E ciò con tanta maggior ragione perchè sono numerose le persone che, reduci da visite fatte al detto prelato, non esitarono per tutta la loro vita a riconoscersi e proclamarsi suoi discepoli; basti fra essi citare G. Wallis e C. Wren, di cui parleremo più innanzi, il primo sommo matematico, l'altro famoso architetto. La sua benefica influenza si protrasse per molto tempo dopo che egli era sceso nella tomba, onde qualcuno non esitò a chiamarlo « il Todhunter del secolo XVII ».

## P. Hérigone

339 - Alle frasi autoesaltatrici dell'Oughtred che riferimmo nella chiusa del n. 335 fanno riscontro altre, non meno altisonanti, che leggonsi in un'opera pubblicata in Francia circa nella medesima epoca (1634); giova riferirle per poi commentarle: « Io ho inventato un nuovo metodo per fare le dimostrazioni, breve e intelligibile, senza ricorrere ad alcuna lingua. Che sia breve e intelligibile senza l'uso di alcuna lingua risulta ad apertura di libro. Che sia intelligibile risulterà manifesto a coloro che comprenderanno le mie notazioni e avranno seguiti i ragionamenti fatti col loro mezzo. Non v'ha dubbio anche che il mio metodo sia più chiaro dell'ordinario, visto che in esso non si afferma nulla che non sia richiamato mediante qualche citazione: norma che gli altri autori non osservano fedelmente; ma siccome tutti misurano la necessità delle citazioni osservando ciò che riesce manifesto od oscuro, così essi si appoggiano a molte conseguenze senza citazioni, le quali però sarebbero necessarie a coloro che non sono progrediti. Aggiungasi che nel metodo ordinario ci si serve di un grande numero di vocaboli e di assiomi senza averli previamente spiegati, mentre nel nuovo non si dice nulla che non sia stato antecedentemente ammesso prima: persino nel corso delle dimostrazioni più lunghe si cita mediante lettere greche

quanto è già stato stabilito prima nel corso del ragionamento. E siccome qualunque conseguenza dipende immediatamente dalla proposizione che si cita, la dimostrazione si svolge dal principio alla fine per una serie continua di illazioni legittime, necessarie e immediate, ciascuna contenuta in una breve riga, le quali possono agevolmente tradursi in sillogismi, dal momento che nelle proposizioni citate si trovano tutte le parti del sillogismo stesso ».

Malgrado lo stile mediocremente elegante in cui sono scritte queste linee, il lettore che conosce natura e scopi della odierna logica matematica non tarderà a ravvisare in chi le scrisse un lontano precursore di coloro che si proposero di scoprire le basi assiomatiche delle varie branche della matematica e di evitare, in ogni occasione, il pericolo di applicare principii diversi da quelli esplicitamente dichiarati. Ma va aggiunto che tale concordanza esiste, non soltanto nel fine, ma anche nei mezzi impiegati per conseguirlo, chè questi, nel nostro autore, come nei moderni, consistono nell'impiego costante di abbreviazioni regolari e di nuovi simboli. Così mentre la parola *est* è riguardata come ulteriormente irriducibile, al plurale (*sunt*) è sostituito dal gruppo *snt*. Simboli speciali sono poi usati per designare un *angolo qualunque* (∠) o un *angolo retto* (∟), un *quadrato* (□), un *parallelogramma* (◊) o un *triangolo* ($\underline{\triangle}$), inoltre, mentre il segno + ha conservato il significato consueto, con — s'indica una retta e con = due rette parallele.

Più originali sono i segni 2 | 2 , 3 | 2 , 2 | 3 che servono a indicare eguaglianza o disuguaglianza, di modo che con le scritture $2a \mid 2b$ , $3a \mid 2b$ , $2a \mid 3b$ si esprime che $a$ è eguale, maggiore o minore di $b$. Finalmente la lettera $\pi$ sta in luogo della preposizione *a*, mentre invece di *o* viene usato il nuovo simbolo $\underline{||}$.

Questo passo così decisivo verso la matematica simbolica fu compiuto da un parigino, professore di matematica, Pietro Hérigone, di cui nulla si conosce tranne che visse nella prima metà del secolo XVII. Del nuovo sistema di esposizione da lui ideato, che è evidentemente un primo tentativo di tachigrafia o pasigrafia, si ha notizia grazie a un *Corso* completo di matematica, scritto tanto in latino quanto in francese. Che quel sistema abilitasse a condensare molta materia in breve spazio è dimostrato dal fatto che, nel I dei volumi che lo compongono, in un migliaio di pagine in-8° piccolo si trovano tutti gli *Elementi* di Euclide, nonchè i cosidetti XIV e XV Libri (v. p. 69), quindi i *Dati* dello stesso, cinque Libri di Apollonio, in base alle restituzioni fattene da Snellio (*Problemi delle sezioni*). M. Ghetaldi (*Inserzioni*) e Viète (*Contatti*), finalmente la teoria delle sezioni angolari. In algebra l'Hérigone si mostra seguace fedele del suo grande conterraneo Viète.

340 - Queste informazioni non sono certamente sufficienti a porgere ai nostri lettori una chiara idea dell'opera in discorso; le caratteristiche di essa risultano nel modo più palese gettando uno sguardo sopra una pagina di essa; per ciò, a complemento di quanto precede, riproduciamo fedelmente quella che si riferisce al teorema di Pitagora (v. figura 53).

TEOR. XXXIII PROPOS. XLVII

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

*Aux triangles rectangles, le carré du costé qui soustient l'angle droit, est égal aux carrez des costez qui contiennent l'angle droit.*

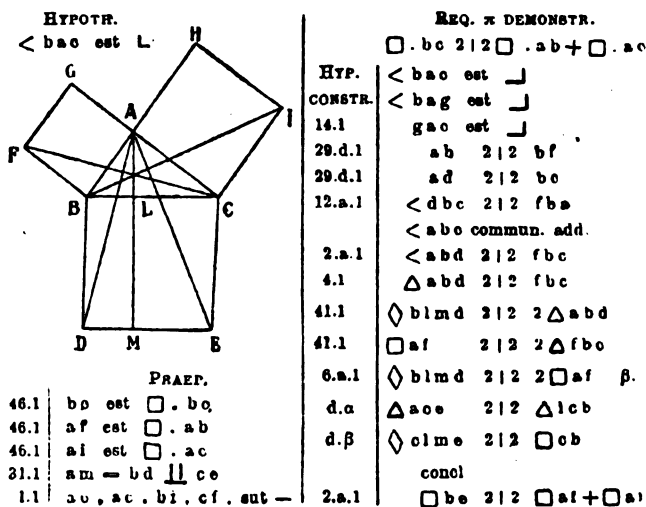



Fig. 53.

« Habent sua fata libelli » suona un'antica massima; alla sorte comune ivi dichiarata non si sottrasse il *Cours* dell'Hérigone; esso ebbe bensì l'onore di una seconda edizione (1644), ma l'autore non trovò seguaci e la sua opera cadde ben presto in un oblio forse immeritato. L'una cosa e l'altra si spiegano con la straordinaria importanza dei progressi compiuti allora dalla matematica in Francia, l'esposizione dei quali è compito affidato ai due Capitoli seguenti. Tuttavia all'occhio dello storico quel *Cours* possiede indiscutibile valore, sia come attestazione della tendenza verso il simbolismo che allora animava la nostra scienza, sia come prova che l'Hérigone deve riguardarsi come un precursore remoto di coloro che nel secolo XIX crearono l'assiomatica.

## BIBLIOGRAFIA

ALBERT GIRARD, *Invention nouvelle en l'algèbre* (Amsterdam, 1629. Réimpression par D. Bierens de Haan, Leiden, 1884).

ALBERT GIRARD, *Table de sinus, tangentes et secantes, selon le raid de* 100000 *parties. Avec un traité succinct tant des triangles plans, que sphériques. Ou sont plusieurs operations nouvelles, non auparavant mises en lumières, tres utiles et necessaires, non seulement aux apprentifs, mais aussi aux plus doctes practiciens des mathematiques* (La Haye, 1626, 1627, 1629; trad. in fiammingo, 1626).

G. OUGHTREDI, *Arithmeticae in numeris et speciebus Institutio: quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est* (Londini, M. M. MC. XXXI).

GUILELMI OUGHTREDI AETONENSIS, *Clavis mathematicae denuo limata, potius fabricata. Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus* (in due vol.) (Oxoniae, 1652).

M. GHETALDI, *Apollonius redivivus, seu restituta Pergaei inclinationum geometria* (Venet., 1607).

M. GHETALDI, *Supplementum Apollonii Galli, seu exsuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometriacarum pars reliqua* (Venet., 1607).

M. GHETALDI, *De resolutione et compositione mathematica* (Roma, 1630).

*The Circle of proportion and the horizontal instrument. Both invented, and the uses of both, written in latin by* Mr. W. O. *Translated into English: and set forth for the publique benefit by* WILLIAM FORSTER (London, 1632).

*Trigonometry, or the manner of calculating the sides and angles of triangles by the mathematical canon, demonstrated by* WILLIAM OUGHTRED (London, 1657).

GUILELMI OUGHTREDI, *Opuscula mathematica hactenus inedita* (Oxford, 1676).

T. HARRIOT, *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* (London, 1631).

G. VACCA, *Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot* (Boll. di bibliografia e storia delle scienze matematiche, t. V, 1902).

P. HÉRIGONE, *Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus, per notas reales et universales circa usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles. Cours de mathematiques demonstré d'une nuovelle briève et claire méthode* etc. (Paris, MDCXXXIV). I Vol.: *Euclides Elements XV Lib.* etc. II Vol.: *Arithmetica practica, computus ecclesiasticus et algebra tum vulgaris tum speciosa, una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sine repetitionem vestigiorum analyseos.* III. Vol.: *Constructio tab. sin. et logarithmor, una cum ear. usu in anatocismo et triangulor. rectilineorum dimensione. Geom. practica. Ars muniendi. Militia. Mechanica.* IV. Vol.: *Sphaera mundi. Geographia vetus et nova, gradibus et minutis longitudinum ac latitudinum designata. Histiodromia.* V Vol.: *Optica, Catoptrica. Dioptrica. Perspectiva. Sphaericorum trigonometria. Theoricae planetarum tam secundum stantis quam motae terrae hypothesin. Gnomonica. Musica.* VI et ult. Vol.: *Supplementum continens geometricas aequationum cubicarum purarum atque affectarum affectiones* (1).

(1) La copia di cui disponiamo porta il millesimo MDCXIV e la dichiarazione che la stampa fu ultimata il 2 di luglio del 1642. Vi si trova allegato un volumetto del medesimo minuscolo formato, contenente *Les six premiers livres des Eléments d'Euclide* e alcune parti delle matematiche elementari spiegate collo stesso sistema, ma in cui tutto è scritto in francese; al termine si trova un *Petit dictionnaire contenant les étymologies et significations des noms et termes plus obscurs des mathématiques.*

## CAPITOLO XXIV

# I PRIMORDI DELLA MATEMATICA MODERNA: DESCARTES E FERMAT

## PARTE PRIMA: DESCARTES

### Biografia di Descartes

341 - Renato Descartes nacque a La-Haye (Turenna) il 31 marzo 1596, da cospicua famiglia, non di « grande » — come allora dicevasi — ma di « petite noblesse », la quale annoverava fra i proprii membri parecchie persone che eransi illustrate nella magistratura e nell'esercizio di professioni liberali, particolarmente nella medicina. Uscito appena dall'infanzia fu inviato (Pasqua 1604) al Collegio Reale della Flèche (Angiò), istituto d'educazione il quale godeva allora di ottima reputazione per merito dei Gesuiti che lo dirigevano; ivi il giovinetto rimase sino all'agosto 1614; dei suoi maestri egli conservò il più grato ricordo e con la Compagnia a cui essi appartenevano mantenne sempre cordiali rapporti.

Negli anni 1612-14 Descartes soggiornò parte nella casa paterna e parte a Parigi, e nei seguenti 1615-16 a Poitiers, inscritto a quella facoltà di giurisprudenza, ma dedicandosi con passione alla medicina, quasi intendesse che in lui si continuassero le tradizioni della sua famiglia. Seguendo poi le consuetudini imposte allora ai cadetti di nobile prosapia, sul finire del 1617 o agli inizi dell'anno seguente si trasferì a Breda (Olanda) per seguire, in qualità di volontario dell'esercito di Maurizio di Nassau, il corso di studi in quell'Accademia militare. Ivi venne in contatto con Isacco Beeckmann (n. il 10 ottobre 1588, m. il 19 maggio 1637), uomo di alto intelletto e di vasta coltura che esercitò sopra Descartes un'influenza benefica e permanente, orientandolo verso le ricerche scientifiche, col fargli ammirare i grandi geometri dell'antica Grecia [1]. Lasciò Breda verso la metà di aprile del 1619 e il 29 dello stesso mese s'imbarcò a Amsterdam, per la Danimarca, donde passò in Germania e a Francoforte assistè all'incoronazione ad imperatore di Ferdinando II. Soggiornò anche a Ulm, ove s'intrattenne con un matematico godente allora grande reputazione, il quale lo pose al corrente dello

[1] Il Beeckmann tenne durante tutta la sua vita un *Diario*, che esiste ancora e che offrì particolari interessanti sopra il pensatore di cui ragioniamo; i passi che a lui si riferiscono vennero riprodotti nel Vol. X, p. 33 e segg. dell'edizione di Descartes citata nella *Bibliografia* che chiude il presente Capitolo.

stato dell'algebra del tempo (1): parliamo di Giovanni Faulhaber (n. a Ulm il 5 maggio 1580, m. ivi nel 1635), il quale viene ricordato nella storia delle matematiche per avere considerate per primo le progressioni aritmetiche d'ordine superiore nella sua *Academiae algebrae* (Ulm 1631) e per avere proposto e risolto il problema di calcolare gli angoli e il raggio del cerchio circoscritto a un ettagono inscrittibile avente i lati misurati dai numeri 666, 1000, 1260, 1290, 1335, 1600 e 2300, suggeritigli da uno studio dell'Apocalisse e del profeta Daniele.

È in questo periodo della vita di Descartes che cade la memorabile notte (10 novembre 1619) nella quale egli compì una scoperta di tale e tanta importanza da indurlo a far voto di renderne grazia a Dio, andando in pellegrinaggio al Santuario di Loreto. Accompagnò poi in Austria e in Boemia le truppe del Duca di Baviera (si ricordi che ardeva allora la guerra che doveva durare trent'anni) e assistè alla battaglia di Praga (8 novembre 1620), semplice spettatore in questo come in tutti gli scontri che si svolsero sotto i suoi occhi. Due giorni dopo egli registrò, in termini vaghi, un'altra scoperta: si tratta con tutta probabilità di qualche perfezionamento all'ottica, quale si legge in una nota opera del Kepler, del quale egli si riconobbe discepolo. Sullo scorcio del 1620 o nei primordi del 1621 lasciò definitivamente le armi per rimpatriare; negli anni 1622-23 lo troviamo alternativamente a Rennes e a Parigi; ma l'irrequietudine che non riusciva a dominare lo spinse a intraprendere nel settembre 1623 una nuova lunga peregrinazione. Per Basilea e la Svizzera giunse in Italia e il 16 marzo 1624 assistè a Venezia alla nota cerimonia degli sponsali del Doge con l'Adriatico; sciolse poi l'antico voto recandosi in pellegrinaggio alla Madonna di Loreto e il 24 dicembre dello stesso anno si trovò mescolato nella folla di fedeli convenuti a Roma per l'apertura del Giubileo. A Firenze ebbe cortesi accoglienze dal Granduca Ferdinando II, ma non vide Galileo, a quanto sembra, allora assente. Per il Moncenisio si restituì in Francia, soggiornando poi quasi di continuo a Parigi; ma ben presto si avvide che, per un gentiluomo, l'abitare in una grande città ove era conosciutissimo non potevasi conciliare con fruttifere meditazioni (così egli ebbe a dichiarare in una lettera scritta al P. Mersenne il 27 maggio 1638); perciò, verso il tramonto del 1628 si trasferì nascostamente in Olanda (ove mutò spesso residenza), località che prescelse non soltanto perchè vi annoverava buoni amici, ma anche perchè, trattandosi di un paese protestante, si sentiva al riparo dall'Inquisizione allora onnipotente.

Nel primo periodo in cui egli abitò i Paesi Bassi fu assorbito dalla redazione di un breve trattato di metafisica; ma uno straordinario fenomeno astronomico osservato a Roma il 29 marzo 1629 (il parelio; egli ne parla in una lettera al P. Mersenne dell'8 ottobre 1629) lo indusse a dedicarsi completamente a studi di fisica celeste. notisi che in quell'epoca (lettera allo stesso del 15 aprile 1630) egli si dichiarava così « las des mathématiques » da farne « peu d'état ».

(1) Da una lettera scritta da Descartes a Beeckmann il 26 marzo 1619 emerge che egli conosceva sin d'allora i segni cossici, che aveva probabilmente appresi nelle opere del Clavio.

I suindicati studi durarono sino al 1633 e condussero a un'opera *Sul mondo,* nella quale il sistema copernicano, occupando una posizione centrale, veniva presentato sotto una luce favorevole. La condanna pronunziata allora contro Galileo indusse l'antico discepolo dei Gesuiti a desistere da una pubblicazione la quale, oltre minacciargli noie e fastidio, avrebbe condotto a una rottura con i suoi antichi maestri (lettere al Mersenne del novembre 1633 e dell'aprile successivo). Si diede allora a esporre sotto forma meno pericolosa i risultati delle sue lunghe meditazioni: così ebbero origine i tre celebri saggi intitolati *Dioptrique, Météores, Géométrie*; però, mentre il primo era pronto per la stampa sino dall'ottobre 1635, il secondo non lo fu che due anni dopo e il terzo fu redatto durante la stampa delle *Météores.* Compiuti che ebbe i due primi, mentre stava per completare il terzo, Descartes si avvide che, per dare all'opera progettata un aspetto organico, era indispensabile premettervi una prefazione. Questa però non tardò ad assumere proporzioni considerevoli e divenne il famoso *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences,* il quale, scortato dagli indicati saggi, fu pubblicato nel 1637 a Leida, ove Descartes erasi trasferito nel frattempo.

Gli è in questo *Discours* che sono insegnati come canoni fondamentali per la ricerca scientifica i quattro seguenti: I. Non accettare per vera cosa alcuna che non si conosca chiaramente esser tale; II. Suddividere ogni difficoltà da risolvere; III. Esaminare per ordine le parti risultanti, procedendo dalle più semplici alle più complesse; IV. Ritornare sempre sopra quelle già esaminate per accertarsi di non avere omessa cosa alcuna. È appena necessario rilevare che, mentre queste tre ultime regole appartengono alla logica tradizionale, proclamando la prima Descartes inalberò il vessillo della rivolta contro il principio d'autorità, ponendosi così a capo di quel movimento filosofico designato di consueto col nome di « razionalismo ». Se anche a siffatta saggia direttiva egli non si è fedelmente attenuto (chè, ad esempio, la sua fisica riposa, non sopra l'esperienza e l'osservazione, ma su premesse aprioristiche) l'averla additata quale fondamento di qualsiasi fruttifera indagine scientifica è un merito così grande che a ragione assicurò a Descartes un posto fra gli eroi dello spirito umano.

342 - L'accoglienza che fece il pubblico degli studiosi alla grande opera quadripartita fu in generale lusinghiera, ma non senza critiche e opposizioni; le lodi furono intramezzate alle critiche, gli « osanna » ai « crucifige »; in conseguenza i tre anni che seguirono la pubblicazione di essa furono assorbiti per Descartes a dissipare le oscurità notate nella sua esposizione e a rispondere alle obiezioni più o meno fondate mosse da fisici e matematici di varia levatura, sia direttamente che per il tramite del P. Mersenne; e chi voglia formarsi un concetto di queste lotte, che benchè incruente assunsero spesso un tono di singolare vivacità, deve ricorrere al carteggio del grande pensatore. Con i filosofi invece egli si trovò alle prese nel successivo decennio. in conseguenza della pubblicazione di opere ove alle scienze positive veniva assegnato un posto secondario. In questa epoca egli tenne attiva corrispondenza con una

dotta principessa palatina, Elisabetta (n. 1618, m. 1680), il che gli porse occasione per spiegare le proprie idee e indicare nuove applicazioni dei metodi da lui inventati; durante gli stessi anni compì frequenti viaggi in Francia per curare i propri interessi e mantenersi in contatto coi compatrioti che dedicavansi agli studi (fra cui ci limitiamo a citare ora B. Pascal). Luigi XIV gli conferì nel 1648 un'annua pensione nella segreta speranza d'indurlo a rimpatriare, ma senza conseguire lo scopo. Giacchè, avendo Chanut, ambasciatore francese alla corte di Svezia, parlato più volte di Descartes con caldo entusiasmo alla regina Maria Cristina, questa, infiammata dal desiderio di legare il proprio nome a qualche cosa di grande, concepì l'idea di avere presso di sè l'autore del *Discours de la méthode*. Le trattative, condotte con grande abilità diplomatica da Chanut, furono coronate da pieno successo [1], chè addì 1° settembre 1649 Descartes lasciò l'Olanda per il regno più settentrionale d'Europa. Decisione fatale! Sia che Descartes abbia trovato il clima svedese eccessivamente rigido, sia che troppo grave gli riuscisse l'impartire lezioni alla regina alle 5 del mattino, fatto sta che non tardò a cadere gravemente ammalato; sviluppatasi una violenta polmonite, egli si spense serenamente l'11 febbraio 1650, gettando nel lutto gli ammiratori e i discepoli che egli contava in tutto il mondo e che da lui attendevano nuovi preziosi insegnamenti. Per opera di Chanut a Stoccolma fu elevato alla sua memoria un monumento degno di lui; ma questa tomba fu ben lungi dall'essere l'ultimo asilo delle ossa del sommo pensatore. Infatti, verso il 1666 i numerosi ammiratori che egli contava a Parigi iniziarono una agitazione perchè la sua salma fosse restituita alla patria e non tardarono a conseguire lo scopo, giacchè il 24 giugno 1667 ebbe luogo la solenne inumazione di Descartes nella chiesa di Saint-Geneviève-du-Mont. Da questo modesto asilo pensò di trarlo un secolo più tardi la Convenzione nazionale; il decreto da essa emanato (2-4 ottobre 1793) ebbe un principio di esecuzione col trasporto dei resti mortali di Descartes nel Jardin Elisée des Monuments français, nell'attesa del trasferimento nel Pantheon. Ma esso non fu effettuato; ed essendo stata decisa la distruzione di quel giardino, la salma del filosofo venne inumata nella chiesa di Saint-Germain-des-Près, ove tuttora si trova. Tuttavia la mancata apoteosi non prova alcun intiepidimento nei sentimenti di ammirazione della Francia per il suo grande figlio; stanno a provarlo le molte edizioni che ebbero le sue opere, gli innumerevoli scritti intesi a illustrare il Cartesianismo nei suoi vari aspetti e la pubblicazione di una sontuosa edizione completa e definitiva di quanto uscì dalla sua penna, deliberata per commemorare nel modo più significativo il terzo centenario della sua nascita.

---

[1] Accogliendo l'invito regale DESCARTES non si attenne alla seguente dichiarazione che leggesi nel *Discourz de la méthode*: « Je me tiendrai toujours plus obligé à ceux, par la faveur desquels je jouirai sans empêchemente de mon loisir, que je serai à ceux qui m'offriront les plus honorables emplois de la terre ».

## Cenni su altri matematici minori del tempo

343 - Con Descartes ebbe rapporti di varia intonazione un altro matematico, Gilles Personnes; essendo nato a Roberval (nella diocesi di Beauvais) l'8 agosto 1602, assunse il nome del luogo nativo e sotto il nome di Roberval è di consueto designato. Sin da giovane (1628) scelse la carriera delle scienze; assistette all'assedio de La Rochelle e poi si stabilì a Parigi, ove nel 1631 ottenne una cattedra nel Collegio Gervais; poco dopo conseguì per concorso il posto di professore nel Collegio di Francia e seppe conservarsela sino alla morte, avvenuta il 27 ottobre 1675, il che torna a suo onore perchè, per disposizione di legge, essa veniva posta a concorso di tre in tre anni; appunto per non lasciarsela sfuggire egli teneva in riserva, come ebbe a dichiarare, « quantité de belles choses qu'il avait découvertes ». E infatti, in vita non consegnò al tipografo che un lavoretto di statica (inserito in una pubblicazione del P. Mersenne) e alcune osservazioni sopra Aristarco da Samo. L'Accademia di Parigi, a cui egli appartenne sino dal 1666, accolse in un volume delle sue Memorie i suoi numerosi scritti, adunati con amorosa cura dall'abate Gallois. Le polemiche che egli ebbe con Descartes e Torricelli ce lo presentano sotto una luce non favorevole dal punto di vista morale; inoltre nel carteggio del tempo si trovano particolari che lo fanno apparire come uomo rozzo e violento.

Una circostanza che lo riguarda va qui notata. Dalla sua corrispondenza col P. Mersenne risulta che Descartes era favorevole a che le sue lettere (le quali erano a disposizione di chiunque volesse prenderne visione) fossero date alle stampe insieme a quelle dei suoi critici; per due volte, anzi, egli redasse il piano di un resoconto completo delle dispute in cui fu implicato; ma il progetto non ebbe seguito. Ora non appena fu morto il Mersenne, il Roberval con la scusa di necessità concernenti la pubblicazione di un lavoro, penetrò nella cella di quel frate, asportò le lettere di cui questi era il detentore e si rifiutò di comunicarle al Clerselier, che preparava la stampa del carteggio cartesiano, onde questi dovette servirsi delle minute imperfette lasciate dal grande filosofo. Per fortuna Roberval non spinse l'indelicatezza sino alla distruzione dei documenti di cui erasi impadronito; perciò, alla sua morte, un matematico di cui parleremo fra breve, il de La Hire, potè ricuperarli, per depositarli nella Biblioteca dell'Accademia delle Scienze. Ma il contegno del Roberval prova che della diffusione di quelle lettere di Descartes egli era preoccupato; forse esageratamente, chè vi si trova la seguente dichiarazione, di cui egli poteva andare giustamente orgoglioso: « Monsieur Roberval... est sans doute... l'un des premiers géomètres de notre siècle ».

344 - Un altro personaggio della stessa epoca è Giovanni de Beaugrand, morto poco prima del 1641, ma della cui vita nulla si conosce, tranne che occupò, sotto Richelieu, un alto ufficio governativo. Alcune sue note all'*Isagoge* del Viète (di cui era caldo ammiratore) furono giudicate così favorevolmente da venire inserite nell'edizione delle opere di

questo grande, curata dallo Schooten. Di un'altra sua opera intitolata *Geostatice* (1636) si sarebbe per fermo perduta la memoria ove Descartes non ne avesse fatta nelle sue lettere una critica demolitrice.

Altri individui di minor conto si presentano a chi studia dal punto di vista matematico la Francia del secolo XVII. Così Claudio Hardy (n. a Mans verso il 1598, m. a Parigi il 5 aprile 1678) ha un posto nella nostra storia per essere stato scelto da Descartes come arbitro in una disputa con Fermat. Gli fu compagno in questa missione di fiducia Claudio Mydorge (n. a Parigi nel 1585, m. ivi nel luglio 1647), altro pensatore in cui gli importanti uffici governativi non spensero l'amore per le ricerche di geometria pura; ne fa fede un trattato sulle sezioni coniche (I<sup>a</sup> ediz., 1631, in due libri; II<sup>a</sup> edi., 1641, in quattro), scritto nello stile degli antichi e contenente non spregevoli aggiunte a quanto essi scrissero sull'argomento; è da credere che a siffatte indagini egli sia stato indotto dal Golio che, verso il 1630, lo aveva esortato a occuparsi dell'antico problema delle tre o quattro rette (v. pag. 62).

Alla magistratura appartenne pure Bernardo Frenicle de Bessy. Nato a Parigi verso il 1605 si rese celebre per la propria singolare abilità nel risolvere i problemi aritmetici. Tenne corrispondenza con scienziati del suo tempo, facendo applicazioni di metodi da lui inventati, ma tenuti gelosamente segreti. Verso il 1660 cessò di occuparsi di aritmetica per dedicarsi interamente alla teologia e alle pratiche religiose; morì a Parigi nel 1675. Membro dell'Accademia delle Scienze sino dalla fondazione, le sue opere furono, dopo la sua morte, raccolte dal de La Hire e pubblicate nel T. V. dei *Mémoires* di quel sodalizio. Il primo lavoro che vi si trova è intitolato *Méthode pour trouver la solution des problèmes par les exclusions*; ivi l'autore esprime l'opinione che scopo dell'aritmetica sia la risoluzione in numeri interi dei problemi non determinati e si propone di indicare degli artifici per scoprirne le soluzioni mediante appropriati tentativi, limitandosi a considerare questioni in cui trattasi di trovare in numeri dei triangoli rettangoli. Di queste figure è proseguito e approfondito lo studio nel *Traité des triangles rectangles en nombres* (pubblicato per la prima volta nel 1676 e ristampato l'anno seguente) ove sono stabilite notevoli proprietà di esse; p. es. è dimostrato il teorema di Fermat « l'area di un triangolo rettangolo in numeri non può mai essere un quadrato » ed aggiunta l'osservazione che non può neppure essere il doppio di un quadrato. Nell'*Abrégé des combinaisons*, che si legge poi, non si trovano cose essenzialmente nuove, nè nella parte teorica, nè nelle applicazioni ai giuochi e a questioni d'interessi; l'autore trova però l'occasione di dar prova della sua straordinaria abilità nel calcolo numerico. La più notevole produzione del Frenicle è un esteso trattato *Des carrés magiques*, ove la relativa teoria è svolta con grande profondità ed estensione; limitiamoci a segnalarvi la scoperta di non meno di 880 quadrati magici formati con i sedici primi numeri della serie naturale.

## L' " opus magnum ,, di R. Descartes e la creazione della geometria analitica

345 - Quando lo storico trovasi in presenza dell'opera di un grande, una importante questione che si affaccia a lui dinnanzi è la ricerca delle fonti a cui attinse l'autore. Per Descartes essa offre grandi difficoltà, chè questi adottò costantemente il sistema di abbandonarsi alla corrente del proprio pensiero, chiedendo ai predecessori soltanto quanto eragli assolutamente indispensabile: e, col fare altezzoso e sprezzante che costituisce la caratteristica più spiccata del suo carattere, sdegnò di arrestarsi a ricordare i suoi ispiratori, facendo eccezione soltanto per qualcuno dei sommi geometri dell'antica Grecia, che gli erano stati segnalati dall'amico Beeckmann. Per strappargli qualche confessione al riguardo fu necessario compulsare le pagine inedite da lui lasciate e le numerose lettere tuttora esistenti. Così facendo si giunse a dimostrare che non gli era ignota la simbolica algebrica del suo tempo, non soltanto quale fu usata dal suo grande conterraneo Viète [1], ma anche nella forma preferita dai matematici tedeschi del tempo (v. pag. 332); e da un passo di una lettera a Huygens si trae la prova che neppure l'Harriot rimase a lui sconosciuto. Di Galileo, che i Gesuiti suoi maestri gli avevano insegnato a venerare, parla più volte nelle sue lettere al Mersenne, riconoscendone talora la grandezza, quasi a malincuore, ma talvolta rivolgendogli degli appunti ingiustificati. Del Cavalieri egli subì l'influenza, perchè certi suoi ragionamenti hanno molti caratteri della *Geometria degli indivisibili;* ma non ne parlò che per ricordare, con poco rispetto, alcune costruzioni inserite nello *Specchio ustorio.* Il Beeckmann gli ispirò probabilmente il « compasso mesolabico » di cui parleremo fra breve, e uno strumento polisettore che, per la sua scarsa praticità, egli lasciò sepolto nelle sue *Cogitationes privatae.* Onde si può ben dire che Descartes, quale ape industre, seppe succhiare il miele più nutriente dalla fioritura che trovavasi alla sua portata.

Ma alla simbolica algebrica egli fece subire un grande perfezionamento, introducendo l'uso degli esponenti, senza però estenderne l'uso alle radici, chè, ad esempio, per indicare una radice cubica egli usò sempre il simbolo $\sqrt{C}$. Le parentesi come le usiamo noi gli rimasero ignote, chè quando gli accadde di esprimere che parecchi monomi sono moltiplicati per una stessa quantità, egli li scriveva in colonna, riuniti da un grande segno $\}$ dopo il quale poneva il moltiplicatore; qualche volta però preferì collocare un punto prima e un punto dopo il gruppo di monomi che poi porremmo fra parentesi. I segni $+$ e — sono da lui adoperati nel senso oggi in uso, ma quando un termine doveva venire preso successivamente o indifferentemente col segno $+$ o col —, egli lo fa precedere da un punto. Quantunque una lettera del 30 settembre 1640 provi che non gli era ignoto il segno $=$ nel consueto significato, pur

[1] Però in una lettera scritta al Mersenne sul finire del 1637 egli negò questa influenza, giungendo anche a svalutare l'opera di quel matematico.

diede la preferenza ad uno di sua invenzione ( $\infty$ ). Egli si liberò dall'obbligo, posto dal Viète, di scrivere un'equazione con termini tutti omogenei e, mentre egli indicò le incognite con le vocali, egli preferì le lettere $x, y, z$. Emerge da tutto ciò che la simbolica introdotta da Descartes non differisce da quella oggi adoperata che per particolari insignificanti, ragione per cui la lettura della *Géométrie* non presenta alcuna difficoltà a un lettore moderno; il quale dallo studio di quel volume trarrà motivo per concludere con noi che, se alla simbolica algebrica odierna si deve dare una data di nascita, questa è il 1673.

346 - La *Géométrie* è ripartita in tre Libri, il I dei quali è consacrato ai problemi risolubili col solo uso della retta e del cerchio, e contiene i fondamenti della procedura grazie a cui Descartes trasformò ogni problema geometrico in uno algebrico. Base di essa è l'assunzione (già fatta da Bombelli in pagine rimaste lungamente inedite (v. pag. 323); di una lunghezza, arbitraria ma costante, mediante cui si suppongono misurate tutte le lunghezze, note e ignote, che s'incontrano nelle questioni trattate, le quali — importa rilevarlo — si suppongono in prin-

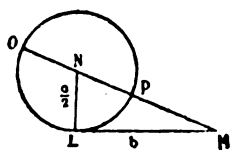



Fig. 54.

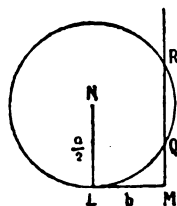



Fig. 55.

cipio già risolte, in applicazione al metodo di analisi geometrica degli antichi. Descartes dimostrò che, in conseguenza, le operazioni fondamentali dell'aritmetica si traducono in altrettante costruzioni: sono quelle che oggi s'incontrano nei trattati di calcolo grafico. Nè a ciò egli si arresta; chè espone anche la risoluzione geometrica delle equazioni di 2° grado; per quelle della forma $x^2 = a\,x + b^2$ egli usa della costruzione che risulta dalla fig. 54, mentre per quelle del tipo $x^2 = a\,x - b^2$ ricorre al metodo applicato nella fig. 55. Ammirabile è la potenza dello sguardo lungimirante di Descartes, il quale nelle considerazioni generali esposte poi, abbraccia i problemi di tutti i gradi con quantesivogliano incognite; però numerose e rilevanti sono le lacune da lui lasciate col proposito di riserbare ai propri lettori il piacere di colmarle, esercitando il loro spirito, utilità « qui est », egli scrive, « la principale qu'on puisse tirer de cette science ». Tuttavia egli non tardò ad avvedersi che ben pochi lettori avrebbero potuto percorrere con sicurezza la via da lui vagamente tracciata e pensò di illustrare le proprie idee applicandole a una questione celebre nell'antichità, cioè il problema delle tre o più rette, il cui enunciato trovasi riferito da Pappo nell'esordio del VII Libro della sua *Collezione*. L'Hardy raccontò a Leibniz che tale questione fu proposta a Descartes dal Golio (che vedemmo averne parlato anche

a Mydoge (pag. 460), per mettere alla prova i metodi di recente da lui inventati; Descartes avrebbe impiegato per risolverlo sei settimane, il che non deve stupire quando si ricordino i numerosi casi particolari di quella questione [1]. Di detto problema si parla più volte nella corrispondenza di Descartes, a partire dal 1632. Per risolverlo egli cerca l'equazione del luogo domandato riferendolo a due delle rette date, assunte come fondamentali, e vi giunge per una strada assai lunga basata sulla considerazione di molte coppie di triangoli simili; finendo, egli fa rilevare come dal numero delle rette date si deduca se il problema risulti o non piano, e si arresta a considerare il caso singolare in cui le rette date siano fra loro parallele, chè allora il problema è risoluto da un sistema di rette parallele alle date. Per tale via l'autore è condotto allo studio delle linee rappresentate da equazioni fra due coordinate, studio che forma il principale oggetto del II Libro della *Géométrie*.

347 - Esordendo egli ricorda che gli antichi ripartivano tutte le linee piane in tre categorie: luoghi piani, luoghi solidi e luoghi lineari, e si meraviglia che gli antichi non si occupassero di una classificazione di

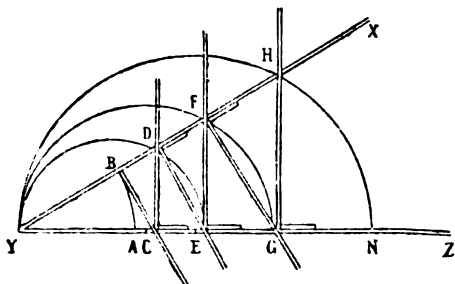



Fig. 56.

questi ultimi, dimenticando che ciò fu a lui possibile dopo di averli caratterizzati mediante equazioni. Critica poi l'epiteto di « meccaniche » dato alle più elevate delle linee considerate dagli antichi, dal momento che non esiste linea che non si possa descrivere meccanicamente, e propone di sostituirlo con l'epiteto « geometriche », che rimase durante secoli nella letteratura matematica [2]. Per meglio chiarire il suo concetto egli considera le linee descritte dai punti $D, F, H \ldots$, dell'apparato costituito da una catena di squadre [3], quale risulta dalla fig. 56; sono le linee rappresentabili in coordinate polari mediante equazioni della forma $\rho + \frac{\alpha}{\cos^{2n} \omega}$, ($n$ intero) onde si tratta di linee algebriche, dal mo-

[1] Non tutti sono considerati, forse perchè Descartes si attenne al sistema degli architetti, i quali « font les bâtiments, en prescrivant seulement tout ce qu'il faut faire, et laissant le travail des mains aux charpentiers et aux maçons » (lettera al Mersenne del 31 marzo 1638).

[2] Il nome di « meccaniche » fu invece dato da Descartes alle curve trascendenti (lettera al Mersenne del 23 agosto 1638), da lui escluse dalla *Géométrie*.

[3] L'invenzione di questo apparato risale al 1619.

mento che, in coordinate cartesiane, hanno equazioni della seguente forma $x^{4n} = \alpha (x^2 + y^2)^{2n-1}$ (¹). Per colmare quella lacuna lasciata dai Greci, egli propone di considerare le linee dei due primi ordini come appartenenti a un primo genere; quelle di 3° e 4° ordine a un secondo; e in generale all'$n^{mo}$ quelle degli ordini $2n - 1$ e $2n$. Nell'avanzare tale proposta Descartes si è lasciato traviare dal fatto che la risoluzione di un'equazione di 4° grado si riduce a quella di una del 3°; non soltanto egli ritenne a torto che quanto accadde nel campo binario si verificasse anche nel ternario, ma, con una seconda generalizzazione affrettata, estese quel fatto ai gradi superiori (da notarsi che una lettera del 25 marzo 1642 mostra che egli s'illuse di avere dimostrata la possibilità di ridurre qualunque equazione del 6° grado a una del 5°). Inoltre quella classificazione ha senso quando si sappia che l'ordine di una curva è indipendente dalla scelta degli assi di riferimento; ora è questo un fatto che Descartes non dimostrò, ma di cui si avvide, giacchè scrisse le seguenti parole: « Car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée; toutefois en quelle façon qu'on les prennent, on peut toujours faire que la ligne paraisse du même genre, ainsi qu'il est aisé de demontrer ».

Per far vedere in qual modo si possa riconoscere di qual genere sia una curva di cui sia nota la definizione, Descartes trova l'equazione di una curva di 3° ordine da lui inventata, la cosidetta *parabola cartesiana*, e poi ritorna al problema di Pappo per effettuare la discussione dell'equazione del luogo risolutore nel caso delle 3 o 4 rette, dando così il primo esempio di un genere di questioni che tanto occupò i posteriori cultori della geometria analitica. Senza arrestarci sopra le osservazioni fatte da Descartes riguardo all'analoga questione per un numero di rette superiore a quattro, richiamiamo l'attenzione di chi legge sopra le pagine, che direbbersi scritte sotto l'impero di una profetica ispirazione, nella quale sono enumerate le questioni che si è in grado di risolvere quando si conosca l'equazione di una linea piana; parecchie generazioni di valorosi investigatori si succedettero prima che potesse essere esaurito il vasto e seducente programma cartesiano, ma il redigerlo, nel momento della nascita della geometria analitica, non poteva essere che opera di un uomo di genio.

Fra i problemi enunciati, Descartes si arresta sul tracciamento delle normali alle curve (problema che per primo egli ravvisò equivalente a quello del tracciamento delle tangenti), come quello che per essere di grande utilità e generalità egli dichiarava essere il problema che, col massimo ardore, egli agognava di sapere risolvere. Per giungere allo scopo egli scegile un punto sull'asse a cui è riferita la curva considerata e lo considera come centro di un cerchio segante la curva in due punti prossimi al piede della cercata normale; se essi coincidono il problema risulta sciolto; perciò, se fra l'equazione della data curva e quella della circonferenza ausiliare si elimina una delle coordinate, si deve giungere a un'equazione con una radice doppia, tale cioè che il

(¹) Che queste curve servano effettivamente all'inserzione di quante si vogliano medie proporzionali, trovasi dimostrato nel III libro della *Géométrie*.

suo primo membro abbia un fattore della forma $(x - a)^2$. A tale scopo egli suggerisce un artificio di calcolo che è rimasto nella scienza sotto il nome di « metodo dei coefficienti indeterminati »; e, per meglio chiarire il suo pensiero, l'applica alla curva (conica) di equazione $x^2 = r y - \frac{r}{q} y^2$, che egli trae da Apollonio (*Coniche*, Lib. 1, prop. 13) introducendo in luogo dei segmenti considerati i numeri che li misurano. I calcoli per raggiungere lo scopo sono lunghi e di scarsa utilità dal punto di vista costruttivo; lo riconobbe tacitamente lo stesso Descartes, il quale del problema delle normali per la concoide di Nicomede diede una elegante soluzione, di cui si ignora la genesi, ma che certamente non è basato sopra il suindicato metodo generale.

Di questo egli fa poi un'applicazione più importante, cioè a certe nuove curve da lui inventate sino dal 1629 per risolvere questioni di ottica; sono le celebri « ovali di Descartes », di cui egli dà una definizione abbastanza complicata che poi trasforma in quest'altra: le dette curve sono più generali delle coniche essendo ciascuna il luogo dei punti per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi, moltiplicate per coefficienti costanti. A noi non interessano le spiegazioni date dal Descartes intorno all'uso di dette curve nella diottrica. Va invece rilevato come egli chiuda il II Libro della *Géométrie* osservando che il concetto fondamentale del suo metodo si può estendere dal piano allo spazio e così può servire allo studio delle linee gobbe; ma nella foga del vantare la potenza di siffatte considerazioni egli si lascia trascinare ad affermare erroneamente che per costruire le normali alle curve gobbe basta sapere fare altrettanto riguardo alle loro proiezioni ortogonali su due piani, mostrando così di ignorare due circostanze essenziali; cioè che una curva gobba ammette in un punto non una, ma infinite normali, e che la proiezione ortogonale di un angolo retto in generale non è un angolo della stessa specie.

348 - Per giungere alla risoluzione grafica dei problemi solidi o ipersolidi — argomento questo del III Libro della *Géométrie* — Descartes ha bisogno di approfondire la teoria delle equazioni algebriche, onde di queste si occupa nelle prime pagine di detto Libro [1]. Ivi si trovano, non soltanto concetti e prosposizioni anteriormente noti, ma anche innovazioni d'indiscutibile originalità. Fra queste va rilevato lo scrivere un'equazione come un polinomio con coefficienti a segni qualunque, eguagliato a zero; dovrebbesi poi registrare la regola, che porta ancora il suo nome, per determinare il numero delle radici positive (« vraies ») e negative (« fausses » o « moindres que rien ») di un'equazione qualsiasi, ove fosse dimostrata l'impossibilità che Descartes l'abbia appresa dall'Harriot. Importante è rilevare che Descartes avvertì l'esistenza di radici di altra specie, asserendo che oltre alle « réelles » se ne trovano di « imaginaires »: così egli introdusse due nuovi termini che conseguirono posto stabile nella scienza. In base al risultato che si ot-

[1] Prima del 1630 egli aveva scritto un trattatello di algebra, oggi perduto, la cui esistenza è attestata da vari passi del suo carteggio.

tiene moltiplicando quanti si vogliano binomi della forma $x \pm a$, egli fu condotto ad affermare che un'equazione *può* ammettere (non già che *ammette sempre*) un numero di radici eguale al suo grado, forse senza dichiarare che in ciò era stato preceduto dal Girard (v. pag. 439). Egli passa poi a trattare il problema della trasformazione delle equazioni nei casi classici; cioè, anzitutto egli insegna ad aumentare o diminuire le radici di una medesima quantità e mostra come in conseguenza si possa far scomparire il secondo termine di qualunque equazione o ridurla ad avere positive tutte le sue radici reali; per giungere a questo risultato fa mestieri conoscere un limite superiore delle radici, e Descartes insegna come lo si possa trovare; osserva ancora che lo stesso artificio permette di rendere completa un'equazione che tale non sia [1]. Altra trasformazione utile è quella di un'equazione in altra a coefficienti interi, quello del termine massimo essendo l'unità; la si ottiene moltiplicando le radici per uno stesso numero e guida alla determinazione delle radici razionali mediante una considerazione oggi ben nota, che Descartes applica anche ad equazioni particolari a coefficienti letterali. La conoscenza delle radici razionali combinata con la divisione algebrica permette in generale di abbassare l'equazione data e talora di risolverla completamente. Descartes illustra questa osservazione sciegliendo per via algebrica un problema d'inserzione trattato da Pappo e che guida a un'equazione biquadratica. Quando l'equazione ridotta è generale del 3° o 4° grado è vano sforzarsi di risolverla senza ricorrere alle sezioni coniche; ogni tentativo in tal senso sarebbe un vero errore, « car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle une faute »; in conseguenza il nostro autore insegna a risolverla mediante una parabola fissa e un cerchio, opportunamente scelto. Supposto, infatti, che quella abbia per equazione $x = m y^2$ e questo $x^2 + y^2 = qx + (p + m) y + r m$.

1° Se si tratta dell'equazione $x^3 = a x + b$, con coefficienti arbitrari, bisogna e basta assumere $p = a/m$, $q = b/m^2$, $r = o$;

2° Se invece l'equazione data è $x^4 = a x^2 + b x + c$, è necessario e sufficiente supporre che si abbia $p = a/m$; $q = b/m^2$; $r = c/m^3$.

Descartes applica questo metodo alla risoluzione del problema di Delo e alla trisezione dell'angolo, aggiungendo che all'uno o all'altro si può ridurre la risoluzione di qualunque problema cubico o biquadratico.

Per il problemi di grado superiore non bastano le coniche come curve ausiliari, circostanza che Descartes illustra risolvendo un'equazione di 6° grado con l'intersezione di una parabola ordinaria con una parabola cartesiana (v. pag. 464). Ma su ciò non insiste, non intendendo « de faire un gros livre », ma piuttosto di « comprendre beaucoup en peu de mots », e conclude con la seguente caratteristica dichiarazione: « Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non suelement des choses que j'ai expliquées; mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, à fin de leur laisser le plaisir de les inventer ».

---

[1] All'assenza di qualche termine in un'equazione, Descartes dà un'importanza che sembra eccessiva e ne avverte il lettore scrivendo al posto di ogni termine mancante un asterisco (*).

Descartes aveva piena coscienza dell'importanza della sua opera; in algebra, mentre negò di avere da giovane studiate le opere di Viète, asserì di avere prese le mosse dal punto in cui questi si era arrestato (noi però sappiamo che altri lo aveva preceduto); e scrivendo al Mersenne verso la fine di dicembre 1637, dichiarò che le cose da lui insegnate « touchant la nature et les propriétés des lignes courbes et la façon de les examiner est autant au delà de la géométrie ordinaire que la réthorique de Cicéron est au delà de l'*a, b, c* des enfants », spingendosi sino a dichiarare « que nos neveux ne troveront jamais rien en cette matière que ne puisse avoir trouvé aussi bien qu'eux, si j'eusse voulu prendre la peine de le chercher ». Finalmente, parlando del problema delle tre o quattro rette, volle parare in anticipo le critiche degli eventuali avversari scrivendo allo stesso in data 31 marzo 1638 quanto segue: « Pour l'analyse j'en ai omis une partie, afin de retenir les esprits malins en leur devoir; car si je les leur eusse donnée, il se fussent vantés de l'avoir sûe longtemps auparavant au lieu que maintenant ils n'en peuvent rien dire qu'ils ne découvrent leur ignorance ».

## La geometria analitica nelle lettere di Descartes

349 - La *Géométrie* è l'unica opera matematica che Descartes abbia dato alle stampe; onde per riconoscere se essa compendii o meno tutto il suo sapere su detta materia fa mestieri compulsare il suo carteggio scientifico, senza escludere quanto possono apprendere alcune pagine inedite di recente pubblicate.

Occupiamoci anzitutto di cercare se in geometria analitica la sua opera fondamentale comprenda quanto egli ne conosceva, in particolare se egli, benchè non abbia fatte chiare convenzioni sopra i segni delle coordinate, fosse in grado di disegnare esattamente le curve di data equazione. I passi del carteggio atti a gettare qualche luce sopra siffatta questione non sono molto numerosi, ma hanno grande importanza. Tutti concernono la curva di equazione $x^3 + y^3 = n\,x\,y$ da lui inventata e per ciò chiamata di consueto « foglia di Cartesio ». Essa è definita in una lettera scritta al P. Mersenne nel gennaio 1638, accompagnata da una figura del tutto errata. A quella curva sembra s'interessasse subito il Roberval, che credette di averne determinata la forma (« une espèce d'ovale »); ma siccome ignorava il significato dei segni delle coordinate, aggiunse al cappio esistente entro l'angolo formato dalle direzioni positive degli assi, altri tre simmetrici rispetto agli assi stessi e all'origine delle coordinate; donde un cervellotico intreccio di linee che, ricordando la forma di un nodo di cravatta o quella di un gelsomino, indusse il Roberval e altri dopo di lui a chiamare la nuova curva « galand » o « fleur de jasmin ». Tali nomi si trovano nella lettera scritta da Descartes al Mersenne il 17 luglio 1638, dalla quale risulta che neppure il grande filosofo era in grado di delineare esattamente la linea in questione, il che è confermato dalla successiva lettera del 23 agosto 1638, ove è determinata la lunghezza del cappio. Ma nella stessa lettera si trova un altro passo dedicato al Roberval, nel quale

è proposto lo studio della curva di equazione $y^2/x^2 = (a - x)/(a + 3x)$; ora questa pretesa nuova linea non è che la precedente riferita alle bisettrici degli assi primitivi, e Descartes scrive poi che la cosa gli è ben nota, e che aveva enunciato quel problema unicamente per beffarsi del Roberval se egli non si accorgeva dell'identità di quelle due linee. Perciò, mentre un passo da noi rilevato (pag. 364) della *Géométrie* ci ha mostrato essere nota a Descartes l'invariabilità dell'ordine di una linea di fronte a una trasformazione di coordinate, quanto testè riferimmo ci prova che egli era in grado di servirsi di tale artificio per mutare la forma delle equazioni delle curve.

La foglia non è l'unica curva a cui siasi interessato il nostro matematico. Avendo appreso da una lettera del Mersenne (28 aprile 1638) che il Roberval aveva dimostrato essere l'area compresa fra una cicloide e la sua base tripla di quella del cerchio generatore, ne schizzò (27 maggio s. a.) una dimostrazione, che poi (27 luglio) completò; insegnò poco dopo (23 agosto) una costruzione della normale che oggi, a tre secoli di distanza, può dichiararsi di semplicità insuperabile. La questione della cubatura del solido generato dalla rotazione di una cicloide attorno al proprio asse egli riteneva facile a risolversi, ma rifiutò di occuparsene, dichiarando una volta (11 ottobre) « je renonce à la géométrie », e un'altra (29 gennaio 1640) « je fais si peu d'état de toutes ces question particulières ».

Un'altra classe di curve di cui egli si è occupato indulgendo alla moda del tempo è quella delle parabole $y/x^m$ = cost. (lettera al Mersenne del 13 luglio 1638), di cui ha determinato il baricentro, considerando la porzione di piano che una di esse limita con l'asse delle $x$. Maggiore novità possiedono le osservazioni esposte in una lettera inviata addì 20 febbraio 1639 al Debeaune, gentiluomo di Blois, sulle curve che portano ancora il nome di costui e la cui importanza riposa sul fatto che sono le prime che siano state definite mediante una proprietà delle loro tangenti.

## La teoria dei numeri nel carteggio di R. Descartes

350 - Vi è un altro campo di ricerche di cui Descartes si è occupato con successo, benchè, riguardo ad esso, egli non abbia nulla pubblicato; un campo svelato ai francesi dal Bachet de Méziriac con la sua edizione di Diofanto (vedi pag. 417) e che, specialmente grazie a Fermat, era divenuto di moda. Per avere informazioni sull'argomento bisogna anzitutto ricorrere al suo carteggio scientifico. Si apprende così che egli cominciò ad occuparsi di quelle ricerche, non per proprio impulso, perchè le giudicava « très-inutiles » e perchè riteneva che le proposizioni aritmetiche « peuvent quelquefois mieux être trouvées par un homme laborieux, qui examinera opinatrement la suite des nombres », ma in seguito a questioni propostegli appunto da Fermat per il tramite del P. Mersenne (31 marzo 1638). Dianzi era così lontano da quell'ordine d'idee che dichiarò al Frenicle (9 gennaio 1639) « qu'il n'y a pas encore un an que j'ignorais ce qu'on nomme les parties aliquotes d'un nombre,

et qu'il me fallut emprunter un Euclide pour l'apprendre » [1]. Che il nostro matematico non abbia penato a scoprire la via da seguire per risolvere le relative questioni è attestato da due lettere scritte al Mersenne nella prima metà dell'anno 1638, ove sono dimostrati i due seguenti teoremi di Fermat:

I. Un numero della forma $8n - 1$ non può essere quadrato, nè somma di due quadrati;

II. Un numero della forma $4n - 1$ non può essere somma di due quadrati.

Altra questione proposta a Descartes e da lui trattata nella prima delle citate lettere è la ricerca delle coppie di numeri ognuno dei quali pareggi la somma dei divisori dell'altro; sono i « numeri amici » di Pitagora (vedi pag. 104); per trovarli Descartes espone una regola (senza dimostrarla, perchè « en matières de problème c'est assenz d'en donner le facit ») la quale concorda con quella che trovammo in Thabit ben Korrah (vedi pag. 195); applicandola Descartes giunge a tre coppie di numeri amici; la prima era nota sino dall'antichità (284, 220), la seconda lo era a Fermat (17296, 18416); la terza (9633584, 9437056) è nuova. Risale pure all'antichità (vedi pag. 46) il concetto e la costruzione di numeri perfetti; la ricerca analoga dei numeri ognuno dei quali è la metà della somma dei suoi divisori (escluso sempre il numero considerato) è soltanto sfiorata nella lettera di Descartes al Mersenne del 27 maggio 1638, ove è criticato il metodo applicato da Fermat per giungere ai due 120 e 672; nella successiva (3 giugno s. a.) al numero 523776 scoperto da A. Jumeau, priore di St. Croix, Descartes aggiunge quest'altro: 1476304896. Nella stessa lettera è anche trattata l'altra questione, proposta dal St. Croix, di determinare un triangolo rettangolo in numeri i cui lati misurino le aree di altri triangoli rettangoli pure in numeri. Sembra che il Mersenne, meravigliato per la disinvoltura dimostrata da Descartes nel trattare siffatte questioni, gli chiedesse particolari sul metodo adoperato, ma egli eluse la questione (lettera del 13 luglio 1638) dicendo che esso « n'est autre chose que mon analyse, laquelle s'applique à ce genre de questions, ainsi qu'aux autres »; aggiunge che esso permette anche di trovare un numero che sia in un altro rapporto dato con la somma dei suoi divisori, e alcune pagine di una lettera precedente (15 giugno 1638) stanno a provare che egli non si vantava di cosa che non fosse in grado di fare. Nella medesima lettera Descartes assevera di essere in grado di dimostrare che non esistono altri numeri perfetti pari all'infuori degli euclidei [2] e che non esistono altri numeri perfetti dispari che quelli della forma $(2n+1)p^2$, ove $2n + 1$ è un numero primo e $p$ è dispari; ma l'esempio da lui dato del prodotto $22021 = 19^2 . 61$ per $(3 . 7 . 11 . 13)^2$ non depone a favore

(1) Scrivendo queste parole DESCARTES non ricordava che verso il 1620 egli si era occupato di aritmetica, chè nelle *Cogitationes privatae* si trovano parecchi passi di contenuto aritmetico; esempi: La quarta potenza di un numero termina sempre con 1,5 o 6 (e 0?); 6,28 e 496 sono numeri perfetti; la differenza dei quadrati di due numeri triangolari consecutivi è un cubo.

(2) Questo fatto fu dimostrato da Euler un secolo dopo.

della verità di tale proposizione, perchè quel numero non è perfetto, come Descartes stesso riconobbe scrivendo poi al Frenicle (19 gennaio 1639). Nella lettera dianzi citata egli riconosce di ignorare un criterio per decidere se un dato numero sia primo o composto, solo facendo osservare che un numero primo deve terminare con una delle cifre 1, 3, 7, 9, il che è evidente.

Non sono questi gli unici passi della corrispondenza di Descartes che si riferiscono alla teoria dei numeri, ma a noi non è dato di farne un'esauriente enumerazione. Notiamo soltanto che è necessaria la più oculata prudenza prima di accogliere per vere le generalizzazioni a cui egli, fidando nel proprio genio, si lasciò trascinare; è un sistema sempre pericoloso, ma che lo è tanto più quando si studia la serie naturale dei numeri, di cui ogni elemento ha una propria individualità.

Nuove traccie di studi aritmetici di Descartes si trovano in alcuni *Opuscula postuma* di recente pubblicati; ivi, oltre a molte terne di numeri misuratori dei lati di un triangolo rettangolo (cioè soddisfacenti l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$), se ne trovano altre concernenti l'analogo problema relativo ai triangoli aventi un angolo di 60° o di 120° (cioè soluzioni di una delle equazioni $x^2 + y^2 \pm xy = z^2$); benchè non tutti i risultati esposti siano esatti, andava qui registrata una notevole generalizzazione data da Descartes a un problema aritmetico che risale alla più remota antichità.

## Altri contributi dati da Descartes all'algebra e alla geometria

351 - In una lettera diretta al Mersenne in data 15 novembre 1638, Descartes afferma di essere in possesso di speciali artifici per rendere più solleciti i calcoli algebrici che eseguiva per proprio conto: quali fossero Dio solo lo sa! In un frammento postumo avente per oggetto la razionalizzazione dell'equazione della forma $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = o$ egli dà esattamente il risultato presentandolo in un modo particolare, scrivendo cioè uno solo dei termini dello stesso tipo e aggiungendo al disotto l'indicazione del numero dei detti termini, nel seguente modo:

$$\underset{4}{a^4} - \underset{12}{4\,a^3 b} + \underset{6}{6\,a\,a\,b\,b} + \underset{12}{4\,a\,a\,b\,c} - \underset{1}{64\,a\,b\,c\,d} = 0;$$

ma evidentemente è un artificio di mediocre portata, non certamente quello accennato nella citata lettera. Per cercare informazioni al riguardo è naturale ricorrere a una *Introduction à la géométrie*, ritrovata fra le carte di Leibniz e che è probabilmente il lavoro scritto sotto la direzione di Descartes, del quale è fatta più volte menzione nel carteggio cartesiano; ma la delusione segue ben presto alla speranza, chè si tratta di un modesto trattato di calcolo algebrico, ove sono insegnate le regole consuete per eseguire le operazioni aritmetiche sulle quantità razionali o non (sorde): da notarsi che, a differenza di quanto osservammo nella *Géométrie,* è sempre rispettata la legge di omogeneità emanata da Viète. Vale la pena di rilevare che Descartes per estrarre

la radice quadrata di un binomio $\alpha + \sqrt{b\,c}$, stabilisce l'identità

$$\sqrt{a + \sqrt{b\,c}} = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}b\,c}} + \sqrt{\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}b\,c}},$$

utile soltanto quando $(a^2 - b\,c)$ sia un quadrato perfetto. È appena necessario rilevare come quella operazione sia scomparsa dalle trattazioni moderne dell'algebra; giova per converso notare come essa abbia indotto Descartes al calcolo analogo di $\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{b}}$; di ciò è parola in una lettera al Mersenne del 30 settembre 1640 e in alcune pagine postume, mediocremente chiare, ma da cui risulta che Descartes, collegava la nuova operazione alla risoluzione delle equazioni cubiche. L'*Introduction* si chiude con la risoluzione di quattro problemi di applicazione dell'algebra alla geometria, nei quali si cercano indarno le utili abbreviazioni di calcolo che il nostro matematico vantavasi di possedere.

352 - Egli si è anche occupato di alcune questioni geometriche estranee al programma svolto nella *Géométrie*, ma di cui ci corre l'obbligo di far menzione. Anzitutto, in un frammento trovato fra le sue carte, egli ha indicata una costruzione geometrica approssimata di $\pi$, di cui Euler (*Novi Comment. Petrop.*, T. VIII, 1760-66) ha fatto rilevare il significato e il valore; a noi basta riferirla: « Dato (Fig. 57) il quadrato $B\,F$, vi si aggiunga il rettangolo $C\,G$ di lati $A\,C$ e $C\,B$ eguale alla quarta parte del quadrato dato; poi il rettangolo $D\,H$ di lati $D\,A$ e $D\,C$ eguale alla quarta parte del precedente; similmente si costruisca il rettangolo $E\,I$; e così si prosegua all'infinito in $X$. Sarà allora $A\,X$ il diametro del cerchio la cui periferia è eguale al contorno del dato quadrato; inoltre $A\,C$ è il diametro del cerchio inscritto nell'ottagono isoperimetro al dato quadrato; $A\,D$ il diametro analogo del poligono di sedici lati; e così via ». Nessuna giustificazione è data per questi enunciati, ma è presumibile, per non dire certo, che Descartes vi fu condotto interpretando geometricamente i risultati dei calcoli di corde di un cerchio, i quali, rinvenuti fra le sue carte, furono di recente tratti dall'inedito.

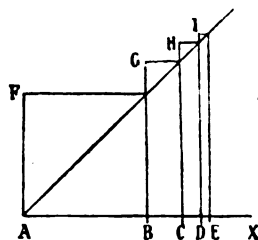



Fig. 57.

Risalgono probabilmente agli anni 1619-20 [1] alcune geniali osservazioni sui poliedri che collocano Descartes al primo posto fra i moderni cultori della relativa teoria. Esse sono consegnate in alcune pagine intitolate *De solidorum elementis* e hanno come punto di partenza

[1] Ciò risulta, fra l'altro, dalla presenza dei segni cossici, che Descartes abbandonò in età matura.

la proposizione seguente: Come la somma degli angoli esterni di un poligono piano (convesso) è eguale a quattro angoli retti, così la somma degli angoli diedri esterni di un poliedo (convesso) è eguale a otto retti. Da essa Descartes trae la relazione $\Sigma = 4\,V - 8$ che lega il numero $V$ dei vertici di un poliedro alla somma $\Sigma$ dei suoi angoli piani, espressi in angoli retti, e poi l'altra $\Sigma = 4\,(S - F)$, ove al solito $S$ rappresenta il numero degli spigoli e $F$ quello delle facce del poliedro considerato. E poichè eliminando $\Sigma$ se ne trae $4\,(S - F) = 4\,(V - 2)$, ossia $S + 2 = V + F$, così resta dimostrato che il nostro matematico giunse prima di Euler alla relazione fondamentale nella teoria dei poliedri, che ne porta di consueto il nome. Dalle esposte considerazioni egli trasse molte conseguenze; limitiamoci a citare la introduzione di « numeri poliedrici » come estensione dei « numeri poligonali » noti agli antichi.

## Critiche e polemiche

353 - Mentre i lampi di genio che provengono dalle opere di Descartes ebbero la virtù di fare sorgere attorno a lui una legione di ammiratori e discepoli, l'invidia, che sta sempre in agguato contro i grandi, gli suscitò detrattori in gran numero, aizzati dall'attitudine tracotante e irritante che egli assunse in ogni occasione.

La prima contesa a cui egli fu trascinato ha per protagonista il Beaugrand: eccone l'origine e le fasi principali. Quando il Mersenne, in principio del 1637, ricevette dall'Olanda i fogli stampati del *Discours de la méthode* e degli *Essais* per presentarli al cancelliere del re di Francia onde ottenere il privilegio di stampa, il Beaugrand, approfittando, anzi abusando, dell'alta posizione ufficiale da lui occupata, requisì la parte relativa alla *Dioptrique* e la trattenne presso di sé non meno di quattro mesi; di più quando ricevette un esemplare dell'intera opera stampata, l'accettò ma si rifiutò di pagarne l'importo. Questi due atti, d'indiscutibile indelicatezza, destarono la giusta collera di Descartes, il quale non si lasciò sfuggire alcuna occasione per manifestare il proprio disprezzo per colui che egli designava sempre come « le géostacien » in considerazione di un'opera del Beaugrand a noi già nota (pag. 459); e le ragioni di tale scarsa considerazione egli espose in una lettera al Mersenne del 31 marzo 1638. Precedentemente (dicembre 1637) Descartes aveva portata alle stelle la sua *Géostatice*, aggiungendo però: « Je vous prie que tout ceci demeure entre nous; car j'aurais grande confusion que d'autres sussent que je vous ai écrit sur ce sujet ». Di tale raccomandazione il ciarliero Minimo non tenne alcun conto; che egli abbia mostrata quella lettera al Beaugrand è provato da tre fogli di acerba critica, anonimi ma indubbiamente del Beaugrand, ove è aspramente combattuto « le méthodiste », epiteto creato in contrapposto al termine « géostacien » usato da Descartes, e nei quali sono riprodotte parecchie frasi che leggonsi nella succitata lettera. Del resto quei fogli nulla contengono che possa scuotere la robusta struttura della *Géométrie*, nè che valga a colmare le lacune che ivi si trovano. Descartes, pure sapendo che questi libelli erano largamente diffusi a Parigi, rifiutò sem-

pre di prenderne conoscenza prima che fossero dati alle stampe (lettera al Mersenne dell'11 giugno 1640); onde questa contesa rimase poco nota e fu sterile per la scienza; essa può interessare soltanto per dare idea delle abitudini del tempo e per gettare qualche luce sulla psicologia dei contendenti.

L'indelicatezza del Beaugrand non si limitò a trattenere a lungo presso di sè i fogli stampati dalla *Dioptrique* prima che fossero pubblicati, ma giunse persino a farne conoscere il contenuto a Fermat. In conseguenza il giureconsulto tolosano potè, sino dall'aprile 1637, inviare a Mersenne, perchè le comunicasse a Descartes, alcune critiche a quanto questi aveva scritto riguardo alla riflessione e rifrazione della luce. Descartes tentò di parare il colpo (lettera a Mersenne del 5 ottobre 1637), ma Fermat, un mese dopo, ritornò alla carica con nuovi argomenti. La questione non tardò ad allargarsi, e i due contendenti si scambiarono numerose sfide, consistenti in problemi da risolvere e teoremi da dimostrare; e poichè le risposte non si fecero attendere, la scienza nostra ne trasse notevoli vantaggi; infatti furono allora stabilite importanti proprietà delle parabole di tutti gli ordini e dei solidi da esse generati rotando, furono risorte interessanti questioni relative alla teoria dei numeri, si cominciò a occuparsi della foglia di Cartesio e della cicloide, ecc. Importa anche osservare che, se in certe fasi della disputa Descartes trascese in frasi ironiche e scortesi, non avendo sempre compreso quanto scriveva il suo avversario, non esitò poi a dichiarare a Fermat « je n'ai jamais connu personne qui m'ait fait paraitre qu'il sut tant que vous en géométrie », e ciò quantunque egli scrivesse al Mersenne (dicembre 1638) che negli scritti del suo avversario avesse « trouvé deux ou trois choses qui étaient bonnes, mêlées avec plusieurs autres qui ne l'étaient pas ».

354 - Anche in Olanda la pubblicazione della *Géométrie* diede origine a una querela scientifica, con relative sfide, la quale, se non raggiunse la notorietà di quella dibattutasi fra Cardano e Tartaglia, è soltanto perchè si svolse col mezzo di pubblicazioni scritte in fiammingo, lingua anche allora ben poco nota in Europa. Essa fu provocata da Giovanni Stampionen, nato a Rotterdam nel 1610 da un matematico dello stesso nome; è sua gloria di essere stato maestro di Huygens e del principe d'Orange, destinato a salire al trono col nome di Guglielmo II. Si hanno di lui una trigonometria (1632) e un'algebra (1639). Il carteggio di Descartes dà notizia di uno scambio di problemi che ebbe luogo fra lui e lo Stampionen verso la fine del 1633 e documentata la scarsa considerazione in cui questo era tenuto dal grande pensatore. E forse nell'incapacità dello Stampionen di risolvere i due problemi propostigli (l'enunciato di uno di essi era stato complicato ad arte da Descartes, il quale non rifuggiva da siffatti meschini espedienti quando si trattava di confondere un avversario; l'altro era il problema di Pappo a cui vedemmo dedicate tante pagine della *Géométrie*) deve ricercarsi la prima radice dell'aspra contesa dibattutasi cinque anni dopo. Essa si aperse con un cartello recante la firma di un Jean Baptiste d'Anverse diretto agli ingegneri batavi, nel quale erano

proposti alcuni problemi e annunciata la prossima pubblicazione di un'*Algebra*; quando questa fu pubblicata col nome dello Stampionen, fu rivelata la provenienza di quel cartello. Benchè l'or citato volume riboccasse di errori, Descartes temette che il fatto di una pubblicazione olandese anticartesiana costituisse una minaccia per la sua reputazione nei Paesi Bassi, ostacolasse il successo della *Géométrie* e animasse alla pugna i suoi avversari parigini; perciò pensò di confutarla. Ma, un po' per uniformarsi ai costumi del tempo, un po' perchè non si sentiva abbastanza ferrato nell'uso del fiammingo, decise di fare scrivere la critica a Jacopo Wassennaer, giovane agrimensore d'Utrecht, legato a lui da cordiale amicizia; essa apparve nello stesso anno 1639 col modèsto titolo di *Osservazioni* al volume dello Stampionen. Questi ingiunse subito al suo contraddittore di dimostrare la fondatezza, delle sue critiche, mediante tre fogli stampati; seguì un diluvio di libelli pro e contro ciascuna delle parti contendenti [1] e la proposta di una scommessa di 600 talleri, somma che quello dei litiganti che fosse giudicato dalla parte del torto doveva destinare a un'opera di beneficenza. È estraneo al nostro ufficio il riferire i particolari delle lunghe discussioni che sorsero intorno al modo in cui doveva venire pronunciato il giudizio, le quali rievocano il ricordo delle analoghe che ebbero luogo fra Tartaglia e Ferrari. L'analogia è confermata dal fatto che, benchè il dibatitto finisse per concentrarsi sopra la regola data dallo Stampionen per estrarre la radice cubica di un binomio della forma $a + \sqrt{b}$, grazie all'azione pacificatrice spiegata da Costantino Huygens, padre del celebre matematico, tutto finì in tacere, con somma soddisfazione degli Olandesi, i quali, benchè sinceri ammiratori del loro ospite illustre, temevano un giudizio contrario a un compatriota che godeva del favore della corte; una nuova volta pertanto vi fu « much ado, about nothing! ».

---

## PARTE SECONDA: FERMAT

### Biografia di Fermat

355 - Nell'epoca in cui visse Descartes la Francia diede i natali a numerosi egregi pensatori i quali, grazie alla loro attitudine di fronte a quel grande, debbono venire considerati insieme a lui; di alcuni già parlammo (n. 346). Emerge fra essi Pietro Fermat. Questi, assorbito occupazioni ufficiali di grande responsabilità, alla matematica dedicò soltanto i rari momenti di ozio, lasciando ai posteri la cura di salvare dalla dispersione le note da lui frettolosamente vergate e le sue lettere di contenuto matematico. La entusiastica necrologia pubblicata dal

[1] Il più importante è quello del WASSENNAER intitolato *Stampionen scoperto* (1640), il quale porta una prefazione anonima, ma che è noto essere stata scritta per intero da Descartes.

*Journal des Sçavants* nel momento della sua dipartita è documento dell'ammirazione da lui destata nei contemporanei, onde torna a disdoro di Voltaire il non averne incluso il nome nell'elenco delle personalità che illustrarono il secolo da lui chiamato, con evidente cortigianeria, di Luigi XIV.

Pietro Fermat ricevette il battesimo a Beaumont-de-Lomagne il 20 agosto 1601; in data 14 maggio 1631 entrò nella magistratura come « conseiller aux requêtes » del parlamento di Tolosa; in tale qualità prestò allo Stato servigi talmente cospicui che (fra il 1631 e il 1638) fu ascritto alla « noblesse de robe » e autorizzato a premettere al suo cognome la particella *de*. In data 16 gennaio 1638 fu promosso consigliere della Corte di Tolosa; morì a Chartres (ove erasi recato per doveri d'ufficio) il 12 gennaio 1665.

Benchè non abbia dato alle stampe che la breve *Dissertatio geometrica de linearum curvarum comparatione* (v. n. 365), inserita (come dovuta a un M.P.E.A.S.) in appendice ad un'opera non sua, pure le comunicazioni verbali ed epistolari da lui fatte sulle sue scoperte lo fecero conoscere in Francia e al di là del Reno e della Manica, come uno dei massimi matematici del tempo. Nel 1670 suo figlio Samuele (1630-1690), nel curare la ristampa dell'edizione di Diofanto dovuta a Bachet de Méziriac, vi aggiunse le osservazioni scritte dal padre suo nei margini dell'esemplare da lui posseduto di quell'opera, nonchè buon numero di estratti del suo carteggio scientifico. Nove anni più tardi lo stesso Samuele Fermat, incoraggiato dal successo di tale pubblicazione, raccolse i « disjecta membra » dell'opera matematica paterna in un volume dal titolo *Varia opera matematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani*. Ma nuovi elementi dell'opera frammentaria del grande giureconsulto francese essendosi poi scoperti, si manifestò il bisogno di una nuova edizione; deliberata dal Governo francese una prima volta nel 1843, essa potè vedere la luce soltanto mezzo secolo più tardi; grazie ad essa è oggi possibile misurare con grande approssimazione l'entità dei contributi dati dal Fermat alle scienze positive.

Le linee precedenti riassumono quanto fu dato raccogliere intorno alla vita del grande a cui, come vedremo, si è debitori della creazione di nuove branche della matematica; aggiungiamo soltanto come dalla sua corrispondenza emerga che egli era di un carattere agli antipodi di quello borioso che Descartes rivela in tutti i suoi scritti; onde sorge l'idea di istituire un paragone fra i due sommi matematici francesi del secolo XVII e i due luminari della scienza greca che rispondono ai nomi di Euclide e Apollonio, i cui caratteri sono eternati da Pappo con frasi scultorie da noi riferite altrove (v. pagg. 44 e 59).

## Lavori geometrici di Fermat

356 - Se, come vedemmo, scarse sono le notizie che si hanno intorno alla vita di Fermat, ancora più manchevoli sono le informazioni intorno alle origini e le fasi di sviluppo del suo pensiero matematico. I pochi dati relativi si traggono dallo studio dei suoi lavori superstiti (non

pochi andarono indubbiamente perduti come conseguenza della ripugnanza per la stampa che aveva l'autore) e dall'esame di quanto resta del suo carteggio scientifico. Quello porta a concludere che la sua istruzione matematica fu fatta sulle opere dei matematici greci, resa a lui agevole da una profonda cognizione delle lingue classiche, e poi su quelle del suo grande conterraneo Viète; dalle sue lettere invece emerge che è nell'anno 1630 che egli, seguendo l'esempio datogli da Viète, Snellio, Ghetaldi, ed altri, si accinse a divinare un'opera perduta del periodo aureo della geometria greca; inoltre che l'epoca della sua più intensa produzione comprende gli anni 1636-1641, e che fra il 1643 e il 1654 egli dovette interrompere gli studi scientifici, non sappiamo se a causa di assorbenti incombenze ufficiali o per altri motivi.

La divinazione (non restituzione) di cui sopra si riferisce al II Libro dei *Luoghi piani* di Apollonio Pergeo, alla quale seguì sei anni dopo quella del I. Di tale inversione apparentemente strana (ne è parola in una lettera al P. Mersenne del 26 aprile 1636) è facile rendersi ragione osservando che, mentre le proposizioni che, al dir di Pappo, trovavansi nel II Libro, sono assai semplici, quelle del I, contenendo in gran parte leggi generali di derivazione di un luogo piano da un altro, esigono che chi voglia dimostrarle sia molto esperto nel modo di procedere degli antichi geometri; nè va taciuto che grandi sono le difficoltà che s'incontrano nell'intendere il significato delle parole del citato commentatore greco attraverso la versione latina del Commandino, su cui lavorava Fermat. Alcuni dei teoremi dimostrati in quella divinazione, comunicati nel 1637 a Roberval, destarono immensa ammirazione nei geometri parigini, come risulta da una lettera scritta dal Roberval stesso addì 4 aprile 1637. Mentre, come vedremo, in algebra Fermat adottò fedelmente la simbolica di Viète, non fece uso di alcuna nei suoi scritti geometrici, chè scrisse le proporzioni come segue: *ut..ad... ita..ad...*

Frutti della medesima orientazione del pensiero fermatiano sono un tentativo da lui fatto per sciogliere il secolare enigma dei porismi euclidei (v. pag. 49) e una sua dimostrazione del luogo delle tre rette. Riguardo a questo genere di ricerche va rilevato che il Fermat, forse allarmato dall'invadenza che temeva da parte dell'algebra, in una lettera che risale all'estate 1658, dichiarava « essere desiderabile che non si perda a poco a poco nelle costruzioni e nelle dimostrazioni quell'eleganza a cui miravano gli antichi, come è provato a sufficienza dai *Dati* di Euclide e dagli altri libri di analisi elencati da Pappo ».

A questa stessa orientazione mentale di Fermat devesi uno scritto più importante, nel quale, sotto il titolo di *Contatti sferici*, sono trattati i quindici casi che presenta il problema di costruire una sfera che passi per $m$ punti dati e tocchi $p$ piani e $s$ sfere, essendo $m + p + s = 4$. Fermat fu indubbiamente indotto a concepire siffatto problema studiando la divinazione di Viète dell'opera perduta sui *Contatti circolari* (v. n. 270). Va però notato che della ricerca del raggio della sfera tangente a quattro sfere date è parola in una lettera di Descartes a Mersenne del 15 aprile 1630 e che lo stesso, avuta notizia del lavoro di Fermat, insistette, per il tramite del Mersenne (lettere del 13 luglio e dell'11 ottobre 1638), perchè il senatore tolosano si provasse a trat-

tare la stessa questione algebricamente, senza però conseguire lo scopo; osservi qui il lettore il primo apparire dell'intolleranza, sì comune in alcuni algebristi posteriori, di quel sentimento in base a cui si nega fede a qualunque risultato conseguito con semplici argomentazioni geometriche.

## La geometria analitica in Fermat

357 - Per quanto ingegnosi siano tali contributi dati da Fermat alla geometria, non avrebbero per fermo bastato a conferirgli un posto cospicuo nella storia di questa scienza; ciò è invece conseguenza della memoria *Ad locos planos et solidos isagoge,* la quale, essendo stata scritta prima del 1637, agli occhi dello storico lo colloca, allo stesso livello di Descartes, fra i creatori del metodo delle coordinate.

Il concetto fondamentale di quel lavoro mostra che tale procedura si presentò alla mente di Fermat con una forma più prossima a quella ben nota ai lettori nostri di quanto sia accaduto a Descartes; essa, in fatti, è dichiarata come segue: Ogniqualvolta in un'equazione finale entrano due quantità [1] incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva. Per chiarire il senso di tali frasi è indispensabile sapere che il nostro matematico suppone data una retta $NZM$, indefinita in due sensi, e su essa un punto fisso $N$; preso allora sulla stessa un segmento $NZ$ eguale a una $(A)$ della quantità incognita (è qui sottintesa l'assunzione di quell'unità di misura esplicitamente dichiarata da Bombelli e Descartes), si conduce da $Z$ il segmento $ZX$ formante con la retta $ZN$ un angolo dato (che si suppone in generale retto) e la cui lunghezza eguagli l'altra $(E)$. In conseguenza, variando $A$ e quindi $Z$ varia $E$ e quindi $X$ descrive una certa linea, appunto come scrisse Fermat.

Premessa questa considerazione generale, egli insegna a interpretare le più semplici equazioni in due incognite; prima di enumerarle, ricordiamo che egli impiega fedelmente le notazioni di Viète, imponendosi anche di scrivere sempre equazioni omogenee [2]: così l'equazione canonica dell'iperbole è da lui scritta così: $A$ in $E$ aeq. $Z$ pl.; noi non seguiremo il suo esempio e nel nostro resoconto ci serviremo dei simboli famigliari ai nostri lettori.

Mediante una semplice considerazione di triangoli simili Fermat dimostra in primo luogo che una equazione della forma $ax = by$ rappresenta una retta; che lo stesso debba dirsi riguardo alla più generale equazione $c - ax = by$, si vede osservando che questa può scriversi $by = a(k - x)$, essendo $c = ak$, e poi mutando l'origine delle coordinate. A questo punto osserva Fermat che si hanno elementi sufficienti per trattare tutti i problemi locali risoluti da rette; appunto così egli

---

(1) Qui « quantità » equivale a « segmento » che la misura.

(2) Fermat era talmente convinto dell'eccellenza della simbolica del Viète, che in ogni occasione biasimò coloro che la lasciarono per quella di Descartes; non affrettiamoci a condannarlo, perchè è comune in coloro che sono famigliari con una certa simbolica la ripugnanza ad abbandonarla per un'altra.

arriva a una proposizione generale che enuncia nei seguenti termini: « Siano date in un piano quantesivogliano rette e si conducano ad esse da un punto altrettante rette formanti con le date angoli assegnati; se la somma dei prodotti di queste rette per altrettante rette date è eguale a una data area, il luogo geometrico di quel punto è una retta ».

Passando alle equazioni di 2° grado, il nostro autore comincia considerando l'equazione $x\,y = k^2$ e, con tacita applicazione delle *Coniche* di Apollonio, stabilisce che rappresenta un'iperbole; che altrettanto valga per un'equazione della forma $l + x\,y = m\,x + n\,y$ si ottiene scrivendo quest'equazione come segue $(x - m)\,(n - y) = l - m\,n$ e poi effettuando una traslazione degli assi. Meno esatto è Fermat quando afferma che le equazioni $x^2/y^2 = \text{cost.}$, $(x^2 + x\,y)/y^2 = \text{cost.}$ rappresentano ciascuna una retta, mentre in realtà ne rappresentano ciascuna due. Che l'equazione $x^2 = p\,y$ rappresenti una parabola viene da lui nuovamente dimostrato appoggiandosi al geometra di Perga; così egli offre una nuova prova che la teoria da lui esposta è in fondo una metamorfosi operata dall'algebra sulla geometria degli antichi. Che di un'analoga interpretazione geometrica sia suscettibile l'equazione $x^2 = p\,y + l$, si vede con un mutamento dell'origine. Una semplice applicazione del teorema di Pitagora prova che l'equazione $a^2 - x^2 = y^2$, in assi ortogonali, rappresenta un cerchio; che lo stesso accada per tutte le equazioni della forma $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$ si dimostra con una traslazione degli assi coordinati.

Finalmente all'interpretazione delle equazioni della forma $a^2 \pm x^2 = k\,y^2$ egli giunge servendosi nuovamente della teoria delle coniche, mentre delle equazioni di 2° grado più complicate egli fa un rapido cenno, trasfondendo nel lettore la convinzione che egli fosse in grado di determinare la natura delle curve rappresentate, applicando la trasformazione delle coordinate, almeno quando si tratti di una semplice traslazione di assi. Al termine enuncia la seguente proposizione, di cui è palese l'analogia con altra riferita più sopra: « Siano date in un piano quantesivogliano rette e si conducano ad esse da un punto altrettante rette formanti con le date angoli assegnati; se la somma dei quadrati di queste rette è eguale a un'area data, il luogo geometrico di quel punto è un determinato luogo solido ». Finendo dichiara che, se il nuovo metodo usato fosse stato da lui scoperto prima, sarebbe riuscita più elegante la restituzione dei *Luoghi piani* da lui fatta; tuttavia egli non si pente di averla fatta per la ragione esposta nelle seguenti lapidarie parole: « Nec tamen praecocis licet et immaturi partus nos adhuc poenitet, et informes ingenii foetus posteris non invidere scientiae ipsius quadamtenus interest, cujus opera primo rudia et simplicia novis inventis et roborantus et augescunt ».

L'estensione allo spazio dei due riferiti teoremi generali fu indicata da Fermat in una lettera al Carcavy del 3 gennaio 1643, la quale estensione direbbesi un tentativo di divinazione di che cosa fossero i « loci ad superficiem » degli antichi geometri. Anteriormente egli aveva comunicate al Mersenne (26 dicembre 1638) altre proposizioni dello stesso genere, per es. la seguente: « È una sfera il luogo dei punti per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze da quantisivogliano

punti fissi »; quella sfera in generale non passa per i punti dati, ma ciò accade (lettera a Mersenne del 26 marzo 1641) quando i punti dati siano vertici di un poliedro regolare.

## Lavori algebrici di Fermat

358 - Ritorniamo al piano per osservare che, in un'importante Appendice all'*Isagoge,* Fermat ha esposto la soluzione dei problemi cubici e biquadratici applicando le equazioni surriferite delle curve di 2° ordine. È un tema trattato già, anzi con maggiore perfezione, nella *Géométrie* di Descartes, ma che, dato lo stato dell'algebra in quell'epoca, era palpitante d'attualità, onde la nuova trattazione avrà indubbiamente servito ad accrescere il credito dei metodi inventati dal matematico di cui ci occupiamo.

Ha lo stesso tema una dissertazione tripartita *Sulla soluzione dei problemi di geometria per mezzo delle più semplici curve possibili,* la quale, benchè abbia un carattere critico, arreca notevoli complementi a quanto è esposto nella grande opera di Descartes. Quel carattere è stabilito dalle parole con cui si apre: « Può sembrare un paradosso il dire che, persino in geometria, Descartes non era che un uomo ». Il punto debole rilevato da Fermat si trova nella classificazione delle curve, ritenendo egli (con piena ragione) che non esista alcuna ragione per collocare in una stessa classe le curve degli ordini $2n - 1$ e $2n$, non esistendo alcun metodo per trasformare le une nelle altre. Altro punto che Fermat ritiene degno di biasimo è quello in cui Descartes risolve certi problemi mediante curve più complicate di quanto sia indispensabile, violando così una norma stabilita e osservata dagli antichi. Fermat invitò i Cartesiani a dimostrare errate queste critiche, e ciò non per altro che in vista del vantaggio della geometria, al cui perfezionamento tutti debbono collaborare nella misura delle proprie forze.

Per dimostrare la fondatezza delle sue critiche Fermat considera un'equazione di 6° grado; ammette sia lecito supporre che manchi del termine lineare nell'incognita, deducendolo forse dal fatto che in una equazione di 6° grado si può far sempre scomparire il termine in $x^5$ e poi applicare la trasformazione in $1/x$; in conseguenza suppone l'equazione scritta sotto la seguente forma:

$$x^6 + a\,x^5 + b^2\,x^4 + c^3\,x^3 + d^4\,x^2 = e^6\ ; \tag{1}$$

per risolverla se ne eguaglino i due membri a

$$(x^3 + b\,x\,y)^2 \quad \text{cioè} \quad x^6 + 2\,b\,x^4\,y + b^2\,x^2\,y^2\ .$$

Ora paragonando quel quadrato a $e^6$ e poi estraendo la radice quadrata dai due membri si trova

$$x^3 + b\,x\,y = e^3\ ; \tag{2}$$

eguagliando invece il primo membro della (1) allo sviluppo di quel quadrato, si può togliere dai due membri il termine $x^6$ e poi dividere

tutta l'equazione per $x^2$; dopo di che si ottiene

$$(3) \qquad a\,x^3 + b^2\,x^2 + c^3\,x + d^4 = 2\,b\,x^2\,y + b^2\,y^2.$$

Da ciò si desume che la risoluzione dell'equazione (1) dipende dalla ricerca dei punti comuni alle due cubiche (2), (3), mentre, secondo Descartes, si dovrebbe ricorrere a curve di 6° ordine.

Non possiamo riferire gli altri esempi addotti da Fermat a sostegno della sua tesi; per uno soltanto facciamo eccezione; egli nota che l'inserzione di 256 medie proporzionali fra due rette date $a$, $b$ dipende dall'equazione

$$(4) \qquad x^{257} = a^{256}\,b;$$

ora eguagliandone i due membri a $x^{240}\,y^{16}\,b$ si giunge alla seguente coppia di equazioni

$$(5) \qquad x^{17} = y^{16}\,b \quad , \quad a^{16} = x^{15}\,y;$$

queste rappresentano curve che possono servire alla risoluzione dell'equazione (4) e sono dei gradi 16 e 17, cioè molto inferiori al grado 257 assegnato da Descartes. Tutto ciò basta a stabilire la fondatezza degli appunti mossi da Fermat.

359 - Alla metamorfosi di un problema determinato nella ricerca dei punti comuni a due linee, fa riscontro la questione di eliminare un'incognita fra due equazioni; di essa si è occupato Fermat, dandone, in un caso speciale, una soluzione fondata sul seguente concetto: si combinino le equazioni date in modo da dedurne una terza che sia lineare in una delle incognite; la si risolva rispetto a questa e si sostituisca finalmente l'espressione trovata in una delle equazioni date. Il nostro geometra non si è arrestato a discutere se questo procedimento sia sempre applicabile, ma ha ingegnosamente osservato che la questione, sfiorata in sue lettere degli anni 1648 e 1650, di rendere razionale un polinomio, si può trasformare in una questione di eliminazione; è un'osservazione che fu ripetuta e svolta in tempi più vicini a noi, ma qui era obbligo nostro segnalarne la prima comparsa.

Non abbandoniamo il campo algebrico registrando un notevole complemento dato da Fermat alla soluzione di Viète per il noto problema di A. van Roomen (n. 276) e da lui comunicato per lettera all'Huygens: detta soluzione si riferisce al caso in cui la costante che vi si presenta non superi 2; Fermat si occupò dell'ipotesi opposta, riguardo a tutti i problemi congeneri. Supposta detta costante = 4, con la sostituzione $x = y + 1/y$, egli ridusse le equazioni risolutrici alla forma

$$y^n + 1/y^n = 4$$

e così ottenne le espressioni delle radici sotto la forma

$$\sqrt[n]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[n]{2 - \sqrt{3}}\,;$$

eseguì poi il calcolo per $n = 3, 5, 7$ e affermò che lo stesso accade per

tutti i valori dispari di $n$, non escluso il caso $n = 45$ contemplato da Viète. Per confermare in generale tale risultato, notiamo che, qualunque sia la costante $c$, dall'equazione $y^n + 1/y^n = 2c$ si trae $y = \sqrt{c + \sqrt{c^2 - 1}}$, e per essere $x = y + 1/y$ si conclude

$$x = \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}}} =$$

$$= \sqrt[n]{c + \sqrt{c^2 - 1}} + \sqrt[n]{c - \sqrt{c^2 - 1}}\,.$$

Se $c < 1$, come suppose Viète, lo si indichi con sen $\alpha$ e allora si ha

$$x = \sqrt[n]{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha} + \sqrt[n]{\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{n}\,,$$

conformemente al risultato da lui ottenuto; se invece $c > 1$, il valore trovato di $x$ non contiene alcuna traccia d'immaginario e si ha il risultato indicato da Fermat per $c = 2$.

## Fermat fondatore della teoria dei numeri

360 - Proseguendo nella rassegna delle opere di Fermat, arriviamo ai campi nei quali la sua originalità si presenta in modo talmente chiaro e indiscutibile, che egli passa per un vero creatore.

E che tal nome gli competa riguardo alla teoria dei numeri emerge dal fatto che egli, sia pure come lontanissimo discepolo di Pitagora, iniziò quello studio metodico delle proprietà dei numeri interi, del quale si cerca indarno qualche traccia in Diofanto, il quale, come sappiamo (v. pag. 109), rivolse sempre i propri sforzi alle soluzioni « razionali » dei problemi indeterminati. Della novità e importanza di siffatte ricerche egli era pienamente consapevole, chè in un passo di un suo commento all'*Aritmetica* di Diofanto, scrisse che « la teoria dei numeri interi, che è assai bella e sottile, non fu nota sino ad oggi nè a Bachet nè ad alcun altro » e più tardi (febbraio 1657) affermava con piena ragione che « l'aritmetica ha un dominio suo proprio, la teoria dei numeri interi, appena schizzata da Euclide e non abbastanza coltivata da chi venne poi ». Antecipando poi (agosto 1659) sul giudizio dei venturi scrisse a Carcavy che « la posterità *gli* sarebbe grata per avere mostrato che gli antichi non hanno saputo tutto ». Sgraziatamente delle vaste ricerche da lui condotte a termine non è rimasta traccia se non sugli stretti margini di una copia di Diofanto da lui posseduta e in alcune pagine del suo carteggio; però i principali risultati da lui ottenuti si possono considerare come pervenuti sino a noi; invece ben poco si conosce intorno alle vie da lui percorse per conseguirli, le quali dovevano essere chiaramente tracciate se il 26 aprile 1636 egli poteva scrivere al P. Mersenne che erano ben diverse da quelle battute da Viète. Di un solo tipo generale di ragionamento, che sembra averlo mirabil-

mente servito, si conoscono, se non altro, i lineamenti generali; è il « metodo delle cascate » o « della discesa infinita », basato sul principio che un numero intero positivo non può essere diminuito indefinitamente [1], seguendo il quale per dimostrare una relazione fra più numeri interi $x, y, z,\ldots$ ci si riduce a ragionare sopra altri numeri $x_1$, $y_1$, $z_1,\ldots$ minori dei precedenti e dedotti con un procedimento variabile e da determinarsi caso per caso; applicandolo nuovamente, si arriva ad una nuova serie $x_2$, $y_2$, $z_2,\ldots$ fino a giungere ad un gruppo, riguardo al quale la proposizione risulta evidente [2].

361 - Affinchè il lettore possa giudicare dell'ampiezza e importanza delle conseguenze a cui arrivò il celebre aritmetico francese, riferiamo le più cospicue delle proposizioni da lui scoperte:

I. L'antica ricerca dei triangoli rettangoli in numeri (v. pag. 105), ossia la risoluzione dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, condusse Fermat a occuparsi della analoga $x^n + y^n = z^n$ e ad asserire che essa è impossibile in numeri interi, aggiungendo che di tal fatto egli era giunto in possesso grazie a una mirabile dimostrazione, la quale però non poteva capire nel margine del volume (Diofanto) che gli stava dinanzi; però, scrivendo a Carcavy nell'agosto 1659, egli ne delineò una, per il caso più semplice $n = 3$. Dopo di lui molti tentarono di sopperire al suo silenzio, ma sempre indarno, chè della verità di quell'enunciato si è sicuri soltanto per numerosi valori dell'esponente $n$; onde la locuzione « ipotesi di Fermat » di recente sostituita da E. Landau a quella di « grande teorema di Fermat » dianzi usata, mostra che dubbi giustificati presero il posto dell'assoluta fede che avevasi un tempo intorno alla verità di quella proposizione; sicchè oggi l'umanità è tentennante, smarrita ed incerta se deve segnalare, su un nuovo esempio, i pericoli di generalizzazioni affrettate o prostrarsi, ammirando un superbo volo verso terre che un solo uomo fu sino ad oggi capace di raggiungere.

II. Il nome di « teorema di Fermat » è invece costantemente dato alla seguente proposizione: « se $a$ è un numero arbitrario e $p$ è un numero primo, $a^{p-1} - 1$ è divisibile per $p$ »; essa fu desunta da un passo di una lettera scritta da Fermat a Frenicle il 18 ottobre 1640 e fu poi dimostrata in molti modi.

III. Dei numeri primi della forma $4n + 1$ Fermat ha scoperte molte proprietà; p. es. che ognuno di essi è in un solo modo ipotenusa di un triangolo rettangolo, mentre il suo quadrato lo è in due, il suo cubo in tre, ecc.

IV. Secondo lo stesso matematico l'equazione $x^4 + y^4 = z^2$ è impossibile; invece la equazione $x^2 = y^3 - 2$ ammette l'unica soluzione $x = 5$, $y = 3$ e all'equazione $x^2 + 4 = y^3$ non si può soddisfare che assumendo $x = 2$ o $11$.

---

(1) A. Genocchi ha osservato che questo principio fu applicato prima dal Campano, come può vedersi nella sua edizione di Euclide (1482).

(2) Fu di recente osservato (Vacca) che questo artificio logico è una metamorfosi del metodo di induzione completa, non ignoto agli antichi e applicato largamente dal Maurolico, da cui lo apprese B. Pascal (vedi Capitolo seguente).

V. Diofanto ha intravveduto (v. pag. 112) e Bachet asserito la possibilità di scomporre qualunque numero nella somma di un numero di quadrati non superiore a quattro. Fermat è giunto a un risultato assai più generale e importante: cioè che ogni numero è triangolare o somma di 2 o 3 triangolari; che ogni numero è o quadrato o somma di 2, 3 e 4 quadrati; che ogni numero è o pentagonale o somma di 2, 3, 4 o 5 numeri ecc. di detta specie, osservando, in una chiosa a Diofanto: « Io non posso darne qui la dimostrazione che dipende da molti e astrusi misteri della scienza dei numeri; ho l'intenzione di consacrare a questo soggetto un intero libro, e così farò compiere all'aritmetica progressi al di là dei limiti già noti »; ma questo bel progetto non ebbe neppure un principio di attuazione.

VI. Altra notevole proposizione scoperta da Fermat è quella che afferma non esistere alcun triangolo rettangolo in numeri interi la cui area sia espressa da un numero quadrato. Nel suo esemplare dell'*Aritmetica* di Diofanto egli espone un principio di dimostrazione, ma nuovamente la ristrettezza del margine gli vietò di condurla a termine; però le sue parole provano che trattavasi di un'applicazione del metodo delle cascate.

VII. Una speciale attenzione fu rivolta da Fermat alle cosidette « doppie equazioni », cioè ai problemi che oggi si esprimono mediante le formole

$$a x^2 + b x + c = \square \quad , \quad a' x^2 + b' x + c' = \square ,$$

perfezionando i metodi di risoluzione ideati da Diofanto e Bachet. Non contento di ciò, egli ha introdotta la considerazione delle analoghe « triple equazioni » e ne mostrò l'importanza mediante parecchie applicazioni. Al riguardo sono poche le informazioni dirette che si hanno; ma, avendo Fermat comunicate le scoperte da lui fatte su tale argomento al P. Giacomo de Billy (n. a Compiègne il 18 marzo del 1602, m. a Digione il 14 gennaio 1679), questi le fece conoscere nell'opera dal titolo *Doctrinae analyticae inventum novum* (Tolosa, 1670), la quale, costituendo un prezioso complemento alle opere di quel Grande, fu riprodotta, tradotta in francese, nella più recente edizione delle sue *Opere*.

VIII. I numeri della forma $2^{2^n} + 1$ sono primi per $n = 0, 1, 2, 3, 4$; Fermat, al pari di Torricelli (v. pag. 430), ritenne lo fossero anche i due successivi, mentre Eulero dimostrò che essi sono composti; da quella constatazione, con una generalizzazione affrettata, egli fu indotto a ritenere che fossero sempre primi, pure dichiarando il 18 ottobre 1640, in una lettera a Frenicle, di non essere in grado di dimostrarlo; confermò questa confessione in altra lettera a B. Pascal del 29 agosto 1654, e poi propose (giugno 1658) a un gentiluomo di cui diremo fra poco (p. 486), il Digby, di cercarne una dimostrazione. Questa proposizione erronea ci dà occasione di rilevare che Fermat seppe misurare la difficoltà pratica del problema di riconoscere se un numero sia primo o composto; in una lettera, che sembra risalire al 1643, egli

suggerì una procedura per risolverlo, ma poi (agosto 1659) non esitò a dichiararla imperfetta, pur dicendosi in possesso di altri espedienti per raggiungere altrimenti lo scopo.

IX. In molti passi della corrispondenza di Fermat s'incontrano equazioni indeterminate della forma $a x^2 + 1 = y^2$, $a$ essendo un numero intero non quadrato; ma è in uno squarcio che risale all'agosto 1659 che si trova l'enunciato del problema che consiste nel risolverla, accompagnato dalla dichiarazione che si può giungere allo scopo applicando il metodo delle cascate. Come il nostro matematico sia stato indotto a occuparsi di quell'equazione, è ignoto; benchè appaia a prima giunta come una specialissima equazione indeterminata di 2° grado a due incognite, è oggi nota la sua grande importanza nella teoria dei numeri, essendo una delle forme tipiche a cui può ridursi l'equazione generale di detta specie; ora, dato il genio di Fermat, nessuno è oggi in diritto di negare che egli vi sia giunto appunto per tale strada. Il lettore ricorderà certamente che gl'Indiani erano in possesso di un procedimento per risolverla (v. p. 175), ma i loro risultati non furono noti in Europa che durante il primo quarto del secolo XIX. È qui il caso di rilevare che, per un equivoco in cui incorse l'Euler, quell'equazione è troppo spesso designata col nome di Pell, che, come vedremo (n. 425), non se ne è mai occupato, mentre, ammesso che si voglia designarla con un nome, questo non può essere che quello di Fermat.

X. Un passo di una lettera al P. Mersenne, scritta nel 1640, prova che Fermat ha studiato anche i numeri perfetti euclidei (v. p. 177); ivi è rilevata come erronea l'opinione allora invalsa, che, come ne esiste uno nell'intervallo 1...10, uno nell'intervallo 10...100 e uno nell'intervallo 100...1000, lo stesso accadesse negli analoghi intervalli successivi; infatti non ne cade alcuno fra $10^{19}$ e $10^{20}$.

XI. Meditando su quanto Diofanto lasciò scritto sopra i numeri poligonali, Fermat ha concepita una serie infinita di numeri (« poliedrici ») succedentesi con la legge seguente:

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{3} n \frac{(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\frac{1}{4} n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3}, \ldots ;$$

un passo di una sua lettera al Mersenne che sembra risalire al settembre 1636 permette di assegnare la data di tale scoperta.

XII. Da una lettera scritta nel 1640 da Frenicle al P. Mersenne e da questo comunicata al nostro matematico, Fermat fu condotto a completare le ricerche fatte da Bachet sopra i quadrati magici e ad investigare altre figure del genere. I principali risultati da lui ottenuti si leggono in una lettera da lui diretta al Mersenne il 1° aprile 1640, e sono talmente degni di ammirazione che si sarebbe tentati di trascriverli per intero. Lo spazio non consentendoci tanto, limitiamoci a riferire che quel grande matematico asserisce di essere in grado di co-

struire dei quadrati magici, che tali rimangono togliendovi una o due cornici, e cita a riprova il seguente quadro:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 185 | 186 | 5 | 6 | 7 | 190 | 191 | 192 | 11 | 194 | 195 | 14 |
| 15 | 16 | 26 | 25 | 27 | 177 | 176 | 175 | 174 | 173 | 172 | 171 | 27 | 28 |
| 42 | 156 | 31 | 165 | 159 | 34 | 35 | 162 | 37 | 164 | 158 | 40 | 167 | 29 |
| 56 | 142 | 152 | 46 | 52 | 149 | 148 | 147 | 146 | 47 | 53 | 45 | 153 | 43 |
| 57 | 128 | 59 | 180 | 61 | 135 | 134 | 63 | 132 | 66 | 137 | 68 | 139 | 70 |
| 71 | 125 | 73 | 123 | 122 | 76 | 120 | 119 | 19 | 75 | 116 | 82 | 114 | 84 |
| 85 | 111 | 96 | 109 | 108 | 107 | 91 | 92 | 90 | 103 | 102 | 87 | 100 | 98 |
| 112 | 97 | 110 | 95 | 89 | 93 | 105 | 106 | 104 | 94 | 88 | 101 | 86 | 99 |
| 126 | 83 | 115 | 81 | 80 | 118 | 77 | 78 | 121 | 117 | 74 | 124 | 72 | 113 |
| 140 | 69 | 138 | 60 | 131 | 62 | 64 | 133 | 65 | 136 | 67 | 129 | 58 | 127 |
| 141 | 55 | 54 | 144 | 150 | 151 | 50 | 49 | 48 | 145 | 151 | 143 | 44 | 154 |
| 168 | 41 | 157 | 32 | 33 | 160 | 161 | 36 | 163 | 38 | 39 | 166 | 30 | 155 |
| 182 | 170 | 180 | 179 | 178 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 181 | 169 |
| 183 | 184 | 3 | 4 | 187 | 188 | 189 | 8 | 9 | 10 | 193 | 12 | 13 | 196 |

Slanciandosi poi nello spazio, egli ha anche scoperte delle regole per costruire dei « cubi magici », e come esempio descrive la figura costruita con i primi 64 numeri naturali, disposti in quattro strati per modo che la somma degli elementi di ogni linea valga 130: eccone la struttura:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 62 | 63 | 1 |
| 41 | 23 | 22 | 44 |
| 21 | 43 | 42 | 24 |
| 64 | 2 | 3 | 61 |

I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 58 | 11 | 10 | 56 |
| 32 | 34 | 35 | 29 |
| 36 | 30 | 31 | 33 |
| 9 | 55 | 54 | 12 |

II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 | 6 | 7 | 57 |
| 17 | 47 | 46 | 20 |
| 45 | 19 | 18 | 48 |
| 8 | 58 | 59 | 5 |

III.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 51 | 50 | 16 |
| 40 | 26 | 27 | 37 |
| 28 | 38 | 39 | 25 |
| 49 | 15 | 14 | 52 |

IV.

## Una sfida

362 - Altri esempi dello stesso genere s'incontrano in una lettera di poco posteriore di Fermat al Mersenne, ma non possiamo arrestarci più oltre sopra questo soggetto, lasciando il quale ci è forza riconoscere in generale che non potemmo segnalare tutte le scoperte compiute da lui nel campo aritmetico. Ma allo storico incombe lo stretto

obbligo di notare come alcune delle questioni trattate dal sommo di cui ci occupiamo si ritrovino nel carteggio originato da due cartelli di sfida che egli ha lanciati, uniformandosi alle abitudini del tempo. Nel primo, diramato in data 3 gennaio 1657, egli propose di trovare un cubo (o un quadrato) che, accresciuto dei suoi fattori, desse per risultato un quadrato (rispettivamente un cubo); della prima specie è il numero $7^3 = 343$, Fermat ne chiese un secondo. Più generale e importante è la questione da lui aggiunta circa un mese dopo, giacchè consiste nella risoluzione dell'equazione indeterminata $a x^2 + 1 = y^2$ (sempre nell'ipotesi che $a$ non sia quadrato), di cui già parlammo (v. p. 484). Quantunque al risolutore non fosse assegnato alcun premio in denaro, pure il guanto di sfida fu raccolto in Inghilterra, in Olanda e in Francia; in conseguenza l'aritmetica compì notevoli progressi.

Se l'Inghilterra s'interessò delle questioni proposte da Fermat, ciò dipese dall'intervento di due eminenti personalità che dobbiamo far conoscere ai nostri lettori: Sir Kenelm Digby e Lord William Brouncker.

Il primo nacque nella contea di Buckingham l'11 luglio 1603, occupò alte posizioni nella marina britannica durante il regno di Carlo I; bandito poi come realista, potè rimpatriare all'avvento al trono di Carlo II; scrisse varie opere filosofiche e teologiche, s'interessò alla scienza, e morì l'11 giugno 1665.

Il secondo, nato in Irlanda verso il 1620, all'epoca della Restaurazione fu cancelliere del guardasigilli e quindi presidente della Società Reale di Londra; in questa città morì il 5 aprile 1684, dopo avere legato il proprio nome ad alcune scoperte di cui ci dovremo occupare.

Il secondo cartello di Fermat pervenne a Lord Brouncker da parte del Digby pel tramite di Tommaso White, che già incontrammo (v. p. 421), parlando dei discepoli di Galileo; e appunto in alcune lettere scambiatesi fra Digby e Fermat si trovano le prime traccie di studi per sciogliere le questioni proposte; esse poi introducono nel nostro racconto un nuovo personaggio che occupò un posto eminente nella storia della matematica inglese nel periodo newtoniano: Giovanni Wallis. Questi nacque a Ashford (Kent) il 23 novembre del 1616. A sedici anni entrò nell'Emmanuel College di Cambridge e in questa Università conseguì successivamente i gradi di B. A. (1637) e M. A. (1640), e entrò subito come cappellano in varie case gentilizie. Nel 1644 fu eletto Fellow dal Queen's College di Cambridge, ma tale carica dovette lasciare ben presto essendosi ammogliato; si stabilì allora a Londra e partecipò attivamente alle adunanze scientifiche che condussero alla creazione della Società Reale (v. p. 393). Nel 1649 fu nominato Professore Saviliano nell'Università di Oxford e il 31 giugno 1654 conseguì ivi anche il grado di dottore in teologia, in conseguenza del quale nel 1661 ebbe la carica di cappellano di corte. Il 27 dicembre 1642 riuscì a comprendere un importante documento cifrato, e così d'un tratto assurse alla fama di acuto decifratore di criptogrammi; le lettere dei nemici che egli potè poi spiegare furono da lui depositate nel 1653 nella Biblioteca Bodleiana di Oxford e pubblicate nel 1637; la stessa qualità

gli permise di prestare allo Stato altri segnalati servigi (¹). Ma egli non volle mai comunicare ad alcuno i suoi metodi divinatori, resistendo persino alle insistenze di Leibniz. Morì il 28 ottobre 1703. Negli anni 1693-1699 venne pubblicata la completa raccolta delle sue *Opere* in tre sontuosi volumi in-f.°, del cui contenuto diremo in seguito.

Qui va notato che Lord Brouncker, non appena conosciuta la sfida di cui sopra, la comunicò (lettera del 5-15 marzo 1656-57) al Wallis con invito di occuparsene (²); tale invito essendo stato subito accolto, il Wallis ebbe occasione di partecipare a un esteso carteggio fra i matematici testè citati e l'olandese Fr. van Schooten, e nel 1658 ne raccolse gli elementi in un importante volume dedicato al Digby e avente un titolo che comincia con le parole *Commercium epistolicum*. È una pubblicazione preziosa per chi vuol conoscere l'aritmetica superiore nel suo primo periodo di vita, giacchè è la prima opera che abbia vista la luce intorno alla nuova disciplina creata dal genio di Fermat. Lo spazio ci manca per farne un'analisi completa; limitiamoci a notare che molte pagine possiedono soltanto un interesse dal punto di vista della psicologia comparata, giacchè documentano il contrasto fra l'irruenza non sempre cortese del Frenicle e l'imperturbabile correttezza dei matematici inglesi; mentre altre sono ricche di interesse scientifico e storico. Da esse, ad esempio, si apprende quanto inattesa sia giunta la limitazione posta da Fermat di considerare esclusivamente valori interi per le incognite, essendo allora generale l'abitudine di uniformarsi all'esempio dato da Diofanto con l'escludere soltanto gl'irrazionali. Nelle stesse s'incontra più volte l'esortazione a Fermat di far conoscere i principi generali che gli permisero di scoprire tanti bei teoremi particolari, i quali venivano da taluni giudicati come oggetti di semplice curiosità. Quà e là si leggono problemi e teoremi che già menzionammo redigendo il bilancio delle scoperte aritmetiche di Fermat, nonchè altri nuovi; inoltre, in una lettera scritta dal Wallis sullo scorcio del 1657, si trova una serie di enunciati negativi (³). Altrettanto dicasi riguardo a due proporzioni sui numeri perfetti enunciate da Schooten (⁴). Ma le pagine del *Commercium epistolicum* di maggiore importanza sono quelle che concernono l'equazione $a x^2 + 1 = y^2$, chè ivi il Brouncker ed il Wallis insegnarono a trovare prima una soluzione di essa e poi a dedurre da essa infinite altre, senza però avvertire che essa non ne ammette sempre.

---

(¹) Alcuni documenti relativi a questa faccia dell'attività del Wallis si leggono nell'articolo di D. E. Smith, *John Wallis as a cryptographer* (Bull. of the Amer. math. Soc., T. XXIV, 1917).

(²) Tale decisione del Brouncker si spiega considerando che il Wallis aveva fama di calcolatore aritmetico di straordinaria abilità.

(³) Citiamone alcuni. Non esistono seste potenze e nemmeno quadrati che aggiunti a 62 formino quadrati. Il solo 4 è un quadrato che aggiunto a 12 formi un biquadrato. Tranne 16 non esiste alcun biquadrato che aggiunto a 9 formi un quadrato. Non esistono cubi la cui differenza sia 20, e la sola coppia 8 e 27 dà per differenza 19. Non esistono coppie di biquadrati la cui differenza sia 100.

(⁴) Giova riferirle: Non esistono numeri perfetti pari all'infuori degli euclidei. Se esistono dei numeri perfetti pari all'infuori degli euclidei. Se esistono dei numeri perfetti dispari, devono essere della forma $a\,(2\,b - 1)$, nell'ipotesi che $2\,b - 1$ sia un numero primo.

La prima questione proposta da Fermat, come vedemmo, suona così: « Trovare un cubo che aggiunto alle sue parti aliquote formi un quadrato; p. es. $7^3 = 343$ ha per parti aliquote 1, 7, 49, ed esse aggiunte a 343 dànno $400 = 20^2$; si domanda un secondo numero che abbia la stessa proprietà. Si chiede anche un quadrato che aggiunto alle sue parti aliquote formi un cubo » (*Oeuvres de Fermat,* T. II, p. 333 et T. III, p. 311). La soluzione fu data con ammirabile sollecitudine da un gentiluomo francese (v. una lettera di Huygens del 26 febbraio 1658), che già abbiamo fatto conoscere (v. p. 460) ai nostri lettori: Bernardo Frenicle de Bessy.

In nessuno degli scritti recanti il suo nome è toccata alcuna questione del genere di quelle proposte da Fermat; ad esse è invece dedicato uno speciale opuscolo, sfuggito all'attenzione del de la Hire, e che per molto tempo si ritenne perduto non essendo stato ravvisato in uno pubblicato con la siglia D.B.F.D.B. (Dominus Bernardus Frenicle de Bessy); oggi si sa che ne esistono due esemplari nella Biblioteca Nazionale di Parigi e uno nella Civica di Clermont-Ferrand. I numeri dati dal Frenicle come risolutori della prima questione di Fermat sono $(751530)^3$ e $(37200735)^3$, giacchè il primo insieme alle sue parti aliquote dà $(1292054400)^2$ e il secondo $(346787400960)^2$; egli aggiunge l'osservazione che moltiplicando questi numeri per il numero $7^3$ dato da Fermat si ottengono due nuove soluzioni del problema. L'altro problema proposto dal celebre tolosano è invece risoluto dal numero $(30519275171)^2$, dal momento che aggiungendovi le sue parti aliquote si ottiene $(10773399)^3$. Questi notevoli risultati sono esposti senza dimostrazione (chi scrive li ha verificati onde si fa garante della loro esattezza); e sembra che abbiano soddisfatto Fermat dal momento che egli, nella seconda sfida di cui abbiamo parlato, non ne ha tenuto più parola.

363 - Notizia delle sfide di cui ci stiamo occupando giunse in Olanda per merito di G. Boreel, che dal 1650 al 1658 fu rappresentante delle Provincie Unite a Parigi; Golio, allora rettore dell'Università di Leida, ricevette gli enunciati dei problemi di Fermat il 7 febbraio 1657 e dieci giorni dopo ne venivano inviate soluzioni a Parigi. Ne era autore Francesco van Schooten, figlio del matematico di egual nome (1581-1646). Egli era nato a Leida verso il 1615 e vi morì nel gennaio 1661; alla morte del padre era succeduto nella cattedra di matematica della Scuola degli ingegneri annessa all'Università di Leida; si deve a lui una divinazione dei *Luoghi piani* di Apollonio, compiuta senza avere notizia dell'analogo lavoro di Fermat; è sua gloria di essere stato maestro di C. Huygens e di G. de Witt (v. n. 407).

Delle risposte date da Schooten ai problemi di Fermat si ha notizia dal succitato opuscolo di Frenicle, opuscolo che deve essere stato stampato in pochi esemplari ed avere raggiunto scarsa diffusione, se, come dicemmo (p. prec.), per molto tempo fu ritenuto non più esistente e se oggi se ne conoscono a mala pena tre esemplari.

Aggiungiamo che in Olanda si occupò con successo delle medesime questioni anche Giovanni Hudde (v. n. 406); avremo così raccolti ele-

menti sufficienti per concludere che, a differenza di altri a noi già noti, il cartello lanciato da Fermat diede alla scienza risultati di indiscutibile importanza.

## Fermat e il calcolo infinitesimale

364 - Volgiamoci ora ad un'altra branca delle matematiche nella cui storia Fermat occupa una posizione talmente rilevante che Lagrange giunse a proclamarlo creatore del calcolo infinitesimale; se si può essere un po' riluttanti a fare piena adesione a questa affermazione da quanto ora diremo risulterà che ad essa il sommo matematico italiano fu indotto da ben gravi motivi.

A occuparsi di questioni che oggi consideransi di pertinenza del calcolo differenziale, Fermat fu condotto dal desiderio di risolvere questioni di massimo o minimo verso cui era stato attratto da Mersenne e Carcavy [1]. Gli scritti che egli dedicò a queste fondamentali questioni, comunicati a Descartes, accesero fra i due grandi matematici una vivace discussione, a spiegare la quale sta il fatto che Fermat espose allora il proprio metodo senza dimostrarlo (per giustificare la sua regola sarebbe stata necessaria una estesa memoria, secondo quanto egli scrisse al Mersenne in data 7 aprile 1646); esso appare agli occhi dello storico come lo sviluppo di una osservazione che vedemmo già fatta da Oresme e Kepler (v. p. 415), mentre ai moderni si presenta come equivalente alla regola secondo cui, in un punto di massimo o minimo di una funzione di una variabile deve annullarsi la prima derivata di questa. Infatti, se $f(a)$ è la funzione investiganda, il citato geometra insegna a calcolare successivamente.

$$f(a+e)\ ,\quad f(a+e)-f(a)\ ,\quad \frac{f(a+e)-f(a)}{e}\ ;$$

fatto in quest'ultima espressione $e=0$ (si badi che Fermat non parla di passaggio al limite) ed eguagliato a 0 il risultato, si ottiene un'equazione in $a$ che, risoluta, dà la soluzione del problema. Certamente questa regola non è completa, giacchè non insegna nè a distinguere i valori massimi dai minimi, nè a risolvere la questione se a tutte le radici dell'anzidetta equazione corrispondano valori estremi della data funzione; ma un documento che risale alla primavera del 1643 mostra che tale indispensabile complemento fu da lui dato mediante una considerazione equivalente all'esame del segno della seconda derivata. Notisi anche che nello stesso documento si trovano alcune parole (« je suppose que cette recherche aboutit à un point ou à un terme unique ») dalle quali emerge che Fermat intendeva occuparsi esclusivamente di funzioni a una sola variabile. A torto fu obiettato al suo procedimento di essere inapplicabile nel caso in cui la funzione $f(a)$ contenga dei radi-

(1) La prima pubblica notizia del metodo dei massimi e minimi di Fermat fu data nel 1642 dall'Hérigone in un volume di *Supplemento* al suo *Cours*.

cali, chè Fermat mostrò, sopra opportuni esempi, come debbasi procedere in tali casi. Inoltre devesi a lui la fondamentale osservazione che la determinazione delle tangenti delle curve piane, dal punto di vista analitico, non differisce dalla ricerca dei valori massimi e minimi che può assumere una funzione ad un'incognita. Inoltre anche la ricerca del baricentro di un segmento di conoide parabolico fu da lui condotta a termine giovandosi di considerazioni della medesima natura; che finalmente queste possano essere invocate anche nella ricerca degli asintoti e dei punti d'inflessione è cosa da lui asserita, ma non completamente dimostrata.

La potenza e la duttilità dei metodi testè accennati fu posta in luce da Fermat su molteplici esempi; citiamo fra essi le costruzioni da lui scoperte per le tangenti alla cissoide di Diocle, alla concoide di Nicomede, alla cicloide e alla quadratrice, e la soluzione da lui annunziata, come applicazione degli stessi principi, del problema di determinare nel piano di un triangolo un punto per cui sia minima la somma delle distanze dai vertici; ond'è spiegabile l'entusiasmo destato da quei metodi in Roberval, che francamente schierossi accanto a Fermat contro Descartes. E va rilevato che la collera dell'autore del *Discours de la méthode* fu accesa specialmente per il fatto che Fermat applicò alla diottrica il suo metodo dei massimi e minimi, facendo vedere che questo conduceva razionalmente alle leggi della riflessione e della rifrazione della luce, che nella *Dioptrique* erano avvolte in una nube di metafisico mistero; anzi le considerazioni svolte sull'argomento dal nostro matematico hanno un valore di carattere generale, perchè si basano sopra un concetto di economia che governerebbe tutti i fenomeni naturali.

365 - A questi importanti risultati, riguardanti oggi di pertinenza del calcolo differenziale, ne fanno riscontro altri di non minore portata relativi all'integrale. Prima di enumerare almeno i più rilevanti, notiamo che in molti passi delle opere di Fermat s'incontrano parabole d'ordine superiore; fu più volte sollevata la questione se a lui ne spetti la paternità o se su questa abbiano diritto Cavalieri o altri matematici. Senza addentrarci nei meati di questo problema, notiamo che evidentemente i tempi erano maturi per passare dall'equazione $y^2 = p\,x$ alla $y^n = p\,x$, onde non deve recare meraviglia se un tal passo possa essere stato compiuto nello stesso tempo e indipendentemente in Italia, in Francia e altrove [1]: coincidenze di tal fatta sono frequenti nella storia del pensiero matematico.

E appunto alle parabole di ordine superiore si riferisce un brano diretto circa nel 1648 a B. Cavalieri, ove è esposta una regola generale per quadrarle, non senza onestamente avvertire che il Roberval, appunto per invito di Fermat, si era occupato della stessa questione con qualche successo. In più il nostro matematico dà ivi la cubatura dei solidi generati dalla rotazione di una qualunque parabola attorno al proprio asse.

---

[1] In condizioni analoghe ci si trova riguardo alle spirali di ordine superiore $\rho^n = a\,\omega$ ottenute ($\rho$ e $\omega$ essendo le ordinarie coordinate polari), partendo dalla spirale di Archimede $\rho = a\,\omega$, da parecchi geometri della stessa epoca.

Dalle parabole alle iperboli di grado superiore è breve il passo; questo fu certamente compiuto da Fermat (e non è detto se da lui solo e prima di tutti); chè di dette curve egli si è occupato dal punto di vista della quadratura nel lavoro intitolato *De daquationum localium transmutatione et emendatione.* Base delle ricerche ivi compiute è l'osservazione che, mentre Archimede si servì esclusivamente di progressioni aritmetiche, le geometriche sono in grado di prestare segnalati servigi. La possibilità risulta da un lemma il quale insegna a calcolare la somma $S$ dei termini di una progressione geometrica d'infiniti termini; se $a$ ne è il primo termine e $q = u/v < 1$ la ragione, quel lemma si scrive $a\,(S - a) = (v - u)/u$ che evidentemente equivale a $S = a/(1 - q)$. Fra le conseguenze trattene dal grande matematico francese, notiamo la determinazione delle aree di tutte le iperboli e la dimostrazione del teorema secondo cui l'area di una cissoide è eguale al triplo di quella del cerchio fondamentale.

Altri importanti risultati di calcolo integrale furono comunicati anonimi nel 1670 al pubblico in appendice all'opera *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* del gesuita Antonio de la Louvère (n. nel 1600, m. a Tolosa li 2 sett. 1664). È ivi coraggiosamente affrontato il problema della rettificazione della parabola ordinaria e dimostrato che nel fondo equivale a quello della quadratura di un'iperbole ordinaria (è noto infatti che esso dipende da un integrale esprimibile per logaritmi). La rettificazione di una curva è poi ivi sfruttata per stabilire una notevole trasformazione di una curva in infinite altre, e la si ritrova nel teorema che afferma la rettificabilità mediante archi di parabola delle curve affini a una cicloide. Ancora più sorprendente è il calcolo dell'area di un segmento di conoide parabolico, perchè è un notevole esempio di complanazione di una superficie curva che non sia sferica, conica o cilindrica; Fermat trova giustamente che quell'area equivale ad un cerchio. Finalmente egli estese a tutte le parabole e spirali superiori la relazione, scoperta da B. Cavalieri (p. 426) e altri, che passa fra un arco di una ordinaria parabola e quello di una spirale d'Archimede.

Altre prove dell'ammirabile disinvoltura di Fermat nel trattare senza grande apparato di calcolo le più astruse questioni di calcolo integrale, traggonsi dalla dissertazione geometrica intitolata *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione,* pubblicata anonima, essa pure in appendice al citato volume del la Louvère, chè è ivi dimostrata la possibilità di rettificare la parabola (semicubica) di equazione $y^3 = p\,x^2$, ed è ripetutamente rilevato il fatto che questo nuovissimo risultato fu ottenuto applicando i metodi archimedei, opportunamente generalizzati; se anche, come vedremo, altri giunse alla medesima conclusione, ciò non diminuisce l'altissimo valore della scoperta fatta dal grande geometra francese.

366 - Nel quadro che tentammo colorire delle scoperte matematiche di Fermat il lettore noterà almeno una grave imperfezione, cioè la scarsità di date; ciò è prodotto dell'invincibile ripugnanza di lui per la stampa; i suoi scritti, rapidamente schizzati, giravano fra le mani di

coloro capaci d'intenderne la dottrina esposta in frasi terribilmente concise, epperò oscure; onde l'unica luce che al riguardo può trarsi è dal suo carteggio, e noi lo abbiamo utilizzato per quanto possibile. Aggiungendo che da esso si desume che sino dal 1636 il Fermat occupavasi di massimi e minimi, dal momento che se ne parla in lettere da lui scritte in quell'anno al P. Mersenne, a B. Pascal e Roberval; allora o poco dopo egli deve avere inventato i metodi per conseguirli, perchè risale al 1638 un cenno dell'applicazione fattane da lui alla cicloide e alla foglia di Descartes (una lettera a Brulart de Saint Martin, che sembra datata dal maggio 1643, mostra che allora il metodo aveva raggiunto il suo stadio più perfetto); d'altra parte una sua lettera al Mersenne del 10 agosto 1638 permette di assegnare una data all'applicazione degli stessi principi alla determinazione di baricentri. L'intervento nella diottrica del principio di minimo deve risalire circa al 1637, ma cenni precisi al riguardo si trovano soltanto nel carteggio posteriore. Di data ben più recente devono essere le ricerche di calcolo integrale, chè gli è nelle lettere degli anni 1659-61 che s'incontrano molti degli enunciati che noi abbiamo riferiti nel n. prec.

La corrispondenza scientifica di Fermat rivela ancora un'ultima faccia della sua attività scientifica, giacchè le numerose lettere da lui scambiate con B. Pascal mostrano, non soltanto l'interesse che provò per quelle questioni relative ai giuochi che dovevano ben presto dare origine alla teoria delle probabilità, ma anche la genialità dei procedimenti da lui all'uopo escogitati.

Se pertanto si riflette che Fermat, quantunque abbia mostrato perfetta conoscenza degli antichi metodi geometrici, a cui tributava la più schietta ammirazione, seppe tracciare con mano sicura le linee fondamentali della geometria analitica, creò la teoria dei numeri, ha contribuito nel modo più fattivo alla costituzione del calcolo infinitesimale, finalmente rese possibile venisse scritto il codice regolatore dei fenomeni del caso, si concluderà che questo magistrato, benchè tutto permeato di coltura greco-latina, benchè abbia sdegnato di servirsi dell'agile simbolica algebrica creata da Descartes, merita un posto di prima linea fra i creatori della matematica moderna.

## BIBLIOGRAFIA

*Oeuvres de Descartes publiées par* Charles Adam *et* Paul Tannery *sous les auspices de Ministère de l'Instruction publique*, 12 Vol. e un Supplemento (Paris, 1897-1913; nell'Introduzione al I Vol. il lettore troverà esaurienti notizie sopra le edizioni precedenti; il Vol. XII contiene una biografia di Descartes dovuta all'Adam).

P. Tannery, *La correspondance de Descartes dans les inédits du Fond Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques* (Paris, 1893; ivi si trovano i libelli del Beaugrand contro Descartes).

Leon Roth, *Correspondance of Descartes and Constantin Huygens*, 1635-1647, *edited from Manuscipts now in the Bibliothèque Nationale, formerly in the possession of the late* H. W. Buxton (Oxford, 1926; contiene documenti relativi alla sfida Descartes-Stampionen-Wassennaer).

J. DE BILLY, *Doctrinae analyticae inventum novum* (Tolosae, 1670; una traduzione francese si trova nel III Vol. della succitata edizione di Fermat).

*Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis inter* J. WALLISIUM *et alios viras doctrina et nobilitate illustres* (Oxoniae, 1658; II ed., id., una traduzione francese se ne legge nel III Vol. delle citate *Oeuvres de Fermat*).

*Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de* P. TANNERY *et* CH. HENRY *sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique*, 4 Vol. e un Supplemento per cura di C. de Waard (Paris, 1891, 1894, 1896, 1912, 1922).

C. MYDORGE, *Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive Conicorum operis II Lib.* (Paris, 1631; IV lib., 1639).

*Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos, quae tamquam insolubilia universis Europae Mathematicis a clarissimo viro* D. FERMAT *sunt proposita, et ad* D. CL. M. LAURENDERIUM *Doctorem Medicum transmissa, ad* D.B.F.D.B. *inventa. Nec non alia duo problemata numerica a* D. CL. M. LAURENDERIUM *vicissim proposita, cum quibusdam solutionibus prioris problematis a* D. FRANCISCO A SCHOOTEN *in Academia Lugdune Batava Professore datis. In qua continentur Sex aliae solutiones prioris Problematis terminis Analyticis ab eodem* D.B.F. *sub forma Problematis datae. Insuper et Solutio alterius problematis ab eodem Cl. viro* D. FERMAT *circa numeros unitate a quadrato deficientes propositi; cum ipsius solutionis constructione.* (Parisiis, MDCLVII).

## CAPITOLO XXV

# RISVEGLIO DELLA GEOMETRIA PURA: DESARGUES E PASCAL

## PARTE PRIMA: DESARGUES

### Biografia di Desargues

367 - Mentre con tanto fervore i matematici si adoperavano a perfezionare i metodi algebrici, la geometria non veniva del tutto trascurata; ma chi vi si dedicava, meglio che ad innovazioni radicali, dedicava la propria attività a ricerche curiose (quali le costruzioni con una sola apertura di compasso), o a riedificare antiche opere perdute o tutt'al più a migliorare, in qualche particolare, la teoria delle coniche ereditata dai Greci. Fa eccezione un autodidatta che, per proprio impulso, aveva studiato le opere di Euclide, Apollonio e Archimede e poi aveva abbracciata la carriera dell'architetto: Girard Desargues.

Nato a Lione nel 1593, si trasferì a Parigi nel 1626 e ivi attirò l'attenzione e conquistò la stima di Richelieu, che lo volle seco all'assedio de La Rochelle (1628) in qualità d'ingegnere militare (oggi direbbesi ufficiale del genio). Ritornato a Parigi entrò in relazione con Descartes, di cui prese le parti in alcune delle dispute che ebbe a sostenere il grande filosofo; dell'alta considerazione in cui questi lo teneva sono documenti parecchi passi delle sue lettere, ove a Desargues sono dirette frasi elogiose che colpiscono il lettore per il loro tono in aperto contrasto con quello altezzoso e sprezzante usato riguardo agli altri scienziati del tempo. Desargues frequentò le riunioni scientifiche che tenevansi nella cella del P. Mersenne e che condussero alla creazione dell'Accademia di Parigi, esponendovi i concetti fondamentali delle proprie scoperte; è però opportuno notare che i lavori teorici di Desargues appaiono come prodotti secondari delle fatiche da lui spese per dare solidi fondamenti alle pratiche in uso presso pittori e architetti ed eventualmente perfezionarle; egli stesso ebbe a dichiarare (ottobre 1647) di « non provare piacere allo studio e alle ricerche di fisica o di geometria se non in quanto possono porgere allo spirito un mezzo per giungere a qualche cognizione delle cause prossime degli effetti concernenti le cose che si possono tradurre in atto per la conservazione della salute o nella loro applicazione per la pratica di qualche arte ».

Quando egli andava scoprendo faceva stampare in fogli volanti destinati agli amici e che soltanto in parte si salvarono dalla distruzione.

L'estrema concisione del suo stile, nonchè le innovazioni, non sempre necessarie, alla nomenclatura, ostacolarono il trionfo delle sue idee, le quali cominciarono a ottenere il debito posto nella scienza soltanto quando il Poncelet (1822) richiamò l'attenzione dei geometri su quello che egli con frase felice chiamò « il Monge del suo secolo ». Auspice M. Chasles, si cominciò allora a raccogliere con amorosa cura quanto esisteva ancora dei suoi scritti, e quello che fu possibile trovare fu pubblicato in una edizione che merita un posto onorevole nella biblioteca di qualunque geometra.

Nel 1650 Desargues ritornò nella sua città natale e ivi rimase sino al 1661, anno della sua morte.

## Opere di Desargues

368 - Il titolo fondamentale di Desargues per ottenere un posto nella storia delle matematiche è rappresentato da un conciso trattato sulle coniche intitolato *Brouillon-Project des événements de rencontre d'un cone avec un plan*, pubblicato a Parigi nel 1639. Vi si trova per la prima volta esposto e applicato il concetto di considerare le rette e i piani paralleli come casi speciali delle rette concorrenti in un punto o dei piani passanti per una retta, concetto a cui Descartes (lettera del 19 giugno 1639) concesse la propria elogiosa approvazione. Concetti nuovi esigono una nuova nomenclatura e Desargues non esitò a crearla; per giudicare nel modo in cui egli risolse tale spinoso problema basta osservare che i nomi da lui proposti si riferiscono alle stesse figure che entrarono a far parte della geometria nel primo trentennio del secolo XIX: essi sono diversi da quelli oggi in uso, ma non si può certamente asserire che fossero peggiori. Uno solo dei vocaboli da lui creati si è salvato, quello di « involuzione », e si riferisce ad una relazione a cui il geometra lionese ha il grande merito di avere assicurato posto stabile nella scienza, dimostrandone l'intervento nello studio del quadrilatero completo e del quadrilatero inscritto in una conica. Desargues, che non si è mai trovato di fronte a una scolaresca, non conobbe le piccole malizie dell'insegnamento, onde il suo trattato riuscì oscuro alla generalità dei contemporanei; oggi, che ai medesimi risultati si pervenne per altra via, il lettore vi trova tutto quanto si considera come elemento essenziale di una teoria, a base proiettiva, delle linee di second'ordine (generazione e costruzione di queste, polarità, diametri, centro, fuochi, ecc.), non senza qualche accenno all'estensione dei risultati esposti alle analoghe figure dello spazio. Però, ad onta dell'accennata oscurità, anche nel suo tempo non mancarono persone in grado d'intenderlo ed apprezzarlo a dovere; ciò è provato dal seguente fatto. Del *Brouillon-Project* si conosce oggi soltanto una copia fattane per proprio uso nel 1679 da F. de la Hire (Geometra che impareremo a meglio conoscere nel Cap. XXVII); essa è accompagnata da una lettera dello stesso geometra che ne attesta la provenienza e ove si leggono le seguenti significanti parole: « Sono più di sei anni che io feci stampare la mia prima opera

sulle coniche, e io non nutro alcun dubbio che se avessi conosciuto in qualche modo il presente trattato non avrei scoperto il metodo di cui mi sono servito, perchè non avrei ritenuto fosse possibile esistesse qualche maniera più semplice e che fosse di pari generalità ».

369 - Il trattato di Desargues si chiude con l'osservazione che quanto è ivi esposto trova applicazione alla prospettiva, alla costruzione degli orologi e al taglio delle pietre; a dimostrarlo sono dedicati altri suoi scritti di cui dobbiamo parlare. Presenta per noi un particolare interesse l'opera intitolata *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage* (1636). Esso si apre con l'esposizione di una nuova nomenclatura per gli elementi che soglionsi considerare in qualunque prospettiva, la quale venne giudicata dai contemporanei superflua, dal momento che ne esisteva già una consacrata dall'abitudine, e inoltre scelta infelicemente; proponendola, Desargues fu male inspirato, chè, se è malagevole far adottare dai pratici nuove procedure, ancor più difficile riesce il fare accettare nomi nuovi per concetti già in uso. Ma ciò che può stupire è che egli abbia trovati gravissimi ostacoli nel fare accogliere le costruzioni da lui immaginate, giacchè, al lume della scienza moderna, esse si riconoscono nel fondo per equivalenti a quelle che oggi si usano nell'assonometria, essendone punto di partenza la supposizione che di ogni punto della figura proiettanda si conoscano le coordinate cartesiane ortogonali. È però dovere nostro soggiungere che non è soltanto a cagione della loro novità che le nuove costruzioni vennero generalmente combattute, ma anche perchè Desargues si limitò a farle conoscere su un esempio, donde non riesce difficile dedurne la portata generale. Nè va taciuto che, se egli non fece uso dei punti di concorso introdotti nella scienza da G. del Monte (vedi n. 265), in una Appendice destinata « aux contemplatifs » fece conoscere la scambievole trasformazione fra un fascio ordinario di rette e un sistema di rette paralelle; Desargues, da quell'acuto geometra che era ravvisò in siffatta considerazione la fonte di « une fourmillière de grandes propositions » e asserì di essere in grado di risolvere il problema di « determinare nel piano di una conica, di cui cercasi la prospettiva, le rette che diverranno gli assi della proiezione ».

370 - A complemento o supplemento dell'or citato scritto, Desargues, per ridurre al silenzio i propri avversari, diede in luce nel 1640 un opuscolo recante questo lungo titolo: *Brouillon-Projet d'exemple d'une manière universelle touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe de pierres en l'architecture; et de l'eclaircissement d'une manière de reduire un petit pied en perspective comme en géometral et de tracer tous quadrants plats d'heures égales au soleil;* benchè in tale occasione egli usi uno stile un po' più chiaro e meno conciso che nei lavori precedenti, pure egli non brilla per soverchia lucidità. Ciò non ostante vi furono persone che riuscirono a comprendere quanto egli aveva scrit-

to nella sua prima pubblicazione, come emerge da un elenco, o albo d'onore, inserito nella seconda.

Fra tali spiriti eletti occupa una posizione eminente l'incisore Abramo Bosse (n. a Tours nel 1621, m. ivi nel 1678), il quale nel 1648 pubblicò un trattato di prospettiva ispirato alle idee di Desargues e che quindi costituisce un prezioso complemento alle pubblicazioni dell'architetto lionese; esso contiene, oltre a buon numero di proposizioni geometriche destinate a chiarire e giustificare le costruzioni ideate da questo, la descrizione di uno speciale compasso da lui costruito per agevolare la dilineazione delle prospettive.

Il Bosse è colui che più e meglio di qualunque altro si è adoperato a diffondere e difendere le idee di Desargues con le parole e con gli scritti; alla diffusione servì lo scritto intitolato *Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux au surfaces irrégulières* (1653), alla difesa il *Traité des pratiques géométrales et perspectives* (1656).

Un'altra pubblicazione dello stesso autore in cui sono esposti, svolti e illustrati i metodi di Desargues, ha per titolo *Perspective adressée aux théoriciens* che trovasi allegata all'or citato *Traité* e che ha per precipuo intento di ribattere le critiche mosse a Desargues nell'opera *La perspective spéculative et pratique de l'invention du sieur Aléaume, mise au jour par E. Migon* (1643).

371 - Un'attitudine di fronte a Desargues diametralmente opposta a quella del Bosse fu assunta da un tal Curabelle, i cui violenti, quanto ingiustificati attacchi, sarebbero attualmente sepolti in un meritato oblio ove i suoi velenosi scritti non fossero stati riesumati e ristampati dal coscienzioso editore delle *Oeuvres de Desargues.* A parziale scusa del Curabelle milita il fatto che nel 1643 era stato pubblicato a Parigi un volume del P. Breuil intitolato *La perspective pratique nécessaire a tous, par un parisien, religieux de la Compagnie de Jésus,* nel quale i modi di vedere di Desargues si trovano travisati da chi non era riuscito a comprenderli. I grossolani errori che vi si trovano furono rilevati da Desargues stesso sotto forma mediocremente cortese, e ciò fu origine di un fiero dibattito che durò quarant'anni e di cui la vittima principale fu il Bosse: chè da lui gli avversari del matematico lionese pretendevano cancellasse persino il nome di Desargues dal succitato *Traité des pratiques géométrales et perspectives,* che egli andava pubblicando sotto gli auspici dell'Accademia di Belle Arti di Parigi; avendo egli opposto uno sdegnoso rifiuto a questa stolta pretesa, dovette abbandonare la cattedra che occupava con plauso in quel grande istituto.

372 - È nel momento in cui ferveva con maggiore vivacità questa contesa che Desargues offrì al Curabelle centomila lire se egli riuscisse a dimostrare l'erroneità delle nuove procedure da lui inventate. Curabelle accettò la sfida, riducendo prudentemente la posta alle modeste proporzioni di cento pistole (circa mille lire), e allora il Desargues scrisse al Bosse una lettera (25 luglio 1657) impegnandosi a versare mille lire a chi facesse conoscere dei procedimenti migliori dei suoi per deli-

neare le prospettive. Tale lettera, essendo stata comunicata ufficialmente all'Accademia di Belle Arti, conseguì grande notorietà. Ne è prova l'opera intitolata *La perspective affranchie* (Paris, 1661) scritta dal P. Carlo Bourgoing appunto per « prétendre au prix que M. Desargues, homme savant et généreux, a proposé », opera pregevole perchè contiene buon numero di costruzioni esatte, fondate sull'impiego del punto di concorso, di cui Desargues aveva evitato l'impiego. Perciò in sei punti il Bourgoing intende stabilire la superiorità dei propri metodi; se, in conseguenza, gli sia stato conferito l'ambito premio ci è ignoto; ciò è poco probabile perchè quell'opera vide la luce nel momento in cui Desargues scendeva nella tomba e dopo che erano già cominciati a addensarsi su di lui il silenzio e l'oblio che furono di tanto pregiudizio al progresso della geometria. Ad ogni modo la gara da lui provocata non fu inutile alla scienza, come altre di cui trovasi cenno in queste pagine.

373 - Prima di lasciare Desargues ci corre l'obbligo di confermare che egli ha volto la sua mente ad altri due temi di scienza applicata, la gnomonica e il taglio delle pietre. Riguardo al metodo da lui proposto per costruire le meridiane, nulla potremmo aggiungere alle lodi tributategli da Descartes in una lettera che egli scrisse al P. Mersenne ricevendo (28 gennaio 1641) lo scritto relativo del nostro matematico. Quanto al modo di procedere al taglio dei materiali da fabbrica, a Desargues risale il merito di avere per primo tentato di assidere i procedimenti relativi sopra basi razionali; senonchè, anche in questa occasione, essendosi limitato a far conoscere le proprie idee sopra un semplice esempio, e, quel che è peggio, avendole esposte mediante una nomenclatura originale, non esercitò alcuna influenza percepibile sulla scienza dell'ingegnere, quantunque, anche in questa occasione, il Bosse siasi atteggiato a suo convinto interprete. Di tale insuccesso vi è ragione di rammaricarsi, chè il valore delle proposte fatte da Desargues appare evidente, dal momento che di molte fra esse si ravvisa oggi la sostanziale identità con le costruzioni in uso quando si trattano con l'ordinaria geometria descrittiva le questioni relative ad angoli solidi e poliedri.

Quando avremo ancora detto che in Desargues trovansi cenni impressionanti sulla costruzione di prospettive in rilievo come applicazione dell'omologia solida, e che a lui sembra risalire il merito di avere avvertita per primo l'opportunità di dare ai denti delle ruote la forma di epicicloidi, avremo raccolti elementi per concludere che se in Europa, come nell'Estremo Oriente, fosse invalso l'uso di conferire onorificenze anche a personaggi defunti, a lui certamente e con pieno consenso sarebbe oggi assegnato con lode il grado di « dottore in ingegneria ».

## PARTE SECONDA: PASCAL

### Biografia di Pascal

374 - Biagio Pascal nacque a Clermont il 19 giugno 1623 da famiglia appartenente all'alta borghesia; suo padre, Stefano, alto funzionario dello Stato e uomo di vasta e profonda coltura (era provetto anche nelle matematiche), diresse con alto senno l'educazione del figlio. Volendo assicurargli una coltura prevalentemente umanistica, gli vietò di occuparsi di geometria; ma Biagio, avendo casualmente appreso che la geometria aveva lo scopo di costruire delle figure esatte, riuscì, in seguito a continuata meditazione, a scoprire e dimostrare tutte le proposizioni che guidano a concludere che la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è eguale a due retti. Allora il padre, dichiarandosi vinto, gli diede a studiare gli *Elementi di Euclide* e gli permise di accompagnarlo a quelle conferenze scientifiche che condussero (v. n. 290) alla creazione dell'Accademia di Parigi.

I progressi che egli fece nello studio della geometria furono tanto rapidi e considerevoli che a soli sedici anni egli scoperse quel teorema fondamentale della teoria delle coniche che a ragione porta il suo nome. Poco dopo, animato dal desiderio di alleviare le fatiche del padre, che per il suo ufficio era costretto a eseguire numerose e lunghe addizioni, concepì una macchina ausiliare la cui costruzione gli costò tre anni di lavoro e per la quale ottenne un privilegio in data 22 maggio 1649 (¹). Contava ventitrè anni quando, avuta notizia delle ricerche che condussero il Torricelli all'invenzione del barometro, iniziò gli studi che culminarono in quella che, nella storia della fisica, porta il nome di « esperienza di Puy-de-Dôme » (²). Poco dopò lasciò gli studi scientifici per dedicarsi alle controversie religiose. Ma le sue condizioni di salute, che avevan cominciato a declinare in modo allarmante, lo consigliarono a abbandonare ogni sorta di occupazione e a gettarsi nella vita mondana, che era intensa sino d'allora a Parigi. Il ritorno, a trentun anni, a una

---

(¹) La più autentica descrizione di questa macchina trovasi nel T. IV (1735) della collezione intitolata *Machines et inventions approuvées par l'Académie des Sciences*. Altra leggesi in una lettera diretta ad Huygens da Carlo Bellair, gentiluomo francese, in data 4 luglio 1659 (*Oeuvres de C. Huygens*, t. II, p. 426-29), la quale contiene anche due figure illustrative. Sembra che di detto apparecchio (chiamato « la Pascaline ») siano stati allora costruiti parecchi modelli; chè l'Huygens stesso potè riceverne uno, come risulta da una lettera scrittagli dallo stesso Bellair in data 2 luglio 1659 (Vol. cit., p. 439); quattro se ne trovano a Parigi al « Conservatoire des Arts et Métiers ». L'esempio di Pascal non tardò ad essere seguito in Francia ed altrove; ciò è provato, oltre a quanto diremo di Leibniz (n. 447), dalle macchine aritmetiche costruite da un membro dell'Accademia di Parigi, CLAUDE PERRAULT (n. a Parigi nel 1613, m. ivi l'otto ottobre 1688) — di cui va ricordato il volume dal titolo *Recueil de plusieurs machines* (Paris, 1700) — e Samuele Morland (n. nel Berkshire verso il 1625, m. nei pressi di Londra il 30 dicembre 1695), il quale, nel decennio 1662-1672, costruì nuovi apparecchi addizionatori e ne pubblicò varie descrizioni.

(²) Da notarsi, e non a lode di Pascal, che egli non riconobbe mai nel Nostro, la fonte delle sue cognizioni sull'argomento.

vita morigerata è collegato a un episodio da lui interpretato come un avvertimento celeste: un giorno che egli trovavasi in una carrozza trainata da quattro o sei cavalli, accadde che, attraversando il ponte di Neuilly, due degli animali, improvvisamente imbizzarriti, ne scavalcarono il parapetto, col pericolo di trascinare gli altri e il veicolo; fortuna volle che, spezzatesi le tirelle, non si ebbe da lamentare alcuna vittima umana. Pascal, per rendere grazie a Dio dello scampato pericolo, si ritirò dal mondo e andò ad abitare alla celebre abbazia di Port-Royal. Verso i trentacinque anni la sua salute, già malferma, peggiorò in modo allarmante, e fu durante una notte in cui un violento male di denti gli vietava il riposo, che egli fu indotto a meditare sulle proprietà della cicloide e a quei mirabili risultati di cui diremo fra breve; ma, come risulta da una sua lettera a Fermat del 10 agosto 1660, dalla geometria egli rifuggiva per principio [1]. Morì il 19 agosto 1662, e fu sepolto nella chiesa di Saint-Etienne du Mont, ove la sua salma riposa tuttora.

375 - Pascal come matematico non fu uomo dei suoi tempi; egli non comprese il fulgido avvenire riserbato all'algebra di Viète e alla geometria di Descartes, e sdegnò di occuparsi dei problemi attorno a cui allora affaticavansi i matematici grandi e piccoli; e poichè non adottò l'onesto sistema delle esatte citazioni, riesce difficile il determinare a quali fonti egli siasi abbeverato. Polemista di primo ordine, egli pose le sue forze a servigio della religione, combattendo i Gesuiti mediante scritti ancora famosi, nei quali la lingua francese toccò la sua massima perfezione. Non è compito nostro descrivere questa faccia dell'attività di Pascal; dobbiamo invece rilevare che fra i manoscritti da lui lasciati furono trovati due frammenti intitolati uno *De l'esprit géométrique*, l'altro *De l'art de persuader*, che meritano l'attenzione dei matematici. In particolare, nel secondo si leggono alcune norme da seguirsi da chi scrive di geometria, le quali, a tre secoli di distanza, nulla perdettero del loro valore; esse meritano, quindi, di venire qui riferite:

*Regole per le definizioni.* - I. Non intraprendere di definire cose talmente note di per sè che non esistano termini più chiari per definirle. - II. Non lasciare senza definizione alcuno dei termini un po' oscuri od equivoci. - III. Non usare nelle definizioni dei termini che parole perfettamente note o già spiegate.

*Regole per gli assiomi.* - I. Non omettere alcuno dei principi necessari senza avere prima chiesto se lo si accordi, per quanto chiaro ed evidente esso sia. - II. Non chiedere come assiomi se non cose di per sè evidenti.

*Regole per le dimostrazioni.* - I. Non pretendere di dimostrare cose talmente di per sè evidenti che non esista nulla di più chiaro per pro-

[1] Ecco quanto vi si legge: « Car, pour vous parler franchement de la Géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit: mais en m'me temp je la connais pour si inutile que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'est qu'un métier, et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non par l'emploi de notre force ».

varle. - II. Dimostrare tutte le proposizioni un po' oscure, e non usare nelle dimostrazioni che assiomi evidenti e proposizioni già accordate o dimostrate. - III. Sostituire sempre mentalmente le difinizioni alle cose definite, onde non ingannarsi mai equivocando riguardo ai termini considerati nelle definizioni.

Egli chiude osservando non esservi gran male se si omette di osservare le prime regole di ciascun gruppo.

## Pascal e la teoria delle coniche

376 - Pascal, che, come dicemmo, frequentava insieme a suo padre le riunioni scientifiche organizzate dal P. Mersenne, ebbe occasione di conoscere e avvicinare Desargues, e così ne apprese le originali vedute geometriche. Queste gl'ispirarono alcuni nuovi risultati che nel 1640 egli fece conoscere mediante un foglio a stampa, intitolato *Essay pour les coniques,* e di cui non si conoscono oggi che due copie.

Al riceverne un esemplare dal P. Mersenne, Descartes (lettera del 1° aprile 1640) avvertì subito che trattavasi di un'applicazione dei metodi escogitati dal geniale architetto lionese; d'altra parte è questa una circostanza che Pascal stesso ebbe a riconoscere, quando, in seguito all'enunciato di un teorema, scrisse che « le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux Mathématiques, et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoiqu'en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui en auront voulu en recevoir l'intelligence; et veux bien advancer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter autant qu'il m'a été possible sa méthode sur ce sujet ».

L'*Essay* consta di tre definizioni, tre lemmi e cinque teoremi, questi senza dimostrazione alcuna. Il I Lemma non è che il famoso « hexagramme mystique », mentre il IV (quello appunto che è seguito dalla dichiarazione surriferita) afferma essere in involuzione i sei punti nei quali una trasversale qualunque taglia una conica e le coppie di lati opposti di un quadrilatero inscritto; è il teorema che attualmente porta il nome di Desargues.

377 - Gli elogi che il giovinetto autore ottenne per questo lavoro lo incoraggiarono a completarlo, trasformandolo in un trattato sulle coniche; a tale lavoro egli realmente si accinse, ne scrisse alcune parti, ma non lo portò a compimento. Le uniche informazioni al riguardo che si hanno sono dovute a Leibniz, il quale, in seguito a un'esortazione avuta dall'Oldenburg, nel 1675 riuscì a porsi in relazione con Stefano Périer, nipote di Pascal e depositario di tutte le sue carte, ed ottenere in comunicazione quanto riferivasi alle coniche. Nel restituirle (30 agosto 1676) Leibniz le accompagnò con una preziosa lettera, ove sono classificati razionalmente i risultati ivi esposti ed è aggiunto il consiglio di pubblicarli senza indugio sotto forma di trattato, diviso come segue in sei libri:

I. Generazione delle coniche e delle loro tangenti e secanti. - II. Esagrammo mistico (come fondamento di ciò che segue). - III. Delle quat-

tro tangenti e delle rette che ne uniscono i punti di contatto, donde derivano le proprietà delle rette divise armonicamente. - IV. Proposizioni relative a segmenti determinati sopra tangenti e secanti. - V. Contatti delle coniche. - VI. Del luogo solido, cioè il problema delle tre o quattro rette.

Il contenuto di altri fogli sparsi si sarebbe potuto, secondo il parere di Leibniz, riunire sotto il titolo « De restitutione coni », avendo essi per iscopo la determinazione di una sezione conica in base alla conoscenza di diametri o parametri. A dare surriferito suggerimento egli dichiaravasi indotto dalla considerazione che, ritardandone la pubblicazione, l'opera di Pascal avrebbe perduto il suo valore per la comparsa di altre sullo stesso tema (egli alludeva a quelle del de la Hire). Ciò non ostante il Périer non seguì l'avviso del Leibniz (si tenga presente che questi allora era giovane e non godeva di alcuna autorità), ritenendo che la progettata pubblicazione non avrebbe notevolmente accresciuta la fama del suo illustre congiunto. In conseguenza, dei lavori di Pascal sulla teoria delle coniche nulla più rimane che il minuscolo *Essay*.

Malgrado le alterne vicende subite dall'orientamento della mente di Pascal, sembra che egli dalla geometria non siasi mai totalmente staccato, che ad essa di quando in quando ritornava; sta a provarlo una lettera scritta a Fermat addì 29 luglio 1654, nella quale si leggono gli enunciati di due problemi analoghi, nel piano e nello spazio, che egli dice di avere risolti « plainement », ma di non essere riuscito a dimostrare le soluzioni senza ricorrere a parabole e iperboli [1].

## Scritti aritmetici di Pascal

378 - Il *Traité du triangle arithmétique* fu rinvenuto fra le carte lasciate da Pascal come stampato nel 1654, ma di pubblica ragione non fu reso che nel 1665: consta di una parte teorica e di alcune applicazioni.

Nella prima leggonsi esposte la genesi e le proprietà di un quadro numerico che già incontrammo in opere cinesi (vedi n. 129) e poi in lavori tedeschi (Stiefel, Rudolff, Apianus) e italiani (Tartaglia). La disposizione datavi da Pascal (fig. 58); nella riproduzione vennero soppresse alcune lettere greche poste per agevolare l'intelligenza delle dimostrazioni) differisce da quella a cui si attennero i precedenti autori, ma esitiamo a dirla preferibile alle precedenti; Pascal, secondo il suo costume, non cita alcuno, ma è presumibile che abbia appresa quella figura dall'Hérigone; comunque è certo improprio il nome di « triangolo di Pascal » dato ad essa da alcuni, come quello di « triangolo di Tartaglia » usato da altri; da preferirsi è la designazione anonima di « triangolo aritmetico », per quanto un po' vaga, impiegata da Pascal.

---

[1] L'enunciato di quello stereometrico suona così: « De quatre plans, quarte points et quatre sphères, quatre quelconque étant donnés, trouver une sphère qui touchant les sphères données, passe par les points donnés et laisse sur le plans des portions de sphères capables d'angles donnés ».

La costruzione dello stesso è da lui eseguita per via ricorrente mediante la relazione $C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$; Pascal fa per primo l'osservazione che si può applicarla partendo da un numero che oggi si scrive $C_{m,n}$ qualsivoglia. Fra le proposizioni stabilite, notiamo la relazione $C_{m,n}/C_{m,n-1} = (m-n+1)/n$ pubblicata ivi per la prima volta, ma che non era ignota a Fermat. Per giungere a questo e ad altri risultati, Pascal fa uso con marcata predilezione e indiscutibile abilità del « metodo di induzione completa », che s'intravvede in alcune pagine di Eu-

Fig. 58.

clide, ma di cui egli può avere appresa l'esistenza in alcuni scritti di Maurolico; anche qui, l'assenza di citazioni vieta di misurare il grado di originalità del matematico di cui ci occupiamo. Pascal, in questo come negli altri suoi lavori, non fa uso di alcun simbolo, anzi nemmeno di abbreviazioni, cosicchè egli sembra appartenere non già all'epoca in cui l'algebra era ormai nel periodo simbolico, ma nemmeno a quello in cui era sincopata, ma sibbene all'epoca retorica.

379 - Del triangolo aritmetico Pascal fa anzitutto applicazione a questioni offerte dai giuochi d'azzardo. Ad occuparsi di esse egli fu indotto — nel momento in cui conduceva la vita di un gaudente — dal cavaliere de Méré, giuocatore appassionato, avente un'infarinatura matematica. Esse rientrano in due tipi, il « problema delle partite » e « il problema dei dadi ». Il primo, sotto la forma più generale, enunciasi come segue: Un certo numero di persone giuocano con l'intesa che sarà vincitore chi per primo avrà guadagnato un certo numero di par-

tite; le probabilità di vincere essendo per tutti eguali; a un certo momento esse vogliono interrompere il giuoco e constatano che ciascuno ha già vinto un certo numero di partite; si vuol sapere in quale misura dev'essere divisa fra essi la posta. Per il caso di due giuocatori, si erano provati a risolverlo, senza successo, Pacioli, Cardano e Tartaglia; vi riuscirono Fermat e Pascal, indipendentemente l'uno dall'altro, ma con risultati concordanti. L'altro problema, pure sotto la forma più semplice, consiste nel determinare la probabilità di fare mediante due dadi, due sei; analogamente nel caso in cui si usi un numero qualunque di dadi. Quando Pascal abbia cominciato a riflettere sull'argomento non è noto con precisione, chè del carteggio da lui tenuto con Fermat non si conosce che una piccola parte; esso comincia con una risposta da questo inviata a Pascal nel 1654 e termina con una lettera di Pascal del 27 ottobre del medesimo anno; questa brusca interruzione non deve stupire, coincidendo essa col momentaneo abbandono del nostro di ogni occupazione scientifica, per dedicarsi a dispute teologiche. Nelle or citate lettere, Pascal figura piuttosto come proponitore di questioni che come risolutore di problemi a lui proposti; ma lo storico delle matematiche vi trova qua e là cose che possono interessarlo; p. es. dalla lettera datata 29 luglio 1654 emerge che Pascal conosceva la relazione che oggi si scrive:

$$2^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i}$$

Un'altra applicazione fatta da Pascal del triangolo aritmetico si riferisce al calcolo delle potenze successive di un binomio; la questione era stata già risolta prima (se non altro da Tartaglia), onde le relative pagine da lui scritte non ne aumentano sensibilmente la gloria.

Proseguendo nell'esame dei suoi lavori, ove ha una parte il triangolo aritmetico, ne incontriamo uno in cui egli fa conoscere un procedimento per estrarre da un dato numero la radice di ordine qualunque: per la sua poca praticità non prese posto stabile nella scienza. Più importante è una memoria dedicata all'applicazione del triangolo aritmetico alle combinazioni: ivi si parte da quattro lemmi che, con i nostri simboli, si scrivono come segue

$$C_{m,\,m+p} = 0, \quad C_{m,\,m} = 1, \quad C_{m,\,1} = m, \quad C_{m,\,p} = C_{m-1,\,p} + C_{m-1,\,p-1},$$

e si giunge alla formola fondamentale seguente

$$C_{m,\,p} = \frac{m\,(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\dots p}.$$

380 - Maggiore originalità presenta uno scritto nel quale Pascal per primo si è proposto il problema (che fu poi studiato da altri) di generalizzare il noto criterio di divisibilità per 9, che egli chiama « vulgata sane illa observatio », e che ritiene sino allora indimostrato. Per provarlo e generalizzarlo egli considera il sistema a base 10 come uno degli infiniti concepibili, mutando la base in altro numero; è un'osservazione oggi di dominio comune, ma che allora era nuova. Pascal ne

trae qualche conseguenza interessante; p. es. che il carattere di divisibilità per 11 nel sistema di numerazione a base 12 non differisce da quello per 9 nella base 10; riguardo alla divisibilità per 11 del numero $a_0 + 10\,a_1 + 10^2\,a_2 + \ldots$, Pascal dà come condizione di divisibilità che sia un multiplo di 11 la somma $(a_0 + a_2 + \ldots) + 10\,(a_1 + a_3 + \ldots)$, mentre oggi si preferisce quella fondata sulla considerazione della differenza

$$(a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots).$$

L'altra memoria intitolata *Potestatum numericarum summa* ha per iscopo immediato la ricerca della somma delle potenze simili dei termini di una progressione aritmetica; la sua considerevole portata emerge più chiaramente dalle parole di chiusa, che giova qui riferire: « Coloro che sono al corrente della dottrina degli indivisibili non mancheranno di percepire tutto il partito che si può trarre dai risultati esposti nella determinazione delle aree curvilinee. Infatti tali risultati abilitano a quadrare immediatamente le parabole di qualsiasi specie, nonchè una infinità di altre curve. Se, dunque, noi estendiamo quei risultati trovati pei numeri alle quantità continue potremo enunciare la seguente regola »; è quella che oggi esprimesi mediante la formola

$$\int_0^a x^m\,dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Il lettore ben sa che questo risultato non è nuovo, chè il Cavalieri lo ha enunciato sino dal 1639 e dimostrato nel 1644 (vedi n. 318); vi giunse Pascal da sè? Per rispondere affermativamente bisognerebbe provare che egli, mentre conosceva la *Geometria indivisibilium,* ignorava l'esistenza della *Centuria di vari problemi* e le *Exercitationes geometricae sex;* ma per congegnare una siffatta dimostrazione ci mancano del tutto gli elementi.

Chiuderemo questa rapida analisi dei lavori aritmetici di Pascal notando che nel *Traité sur les ordres numériques* egli espone la genesi dei numeri figurati

$$\frac{n}{2}(n+1)\ ,\quad \frac{n}{3}\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)}{2},$$

$$\frac{n}{4}\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots;$$

è una scoperta che Fermat fece forse prima di lui (v. p. 484); ma con cavalleresca generosità verso un collega più giovane, egli non avvertì Pascal di esservi giunto sino dal 1636 e gli lasciò l'illusione della contemporaneità; il lettore non mancherà di ricordare che il senatore tolosano è andato ben più oltre, scoprendo lo splendido teorema sulla decomponibilità di qualunque numero nella somma di un certo numero di numeri poligonali.

## Gli studi di Pascal sulla cicloide e la conseguente disfida

381 - Durante una delle notti insonni prodotte dalle sofferenze fisiche che lo tormentarono per tanta parte della sua esistenza, Pascal meditò a lungo sulle proprietà della cicloide, curva di moda intorno alla metà del secolo XVII, e giunse a scoprirne proprietà ammirabili. Perchè mai egli non pensò di far noti i suoi risultati per le vie ordinarie della stampa? Sembra che allora egli progettasse una grande opera sull'ateismo e che il duca di Roanez, suo intimo amico, lo persuadesse essere opportuno che egli si assicurasse prima grande autorità sui propri eventuali avversari, dimostrando la sua superiorità su tutti i matematici del tempo, col provare che essi non erano in grado di sciogliere le questioni su cui egli era riuscito vincitore. Avendo seguìto tale suggerimento, nel giugno 1658 diede indicazione di luogo e di editore, il quale comincia come segue:

« Essendoci occupati qualche tempo fa di varie questioni concernenti la cicloide e il suo centro di gravità, si offersero al nostro spirito parecchi problemi la cui soluzione sembrava esigere un certo sforzo. Noi chiediamo queste soluzioni a tutti i geometri dell'universo e offriamo un premio a coloro che le troveranno, non già per ricompensare le loro fatiche (lungi da noi un tale pensiero!), ma come prova della nostra deferenza, e per rendere pubblico omaggio al loro merito ».

In caso d'insuccesso le risposte verrebbero date poi dal proponente; nello stesso tempo il premio di 60 pistole (circa seicento lire) fu depositato nelle mani del Carcavy, il quale fu incaricato di ricevere le risposte, fare esaminare da persone competenti quelle giunte entro il 1° ottobre 1658 e assegnare ai solutori due premi, uno di 40, l'altro di 20 pistole. I problemi proposti erano i seguenti:

I. Quadratura d'un segmento di cicloide compreso fra l'asse, un arco di curva e una parallela alla base. - II. Centro di gravità di detto segmento. - III. Volume generato dalla rotazione dello stesso attorno all'asse o alla detta parallela. - IV. Stessa questione per il volume che esso genera ruotando intorno al proprio asse. - V. Centri di gravità di detti volumi. - VI. Stesse questioni pei solidi ottenuti tagliando i precedenti con piani per l'asse.

Ora le prime quattro erano già state risolte da Roberval, il quale però, fedele alle proprie abitudini, aveva tenuti segreti i risultati ottenuti. Pascal, quando ne fu avvertito, nelle fasi successive della vertenza agì come se di quella circostanza fossero informati tutti gli eventuali concorrenti, epperò sapessero che la sfida veniva ridotta alla risoluzione delle due ultime questioni.

Che egli non fosse mosso da alcun interesse scientifico e che fin da allora si adoperasse a intorbidare le acque, risulta dal fatto che l'Huygens, il quale aveva ricevuto il cartello di sfida per il tramite dell'astronomo Ismaele Boulliaud (1605-1694), non riuscì mai a ottenere, per lo stesso mezzo, alcuni chiarimenti che giudicava necessari per decidere se o meno scendere in lizza.

382 - Il primo pubblico scritto relativo alla sfida di cui parliamo fu pubblicato in francese e in latino il 7 ottobre 1658 col titolo *Réflexions sur les conditions des prix attachés à la solution des problèmes concernant la cycloïde.* È una breve memoria di carattere polemico contro coloro che criticarono o svisarono le condizioni del concorso. nella quale va rilevata soltanto l'affermazione che le soluzioni già date da Pascal di quei problemi erano state viste da parecchi a Parigi, fra cui Carcavy, Roberval e un notaio.

Tre giorni dopo usciva, pure in francese e in latino, l'*Histoire de la roulette, appellée autrement trochoïde ou cycloïde, où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connaissance de cette ligne,* tessuto di menzogne che rendono questo scritto indegno di portare l'onorato nome di « storia », come ci apprestiamo a dimostrare con la massima imparzialità.

Comincia Pascal osservando che, quantunque la considerazione della cicloide si presenti spontaneamente a chi guarda il movimento di uno dei chiodi per solito infissi su una ruota, non se ne trova traccia presso gli antichi; il che è inesatto perchè sino da allora erano già stati versati fiumi d'inchiostro per spiegare il fatto, di apparenza paradossale, noto sotto il nome di « rota Aristotelis » appunto per ricordare che fu lo Stagirita a segnalare questo interessante oggetto di studio (1).

La sedicente *Histoire* prosegue testualmente così:

« Il compianto P. Mersenne, minimo, fu il primo a occuparsi di quella curva verso l'anno 1615, considerando il movimento delle ruote; questa è la ragione per cui egli la chiamò « la roulette ». Egli volle poi considerarne la natura e le proprietà, ma non vi riuscì... Perciò egli propose la ricerca della natura di detta linea a tutti coloro che in Europa riteneva in grado di farlo, e fra gli altri a Galileo, ma nemmeno questo vi riuscì, e tutti disperavano di conseguire lo scopo. Passarono così parecchi anni, quando nel 1634 detto Padre, vedendo che il signor de Roberval, professore di matematiche, risolveva molti grandi problemi, sperò di avere da lui le soluzioni de « la roulette ». E realmente il sig. de Roberval vi riuscì, dimostrando che la superficie de « la roulette » è tripla di quella del cerchio generatore. Fu allora che egli cominciò a chiamarla col nome greco di « trochoïde », corrispondente al nome francese di « roulette ». Egli annunciò al P. Mersenne che la sua questione era risolta e gli confidò anche essere triplo il rapporto, esigendo però che dell'area della cicloide all'area del cerchio generatore egli tenesse segreto tutto questo per un anno, durante il quale egli era padrone di proporre nuovamente quella questione a tutti i geometri. Il Padre, felice di tanto successo, scrisse a tutti eccitandoli a rispondere, aggiungendo che il sig. de Roberval lo aveva già fatto, ma senza dire in qual modo. L'anno e più essendo scorso, sembra che nessuno avesse trovata la soluzione, il Padre scrisse loro una terza volta e dichiarò al-

(1) La questione cui si allude è la seguente: Si domanda la spiegazione di questo fatto: quando due cerchi hanno lo stesso centro, la rivoluzione per ruzzolamento conduce, per il maggiore come per il minore, a rette fra loro eguali, mentre se si fanno ruzzolare indipendentemente le rette ottenute stanno fra loro come i corrispondenti diametri.

lora essere il rapporto de « la roulette » alla ruota eguale a quello di 3 a 1. Nel 1635, giovandosi di tale soccorso, si trovarono due che diedero la dimostrazione di questo enunciato; le loro soluzioni giunsero quasi contemporaneamente: una del sig. de Fermat, consigliere al Parlamento di Tolosa, l'altro del sig. Descartes, differenti fra loro e da aggiungersi a quella del sig. de Roberval: di modo che, tenendole presenti, non riesce malagevole riconoscere quella dell'autore della sfida.

« Nel 1638 il compianto sig. de Beaugrand, avendo raccolte le dimostrazioni dell'area de « la roulette », di cui possedeva parecchie copie, nonchè un metodo eccellente inventato dal sig. de Fermat per la ricerca dei massimi e minimi, inviò le une e l'altre a Galileo, senza indicarne gli autori; è vero che egli non disse chiaramente trattarsi di lavoro proprio, ma si espresse in modo che, non prestando la debita attenzione, sembrava che, soltanto per modestia, egli avesse taciuto il proprio nome; e per nascondere un po' le cose, mutò i nomi di « roulette » e « trochoïde » in quello di « cycloïde ».

« Galileo morì poco dopo e così pure il sig. de Beaugrand. Torricelli succedette a Galileo, ed essendo cadute in sua mano tutte le sue carte, vi trovò fra l'altro le dette soluzioni de « la roulette » sotto il nome di « cycloïde », scritte di mano del sig. de Beaugrand, che sembrava esserne autore, il quale essendo morto, ritenne fosse passato abbastanza tempo perchè la memoria ne fosse perduta, epperò pensò di approfittarne. Fece stampare nel 1644 il suo libro, nel quale attribuisce a Galileo quello che appartiene al P. Mersenne, cioè l'avere concepita la questione de « la roulette »; e a sè stesso quanto è di proprietà del sig. de Roberval, cioè d'averne dato per primo la soluzione... Il sig. de Roberval mosse lamento a Torricelli in una lettera che gl'indirizzò nello stesso anno; altrettanto fece, ma ancor più severamente, il P. Mersenne: quegli addusse tante prove, stampate e d'ogni specie, che l'obbligò a dichiararsi vinto e cedere quell'invenzione al sig. de Roberval, cosa che egli fece mediante lettere che si conservano, scritte in quel tempo di sua mano... Torricelli avendo subita questa piccola disgrazia e non potendo più essere riguardato da quelli che conoscevano la verità per autore della scoperta della superficie de « la roulette » e neppure di quella del volume generato dalla sua rotazione attorno alla base, dal momento che il sig. de Roberval gliele aveva già comunicate, cercò di risolvere quella relativa alla rotazione attorno all'asse. Ma, vi incontrò una grande difficoltà, trattandosi di un problema che esige una ricerca elevata, lunga e penosa. Nell'impossibilità di riuscirvi, ne inviò una soluzione approssimata, invece di quella esatta, asserendo che detto solido sta al corrispondente cilindro come 11 a 18. Ma non fu più fortunato in questa come nell'altra occasione, giacchè il sig. de Roberval, il quale ne aveva la soluzione vera e esatta, gli mostrò il suo errore e la verità. Torricelli morì poco dopo ».

383 - Scrivendo queste pagine, Pascal s'illuse di poter approfittare della circostanza che tutti gli attori di questo triste dramma erano già scesi nel sepolcro; ma non tenne conto del fatto che esistevano le loro lettere autografe, che devoti amici conservavano come reliquie ed erano

pronti a far servire alla causa della verità, come ora diremo. Prima osserviamo che il P. Mersenne fu indotto a considerare la cicloide meditando sopra la ruota d'Aristotele, ma era così lontano dal riguardare quella curva come un soggetto di ricerca, che egli la scambiò prima per una semi-ellisse, poi come costituita da archi di spirale d'Archimede; la luce fu fatta in lui da una lettera scrittagli dal Roberval il 6 luglio 1637, solo di recente scoperta e pubblicata. Quanto ai pretesi tre appelli da lui rivolti ai matematici d'Europa, non esistettero se non nella malintenzionata fantasia di chi scrisse quell'*Histoire*. Infatti l'unica esortazione allo studio di quella curva leggesi nella lettera scritta dal famoso Minimo a Descartes nel 1638. D'altra parte a Galileo il Mersenne non scrisse che tre lettere di scarsa importanza e in cui non si parla della cicloide; e il Beaugrand ebbe con Galileo relazioni ancora più superficiali, dal momento che non si conosce che una sua lettera diretta al sommo fiorentino e in cui la cicloide non compare. Che questi sia giunto da sè a questa curva, è semplicemente dichiarato in una lettera che egli scrisse al Cavalieri il 24 febbraio 1640, con le seguenti parole: « Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parve da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive, ma non fu così, benchè la differenza non sia molta » [1].

Quanto all'accusa lanciata contro Torricelli, secondo la quale egli avrebbe dovuto scendere al livello di un servo disonesto che fruga nelle tasche del padrone appena defunto per derubarlo, ci sentiamo esonerati dal dilungarci a dimostrarne l'infondatezza, dopo che un letterato contemporaneo di quel grande, Carlo Roberto Dati (n. a Firenze il 2 ottobre 1619, m. ivi l'11 gennaio 1676), frenando lo sdegno che giustamente ribollivagli in seno, scrisse, nascondendosi sotto il nome di Timauro Antiate, un nobile opuscolo ove sono esposti tutti i documenti che provano come il Torricelli sia riuscito da solo a risolvere le questioni concernenti la cicloide, con lo scopo di completare una ricerca che Galileo non era riuscito di portare a termine. Avuta notizia delle ricerche sull'argomento compiute in Francia, l'onesto faentino non esitò a riconoscere i diritti di priorità del Roberval, e solo insorse contro una pretesa accampata da questo, chiedendo una dichiarazione che trattavasi di un tema di nazionalità francese, mentre si era in presenza di un campo di studi ormai maturo per essere coltivato, al di qua o al di là delle Alpi. Questa documentatissima difesa portò alla completa assoluzione del Torricelli [2].

---

[1] Per altre anticipazioni nella scoperta della cicloide si veda G. WALLIS, *An extract of a Letter, of May* 4, 1697, *concerning the cycloid, known to Cardinal Cusanus, about the year* 1450, *and to Carolus Bovillus about the year* 1500 (Phil. Trans. R. Soc. London, 1697). A questi nomi potevasi aggiungere quello di A. Dürer per un passo di un'opera a noi nota.

[2] È cosa dolorosa il constatare come, unico fra gli storici moderni, il DUHEM siasi schierato dalla parte di Pascal, parlando dell' « étrange larcin dont il (Roberval) fu victime de la part de Torricelli » (*Les origines de la statique*, Paris, 1906, t. II, p. 205).

La pretesa *Histoire* continua con un'auto-apologia dei metodi scoperti e applicati da Pascal; seguono notizie intorno a risultati concernenti la cicloide comunicati privatamente a chi indisse la gara, cioè da R. de Sluse (esiste infatti una lettera da lui diretta a Pascal il 2 agosto 1658), Michelangelo Ricci, Huygens (in una lettera del 5 febbraio 1659 il grande olandese riconobbe poi alcuni errori commessi), Wren e il matematico a noi già noto (n. 365) la Louvère. A quest'ultimo si rimprovera a torto di avere esposte come cose proprie risultati ottenuti da Roberval, ma da questo mai dato alle stampe, mentre del Wren si vanta a ragione la scoperta della lunghezza della cicloide; si fa però noto che il fatto di essere la lunghezza totale di questa eguale al quadruplo del diametro del cerchio generatore, non appena conosciuto da Fermat e Roberval, venne subito da essi dimostrato. Eccettuato la Louvère, tutti costoro fecero comunicazioni private senza pretendere a premi (sembra che il Fermat siasi astenuto dal partecipare alla gara conoscendone i motivi extra-scientifici). I lavori dei concorrenti propriamente detti non erano stati esaminati sino al giorno (10 ottobre 1658) in cui scrivevasi quel documento; nell'attesa Pascal enuncia altre questioni congeneri, dichiarando di prorogare la chiusura del concorso alla fine del 1658, epoca in cui egli avrebbe fatti conoscere i propri lavori; fra quelle egli a ragione cita, come dotata di notevole importanza, la rettificazione delle cicloidi allungate e accorciate mediante archi di ellisse.

384 - È in data 25 novembre 1658 che apparve il *Recit de l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette, où l'on voit que ces prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la veritable solution des problèmes.* Lasciando al lettore che ne sente curiosità di leggere questo racconto per intero in una delle innumerevoli ristampe che ne furono fatte, notiamo che il giudizio venne pronunciato dal Carcavy in unione « à des personnes trèssavantes en géométrie »; chi fossero questi illustri ignoti non ci fu possibile sapere, ed è da deplorare che, giudicando essi con la maschera sul volto, abbiano diminuito il valore della sentenza. Escluse le risposte date e poi ritirate, restarono in gara soltanto il P. la Louvère e Wallis; le soluzioni da essi presentate sono criticate a fondo per concludere che sono immeritevoli del premio e che quindi le pistole depositate potevano ritornare tranquillamente nelle tasche di Pascal; si può dunque ritenere che questi aveva raggiunto lo scopo che erasi proposto, nessuno essendosi mostrato all'altezza di chi aveva indetta la gara. Ma, come era prevedibile la cosa non finì tranquillamente.

Il P. la Louvère, con cui il Pascal era stato in corrispondenza (e le lettere furono pubblicate nella più recente edizione delle *Oeuvres de Pascal*) e che probabilmente partecipò al concorso dietro consiglio del suo amico Fermat (n. 365), non potè sopportare l'accusa di plagio in danno del Roberval, colpa di cui tutto induce ritenerlo innocente; inoltre egli sosteneva che alcuni semplici errori di calcolo da lui commessi nella fretta della redazione erano peccati veniali che non meritavano i rimproveri mossi dall'anonimo autore, nella *Suite de l'histoire de la roulette où l'on voit le procédé d'une personne qui aujourd'hui*

*voulut s'attribuer l'invention des problèmes proposés su ce sujet* (1). Trattandosi di pagine che nessun contributo arrecano alla scienza, non è il caso di arrestarsi ad analizzarle, tanto più che esiste un volume pubblicato nel 1660 ove si leggono per intero e sotto forma definitiva i contributi dati dal la Louvère alla conoscenza della cicloide.

Quanto al Wallis, egli aveva ricevuto, al pari di C. Wren (2), il programma di concorso inviato da Digby (7 luglio 1658) che allora trovavasi a Parigi. Data la ristrettezza del tempo, egli dovette limitarsi a rispondere esponendo la procedura generale di risoluzione; e ciò egli fece con lettera spedita a Carcavy in data 19 agosto 1658 e registrata da un notaio di Oxford; essa giunse a Parigi il 10 settembre e comprende 55 paragrafi, a cui l'autore riserbavasi di apportare correzioni ed aggiunte; ed infatti se ne trovano in altra lettera inviata il 3 settembre di detto anno. Tutto può leggersi oggi nel suo trattato *De cycloide* pubblicato per la prima volta nel 1660 e inserito poi nella collezione delle opere complete dell'eminente matematico inglese. In calce a questo lavoro leggesi una lettera diretta all'Huygens, ove viene stigmatizzato il modo di procedere di Pascal, che viene accusato di essersi giovato di cose contenute negli scritti dei concorrenti per congegnare le soluzioni dei problemi che egli non era in grado di risolvere nel momento in cui li proponeva; la difesa dell'autore delle *Pensées* tentata dal Carcavy in una lettera inviata ad Huygens il 25 giugno 1660 non è sufficiente a condurre ad una assoluzione definitiva dell'imputato.

385 - Con l'alba del 1659 entrava in vigore l'impegno assunto da Pascal di far conoscere le soluzioni dei problemi proposti; e infatti in data 1° gennaio egli abbandonò la veste dell'anonimo, sotto cui erasi sino allora nascosto, e pubblicò *Diverses inventions en géométrie* col nome di Amos Dettonville, anagramma di Louis de Montalte, designazione da lui assunta pubblicando le *Lettres provinciales*. Sotto quel titolo sono raccolti parecchi lavori distinti su cui è necessario arrestarsi:

*a*) *Lettre de A. Dettonville a M. de Carcavy;* essa contiene un metodo generale per la ricerca dei centri di gravità, un trattato dei trilinei, altro sugli archi di cerchio, altro sui solidi circolari (figure generate dalla rotazione di un arco di cerchio attorno a una retta posta nel suo piano), finalmente il tanto atteso trattato sulla cicloide con le soluzioni dei problemi proposti nel 1658.

*b*) *Lettre de A. Dettonville a M. de Sluse,* contenente il calcolo delle dimensioni e la determinazione del centro di gravità della scala a chiocciola elicoide conoide (figura già studiata da Torricelli nel 1644), lo studio dei triangoli cilindrici e di un solido formato da una spirale attorno a un cono (maniera infelice per designare la curva posta sopra

(1) Questo scritto porta la data 12 dicembre 1658 con un Poiscritto in data 22 gennaio 1659. Esso comincia con le frasi sarcastiche: « Les matières de Géométrie sont si sérieuses d'elles mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre divertissantes ».

(2) Questi non volle partecipare alla gara, ma si occupò della cicloide con notevole successo.

un cono circolare retto che si proietta ortogonalmente sulla base secondo una spirale di Archimede.

*c*) *Lettre de A. Dettonville a M. Huygens*, contenente la rettificazione di tutte le cicloidi mediante archi di ellisse.

*d*) *Lettre de A. Dettonville a A.D.D.S.* (Auguste D. de Sanglin?), contenente la dimostrazione della eguaglianza di un arco di spirale di Archimede e di uno di parabola.

Questo semplice elenco dimostra la varietà ed importanza delle questioni trattate da Pascal, onde è da deplorare che uno stilista del valore di Pascal abbia usato un metodo di esposizione che sembra scelto, non per illuminare, ma per confondere, non per avvincere, ma per porre in fuga i lettori; chè (ed è questo un lamento mosso per primo da Huygens) Pascal si è sempre limitato a esporre in termini generali la via da lui seguita, senza portare a termine i calcoli che guidano alle proposizioni da lui semplicemente enunciate. Così, riguardo alla posizione del baricentro della superficie della semicicloide ordinaria e la rettificazione di tutte le cicloidi, si trovano negli scritti di Pascal le proposizioni preliminari e gli enunciati definitivi, ma manca quanto è necessario per dedurre questi da quelle; da tale difetto è esente soltanto il breve scritto concernente la rettificazione della spirale d'Archimede, quello cioè che nella conclusione non presenta nessuna originalità.

Esaminando a fondo i ragionamenti di Pascal, si vede che egli si serve con somma disinvoltura del metodo degli indivisibili, quale egli apprese non già nelle pagine oscure del Gesuato bolognese, ma certamente in un'opera di A. Tacquet che impareremo a conoscere nel Capitolo seguente; tradotti nel linguaggio dell'algebra, essi si manifestano nel fondo identici a molti procedimenti caratteristici del calcolo integrale. In generale va osservato che l'importanza storica dei succitati lavori è dimostrata dal fatto che fu dal loro studio che Leibniz (per sua confessione) trasse inspirazione per concepire l'analisi infinitesimale, in particolare il « triangolo differenziale » (che nasce considerando due punti consecutivi di una curva, le ordinate negli estremi e la parallela condotta da uno di essi all'asse delle ascisse), del quale egli seppe fare un uso meraviglioso.

Emerge da quanto testè dicemmo che il concorso sulla cicloide, benchè (per usare un termine sportivo) abbia dato *match nullo,* non fu sterile per la scienza, tanto in considerazione dei lavori di chi lo propose, quanto per gli sforzi compiuti da coloro che vi parteciparono. Riguardo a Pascal, se la sua gloria fu in conseguenza aumentata, la sua fama fu oscurata; la macchia che egli fece ricadere su sè stesso calunniando un uomo di specchiata onestà non più in grado di difendersi, rimarrà su di lui sinchè abbia vigore la legge morale che da secoli governa l'umanità, ammonendo riuscire vano qualunque tentativo per offuscare la verità: questa finisce sempre per rifulgere di più vivida luce, a confusione dell'incauto che s'illuse di recarle offesa.

## BIBLIOGRAFIA


POUDRA, *Oeuvres de Desargues réunies et analysées*, in-8°, due vol., Paris, 1864 (ivi leggonsi anche scritti di Bosse, Curabelle, ecc.).

*Oeuvres de Blaise Pascal publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introduction et notes* par. L. BRUNSCHVIG, P. BOUTROUX et F. GAZIER, 14 Vol., Paris, 1923-1925.

C. DE WAARD, *Une lettre inédite de Roberval du 6 Janvier 1937 contenant le premier énoncé de la cycloide* (Bulletin des sciences mathém., 1921).

*Lettera a Filaleti di* TIMAURO ANTIATE: *Della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell'argento vivo* (Firenze, 1663, ristampato al termine del Vol. I della *Opere di E. Torricelli*, ed. Loria e Vassura, Faenza, 1919).

LALOUVÈRE, *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* (Tolosa, 1660).

## CAPITOLO XXVI

# PRODROMI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

### G. di S. Vincenzo e A. Tacquet

386 - È merito sommo della scuola galileana di avere gettate le basi e fatte importanti applicazioni del metodo degli indivisibili e di avere così orientati i matematici verso l'ineluttabile necessità di perfezionare i metodi ideati da Eudosso ed Archimede per servirsi con matematico rigore del concetto d'infinito. Prove di siffatto generale orientamento del pensiero matematico si traggono dalle pagine precedenti, chè in Fermat, Descartes e specialmente in Pascal è visibile l'influenza esercitata allora dall'Italia, verso cui, sino dai tempi in cui viveva Galileo, erano volti gli sguardi dei cultori delle scienze. Ulteriori prove, non meno chiare, si traggono dallo studio delle opere di altri investigatori della stessa epoca, ai quali ora ci volgiamo, cominciando, per rispetto all'ordine cronologico, da Gregorio di S. Vincenzo.

Questi nacque a Bruges l'8 settembre 1584; dopo avere compiuto a Gand un corso sessennale di studi si recò a Roma, ove il 21 ottobre 1605 entrò nella Compagnia di Gesù; nell'eterna città rimase sino alla morte del Clavio (1612) che lo aveva carissimo, poi ritornò nel Belgio per insegnare varie materie nelle pubbliche scuole di Louvain, Bois-le-Duc, Anversa; qui ebbe come superiore il d'Aguillon (n. 310) che lo distolse dall'idea di andare missionario in Cina e lo persuase di dedicarsi invece alla matematica. Nel 1625 egli credette di avere scoperta la quadratura del circolo e ne scrisse al P. Vitelleschi, allora generale dell'ordine dei Gesuiti, e questi lo invitò a recarsi a Roma per conferire in proposito col P. Cristoforo Grinberg (n. a Hall (Tirolo) nel 1564, m. l'11 marzo 1636), noto per essere stato uno dei quattro Gesuiti che il cardinale Bellarmino consultò il 19 aprile 1611 intorno al valore del *Siderens nuncius* di Galileo, e autore di *Elementi di trigonometria* (Roma, 1630) ove si trova un valore di $\pi$ con 38 decimali. P. Gregorio partì da Louvain per l'Italia il 27 settembre 1625; le discussioni intorno alla sua pretesa scoperta si protrassero per più di due anni, senza condurre ad una conclusione, sicchè alla fine del 1627 egli rientrò in Belgio. Ma poco dopo fu inviato a Praga (la cui Università era stata affidata per la direzione alla Compagnia di Gesù): soggiorno disgraziatissimo, chè il nostro matematico, dopo avere subìto un attacco di apoplessia, smarrì buona parte dei suoi manoscritti durante l'assedio che nel 1631 quella città subì da parte delle truppe svedesi. Un suo confratello — Roderigo

Arriga — riuscì a salvarne una parte e li portò seco a Vienna; ivi si trasferì anche P. Gregorio, il quale, l'anno seguente, fu destinato a insegnare nel Collegio di Gand; dopo dieci anni di attesa riuscì a tornare in possesso di tutti i suoi manoscritti e quindi a pubblicarli; nel 1659 subì un secondo insulto apoplettico e morì il 27 gennaio 1667.

387 - L'opera che gli accorda un posto nella storia della scienza è un colossale in-f.° di circa 1250 pagine, stampato attraverso a inenarrabili difficoltà continuamente risorgenti; esso porta un duplice titolo, le cui parti cominciano una con le parole *Opus geometricum,* l'altra con le altre *Problema austriacum,* queste derivanti dal nome dato dall'autore al problema della quadratura del cerchio in onore dell'arciduca Leopoldo Guglielmo, governatore dei Paesi Bassi, a cui l'opera è dedicata. Vi si trova un grande numero di pensieri nuovi e ricerche notevoli; così un rifacimento originale dell'antica teoria delle coniche, così la definizione e lo studio di una nuova classe di curve piane di quarto ordine (le cosidette *parabole virtuali*) e l'introduzione di non meno di tre metodi di trasformazione delle figure piane, uno dei quali (« ducere planum in planum ») permise all'autore di giungere a risultati che oggi ritengonsi di pertinenza dell'analisi infinitesimale. A lui devesi la scoperta del fatto che la quadratura dell'iperbole dipende dai logaritmi e, se non la prima scoperta, almeno una nuova dimostrazione dell'eguaglianza di due archi di una parabola e di una spirale d'Archimede (v. nn. 318 e 322); notisi finalmente che dal vocabolo « exhaurire », da lui costantemente adoperato, trae origine il termine tecnico di « metodo di esaustione » tuttora di uso generale; onde l'ammirazione di Leibniz per P. Gregorio risulta pienamente giustificata. Sgraziatamente egli credette di avere risolto il più famoso problema della geometria, epperò viene equiparato ai molti che s'illusero di avere quadrato il cerchio; ora è innegabile che dei quattro metodi da lui suggeriti per raggiungere tale risultato (1), nessuno fu giudicato soddisfacente (cosa su cui avremo occasione di ritornare nel Cap. seguente); ma ciò non è sufficiente a farlo scendere al livello di tanti altri su cui la storia ha pronunciata una severa condanna. Chiudiamo osservando che egli si è provato anche a risolvere il problema della duplicazione del cubo; l'opera che egli vi ha dedicata, rinvenuta fra le sue carte, fu pubblicata dopo la sua morte da un suo devoto confratello, il P. Sarasa, a maggior gloria di lui e della Compagnia a cui aveva appartenuto.

388 - Durante il secolo XVII il Belgio diede i natali e la Compagnia di Gesù accolse nel proprio seno parecchi altri matematici di valore; già facemmo cenno (p. 432) del P. della Faille; ora dobbiamo occuparci di Andrea Tacquet. Egli nacque ad Anversa il 23 giugno 1612; il 31 ottobre 1629 entrò in quella Compagnia; insegnò prima a Louvain, poi, a partire dal 1655, nella sua città natale, ove morì il 22 dicembre 1660. La sua opera *Cylindricorum et Annularium Libri quator* pubblicata

(1) Il lettore desideroso di essere rapidamente informato intorno all'errore commesso dal dotto Padre legga le pagg. 277-280 del t. XI delle *Oeuvres complètes de* HUYGENS, dalle quali si apprende anche in che cosa consista il metodo « ducere planum in planum ».

ad Anversa negli anni 1651 e 1659, mostra in lui il discepolo di G. di S. Vincenzo; in essa il metodo degli indivisibili ricevette notevoli chiarimenti e importanti applicazioni. Uniformandosi alle norme governatrici dell'ordine a cui apparteneva, egli si affrettò ad inviare una copia della I Parte di quell'opera al Generale dell'ordine stesso, e questi gli rispose elogiandolo ed esortandolo a scrivere un Corso completo di matematiche destinato ai frequentatori delle scuole affidate a quell'ordine. Tale invito essendo stato premurosamente accettato, sino dal 1654 il Tacquet potè pubblicare l'opera intitolata *Elementa geometriae planac ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata,* il valore ed il successo della quale sono attestati dalle molte edizioni e traduzioni in varie lingue che ne furono fatte; come caratteristica notevole notiamovi una dotta introduzione storica. Due anni dopo pubblicò un altro elemento del progettato Corso intitolandolo *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata,* di cui in poco tempo furono fatte quattro edizioni. È questa la prima esposizione della materia in cui ogni proposizione e ogni regola sono accompagnate da una dimostrazione, innovazione ragionevole e importante di cui l'autore, con legittimo orgoglio, rivendicava a sè stesso la paternità. Nella stessa opera, oltre a un cenno storico intorno alla scienza dei numeri, si trova, per la prima volta in un lavoro stampato, l'espressione della somma dei termini di una progressione geometrica infinita avente $a$ per primo termine e $q < 1$ per ragione; si tratta della formola

$$\sum_0^{\infty} a\, q^n = \frac{a}{1 - q},$$

la quale viene dal Tacquet dedotta, come si fa tutt'ora, con un passaggio al limite da quello che dà la somma di un numero finito di termini di detta progressione. L'autore aggiunge: « Tu che mi leggi, vedrai, io credo, con quanta facilità si giunga a quanto ti avevo dianzi promesso: cioè il passaggio da una progressione finita alla progressione infinita. Vi è ragione di stupirsi che gli aritmetici che conoscevano il teorema relativo alle progressioni finite, abbiano ignorato quello concernente le progressioni infinite, che se ne deduce immediatamente ». Lo storico, senza nulla togliere al risultato del Tacquet, osserva che allo stesso risultato era giunto anche Fermat (v. p. 490), e che nello stesso anno lo pubblicava Giovanni Wallis nella *Arithmetica infinitorum* che presto (n. 391) impareremo a conoscere. Indiscutibile attestazione dell'alta stima che circondava il Tacquet è la pubblicazione della collezione di tutti i suoi scritti, fatta nel 1669 e rinnovata nel 1707.

## G. P. de Roberval

**389** - Quest'uomo, di cui già narrammo la vita (n. 343), incontrammo più volte come implicato nelle dispute fra matematici che ebbero luogo intorno al 1650, dispute ad accendere o alimentare le quali egli ha in parte contribuito accampando diritti di priorità sopra scoperte da lui

tenute gelosamente nascoste onde assicurarsi una superiorità su coloro che potevano contendergli la « cattedra di Ramus », il cui possesso era alla cima dei suoi pensieri; fra le accennate scoperte citiamo la quadratura delle parabole d'ordine superiore e della cicloide, che egli sostenne avere eseguita prima di Torricelli; inoltre la rettificazione di quest'ultima curva, riguardo a cui egli avrebbe antecipato il Wren, e la determinazione dell'area del triangolo sferico, che egli avrebbe calcolata prima di B. Cavalieri e A. Girard. Quella sistematica diffidenza vietò a lui — unico professore fra i partecipanti alle dispute che ebbero luogo in quel tempo — la soddisfazione di porsi alla testa di una scuola, e quando nel 1693 l'Accademia di Parigi accolse la proposta dell'abate Gallois di pubblicare fra le sue Memorie la totalità dei suoi lavori, questi apparvero come ormai sorpassati e non furono ricercati che dagli storici, ai quali essi imposero problemi spesso insolubili, perchè quei lavori mancano sempre di data.

Fra questi s'incontra anzitutto una memoria dal titolo *Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes,* nella quale è esposto e applicato il noto procedimento per costruire le tangenti alle curve piane che si chiama spesso « metodo di Roberval ». Ora, come documento storico, il valore di essa è scarso, perchè fu redatta in epoca imprecisata da un discepolo del Roberval (Francesco de Verdus) e riveduta, postillata e in certi punti anche criticata dall'autore nel 1668, prima di leggerla all'Accademia di Parigi. Però di quel metodo si trova una menzione e un'applicazione in uno scritto dato in luce dal P. Mersenne nel 1644, anno in cui il Torricelli licenziava il suo ben noto volume; ma da lettere autentiche dei due contendenti risulta che essi vi erano pervenuti parecchi anni prima, indipentemente l'uno dall'altro; sarebbe pertanto giustizia designarlo col nome di « metodo di Roberval-Torricelli », senza esagerarne il potere come fece Pascal, che nella sua *Historie de la roulette* a noi nota (v. p. 508), lo presenta come applicabile ad ogni sorta di linee piane.

A onore del Roberval va rilevato che, mentre Torricelli si limitò a servirsene per costruire le tangenti alla parabola. Roberval ne fece uso per risolvere lo stesso problema per tutte le curve note ai suoi tempi, cioè: parabola, iperbole, ellisse, concoide di Nicomede (i cui due rami sono considerati separatamente), concoide del cerchio e in particolare la lumaca di Pascal [1], spirale d'Archimede, quadratrice (curva di cui Roberval per primo considerò anche i punti esterni al quadrato generatore), cicloide (chiamata « roulette ou trochoïde de M. Roberval » e illustrata con la stessa figura che si trova nella lettera al Marsenne da noi citata nel n. 383), compagna della cicloide (sinusoide), e parabola cartesiana. Tutte le cennate costruzioni risultano come applicazioni delle considerazioni cinematiche con cui apresi la memoria e che culminano con la composizione di due velocità, mediante il parallelogrammo.

---

[1] È la concoide del cerchio nell'ipotesi che il polo giaccia sulla periferia e che l'intervallo costante sia eguale al raggio di questo; di essa viene rilevata l'applicabilità alla trisezione dell'angolo. È opinione generale che detta curva sia stata considerata per primo, non già da Biagio Pascal, ma da suo padre Stefano.

390 - A questo scritto di Roberval, che appartiene al calcolo differenziale, ne fa riscontro altro di pertinenza del calcolo integrale; è il *Traité des indivisibles*. Benchè vi si cerchi indarno il nome di Cavalieri, pure il titolo equivale a una confessione della fonte a cui l'autore ricorse; a conferma di tale derivazione sta il fatto che in una lettera scritta dal Roberval nell'ottobre 1643 in risposta ad altra di Torricelli, sono vantati i miglioramenti arrecati da lui al metodo ideato dal professore bolognese. Quando sia stato scritto il citato *Traité* non si può dire; ma poichè vi si trova la genesi della cicloide, così esso è certamente posteriore alla più volte citata lettera al P. Mersenne nel 1637. Ivi il metodo di Cavalieri è applicato alla risoluzione di parecchi problemi, i quali si seguono in un ordine che prestasi alla critica. L'autore comincia col determinare il rapporto di una circonferenza al suo diametro, per passare al calcolo dell'area di una concoide circolare; volgendosi alla stereometria, egli determina i rapporti di volume esistenti fra una sfera o uno sferoide e il cilindro circonscritto o il cono inscritto, ritrovando pro posizioni già note; più originale è la questione di descrivere sopra un cilindro retto, mediante una sola apertura di compasso, un'area di contenuto conosciuto; la curva risultante è detta, per ragioni evidenti, « ciclo-cilindrica ». Ritornando poi alla stereometria in senso stretto, vengono risolte le importanti questioni di determinare i volumi che genera una cicloide ruotando attorno alla base o alla tangente nel vertice. Chiudono il lavoro alcune considerazioni baricentriche con applicazione al conoide parabolico (paraboloide ellittico).

Alcuni dei risultati testè riferiti si ritrovano nella memoria intitolata *De trochoide ejusque spatio;* al pari degli altri scritti del Roberval manca di data, ma poichè vi si trova anche la rettificazione della cicloide ordinaria, così è probabible sia stata scritta non prima del 1658; quanto al contenuto, si direbbe che siasi in presenza di una monografia destinata a compendiare quanto allora sapevasi intorno alla celebre curva.

Senza arrestarci ad altri scritti minori facenti parte della polemica che il Roberval ebbe col Torricelli, notiamo che in tutti i suoi lavori il geometra di cui ci occupiamo non ricorre mai al calcolo algebrico. Ma che egli non sia rimasto indifferente al movimento matematico derivato dalle opere di Viète è dimostrato dagli scritti intitolati *De recognitione aequationum* e *De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione,* i quali si possono riguardare come commenti a congeneri lavori di quel Sommo, alle notazioni del quale il Roberval si attiene fedelmente; ben è vero che vi si trova il segno di eguaglianza inventato da Descartes, ma chi può farsi garante non si tratti di una alterazione apportata dall'editore nel momento della stampa?

## G. Wallis

391 - Passiamo una nuova volta la Manica per imparare a conoscere le opere principali di uno scienziato che due volte incontrammo come partecipante a matematiche disfide e di cui già conosciamo la biografia (v. n. 362). Nel 1655, sei anni dopo di avere occupata la cattedra da lui lungamente illustrata, G. Wallis pubblicò (con dedica all'Oughtred)

l'*Arithmetica infinitorum* che doveva assicurargli l'immortalità. In essa sono chiaramente visibili le traccie dell'influenza esercitata sull'autore dalla *Geometria degli indivisibili,* non già direttamente, ma per il tramite del Torricelli, del quale nel 1650 conobbe le *Opera geometrica,* mentre il suo desiderio di studiare direttamente gli scritti di Cavalieri non potè mai essere appagato per l'insipienza dei librai a cui li aveva commessi. Riconoscere quell'influenza non equivale a negare l'originalità del Wallis, il quale ha il sommo merito di avere sfruttato a vantaggio della scienza del numero i concetti che nella scuola di Galileo erano stati applicati all'investigazione delle proprietà delle figure. Si è visto che i geometri italiani (Cavalieri e Torricelli) emulando i francesi (Fermat, Descartes, Roberval) erano riusciti, con metodi più o meno rigorosi, a quadrare tutte le curve aventi equazioni della forma $y = p x^n$, $n$ essendo un numero intero positivo; ma la prima dimostrazione generale del relativo risultato è dovuta al Wallis, il quale, ragionando sopra la curva di equazione,

$$a^{n-1} y = x^n \tag{1}$$

dimostrò che l'area del triangolo avente per lati un arco di essa, contato dall'origine, l'ordinata dell'estremo e l'asse delle $x$ è espressa da

$$x^{n+1}/(n+1)\, a^{n-1};$$

il ragionamento che guida a questa conclusione è penoso, ma chi non abbia eccessive pretese di rigore, lo trova soddisfacente. Ciò va notato perchè nel seguito dell'*Arith. infin.* non s'incontrano quasi che affermazioni appoggiate ad un semplice « patet », che ricorda la frase « il est facile de voir » che forma il tormento di chi legge la *Mécanique céleste* di Laplace; a gloria dell'autore va rilevato che quelle affermazioni si riconobbero poi pienamente conformi al vero. Esse si riferiscono alla quadratura delle curve le cui equazioni nascono dalla (1) supponendo che $n$ sia numero frazionario, negativo e persino irrazionale. Durante gli sforzi compiuti per conseguire lo scopo, il Wallis si è imbattuto in fenomeni che lo posero in serio imbarazzo, i quali si presentano quando il denominatore $n + 1$ della surriferita espressione risulti nullo o negativo; se anche egli non riuscì a spiegare i risultanti paradossi, ha però il merito di avere per primo manifestato l'aspirazione di far assumere alle formole algebriche incondizionata validità. Per quanto notevoli siano queste pagine dell'*Arithmetica infinitorum* (notevoli se non altro perchè mostrano nell'autore un'idea chiara del concetto di « limite »), pure la più splendida gemma che essa presenta consiste nella seguente formola da lui scoperta per rettificare la circonferenza (servendosi di ardite generalizzazioni e di non rigorose interpolazioni)

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}; \tag{2}$$

essa, al pari di quella di Viète (n. 282), fa parte delle rettificazioni che chiamammo analitiche e ha confermata l'utilità di introdurre metodica-

mente nell'analisi i prodotti d'infiniti fattori. Non meno notevole del risultato surriferito è il metodo che vi condusse il Wallis; esso riposa sulla considerazione delle infinite curve

$$y = (1 - x^2)^0 \quad , \quad y = (1 - x^2)^1 \quad , \quad y = (1 - x^2)^2 \quad , \quad y = (1 - x^2)^3 \quad , \ldots$$

e sull'osservazione che il cerchio $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ si presenta come elemento intermedio fra la prima e la seconda, onde alla sua area si può giungere, e effettivamente il Wallis vi arrivò, mediante interpolazione.

Il Brouncker, invitato dal Wallis a cercare qualche altra espressione infinita di $\pi$, ottenne quest'altra ancor più notevole

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \ldots}}}} \; ; \qquad (3)$$

diciamo più notevole in quanto essa valse mostrare che le frazioni continue erano chiamate a rappresentare nell'analisi una parte ben più importante di quella assegnata loro dal Cataldi, loro primo inventore (v. n. 299). La formula (3) oltrechè notevolissima in sè, lo è anche per essere avvolta in completa oscurità, essendo ignota la via che condusse alla scoperta di essa.

392 - Quanto testè dicemmo intorno all'*Arith. infin.* è sufficiente a porre in luce la singolare perizia del Wallis nel trattare coi metodi del suo tempo le questioni concernenti il calcolo delle aree piane; onde è ben naturale che, quando il 17 giugno 1658 egli ricevette dal Digby il cartello della sfida lanciata da Pascal, egli non abbia esitato a raccogliere il guanto venuto da Parigi. Non ritorneremo sopra gli episodi di quel cortese certame; solo insistiamo sul fatto che chi voglia, prima di giudicare, uniformarsi alla massima « audiatur altera pars », non ha che ricorrere alla prefazione dell'opuscolo che l'eminente professore dell'Università di Oxford pubblicò nel 1659 per far conoscere le proprie ricerche sopra la cicloide ed altre curve. Ivi si trovano, oltre a quanto egli inviò a Parigi sotto la veste del concorrente e in forma migliorata, altre pagine relative alla rettificazione e alla costruzione delle tangenti di quella curva; queste però furono scritte, non dal Wallis, ma da un suo amico di cui già facemmo fugace menzione: Cristoforo Wren. Questi nacque nei pressi di Tisbury il 20 ottobre 1632; nelle scuole di Westminster si rivelò di ingegno vivacissimo; passato all'Università di Oxford vi conseguì i gradi di B. A. (1650) e di M. A. (1653) e subito dopo venne aggregato al All Soul College di quella città. Nel 1657 fu chiamato a insegnare nel Gresham College di Londra; dal 5 febbraio 1660 al 9 marzo 1673 occupò la cattedra saviliana dell'Università di Oxford; da questo momento si dedicò completamente alla professione d'ingegnere. Ad essa egli era stato chiamato dal governo inglese sino dal 1661,

ma la sua azione si manifestò in tutta la sua grandiosità quando ebbe l'incarico di riparare ai danni cagionati dall'incendio che distrusse tanta parte di Londra nei giorni 2-8 settembre 1666; fu allora che egli, fra altro, arricchì la sua patria della celebre cattedrale di S. Paolo. Il Wren, che era stato largamente favorito dagli Stuart, perdette ogni credito all'avvento della casa di Hannover; morì il 25 febbraio 1723, lasciando ricordo di sè come quello di una personalità che ebbe aperte dinnanzi a sè varie strade e che mostrossi in grado di percorrerle tutte gloriosamente.

393 - Ritorniamo al Wallis per notare come egli, nel pubblicare le ricerche sulla cicloide sua e del Wren, vi allegò la risposta da lui data all'Huygens, il quale gli aveva proposto di applicare i metodi dell'*Arith. infin.* alla quadratura della cissoide. Aggiunse di avere dimostrato essere infinita l'area compresa fra la concoide esterna e la propria base, mentre risulta finito il volume che essa genera rotando intorno alla base stessa. Egli poi fece noto che un giovane diciannovenne era riuscito, senza avere notizia degli studi di Fermat — questo lo osserviamo noi — a rettificare la parabola semicubica: si tratta di Guglielmo Neil (o Neile), nato a York nel 1637 da cospicua famiglia, morto nel fiore degli anni (24 agosto 1670), quando già era stato eletto membro tanto della Società Reale quanto del Consiglio privato di Carlo II. Quella notevole prerogativa di detta curva si trova non soltanto enunciata, ma anche dimostrata nel citato scritto del Wallis.

Una parte di quanto contiene lo scritto *De cycloide ejusque spatio* trovasi, sotto forma lievemente diversa, anche nella II Parte del trattato di *Meccanica* dato in luce dal Wallis nel 1670, il che non deve stupire perchè questa in generale tratta della determinazione dei baricentri. Ivi si trova anche il grafico della funzione sec $x$ e notizia di un'altra scoperta importante fatta dal Wren: cioè il teorema secondo cui la figura generata dalla rotazione di una retta attorno a un asse che non l'incontra non differisce da quella che nasce facendo girare un'iperbole attorno all'asse immaginario (si tratta dell'iperboloide a una falda di rotazione, in cui, pertanto, il Wren ha per primo rilevata la presenza di $\infty^1$ rette).

## R. de Sluse

394 - Nelle innumerevoli lettere che si scambiarono le più eminenti personalità del secolo XVII s'incontra assai spesso nella firma, nell'indirizzo o nel testo il nome del matematico belga Renato de Sluse. Egli nacque a Vixé il 2 luglio 1622 da famiglia, non nobile, ma distinta, dalla quale egli fu destinato allo stato ecclesiastico. Negli anni 1638-1642 studiò all'Università di Louvain, passò poi a Roma e l'8 ottobre 1643 conseguì alla Sapienza il grado di dottore in giurisprudenza. Continuò a restare in Italia e, poichè alternò gli studi delle scienze con quello delle lingue, salì in breve in fama di dotto orientalista. Un decreto papale dell'8 ottobre 1650 lo restituì in patria col grado di canonico di una chiesa di Liegi; ma egli del suo lungo soggiorno in Italia serbò il

più grato ricordo e mantenne amichevoli relazioni con studiosi italiani del tempo, fra cui basti ricordare Michelangelo Ricci. Le varie cariche che gli furono conferite dai suoi estimatori gli tolsero di occuparsi esclusivamente alla scienza, ma alla geometria ritornò di quando in quando sino al termine della sua esistenza (19 marzo 1685). Modesto e alieno dalle pubblicazioni, per conoscere molti dei suoi trovati fa mestieri ricorrere alle sue lettere; ma, anche così facendo, il quadro risulta forzatamente incompleto perchè non furono peranco esplorati, e tanto meno dati alle stampe, i suoi numerosi manoscritti esistenti nella Biblioteca Nazionale di Parigi.

395 - L'unica opera da lui data alle stampe ha per titolo *Mesolabio*, avendo per punto di partenza il problema di Delo, che Eratostene da Cirene (vedi pag. 68) sciolse meccanicamente con un apparecchio di quel nome. De Sluse lo risolse invece mediante un cerchio e una conica; poi estese la ricerca alla trisezione dell'angolo e in genere ai problemi solidi. Il favore con cui quest'opera fu accolta lo incoraggiò a una seconda edizione; in essa egli inserì i risultati delle ricerche da lui compiute nel periodo 1659-1668, le quali vertono (oltrechè su alcuni problemi di Diofanto) sopra la costruzione delle tangenti e il calcolo delle aree; tali ricerche lo avrebbero posto in grado di risolvere le questioni proposte da Pascal, ma come sappiamo (v. n. 383), egli si limitò a comunicare a lui privatamente le fatte osservazioni. Riguardo al metodo di costruzione delle tangenti, sembra che in origine de Sluse ricorresse a considerazioni cinematiche del genere di quelle usate da Torricelli, da lui apprese durante il soggiorno in Italia. In seguito, concentrando la sua attenzione sopra le curve algebriche, il suo atteggiamento subì una profonda metamorfosi, grazie a cui giunse a risultati che, dietro richiesta, comunicò all'Oldenburg, mediante una lettera che fu pubblicata nelle *Philosophical Transactions* del 1672 e che certamente non fu estranea alla sua elezione (16 aprile 1674) a membro della Società Reale di Londra. Il principale dei citati risultati consiste in un procedimento per trovare le tangenti delle curve algebriche, il quale può intendersi come un complemento a quello che vedremo (n. 401) suggerito dal Barrow, chè, come questo, riposa sulla considerazione della sottotangente. Ora, se la curva considerata è rappresentata dall'equazione

$$f(x, y) \equiv \Sigma a_{ik} x^i y^k = 0 ,$$

la sottotangente è espressa da $y \dfrac{\partial f}{\partial y} \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial x}$, onde tutta la difficoltà si concentra sul calcolo di queste derivate; a tale scopo de Sluse stabilisce come lemma la relazione

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2} x + \ldots + x_1 x^{m-2} + x^{m-1} ,$$

il cui secondo membro comprende $m$ termini e tende a $m x^{m-1}$ quando $x_1$ si accosta indefinitamente a $x$, ed osserva che la differenza $f(x_1, y_1)$ —

$-f(x, y)$ si può considerare come somma di termini decomponibili in prodotti della forma $x_1^i - x^i$, $y_1^k - y^k$; dalla combinazione di queste varie osservazioni risulta il procedimento slusiano per calcolare le due derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

396 - Nell'intento di accrescere il numero di curve su cui sperimentare detto procedimento, il de Sluse ha introdotta nella scienza una nuova categoria di curve che possono riguardarsi come generalizzazioni delle coniche; sono le *perle*, curve aventi per equazione generale $y^p = k(x-a)^m x^n$, di cui è caso particolare l'altra $y^p = (x-a)x^p/a^p$; ad esse sono dedicate molte pagine del carteggio del dotto prelato, le quali sono degne di attento studio da parte dello storico non foss'altro perchè permettono di misurare le difficoltà che s'incontravano allora a delineare esattamente una curva di data equazione, prima che fossero state fatte rigorose convenzioni riguardo al segno da attribuire alle coordinate. Chiudiamo questi cenni con la menzione di un'altra curva a cui il nostro autore ha legato il proprio nome; è la concoide luogo dei punti $P$ definiti come segue: dato un punto $O$ e una retta $r$, si chiami $M$ l'intersezione di questa con una trasversale condotta per $O$ e si porti sulla stessa a partire da questo dalla parte opposta di $O$ un segmento $MP$, tale che risulti $OM \cdot MP = k^2$. Siccome la curva ottenuta ha $O$ per punto isolato, così, unendosi alla cartesiana (cubica nodata) e alla cissoide di Diocle (cubica cuspidata), completa la terna dei tipi delle cubiche razionali.

## S. degli Angeli e P. Mengoli

397 - Stefano degli Angeli nacque a Venezia il 23 settembre 1623; entrato nell'Ordine dei Gesuati vi si distinse talmente che a soli ventun anni fu eletto professore di filosofia nel collegio che esso Ordine teneva a Ferrara. Trasferitosi poco dopo a Bologna per sfuggire i miasmi ferraresi, si applicò allo studio della matematica sotto la direzione di B. Cavalieri e con tanto successo che, alla morte di lui, gli fu offerto di prenderne il posto. Per modestia rifiutò e si trasferì a Roma, ove continuò gli studi, come risulta dalle date delle sue prime pubblicazioni. Nella città natale ritornò rivestito d'importanti cariche ecclesiastiche; nel 1662 ottenne la cattedra di matematica nell'Università di Padova e la conservò sino alla morte (11 ottobre 1697).

Con le sue numerose pubblicazioni egli sembra essersi proposto di completare le ricerche lasciate in tronco dalla morte di Cavalieri e Torricelli; in particolare con le pubblicazioni relative a le parabole, le iperboli, le spirali, ecc., egli svolse il programma dell'opera *De lineis novis* che il sommo faentino aveva progettata (v. p. 431) nell'ultimo periodo della sua vita. Malgrado i pregi di tali lavori, essi non esercitarono notevole influenza perchè, quando furono pubblicati, apparvero ormai sorpassati; i geometri erano ormai assillati dalla brama di metodi generali, onde trovarono di scarso interesse le applicazioni di procedimenti,

di cui cominciavano a misurarsi le manchevolezze, a problemi di cui udivano parlare da circa un mezzo secolo. Tuttavia lo storico riconosce all'assiduo investigatore il merito di avere, con Michelangelo Ricci, degnamente proseguite le tradizioni dei discepoli di Galileo.

398 - Più spiccata originalità manifestò un altro discepolo del Cavalieri, Pietro Mengoli, a cui una sorte nemica vietò di raggiungere quella generale considerazione a cui davangli diritto le sue opere. Nato a Bologna, si laureò prima (1650) in filosofia, poi (1653) in entrambe le leggi, ma, subendo l'influenza che il Cavalieri esercitava anche dalla tomba, si dedicò interamente alla matematica e vestì l'abito da prete. Il Senato di Bologna gli conferì una cattedra nel patrio Ateneo, ed egli l'occupò degnamente sino al giorno (7 giugno 1686) in cui morì sessantenne. Le sue pubblicazioni sono numerose; quelle che c'interessano contengono risultati nuovi e importanti, ma, per essere scritte oscuramente e col mezzo di notazioni inusitate, trovarono scarsi lettori e non tardarono a cadere in completa dimenticanza; limiti di spazio ci obbligano a segnalare soltanto alcune delle cose pregevoli che vi si trovano.

La principale delle sue opere porta il titolo *Novae quadraturae arithmeticae*; vi si leggono importanti osservazioni sopra le serie; ne riferiremo le migliori.

Il Mengoli segnala l'importanza che hanno le serie il cui termine generale tende a zero; che non siano tutte convergenti è provato dalla serie (armonica)

$$1/2\ ,\quad 1/3\ ,\quad 1/4\ , \ldots ,$$

la quale viene dimostrato avere una somma infinita. Nelle stesse condizioni si trova naturalmente quella che se ne deduce sopprimendone alcuni dei primi termini; da ciò può dedursi che è divergente anche la serie i cui termini sono gli inversi di quelli di una progressione aritmetica di ragione $r > 1$. Si ha infatti

$$\frac{1}{a+nr} : \frac{1}{a+n} = \frac{a+n}{a+nr} = \frac{\dfrac{a}{n}+1}{\dfrac{a}{n}+r} > \frac{1}{r}$$

cioè

$$\frac{1}{a+nr} > \frac{1}{r}\,\frac{1}{a+n},$$

e poichè (v. sopra) è divergente la serie avente per termine generale $1/(a+n)$, che nasce cancellando alcuni termini della serie armonica, così si conclude secondo l'enunciato.

Il Mengoli calcola esattamente la somma (= 1) dei reciproci dei numeri triangolari e tenta di fare altrettanto per la somma degli inversi dei numeri quadrati, ma lascia ad Euler la gloria di toccare la mèta; riesce invece a sommare le serie il cui termine generale è $1/(n^2 + k\,n)$.

399 - L'altro scritto del Mengoli, avendo per titolo *Circolo* lo fece a torto annoverare fra i pretesi quadratori del cerchio, mentre egli ha la gloria di avere scoperta, sia pure cinque anni dopo il Wallis, ma indipendentemente da lui, l'espressione di $\pi$ in prodotto d'infiniti fattori (v. p. 521).

Indiscutibile novità presenta la teoria dei logaritmi da lui fatta conoscere nella sua *Geometria speciosa.* Ivi egli parte dalla considerazione delle due successioni seguenti:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\,,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\,,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}\,,\quad \ldots;$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\,,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\,,$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n}\,,\quad \ldots$$

e ne chiama gli elementi rispettivamente *iperlogaritmi* e *ipologaritmi* di $n$, mentre dà il nome di *logaritmo* all'unica quantità che sia maggiore di tutti i secondi e minore di tutti i primi. Ne deduce anzitutto la proprietà caratteristica

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n}\,;$$

ma, ciò che è ben più importante, ottiene per primo lo sviluppo in serie dei logaritmi, mediante la formola

$$\log \frac{m}{n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{s=m} \frac{1}{rm+s} - \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{rn+s} \right\},$$

donde in particolare

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

che vedremo (v. p. 529) trovata poi dal Mercator e dal Brouncker. La stessa opera mostra che il Mengoli aveva un'idea chiara del concetto di « limite » e ne seppe trarre conseguenze che egli chiama, non a torto, inaudite.

Non possiamo arrestarci su altre opere sue minori; ma ci sembra che il fin qui detto basti a dimsotrare che a lui spetta un posto cospicuo fra i precursori di Newton e Leibniz; alcuni anzi pensano che su questo egli abbia esercitata qualche influenza; ciò che è certo si è che alcune sue opere furono note al grande matematico tedesco.

## I. Barrow, N. Mercatore, G. e D. Gregory

400 - Ritorniamo una nuova volta in Inghilterra per segnalare altre prove d'influenza italiana. Ce ne porge anzitutto Isacco Barrow. Egli nacque a Londra nel 1630; a tredici anni s'inscrisse nel St. Peter's College di Cambridge, ove nel 1652 conseguì il grado di M. A. Le sue opinioni realiste gil resero ostico il soggiorno in patria, onde durante gli anni 1655-59 peregrinò per tutta Europa, visitò l'Italia, venendo così in contatto con gli ultimi discepoli di Galileo, e si spinse sino a Costantinopoli. Rimpatriato prese gli ordini sacri e, dopo la Restaurazione, ottenne cariche e onori. Per tutta la sua vita oscillò fra le scienze fisico-matematiche e la teologia, nella convinzione che « per fare un buon teologo fosse necessario conoscere la cronologia, ma questa implica l'astronomia, che a sua volta si fonda sopra le matematiche ». Nell'Università di Cambridge insegnò il greco e nel Collegio Gresham di Londra le matematiche; nel 1663 fu chiamato a occupare per primo la cattedra lucasiana di matematica in quell'Ateneo; la cedette poi a un eminente discepolo (v. n. 430) e allora si dedicò totalmente alla teologia, nella quale conseguì un'autorità che non aveva potuto raggiungere in matematica; fu cappellano di Carlo II e morì il 4 maggio 1677.

Nel momento d'intraprendere il lungo viaggio suindicato il Barrow consegnò al tipografo un'edizione di Euclide più completa di quella del Tacquet in quanto comprende anche i Libri aritmetici (VII-X); traendo ispirazione dall'Hérigone (v. n. 339) per raggiungere maggiore coincisione, egli pensò di esporre tutta la materia mediante simboli opportuni, ma, in luogo di usare quelli introdotti dal citato matematico francese, adottò quelli dell'Oughtred come più famigliari ai suoi compatriotti. Proseguendo poi nella missione di diffondere nella sua terra i capilavori del genio greco, curò più tardi pregevoli edizioni di Archimede, Apollonio e Teodosio.

401 - Come matematico originale il Barrow è conosciuto per tre serie di lezioni da lui tenute in qualità di professore lucasiano, una di ottica geometrica (riguardo alla quale ci limiteremo a notare che, prima della stampa, fu riveduta da Newton), le altre di pura geometria.

Quella di più antica data si apre con un discorso in lode di Enrico Lucas, il munifico signore che, morendo, destinò i propri beni a istituire una cattedra di matematica nell'Università di Cambridge. Le seguenti lezioni si direbbero (e forse furono) modellate sul *Commento* di Proclo agli *Elementi* di Euclide (v. n. 64), giacchè ivi il Barrow si dilunga a discutere il significato del vocabolo matematica, esamina lo scopo di questa scienza, ne descrive le parti, le origini, e l'evoluzione storica; dato il carattere filosofico del corso è ben naturale che molte pagine siano consacrate alla teoria euclidea dei rapporti e delle proporzioni. A lode del Barrow va notato che egli dà prova di conoscere, non soltanto gli antichi matematici, ma anche i moderni che se ne fecero editori o commentatori, e ne discute acutamente le opinioni. Come chiusa si trova

un tentativo di divinazione della via che condusse Archimede ai risultati esposti nei suoi libri sulla ***Misura del cerchio*** e ***Su la sfera e il cilindro***.

**Più elevato è il tema della seconda serie delle lezioni del Barrow, giacchè vi si tratta delle proprietà delle curve piane, ed è precisamente il metodo ivi esposto per costruire le tangenti che gli fa accordare un posto nella preistoria dell'analisi infinitesimale. Tale metodo, alla cui scoperta non rimasero estranee le considerazioni cinematiche di Torricelli e Robenvald, ha per sostegno la considerazione del « triangolo caratteristico » (formato da un arco infinitesimo di una curva e dalle parallele agli assi condotte per i suoi estremi) e della sottotangente (cioè di quella quantità che, a meno del segno, è espressa da $y\,dx/dy$). Per calcolarla, nell'ipotesi che della curva conoscasi l'equazione $f(x, y) = 0$ il Barrow svolge secondo le potenze di $h$ e $k$ l'espressione $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ e ne trascura tutti i termini che contengono i prodotti e le potenze di $h$ e $k$; eguagliando a zero il risultato ne trae il rapporto $h/k$ e così giunge alla cercata funzione di $x$ e $y$. Questo metodo viene applicato pirma alla curva di equazione**

$$(1) \qquad x^4 + x^2 y^2 = r^2 y^2 \quad (\text{« kappa » dei moderni}),$$

e poi alle seguenti:

$$x^3 + y^3 = r^3, \quad x^3 + y^3 = r\,x\,y \quad (\text{« la galande »}), \quad y = r \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2 r},$$

nè mancnao cenni intorno alla cicloide, la curva allora di moda. Il Barrow, mentre mostra una preferenza per i metodi antichi, dà prova di conoscere la geometria di Descartes, di cui però non adottò le notazioni. Nessun interesse egli dimostra per la forma delle linee su cui ragiona, come risulta dalla figura che dovrebbe illustrare la curva (1), figura la quale mostra che egli non aveva la più lontana idea della singolarità (un tacnodo) che essa ha nell'origine.

402 - Grande e benefica fu l'influenza esercitata in Inghilterra e altrove dall'*Arith. infin.* del Wallis [1], come è dimostrato dagli scritti di Nicolò Mercatore (da non confondersi col Gherardo, il celebre cartografo); questi, che alla nascita portava il nome di Kaufmann, nacque nell'Holstein, studiò a Kopenhagen e poi si trasferì a Londra. Si svolse allora il più brillante periodo della sua carriera scientifica, chè allora diede in luce la principale delle sue opere, la *Logarithmotechnia*, la quale gli aperse le porte della Società Reale di Londra. In seguito passò ai servigi del governo francese, e morì a Parigi nel mese di febbraio del 1687.

È suo merito di avere proposto un nuovo metodo per calcolare i logaritmi, basato sulla teoria delle serie e di cui è dovere nostro far cenno. G. di S. Vincenzo aveva poco prima dimostrato che da essi dipende la quadratura dell'iperbole; d'altra parte la quadratura delle parabole

(1) In Francia fu commentata dal Boulliand (vedi p. 507).

equivale al teorema espresso dalla formola

$$\int_0^1 x^m\,d\,x = 1/(m+1).$$

Ciò premesso, se si scrive l'equazione dell'iperbole equilatera sotto la forma $y = 1/(1 + x)$ (ed è questa un'idea semplice quanto geniale del Mercator) l'area ne è data da $\int_0^1 \frac{d\,x}{1+x}$; ora vedemmo che era già stata calcolata la somma di una progressione geometrica infinita, onde sapevasi essere

$$1/(1 + x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + \dots;$$

da ciò si conclude essere

$$\int_0^x \frac{d\,x}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)\,d\,x$$

cioè (v. sopra)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{1}$$

Se anche questa relazione non si trova esplicitamente in Mercator, pure le applicazioni da lui fattene mostrano che egli ne era in possesso, cosicchè è giustificato il nome di *Serie di Mercator* dato comunemente a quella in cui svolgesi $\log(1 + x)$.

Ora se nella (1) si suppone in particolare $x = 1$ si ottiene (cfr. p. 526)

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

e se ivi si eseguisce la somma dei termini $(2n - 1)^{mo}$ e $2n^{mo}$ si trova

$$\log 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots,$$

notevole risultato a cui Lord Brouncker giunse indipendentemente dal Mercatore e che pubblicò l'anno stesso in cui vide per la prima volta la luce la *Logarithmotecnia*. La teoria delle serie andava dunque di giorno in giorno acquistando maggiore importanza; stiamo per averne nuove prove!

403 - Giacomo Gregory nacque nei pressi di Aberdeen nel novembre 1638; si fece conoscere favorevolmente nel mondo scientifico inventando, quando aveva ventitrè anni, un cannocchiale a riflessione, di cui diede la descrizione nel volume *De optica promta* (Londra, 1663). Si recò poi a Padova, ove allora insegnava S. degli Angeli, e così prese cognizione diretta delle opere degli epigoni di Galileo (di M. A. Ricci egli parla con

grande stima in una lettera al Collins del 26 marzo 1668) [1]; presso di noi rimase nel periodo 1664-1667 e a Padova e Venezia fece stampare le due edizioni (con titoli differenti) della sua più importante opera geometrica. Rimpatriato, fu eletto membro della Società Reale (11 giugno 1668), pubblicò un altro pregevole volume e fu chiamato a insegnare nell'Università di St. Andrew. In data 3 luglio 1687 ebbe una cattedra nell'Università di Edimburgo; morì nel seguente mese di ottobre, pochi giorni dopo di aver perduta la vista durante un'osservazione astronomica. Dell'importante carteggio da lui tenuto col Collins (oggi dato alle stampe) ebbe comunicazione Leibniz (v. una lettera del 26 giugno 1676), il quale aveva manifestato all'Oldenburg il desiderio di conoscere quanto esso racchiudeva di notevole dal punto di vista scientifico.

L'opera pubblicata in Italia dal Gregory ha per precipuo scopo di misurare l'area del circolo; a tale scopo egli prese le mosse da due relazioni che intercedono fra le aree $S_n$, $\Sigma_n$, $S_{2n}$, $\Sigma_{2n}$ di quattro poligoni regolari inscritti e circoscritti ad un cerchio di raggio $r$ e rispettivamente di $n$ e $2n$ lati. Posto per brevità $\omega = \frac{\pi}{2n}$ si ha:

$$S_n = n \cdot r^2 \operatorname{sen} \omega \cdot \cos \cdot \omega \quad , \quad S_{2n} = n\, r^2 \operatorname{sen} \omega$$
$$\Sigma_n = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \omega \quad , \quad \Sigma_{2n} = 2\, n\, r^2 \operatorname{tg} \omega/2$$

e queste dànno le citate relazioni:

$$S_{2n} = \sqrt{S_n \Sigma_n} \quad , \quad \frac{2}{\Sigma_{2n}} = \frac{1}{\Sigma_n} + \frac{1}{S_{2n}} .$$

Ora, a differenza di tanti anteriori e posteriori pretesi quadratori del cerchio, il Gregory, invece di sforzarsi di giungere a una mèta irraggiungibile, ha tentato di dimostrare che l'area di un cerchio non si può esprimere in funzione algebrica del raggio. Il ragionamento da lui congegnato è oscuro e non pienamente convincente; lo notò l'Huygens nel *Journal des Scavants* e il Gregory vi rispose nelle *Philosophical Transactions* [2]; comunque si voglia giudicare questa controversia, è merito indiscutibile dell'eminente matematico inglese di avere proiettato un raggio di luce in un campo in cui la generalità dei matematici del suo

[1] Da lui egli apprese essere inverse l'una dell'altra le due operazioni: tracciamento delle tangenti (differenziazione) e calcolo delle aree (integrazione).

[2] Il lettore desideroso di conoscere i particolari di questa controversia, su cui noi non possiamo arrestarci, li troverà nel t. VII delle *Oeuvres complètes* di Huygens; nel corso di essa il Gregory stabilì (cfr. una lettera del Collins del 7 marzo 1670) la seguente espressione dell'area di un cerchio di raggio $r$

$$\frac{4\, r^3}{2\, d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90\, d} - \frac{e^3}{756\, d^2} - \frac{23\, e^4}{113400\, d^3} - \frac{260\, e^5}{7484400\, d^4} - \ldots} ,$$

ove $d$ è la metà del lato del quadrato inscritto ed $e$ la differenza fra il lato stesso e il raggio $r$; l'Oldenburg richiamò su di essa l'attenzione di Leibniz (lettera del 15 aprile 1675).

tempo andava continuamente brancolando e di avere divinata una conclusione a cui si giunse molti secoli dopo; il suo scritto offre poi il primo esempio di ricerche aritmetiche sopra $\pi$.

Il Gregory usò le serie con singolare perizia, e per primo ne considerò e denominò la *convergenza;* egli scoperse gli sviluppi in serie del seno e coseno e delle loro funzioni inverse; in particolare, a ragione viene dato il suo nome alla serie seguente che esprime la lunghezza d'un arco in funzione della sua tangente trigonometrica.

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \ldots$$

Di un suo metodo per integrare tutte le funzioni della forma $y = bx^r (x^n + a)^m$ trovavasi notizia in una lettera scritta da Huygens al marchese de l'Hôpital; al quale conferma che il Gregory avrebbe potuto far compiere all'analisi molto notevoli progressi ove la morte non lo avesse ghermito non ancora quarantenne.

Questo lusinghiero apprezzamento ha trovato una luminosa conferma dalla recente pubblicazione di tutte le pagine da lui scritte e rimaste per lungo tempo in non onorata sepoltura, nonchè dalle numerose lettere da lui scambiate con i matematici del suo tempo. A tacer d'altro è risultato che mentre egli veniva sinora riguardato esclusivamente come eminente cultore dell'analisi, egli si occupò con successo della teoria delle equazioni e di quella dei numeri; infatti algebrici sono i suoi studi sulla risoluzione delle equazioni e sull'eliminazione, mentre all'aritmetica superiore appartengono i contributi da lui dati a questioni che Fermat aveva allora poste all'ordine del giorno. Riguardo a questi problemi e su altri soggetti, egli potrebbe accampare dei diritti di priorità di fronte a suoi illustri conterranei.

404 - I numerosi manoscritti da lui lasciati inediti passarono nelle mani di suo nipote Davide (n. a Aberdeen il 24 giugno 1661), che gli succedette nella cattedra. Lo studio di quei lavori suggerì a D. Gregory nuove applicazioni degli sviluppi in serie e le espose nelle sue *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum*. Entusiasta di Newton, per primo scelse i *Principia* come tema di lezioni universitarie. Venuto a Londra nel 1691, strinse amichevoli rapporti con quel Grande, al cui appoggio egli dovette la cattedra saviliana dell'Università di Cambridge. Oltre alcuni articoli (in parte postumi) pubblicati nelle *Philosophical Transactions,* contenenti applicazioni dei nuovi calcoli a problemi allora di moda (catenaria, enigma fiorentino, orbite planetarie, ecc.), va di lui ricordata con lode una monumentale edizione di Euclide (1703); doveva ad essa seguirne una analoga di Apollonio, ma la morte che lo colse non ancora cinquantenne (10 ottobre 1708) lo obbligò a lasciare all'Halley la gloria di portare a termine questa grande impresa.

## BIBLIOGRAFIA

GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Antwerp., 1647).

GREGORIUS A SANCTO VINCENTIO, *Opus geometricum posthumum ad mesolabum, per rationum proportionabilium novas proprietates* (Gandavi, 1668).

A. TACQUET, *Opera mathematica*, 2 Vol. (Antwerpiae, 1669, 1707).

*Ouvrages de* M. DE ROBERVAL (Mém. de l'Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, Paris, 1730).

JOHANNIS WALLIS, *Opera mathematica*, Oxoniae, 1695-1699. (Il Vol. I contiene: *Oratio inauguralis. Mathesis universalis; seu Opus arithmeticum, philologice et mathematice traditum. Arithmeticam numerosam et speciosam, aliaque continens*, 1657 (1). *Adversus Marci Meibomii De proportionibus Dialogum, tractatus elenchticus*, 1656. *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus*, 1655. *Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata*, 1655. *Tractatus duo, Prior, de cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, epistolaris in quo agitur de cissoide et corporibus inde genitis et de curvarum tum linearum* εὐδύνσει, *tum superficierum* πλατυσμῷ 1659. *Mechanica: sive de motu tractatus geometricus:* Pars I, 1669; Pars II, 1670; Pars III, 1671. Il Vol. II contiene: *De Algebra tractatus, historicus et practicus. De combinationibus, alternationibus et partibus aliquotis*, 1685. *De sectionibus angularibus tractatus*, 1685. *De angulo contactus et semicirculi tractatus, anno* 1656 *editus, ejusque defensio edita anno* 1685. *De postulato quinto et definitione quinta Lib.* 6 *Euclidis, Disceptatio geometrica. Cono-cuneus seu corpus partim cuneum repraesentans, geometrice consideratum, anno* 1685 *anglice editum. Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nauper habitum anno* 1658 *primo editum. Trigonometria plana et sphaerica authore* JOH. CASWELL. Il Vol. III contiene: PTOLOMAEI, *Harmonicorum;* PORPHIRIUM *in Harmonica Ptolemaei Commentarius.* ARCHIMEDIS, *Arenarius, Dimensio circuli.* EUTOCII *in Archimedis Commentariis.* ARISTARCHI, *De magnitudinibus et distantia solis et lunae.* PAPPI ALEX., *Libri secundi Coll. Math. Epistolarum quarundam Collectio* (1693-1698).

J. WALLIS, *Treatise of algebra, both historical and practical* (London, 1673 e 1685).

R. DE SLUSE, *Mesolabum, seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exibitae* (Leodij Eburonum, 1659; II ed., ivi, 1668).

C. LE PAIGE, *Correspondance de René-François de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d'une Introduction* (Bull. di bibl. e storia, t. XVII, 1884).

L. ROSENFELD, *René-François de Sluse et le problème des tangentes* (Isis, Vol. X, 1928).

S. DEGLI ANGELI, *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rationibus ipsarum partium eorumdem genitis, una cum nonnullis ad praedictarum magnitudinem, aliarumque centra gravitatis* (Venezia, 1654 e 1663).

S. DEGLI ANGELI, *Problemata geometrica sexaginta circa conos, sphaeras, superficies conicas, sphaericasque praecipue versantia* (Venezia, 1658).

S. DEGLI ANGELI, *Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum* (Venezia, 1659 e 1660).

S. DEGLI ANGELI, *De infinitorum spiralium spatiorum mensura* (Venezia, 1660).

S. DEGLI ANGELI, *De superficie ungulae et de quartis liliorum parabolicorum et cycloidalium* (Venezia, 1661).

S. DEGLI ANGELI, *De infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis* (Venezia, 1661).

S. DEGLI ANGELI, *De infinitis spiralibus inversis, infinitisque hyperbolis, ac aliis geometricis* (Venezia, 1667).

P. MENGOLI, *Viae novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum* (Bononiae, 1650).

---

(1) Questa data e le analoghe si riferiscono alle prime pubblicazioni dei relativi scritti.

P. Mengoli, *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam et planimetriam* (Bononiae, 1655).
P. Mengoli, *Geometriae speciosae elementa* (Bononiae, 1659).
P. Mengoli, *Circolo* (Bononiae, 1672).
P. Mengoli, *Arithmeticae rationalis elementa quatuor* (Bononiae, 1674).
*Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati, Opera* I. Barrow (Londini, 1655).
*Archimedis Opera; Apollonii Pergaei Conicorum Libri quatuor; Theodosii Sphaerica. Methodo novo et succincto demonstrata per* I. Barrow (Londini, 1675).
*The Mathematical Works of* Isaac Barrow, *edited by* W. Whewell (Cambridge, 1860). (Questo volume comprende: I. Barrow, *Lectiones mathematicae XXIII; in quibus Principia matheseos generalia exponuntur; habitae Cantabrigiae A. D.* 1664, 1665, 1666, Londini, 1683; *Lectiones XVIII Cantabrigiae in Scholis publicis habitae; in quibus opticorum Phaenomenon genuine rationes investigantur,* Londini, 1669; *Lectiones geometricae; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur,* Londini, 1670).
*The geometrical Lectures of* Isaac Barrow, *translated by* J. M. Child (Chicago and London, 1916).
N. Mercator, *Logarithmotechnia, seu Methodus nova accurata et facilis construendi logarithmos* (Lond., 1668; II ed., 1674).
W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers* (Phil. Trans. R. Society, 1668).
J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Patav., 1667).
J. Gregory, *Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi et mensurae* (Venet., 1667).
J. Gregory, *Exercitationes geometricae* (Lond., 1668).
J. Boulliaud, *Opus novum ad arithmeticam infinitorum* (Lut. Par., 1682).
D. Gregory, *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum* (Edinb., 1684).
J. Gregory, *Tercentary volume edited by* T. W. Turnbull (London, 1939).

## CAPITOLO XXVII

# INTERMEZZO

### Primi progressi della geometria analitica

405 - Quantunque i problemi « costruire le tangenti alle curve » e « calcolare lunghezze di archi, aree e volumi » — che sono le forme primitive sotto cui si presentarono i due problemi fondamentali del calcolo infinitesimale — abbiano esercitata durante il secolo XVII la più potente attrattiva sopra i cultori delle scienze esatte, pure non è a credere che le altre branche della matematica siano state allora trascurate; è quanto già risulta da buon numero delle pagine precedenti, è quanto verrà confermato da quanto passiamo ora ad esporre.

La grande importanza delle coordinate sfuggì a gran parte dei contemporanei di Descartes e Fermat; affettarono di ignorarle personalità eminenti quale Pascal, non se ne occuparono altri minori che dal contribuire al perfezionamento della geometria analitica avrebbero potuto trarre onore e forse gloria; e per trovare dei cultori di essa fa d'uopo lasciare la terra che diede i natali all'autore de *La géométrie* e trasportarci idealmente in quella che per lunghi anni gli diede larga ospitalità. Incontreremo così nuovamente un modesto personaggio a noi già noto (cfr. n. 363), Francesco van Schooten.

Sino dagli anni 1635-36 egli stabilì amichevoli rapporti con Descartes, il quale lo provvide di lettere di raccomandazione quando egli si recò in Francia; di ritorno in patria visitò nuovamente il sommo filosofo, che nel frattempo aveva data alle stampe la sua grande opera matematica, e nel 1649 ne pubblicò una versione latina, corredata di vari commenti, la quale servì mirabilmente a diffondere nel mondo le idee dell'autore. Questi commenti (molti dei quali concernono la parte algebrica de *La géométrie*) sono in generale troppo minuti per venire qui riferiti. Notiamo soltanto che lo Schooten, svolgendo un concetto appena adombrato da Descartes, ha stabilite le formole che servono alla trasformazione delle coordinate; egli ha poi dimostrata la costruzione da lui semplicemente enunciata per la normale alla concoide (v. p. 464), aggiungendovene una migliore; altrettanto fece per l'analoga concernente la cicloide, che quel grande aveva semplicemente indicata nella lettera al P. Mersenne del 20 febbraio 1639.

I volumi in cui lo Schooten si adoperò a diffondere le scoperte di Descartes (v. la *Bibliografia* che chiude il presente Cap.) contengono altri scritti intesi a completare o svolgere quanto sta scritto nella *Géomé-*

*tric;* alcuni sono dovuti a lui stesso, altri a suo fratello Pietro (n. il 22 ottobre 1634, m. il 30 novembre 1679), che gli successe nella cattedra. Richiamiamo l'attenzione dei lettori sopra il *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis,* destinato a mostrare come il metodo geometrico antico sia implicito nell'analisi algebrica, giacchè mediante questa si possono ottenere soluzioni di carattere costruttivo; di più vi si trovano alcune formole utili per il calcolo dei logaritimi delle linee trigonometriche.

406 - Altri dei suaccennati scritti sono dovuti a un magistrato francese, dei cui commenti è parola in una lettera a lui diretta da Descartes il 20 febbraio 1639; alludiamo a Florimond Debeaune (n. a Blois nel 1601, m. ivi nel 1652), il cui nome dicemmo (p. 468) essere legato a certe curve che risolvono la prima questione che sia stata proposta sul metodo inverso delle tangenti.

In quest'epoca, nella quale la specializzazione era tuttora ignota, incontriamo fra i primi studiosi di Descartes un altro uomo pubblico, Giovanni Hudde (n. a Amsterdam nel 1633 o nel 1640, m. ivi il 16 aprile 1704, avendo occupato per diciannove anni la carica di borgomastro della sua città natale). Il suo nome (che citammo a p. 488) s'incontra comunemente nei trattati d'algebra come inventore del metodo di risoluzione delle equazioni cubiche che consiste nello spezzare l'incognita in due parti; tale attribuzione è legittima in quanto l'Hudde fu il primo a esporre questo metodo; ma chi legge con attenzione i noti versi di Tartaglia (vedi pag. 302) è indotto a supporre che l'indicato artificio sia stato appunto quello che guidò il matematico bresciano alla sua memorabile scoperta [1].

Matematico d'occasione fu pure il danese Erasmo Martolino (n. a Roskild il 13 agosto 1625, m. il 4 novembre 1698 a Copenaghen, nella cui Università insegnava medicina); viaggiò a lungo in Francia e in Inghilterra e durante un soggiorno nei Paesi Bassi redasse alcune lezioni di commento a Descartes udite dallo Schooten. In differente direzione procedette H. van Heuraet, il quale nacque ad Harlem nel 1633 e studiò medicina a Leida, ma, ritiratosi a Saumur nel 1658, si consacrò totalmente alla matematica. E con quanto frutto risulta da una lettera da lui scritta allo Schooten in principio del 1659, nella quale è fatta conoscere la rettificazione della parabola semicubica; donde emerge che questa egregia scoperta fu fatta circa nello stesso tempo e indipendentemente da un geometra francese (Fermat), da un inglese (Neil) e da un olandese (van Heuraet); coincidenza fortuita che deve essere ricordata ogni qualvolta ci si trovi in presenza di qualche supposto plagio.

407 - Più e meglio di un semplice commentatore ci appare il poeta e uomo politico Giovanni de Witt (n. a Dordrecht il 24 settembre 1625,

[1] I pubblici uffici vietarono all'Hudde di occuparsi con continuità delle scienze per le quali aveva una spiccata attitudine; per primo ha osservato che una radice doppia di un'equazione è radice anche dell'equazione derivata; inoltre in un colloquio con Leibniz avvenuto nel 1676 egli ebbe a dichiarare di avere scoperto prima di Sluse (v. p. 522) un metodo per trovare le tangenti alle curve e sino dal 1662 quello per quadrare l'iperbole che il Mercator pubblicò nel 1668 (v. p. 528).

assassinato dalla plebe all'Aja addì 7 agosto 1672, quando era governatore delle Provincie Unite). La sua opera giovanile intitolata *Elementa linearum curvarum,* compiuta il 6 ottobre 1658, fu pubblicata per cura di F. van Schooten ed è l'unico contributo che di lui conosciamo alle scienze esatte.

Il I Libro di essa contiene una succinta teoria geometrica delle coniche definite e studiate nel piano. Esso serve quasi di esordio al II, il cui intento è palesato dalle seguenti parole: « In qualunque questione in cui si tratta di studiare un luogo, cioè una linea retta o curva, supposte note e determinate due rette formanti fra loro un angolo dato o scelto ad arbitrio, si arriva a un'equazione; ridottala alla sua forma più semplice, se in quell'equazione non si trova il prodotto delle incognite o qualche loro potenza, il luogo in questo caso è una retta. Ma se delle stesse una sale al quadrato mentre l'altra non compare moltiplicata per se stessa o per la prima, il luogo richiesto è una parabola. Che se poi di entrambi si trovano i quadrati e il prodotto, il luogo cercato sarà un'ellisse, un'iperbole o una circonferenza » (a dir vero potrebbe anche essere una parabola). Per dimostrare tutto ciò l'autore considera successivamente le equazioni

$$y = b\,x/a\ ,\quad y = (b\,x/a) \pm c\ ,\quad y = c - b\,x/a\ ;$$

il caso escluso $y = -c - b\,x/a$ si trova incidentalmente considerato più innanzi.

Passando alle equazioni quadratiche il de Witt considera le seguenti forme:

$$y^2 = a\,x\ ,\quad y^2 = a\,x \pm b^2\ ,\quad y^2 = b^2 - a\,x\ ,$$

$$x\,y = f^2\ ,\quad l\,y^2/g = x^2 - f^2\ ,\quad l\,x^2/g = y^2 - f^2\ ,\quad x^2 - l\,y^2/g = f^2\ ,$$

e di ognuna trova il significato geometrico. La trasformazione delle coordinate, di cui egli si serve per l'indicato scopo, viene applicata anche per ridurre l'equazione

$$y^2 + 2\,b\,x\,y/a + 2\,c\,y = b\,x^2/a + 2\,e\,x + d^2$$

ad una delle precedenti forme. Avendo così messo in luce tutto il potere di quell'artificio, egli (dopo di avere trovate le equazioni di alcuni luoghi di 2° ordine definiti geometricamente) vi dedica uno speciale Capitolo. Alcuni punti di contatto fra questo lavoro e uno di Fermat a noi ben noto (n. 357) essendo certamente casuali, non ne diminuiscono in alcun modo il valore.

408 - Circa nello stesso tempo il metodo cartesiano trovava in Inghilterra un cultore e un espositore in G. Walis [1], il quale, l'anno stesso in cui pubblicava l'*Arith. infin.*, dava in luce una « nuova » esposizione della teoria delle sezioni coniche; la novità non si trova nella prima parte di essa, ove quelle curve sono considerate nello spazio con

---

[1] A suo merito notiamo avere egli riconosciuto che la curva chiamata dal Roberval « compagne de la roulette » non è altro che una sinusoide.

applicazione del principio di Cavalieri, ma nella seconda, ove esse sono studiate con una *ristretta* applicazione delle coordinate cartesiane; ci esprimiamo così perchè il Wallis non fa che indicare con lettere le lunghezze metodicamente applicate da Apollonio e così, in luogo delle proporzioni, preferite dal geometra greco, maneggia delle equazioni; benchè piccolo, è sempre un progresso! Verso il termine del suo lavoro egli volle spiccare un volo verso le parabole di ordine superiore; ma male glie ne incolse, perchè, non avendo premessa alcuna convenzione relativa ai segni delle coordinate, disegnò la parabola $y = x^3$ come se fosse del medesimo aspetto della $y = x^2$. Questa inesattezza (che si ritrova in una lettera dello stesso autore al Brouncker) viene qui rilevata soltanto perchè essa serve a porgere un'idea dello stato in cui la geometria analitica trovavasi nel 1655. Le *Coniche* del Wallis hanno, dunque, soltanto un valore storico, il quale è aumentato dal fatto che ivi è introdotto il segno $\infty$ per indicare l'infinito.

Una portata analoga a quella che hanno le applicazioni fatte dal Wallis delle coordinate hanno quelle che leggonsi in un lavoro postumo del Roberval. L'attitudine di sdegnosa indifferenza che questi aveva assunta in principio di fronte al metodo cartesiano sembra che siasi col tempo attenuata, forse per l'influenza del P. Mersenne e forse in seguito alla conoscenza da lui presa dello scritto di Fermat *Ad locos planos et solidos isagoge*. Di siffatto cambiamento si ha una prova nella memoria *De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione*, nella quale sono stabilite le equazioni del circolo (quattro metodi), della parabola, dell'iperbole e dell'ellisse rispettivamente sotto tre, sette e tre forme; della concoide Roberval trova le equazioni separatamente per i due rami che la formano: della retta neppure il più fugace accenno! Adottando la simbolica usata da Viète, Roberval indica le coordinate con le lettere *A, E, I, Y,* e inoltre scrive le equazioni col secondo membro 0.

409 - Prima che lo scritto testè esaminato vedesse la luce nelle *Memorie* dell'Accademia di Parigi, furono pubblicati in Francia altri lavori che certamente contribuirono efficacemente al diffondersi delle idee di Descartes e Fermat. Ne è autore un matematico che citammo già più volte, Filippo de la Hire; nato a Parigi il 18 marzo 1640, egli fu destinato a seguire la professione del padre, che era pittore di corte e professore all'Accademia di Belle Arti di Parigi. Morto il padre quando egli era diciassettenne, venne in Italia, e dalla prospettiva e dalla gnomonica, che lo avevano sino allora interessato, si orientò verso la geometria; prese allora le difese di Desargues e scrisse alcuni teoremi sulle coniche, che il Bosse inserì in una delle sue opere. Alle stesse curve dedicò nel 1673 un trattato, ove dette curve sono investigate mediante una notevole trasformazione piana (è un'omologia determinata dal centro, l'asse e una retta limite), la quale muta una circonferenza in una curva di second'ordine. Grazie a questo e ad altri lavori che citeremo fra un momento, fu ammesso nel 1678 all'Accademia delle Scienze [1], e nel

[1] Nelle *Memorie* di questa compagnia il la Hire pubblicò parecchi lavori geometrici sopra alcune categorie di curve notevoli (cicloidi e concoidi).

1682 ottenne la cattedra di Ramus del Collegio di Francia; alla geometria delle coniche dedicò poi altra opera di maggior lena, che essendo scritta in latino, si diffuse rapidamente anche al di là del Reno. Morì a Parigi il 21 aprile 1718.

I lavori del de la Hire, che in questo momento ci interessano, sono tre volumetti pubblicati nel 1679. Nel primo le coniche sono studiate geometricamente nel piano, partendo dalle loro proprietà focali. Riguardo al secondo rileviamo anzitutto che ivi i segni | e || stanno a rappresentare quello un rapporto e questo l'eguaglianza, dimodochè la scrittura $a \mid b \parallel xx \mid ab$ equivale a $a : b = x^2 : ab$, mentre $aa \mid xx \mid ab$ significa $a^2 : x^2 = x^2 : ab$. Nel II Cap. dello stesso si trovano risolti alcuni problemi determinati o non, nel piano e nello spazio, con lo scopo di mostrare come lo studio di questioni geometriche guidi naturalmente alle coordinate cartesiane, le quali vengono introdotte verso il termine di detto Capitolo. Ivi si apprende che per « luogo geometrico » l'autore intende qualunque linea e superficie di cui tutti i punti abbiano una stessa relazione con certi elementi fissi. Uno di questi è un punto, l'« origine du lieu »; « tige » e « rameau » sono le coordinate di un punto arbitrario e « noeud » il piede dell'ordinata del punto considerato. Il nostro autore segue Descartes nella ripartizione in « generi » di tutte le linee e fa noto che quelle del primo genere hanno equazioni riducibili ad una delle seguenti forme:

$$a\,x/b = y \;,\quad a\,x = y^2 \;,\quad x\,y = a^2 \;,\quad a\,x^2/b = \pm\,(d^2 - y^2).$$

Come la riduzione si possa effettuare ricorrendo a una trasformazione delle coordinate viene da lui dimostrato sopra parecchi esempi: a suo merito va rilevato che egli si è almeno proposto il problema di dedurre la specie di una conica dalla semplice ispezione dei coefficienti della sua equazione.

Il terzo dei suoi scritti ricordati più sopra si apre con una prefazione in cui sono riassunti i metodi per risolvere graficamente le equazioni, esposti nella *Géométrie* e dall'Hudde nel suo *Mesolamium*; la Hire aggiunge di avere notate alcune inesattezze commesse dal primo e di averne fatto parte all'Huygens; avendo questi comunicato tale critica a Fermat, seppe che il grande matemàtico aveva già rilevata la stessa cosa. Il de la Hire aggiunge che, prima di dare in pascolo alla pubblicità le sue osservazioni, si assicurò (con lettera all'Huygens) che l'Hudde non intendeva ritornare sulle questioni trattate nell'opera succitata (1). Entrando poi nel vivo dell'argomento, l'autore risolve algebricamente le equazioni di 2° grado e graficamente quelle di 3° e 4°, servendosi delle equazioni esposte nel suo precedente volume. Passando poi alle equazioni di grado più elevato, osserva (come già, a sua insaputa, aveva fatto Fermat, p. 480) che Descartes per risolverle aveva

(1) Sgraziatamente questa lettera non si trova fra le molte scambiatesi fra i citati due matematici e pubblicate nelle *Oeuvres complètes* di Huygens; notiamo per incidenza che la prima che vi s'incontra porta la data 24 marzo 1680, e vi si legge il teorema « due coniche ad assi paralleli si tagliano in quattro punti conciclici », avvertito contemporaneamente dai due corrispondenti.

usato di curve di grado più elevato di quanto fosse strettamente necessario e, per impedire che altri incòrra nel medesimo errore, chiude la sua opera indicando quali siano le curve di grado minimo che si devono impiegare per risolvere tutte le equazioni algebriche sino al 64° grado.

Ove seguissimo l'esempio dato da un entusiasta panegirista, dovremmo tener qui parola anche di Ugo de Omerique — della cui vita non si conosce che la data (6 gennaio 1634) il luogo (Sanlucar de Barrameda) di nascita — da lui decorato del lusinghiero epiteto di precursore della moderna geometria analitica. Ma l'esame spassionato dell'opera da lui pubblicata al tramonto del secolo XVII (le altre sono semplici trattati di aritmetica e trigonometria e tavole di logaritmi) induce invece ad annoverarlo fra i tardi discepoli dei geometri della Grecia. Infatti il titolo *Analisi geometrica* dato a quel lavoro si giustifica soltanto osservando che l'autore, nel risolvere le questioni aritmetiche e algebriche, ricorre alla rappresentazione dei numeri con segmenti rettilinei, ben nota ai lettori degli *Elementi* di Euclide, e fa uso costante di proporzioni; per indicare l'eguaglianza fa uso di un segno speciale, che non trovammo adoperato da alcun altro. Le questioni trattate sono semplici e dotate di scarsa novità (1); ma sono distribuite con buon metodo e risolte con cura; esse attestano la conoscenza da parte dell'autore di Pappo, Viète, Schooten, Renaldini, ecc. Discepolo della Compagnia di Gesù, l'Omerique conservò sempre cordiali rapporti con i suoi antichi maestri, alcuni dei quali ne arricchirono l'opera con pagine da loro scritte.

Chiuderemo questi cenni notando che all'epoca di cui ragioniamo appartiene pure una trilogia concernente il metodo delle coordinate dovuta a Giacomo Ozanam (n. a Bouligneux nel 1640, m. a Parigi il 3 aprile 1717). Questi, benchè di origine semitica, fu dalla sua famiglia, passata nel frattempo al cristianesimo, destinato alla carriera ecclesiastica; ma egli preferì volgersi alle scienze, e insegnò privatamente matematica, prima a Lione, poi a Parigi. Scrittore fecondissimo, si deve a lui un Corso completo di matematica, un Dizionario matematico e una Raccolta di ricreazioni matematiche del genere di quella del Bochet de Méziriac (v. p. 417), alla quale arrise il più lusinghiero successo, attestato dalle numerose edizioni e traduzioni di cui fu onorata.

## Cristiano Huygens

410 - Al periodo di cui stiamo narrando le gesta appartiene un uomo che avrebbe potuto dare il proprio nome al secolo in cui visse, ove non avesse avuto la disgrazia o la fortuna che la sua esistenza trascorresse in un'epoca d'inaudita fecondità in personalità eminenti; tuttavia, benchè circondato da giganti, egli appare di colossale grandezza; senonchè, non avendo fatta della matematica pura la sua principale occupazione, a somiglianza di Galileo, ottiene nella presente storia un posto meno

(1) In una è ricordato il Principe Ruggiero di Ventimiglia (n. a Palermo il 10 settembre 1670, m. ivi il 12 settembre 1698), autore, fra l'altro, di un opuscolo intitolato *Dubia geometrica* (Palermo, 1692).

ampio di quello accordato da personalità di più modeste proporzioni. Alludiamo a Cristiano Huygens. Egli nacque all'Aja da illustre famiglia protestante il 14 agosto 1629; sotto la direzione del padre ricevette la più raffinata educazione e la più vasta istruzione. A sedici anni si trasferì a Leida per compiervi gli studi legali; venuto in contatto con Francesco von Schooten, potè usufruire durante gli anni 1645-46 e 1646-47 dei suoi preziosi insegnamenti e consigli; così conobbe le opere dei più grandi matematici, sia antichi (Archimede, Apollonio, Pappo, Diofanto) che moderni (Viète e Descartes). I quaderni da lui riempiti in quell'epoca abilitano a misurare l'ampiezza dei suoi studi che abbracciano tutto lo scibile matematico del tempo; allora fece un'osservazione che lo rivelò come giovane destinato ai più eccelsi destini: vedemmo (n. 305) che Galileo aveva ritenuto che una fune omogenea appesa ai suoi estremi assuma la forma di una parabola; questa opinione fu condivisa dallo Stévin, il quale ebbe a vantarsi in possesso di una dimostrazione di questo fatto; ora il nostro matematico, mentre si sforzava di divinare questa pretesa dimostrazione, riconobbe la falsità di quell'opizione [1]. Questa scoperta — che l'Huygens era destinato a perfezionare più tardi col determinare la natura della curva in questione (A. E., cioè *Acta eruditorum*, giugno 1691) — comunicata dalla Schooten a Descartes provocò da lui (lettera del 16 giugno 1646) la previsione che l'Huygens era destinato a divenire « excellent en cette science ».

Per completare i propri studi giuridici egli passò altri due anni a Breda, dopo i quali ritornò all'Aja: la laurea in leggi gli fu conferita in Francia (stato in cui vigeva tuttora l'editto di Nantes del 13 aprile 1598) dall'Università protestante di Angers, città in cui si recò durante il soggiorno che egli fece in Francia nell'estate 1655. Sino dal 1651 aveva dato alle stampe una stringente confutazione dell'*opus magnum* di G. di S. Vincenzo, della quale parleremo nel n. seg.; ma gli anni che seguirono la laurea (1655-1659) furono, anche per la matematica pura, di straordinaria fecondità, come risulta dal suo carteggio e dai fogli da lui vergati e ai dì nostri resi di pubblica ragione. Tali documenti stanno a dimostrare che egli volse la sua mente a tutti i rami della matematica del tempo [2]: geometria elementare (fra l'altro egli immaginò una nuova elegante dimostrazione del teorema di Pitagora, v. la Fig. 59 ove $BD = BA$, $CE = CA$ e da $E$ si è condotta la parallela a $BC$), teoria dei numeri (disciplina su cui Fermat aveva richiamata l'attenzione dei matematici grazie alle sue note sfide, p. 485), rettificazioni e quadrature, ri-

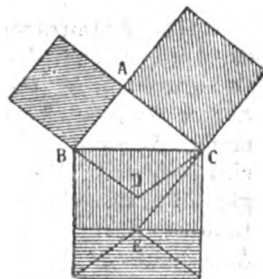



Fig. 59.

---

[1] L'erroneità dell'asserzione galileiana fu riconosciuta sperimentalmente prima di Huygens, da GIOACCHINO JUNG (1587-1685), come risulta dalla sua *Geometria empirica* (1627).

[2] È interessante notare che in una lettera scritta nel 1650 segnalò i pericoli del metodo degli indivisibili, che egli però non aveva imparato studiando le opere del Cavalieri. Vedremo (n. 464) che al calcolo infinitesimale egli fece accoglienza prudentemente benevola e finì col servirsene correntemente.

cerche sopra linee speciali (parabole e iperboli di ordine qualsivoglia, perle di Sluse, foglia cartesiana, quadratrice di Dinostrato). particolarmente sulla cicloide, alla quale il pensiero di Huygens fu condotto dal concorso bandito da Pascal (n. 381) [1], evolute, curve parallele, ecc. Da queste pagine emerge che Huygens nelle proprie ricerche usò liberamente le coordinate e il calcolo algebrico con la simbolica cartesiana, ma nel redigere i risultati per la stampa si attenne ai metodi classici; anzi, le difficoltà incontrate nell'operare tale metamorfosi lo distolsero dal pubblicare per intero certe ricerche e lo indussero a limitarsi a enunciarne le conclusioni. Aggiungiamo che, quando lo Schooten preparava una nuova edizione della sua versione latina della *Géométrie* di Descartes, chiese il concorso del suo antico alunno, e questi gli suggerì dei miglioramenti, di cui si può valutare l'entità oggi soltanto che furono pubblicati tutti i manoscritti dell'Huygens.

Questo intenso lavoro matematico non distolse l'Huygens dallo studio dei fatti naturali; sino da giovane si mostrò abilissimo nella costruzione di apparecchi fisico matematici [2] egli si era occupato della politura dei vetri per cannocchiali e non tardò ad acquistare una singolare abilità nelle relative operazioni. Tali occupazioni la condussero da un lato alla diottrica, sulla quale sino dal 1653 cominciò a comporre un'opera che fu pubblicata soltanto dopo la sua morte (1703), dall'altro gli fornirono nuovi mezzi per vaste esplorazioni celesti, frutto delle quali fu la scoperta del primo satellite e dell'anello di Saturno. Quasi ciò non bastasse, nella stessa epoca riuscì ad applicare il pendolo agli orologi, invenzione che di poco precedette la scoperta da parte sua del tautocronismo della cicloide, e scrisse la prima esposizione dei metodi per risolvere i problemi nascenti dai giuochi d'azzardo (v. n. 415).

411 - Ammiratore ad occhi aperti di Descartes, Huygens trovò inaccettabili le leggi da lui proposte come governatrici dell'urto dei corpi e (malgrado ne lo dissuadesse lo Schooten, spaventato dell'ardire del suo antico discepolo) ne propose altre, che riscossero la generale approvazione. Accompagnò il padre (inverno 1660-1661) quando si recò a Parigi in qualità d'ambasciatore e nel ritorno toccò Londra; un terzo viaggio a Parigi ebbe luogo dall'aprile 1663 al giugno 1664, con una corsa a Londra, durante la quale egli fu ascritto alla Società Reale. Creata la Accademia di Parigi, Luigi XIV lo chiamò subito a farne parte; da quel momento egli abitò quasi sempre nella capitale della Francia (aprile 1666-settembre 1670, giugno 1671-marzo 1676, marzo 1678-settembre 1681), partecipando attivamente ai lavori di quella Compagnia e pubblicando opere che non tardarono a divenire classiche, quali l'*Horologium oscillatorium* (ove fra l'altro incontrasi la prima pubblica notizia sulla teoria delle evolute) e l'opuscolo *De la cause de la pesanteur* (nell'appendice del quale si trovano esposte le principali proprietà della curva logaritmica).

---

(1) Da una lettera da lui scritta a J. Boulliaud il 25 luglio 1658 si desume che a lui devesi la prima determinazione di un'area cicloidale esattamente quadrabile.

(2) Non reca quindi meraviglia se avuta notizia dal Bellair della macchina addizionatrice di Pascal egli dedicò molto tempo a perfezionarla.

Durante uno di questi soggiorni strinse amichevoli rapporti con il giovane Leibniz e lo guidò nei primi suoi studi matematici.

La revoca dell'editto di Nantes (23 ottobre 1685) lo costrinse a rimpatriare, ma non spense in lui l'operosità matematica; oltre altre prove che segnaleremo più avanti, citiamo il celebre *Traité de la lumière* (1690). Morì nella sua città natale l'8 giugno 1695, dopo avere sollecitato in patria qualche ufficio governativo per migliorare la propria situazione economica. La patria, che lo aveva ammirato in vita, non mancò di tributargli i più significanti onori postumi; in omaggio ai suoi desideri, dai numerosi manoscritti da lui lasciati furono tratti i volumi intitolati *Opuscula posthuma* (1703), *Opera varia* (1724) e *Opera reliqua* (1728), nonchè numerose parti del suo carteggio scientifico; e due secoli dopo la sua morte venne intrapresa la monumentale edizione critica di tutti i suoi scritti (con inclusione del suo carteggio), perenne monumento elevatogli dalla patria ammirante.

412 - Lo scritto che fece conoscere al mondo scientifico il ventiduenne Cristiano Huygens è il *Theoremata de quadratura*, ecc.; esso consta di due parti distinte, una dottrinale, l'altra critica. La prima fu inspirata dalle ricerche baricentriche di Archimede, le quali fecero sorgere nel giovane matematico il desiderio di fare qualche aggiunta ai risultati conseguiti dal Siracusano. Si volse anzitutto all'iperbole, dimostrando che, nota la quadratura di essa, ne consegue la posizione del centro di gravità; ma la via che lo condusse a questo risultato non lo soddisfece, e, in seguito a nuove meditazioni, ne trovò altra più luminosa applicabile alla analoga ricerca per tutte le coniche. Solo allora ebbe notizia dell'opuscolo del della Faille (p. 432) — al quale tributò debite lodi in lettere private e nella prefazione del suo volume — e appunto il teorema che assegna la posizione del baricentro di un settore circolare rappresenta l'epilogo del volume stesso. Ora, sino da quando egli studiava a Breda, aveva avuta notizia dell'esistenza di un mastodontico volume di G. di S. Vincenzo, nel cui titolo era annunciata la risoluzione del problema della quadratura del cerchio; lo aveva chiesto indarno a prestito al Pell (v. n. 425), il quale, al pari degli altri matematici a cui erasi rivolto, si era rifiutato di esprimere un parere sul valore dell'annunciata scoperta; finalmente (lo si rileva da una lettera al P. Mersenne del 20 aprile 1648) riuscì ad averlo a propria disposizione. Quando egli sia riuscito a scoprire l'errore dell'autore ci è ignoto con precisione; soltanto sappiamo che, avendo comunicate a lui le proprie osservazioni, invece di una difesa, ne ebbe in risposta l'esortazione a rendere di pubblica ragione le sue obiezioni: esse appunto sono consegnate nella II Parte del citato lavoro.

413 - Riconosciuto che il problema della quadratura del cerchio, malgrado gli eroici sforzi del P. Gregorio, attendeva ancora il suo risolutore, Huygens si sentì tentato di arrecare ad esso qualche contributo, e anche in questa occasione s'inspirò ad Archimede (v. l'opera *De circuli magnitudine inventa*), proponendosi di perfezionare quanto il Siracusano aveva scritto intorno al calcolo di $\pi$. Ma, mentre i numerosi calcolatori di cui noi qua e là facemmo menzione si erano limitati a calcare le orme

del Siracusano, Huygens ha saputo arricchire la teoria dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza di tanti e tali risultati, che può dirsi essa abbia allora conseguita la sua massima perfezione: e poichè per raggiungere l'intento egli non ricorse che a mezzi elementarissimi, così ha la gloria di avere aggiunte agli *Elementi* di Euclide molte pagine degne di recare la firma del sommo Alessandrino. Poichè ci è vietato di riferire (come saremmo tentati di fare) tutti i teoremi dimostrati da Huygens — alcuni dei quali erano stati semplicemente enunciati dallo Stévin — ne citeremo per semplicità i più eleganti; per brevità indicheremo con $P_n$ e $S_n$ il perimetro e l'area di un poligono regolare di $n$ lati circoscritto a un cerchio di raggio 1, con $p_n$ e $s_n$ le quantità analoghe per quello inscritto; sussisteranno allora le seguenti relazioni:

$$\pi > s_{2n} + (s_{2n} - s_n)/3 \quad , \quad 2\pi > p_{2n} + (p_{2n} - p_n)/3$$
$$\pi < 2\,S_n/3 + s_n/3 \quad , \quad 2\pi < 2\,P_{2n}/3 + p_n/3.$$

Esse permettono, tanto di trovare valori sempre più approssimati di $\pi$, quanto di scoprire nuove pregevoli costruzioni approssimate per la lunghezza della circonferenza. In tal modo il matematico olandese arrivò alla limitazione seguente:

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538$$

e a molte costruzioni approssimate fra cui spicca per la sua semplicità la seguente: Dato (fig. 60) un cerchio di diametro $BC$, si segni il centro $D$ di una delle risultanti semicirconferenze e si divida in tre parti eguali l'altro; se $E$, $F$ sono i risultanti punti di divisione, e $G$, $H$, le intersezioni del diametro $BC$ con le rette $DE$, $DF$, sarà $\pi/2 = DG + GH$ a meno di 1/5000 del diametro.

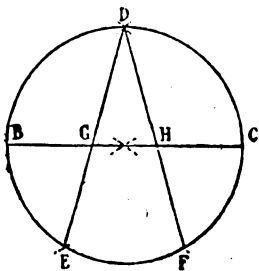



Fig. 60.

Con piena ragione Huygens fa notare che, applicando i suoi risultati, si può facilmente giudicare del valore di nuove quadrature del cerchio (ad es. si può subito dichiarare errata quella del matematico e astronomo Longomontano (1564-1647) dal momento che essa conduce a un valore di $\pi > 3{,}14182$) e da rendere più esatte le esistenti tavole di corde. Non va taciuto che egli si è anche occupato di una questione più generale, cioè della rettificazione di un arco qualunque di circonferenza, giustificando e perfezionando un risultato ottenuto dal Cardinale di Cusa (v. pag. 250), senza omettere la determinazione del baricentro di un segmento circolare; nè questo esaurisce i contributi dati da lui alla conoscenza dell'unica curva che trovò accesso negli elementi della geometria.

414 - L'opuscolo testè brevemente analizzato ha un'Appendice notevole, che contiene nuove soluzioni geometriche di molti ploblemi cubici e biquadratici, alle quali, come è dimostrato da manoscritti di recente dati in luce, egli è giunto applicando i metodi ideati da Descartes

e dai suoi seguaci per risolvere le equazioni di 3° e 4° grado; citeremo fra essi il problema archimedeo di dividere una sfera in due parti i cui volumi abbiano un dato rapporto, la duplicazione del cubo, l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, la determinazione dei flessi della concoide, e parecchie questioni d'inserzione. Si trattava di questioni all'ordine del giorno, come è provato, fra l'altro, dal *Mesolabium* di R. de Sluse (p. 522); e va notato che da fogli lasciati dal grande di cui ci occupiamo risulta che appunto lo studio di quest'opera lo indusse a perfezionare le costruzioni da lui dianzi pubblicate, sulle quali ritornò ancora più tardi, quasi a manifestare la persistenza deldell'interesse che egli provava per esse. Biquadratico è eziandio il problema noto sotto il nome di Alhazen, di cui egli si è lungamente occupato (v. la sua corrispondenza) e del quale egli ha data la prima soluzione geometrica completamente soddisfacente.

Potevasi ritenere che, con le importanti pubblicazioni testè rapidamente discorse, Huygens avesse definitivamente sepolta la pretesa quadratura da lui criticata. P. Gregorio, richiesto sulla consistenza degli appunti mossigli, rispose in modo evasivo; in vece sua presero la parola in sua difesa tre ecclesiastici, cioè i gesuiti A. A. Sarasa (n. a Nieuwenport nel 1618, m. a Anversa il 5 luglio 1667) e F. S. Ayscom (n. a Anversa nel 1624, m. ivi l'8 dicembre 1660), e poi G. L. Kinner von Löwenthurm (n. a Reichenbach verso il 1610): al secondo l'Huygens rispose in modo breve ma talmente stringente, che le persone spassionate giudicarono il dibattito definitivamente chiuso con una sentenza di condanna per P. Gregorio.

415 - Quando Huygens fu per la seconda volta in Francia non ebbe occasione di conoscere Fermat, nè Pascal e neppure Carcavy; avvicinò invece Roberval e un altro giureconsulto francese, Claudio Mylon, giurista della cui abilità matematica si trovano numerose prove nel suo carteggio; onde è certo che fu informato dei problemi sui giuochi d'azzardo che allora dibattevansi fra Fermat e Pascal. Rientrato in Olanda sembra che egli abbia subito cominciata la redazione di un breve trattato sull'argomento, dal momento che sino dal 1656 poteva annunciare allo Schooten e al Roberval di averne già poste le basi; anzi fra lui ed il primo si convenne sino da allora che lo scritto risultante sarebbe stato inserito negli *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, opera che lo Schooten preparava per pubblicarla, oltre che in latino, anche in olandese (il che avvenne negli anni 1657 e 1660): notiamo per incidenza che manoscritti di recente pubblicati provano che l'Huygens continuò anche poi a occuparsi del medesimo argomento.

Mentre Pascal presentò i problemi anzidetti come semplici applicazioni del calcolo combinatorio, il Nosto, in seguito a più profonde meditazioni, notò che, essendo la relativa teoria un nuovo ramo della matematica applicata, era necessario erigerla sopra qualche postulato, estraneo alla scienza pura; ora quello da lui scelto è appunto il principio a cui si attennero i posteriori cultori della teoria delle probabilità. Huygens ne dedusse tre teoremi che gli permisero di risolvere vari problemi suggeriti dal giuoco con dadi, ricorrendo di più all'analisi combinatoria

quando ciò era necessario per determinare il numero dei casi favorevoli e di quelli egualmente possibili. Al termine del suo trattato l'autore propose un buon numero di nuovi problemi, che destarono grande interesse anche in persone eminenti, fra le quali basti ricordare l'Hudde; altre prove del successo di quest'opera dell'Huygens incontreremo occupandoci dell'opera matematica del secolo XVIII ([1]).

Chiuderemo notando (quantunque i lavori dell'Huygens estranei alla matematica pura escano dal nostro quadro) che, in un suo lavoro postumo dal titolo *Planetario automatico,* egli fece un'interessante applicazione delle frazioni continue alla ricerca di un'espressione comoda in numeri interi del rapporto esistente fra le durate delle rivoluzioni della terra e di Saturno, giungendo così al rapporto semplicissimo 206/7.

## Modificazioni proposte per gli " Elementi di Euclide „

416 - Durante le contese religiose scatenate in Francia dalle idee di Giansenio nella seconda metà del secolo XVII, Antonio Arnauld salì a così alta fama da essere comunemente chiamato « le grand Arnauld ». Nato a Parigi il 6 febbraio 1612, compì con plauso i propri studi alla Sorbona, istituto da cui nel 1641 fu proclamato dottore. Nel 1648 si ritirò nell'abbazia di Port-Royal, ove convisse con Pascal. La corrispondenza da lui tenuta con Leibniz e il fatto che Huygens gli dedicò una copia del suo *Horologium oscillatorium* mostrano la considerazione in cui egli era tenuto anche nel mondo scientifico. Morì l'8 agosto 1694 a Bruxelles o a Liegi; ma con lui non si spense l'ammirazione da cui era circondato in vita, chè nel 1778 fu fatta una edizione completa delle sue opere, che comprende non meno di 42 volumi.

Se a noi incombe l'obbligo di tenerne parola è a cagione dei suoi *Nouveaux éléments de géométrie* (1667), i quali vennero giudicati tanto favorevolmente che ne furono fatte in breve tempo parecchie edizioni. A comporli egli fu indotto da un impegno preso con Pascal, il quale gli aveva mostrate alcune pagine, poco felici, da lui scritte come saggio di una nuova trattazione della geometria elementare; l'Arnauld si vantò di saper fare assai meglio e sembra che Pascal, esaminato il lavoro scritto dall'Arnauld, abbia dovuto riconoscere che era riuscito nell'intento.

In quell'opera spira l'aura anti-euclidea che alitava in Francia sino dai tempi del Ramus e di cui allora era centro la Scuola di Port-Royal; in essa la purezza geometrica che caratterizza gli *Elementi* di Euclide è scomparsa per effetto di considerazioni aritmetiche; inoltre nella teoria delle parallele alla definizione « negativa » di rette che non s'incontrano mai, è aggiunta quella « positiva » di rette equidistanti; a titolo di onore per l'Arnauld va notato che la dimostrazione da lui data per il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo è tanto pregevole che, ritrovata due secoli più tardi, servì, a sostegno delle proprie idee, ad un oppositore della geometria non euclidea (v. *Comptes*

---

([1]) Ulteriori notizie sulle sue ricerche sul calcolo delle probabilità si leggono nell'Avvertenza con cui si apre il T. XIV (1920) delle sue *Oeuvres complètes*.

| 58 | 26 | 30 | 95 | 93 | 97 | 47 | 42 | 86 | 89 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 37 | 12 | 45 | 84 | 63 | 82 | 99 | 88 | 39 | 87 |
| 43 | 100 | 60 | 119 | 118 | 73 | 5 | 2 | 50 | 22 | 79 |
| 90 | 97 | 7 | 13 | 102 | 65 | 108 | 17 | 115 | 55 | 32 |
| 76 | 74 | 10 | 98 | 56 | 121 | 66 | 24 | 113 | 48 | 46 |
| 31 | 41 | 51 | 21 | 11 | 61 | 111 | 101 | 71 | 81 | 91 |
| 107 | 70 | 114 | 68 | 116 | 1 | 66 | 54 | 8 | 52 | 15 |
| 103 | 33 | 113 | 105 | 20 | 57 | 14 | 109 | 9 | 89 | 19 |
| 18 | 44 | 72 | 3 | 4 | 49 | 117 | 120 | 62 | 78 | 104 |
| 16 | 83 | 110 | 77 | 38 | 59 | 40 | 23 | 34 | 85 | 106 |
| 94 | 96 | 92 | 27 | 28 | 25 | 75 | 80 | 36 | 53 | 64 |

| 118 | 28 | 116 | 89 | 94 | 30 | 31 | 99 | 58 | 113 | 33 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 52 | 24 | 109 | 104 | 69 | 45 | 101 | 97 | 60 | 64 | 28 |
| 127 | 57 | 92 | 8 | 11 | 54 | 55 | 136 | 135 | 89 | 88 | 18 |
| 126 | 40 | 2 | 26 | 130 | 28 | 71 | 123 | 62 | 145 | 105 | 19 |
| 20 | 13 | 5 | 59 | 144 | 6 | 7 | 133 | 86 | 140 | 132 | 125 |
| 63 | 120 | 65 | 14 | 61 | 79 | 78 | 72 | 131 | 80 | 25 | 82 |
| 75 | 108 | 77 | 129 | 73 | 67 | 66 | 84 | 16 | 68 | 87 | 700 |
| 38 | 49 | 142 | 124 | 12 | 138 | 139 | 1 | 21 | 3 | 96 | 107 |
| 95 | 103 | 141 | 83 | 15 | 122 | 74 | 22 | 149 | 4 | 42 | 50 |
| 47 | 102 | 56 | 137 | 134 | 91 | 90 | 9 | 10 | 53 | 43 | 98 |
| 110 | 81 | 121 | 36 | 41 | 76 | 100 | 41 | 48 | 85 | 93 | 95 |
| 34 | 117 | 29 | 106 | 51 | 115 | 114 | 46 | 87 | 32 | 112 | 27 |

*rendus*, T. XXXIII, 1871, p. 368). Benchè l'opera dell'Arnauld comprenda quindici libri, non abbraccia che la planimetria; essa servì di modello ad altre opere congeneri posteriori (Malézieu, Varignom, Lomy, ecc.).

In Appendice ad essa si trova un ottimo opuscolo dedicato ai quadrati magico-magici, cioè a quei quadrati magici che tali restano sop-

primendovi varie cornici; ora anche a tale proposito si delinea l'ombra di Pascal, perchè in un programma di lavori da lui comunicato all'Accademia delle Scienze di Parigi, e certamente noto all'Arnauld, è fatto cenno di un metodo da lui ideato per costruire i « numeri magico-magici » (¹). Per dimostrare che l'Arnauld in tale occasione diede prova di indiscutibili doti di matematico, riferiamo i quadrati magico-magici di $11^2$ e $12^2$ numeri (vedi pagina precedente), da lui costruiti applicando considerazioni generali.

417 - L'Italia a differenza della sua sorella latina si mantenne sempre fedele al culto di Euclide, pur senza disconoscere i difetti degli *Elementi*, adoperandosi anzi a correggerli. Fra le molte prove di siffatta attitudine incontriamo l'opera intitolata *Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici restaurati e facilitati* (Roma, 1680). Ne è autore Vitale Giordano, nato a Bitonto (provincia di Bari), il 13 dicembre 1633; di carattere violento, menò vita dissoluta e, avendo ucciso un cognato, dovette riparare a Venezia; ivi s'imbarcò per una spedizione contro i Turchi e divenne segretario dell'ammiraglio veneto; al ritorno si dedicò con impegno alla matematica e fissò la propria residenza a Roma, ove fu successivamente matematico della Regina Maria Cristina di Svezia, insegnante all'Accademia di Belle Arti creata da Luigi XIV e finalmente professore alla Sapienza; morì il 3 novembre 1711. La sezione più originale ed importante della succitata sua opera è quella relativa alle parallele; l'autore osserva che la proprietà di non incontrarsi mai di due linee non caratterizza sufficientemente il parallelismo, essendovi altre coppie di linee, non rette, godenti della medesima prerogativa (ad esempio due parabole ottenute una dall'altra mediante una traslazione parallela all'asse o una concoide di Nicomede e il suo asintoto); nota anche che il postulato d'Euclide non è affatto evidente, e allora egli pure ricorre alla definizione di parallele come rette equidistanti, che aveva appreso dal Clavio; ma, per ovviare agli inconvenienti cui esso dà luogo, stabilisce una serie di proposizioni che gli fanno accordare un posto distinto fra coloro che prepararono da lungi la geometria non-euclidea (²), benchè non trasfondano nel lettore l'opinione, in cui collocavasi l'autore, di avere reso perfette le Pandette della geometria.

418 - Altri tentativi per migliorare gli *Elementi* di Euclide troviamo nelle *Opere* del Wallis.

Alcune pagine concernono una questione, designata d'ordinario col nome di « angolo di contatto », che trae origine dalla Prop. 16 del III Libro degli *Elementi*, secondo la quale tra una circonferenza e la retta che la tocca in un punto non si può condurre alcuna retta, cosicchè l'angolo (mistilineo) risultante è minore di qualsivoglia angolo rettilineo; donde la questione. è detto rigorosamente nullo? La più antica menzione di tale questione fu trovata nell'opera *De triangulis* di Giordano

(¹) V. anche un lavoro di Fermat segnalato a p. 485.

(²) Notiamo, infatti, che, prima del Saccheri, egli ha osservato che, se esiste un quadrangolo isoscele birettangolo di cui siano retti gli altri due angoli, lo stesso accadrà in qualunque analoga figura.

Nemorario (vedi pag. 240); se ne occuparono poi altri matematici medioevali a noi noti, Giovanni Campano, Alberto Magno, Nicolò Cusano, nonchè G. Cardano. Un editore di Euclide, il de Foix Candalla (1502-1594) osservò acutamente che l'angolo di contatto è un'entità di nuova specie, che non si può paragonare ad angoli rettilinei. Poco dopo Giovanni Peletier (che già conosciamo, p. 336, come algebrista), in un suo commento agli *Elementi,* sostenne che, volendo conservare in vigore la I Prop. del X Libro d'Euclide, quell'angolo deve riguardarsi per rigorosamente nullo. Tale opinione fu combattuta dal Clavio, notando che, se Euclide avesse ritenuto nullo l'angolo di contatto, non avrebbe trovato necessario di dimostrare che è minore di qualunque angolo rettilineo; secondo lui l'angolo di contatto esiste, è una vera quantità, se non altro perchè non tutti gli angoli di contatto sono fra loro eguali, ma è una grandezza *sui generis* a cui non è applicabile la precitata I Prop. del X Libro degli *Elementi.* Da quel momento i matematici si ripartirono in due schiere, gli uni accettando il parere del Peletier, gli altri quello del Clavio. Ma chi trattò la questione con maggiore ampiezza fu il Wallis, che vi dedicò due scritti, uno di carattere dottrinale, per sostenere che gli angoli rettilinei e curvilinei devono riguardarsi come enti omogenei, l'altro, di intonazione polemica, per difendere le proprie idee. Con ciò non fu chiuso il dibattito; la discussione si è prolungata fra filosofi e fra matematici, sino al momento in cui non si ebbero idee chiare sopra gli infinitesimi dei vari ordini.

In altro lavoro il Wallis si è proposto due scopi distinti. Uno è di chiarire la definizione di ragione composta che leggesi in principio del VI Libro degli *Elementi,* definizione tanto imperfetta che i più reputati dei moderni editori di Euclide la ritengono una posteriore interpolazione. L'altro è di arrecare qualche contributo al perfezionamento dell'antica teoria delle parallele; a questo riguardo l'eminente geometra inglese propose di sostituire l'oscuro postulato euclideo col seguente che egli giudicò, non a torto, accettabile da tutti: una figura piana ne ammette sempre una di eguale forma ma di diversa grandezza.

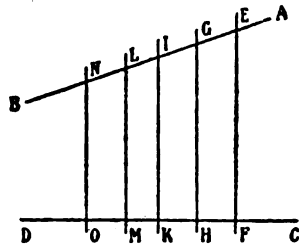



Fig. 61.

419 - A proposito della teoria delle parallele il citato geometra ha anche il merito di avere fatta conoscere agli Europei una dimostrazione del famoso postulato, ideata dal matematico arabo Nassir ed Din (cfr. p. 208); essa riposa sopra i seguenti lemmi: I. Date (Fig. 61) in un piano due rette *A B, C D* incontrate da quante si vogliano rette *E F, G H, I K, L M, N O* tutte perpendicolari a *C D* e tali che gli angoli da esse fatte con *A B* siano tutti acuti verso *B* e ottusi verso *A,* le due rette si allontanano dalla parte *A C* e si accostano dalla parte *B D.* - II. Se due rette *A C, B D* sono fra loro eguali e perpendicolari alla medesima *A B,* saranno retti gli angoli che esse formano con la congiungente *C D* dei loro estremi. - III. In ogni triangolo rettilineo la somma degli angoli è eguale a due retti (l'autore lo dimostra successivamente

per triangoli rettangoli, acutangoli e ottusangoli). Da ciò la citata proposizione.

Prima di lasciare il Wallis come geometra, ci corre l'obbligo di notare che si deve a lui la scoperta e il primo studio di una nuova superficie, il « cono-cuneo » secondo la denominazione da lui proposta; è la rigata costituita dalle infinite rette parallele ad un piano ed incontranti una retta a questo normale e una circonferenza situata in un piano perpendicolare allo stesso; venne così inaugurato lo studio delle superficie che, a somiglianza dei coni e dei cilindri, contengono infinite rette.

## Mydorge e Schwenter nella storia della geometria costruttiva

420 - Gli studi di carattere dottrinale di cui abbiamo tenuto parola nei nn. precedenti, non fecero trascurare la parte costruttiva della geometria. Già si è visto come a tale diramazione della scienza dell'estensione appartengano alcune questioni scambiatesi nel corso della celebre disputa fra L. Ferrari e N. Tartaglia. Nel secolo seguente esse non vennero del tutto abbandonate. Ne è prova anzitutto una collezione di più di mille problemi del matematico C. Mydorge (v. p. 460); ne è conferma un volume di ricreazioni matematiche risolte da Daniele Schwenter (n. a Norimberga il 31 gennaio 1585, m. il 19 gennaio 1636 a Altdorf, nella cui Università insegnava matematica) e pubblicate dopo la sua morte. Fra le questioni ivi risolte si trova la seguente: « descrivere con un compasso di apertura $r$ un cerchio di dato centro $C$ e raggio $a < r$ »; per giungere allo scopo lo Schwenter, dando prova di invidiabile originalità, abbandona il piano su cui deve descrivere il cerchio richiesto e considera la perpendicolare condotta dal punto $C$ al piano stesso e su di essa il punto $O$ tale che $C\,O = \sqrt{r^2 - a^2}$; è chiaro che, scelto $O$ come centro di una sfera di raggio $r$, essa taglierà il piano dato nel cerchio richiesto.

## L' " Euclides Danicus ,, di G. Mohr

421 - Carattere analogo ai lavori testè citati ha un'altra opera in cui l'autore si è proposto di bandire la riga e risolvere tutti i problemi euclidei col solo uso del compasso. Il titolo *Euclides Danicus* che essa porta è evidentemente modellato sugli analoghi *Apollonius Gallus* (Viète) e *Eratosthenes Batavus* (Snellio). L'autore di esso è conosciuto sotto il nome di Giorgio Mohr, quantunque il suo cognome originale fosse Morendal. Egli nacque a Copenaghen il 1° aprile 1640. Desiderio di sapere lo spinse ventiduenne a intraprendere viaggi, che durarono undici anni, in Inghilterra e in Francia e in Olanda, con lo scopo di venire in contatto con i più eminenti scienziati del suo tempo. Particolarmente lungo fu il suo soggiorno nei Paesi Bassi, ove strinse amicizia col Tschnirhausen (v. più avanti n. 465) che vi soggiornò dal 1668 al 1675. Temendo di essere distratto dalle sue meditazioni scientifiche, rifiutò ogni sorta di pubblici uffici; soltanto in età matura accettò l'invito rivoltogli da quel suo amico di recarsi a Dresda in qualità di ospite e collabo-

ratore; il trasferimento ebbe luogo nell'estate del 1695; ma della nuova situazione egli usufruì per non lungo tempo, essendo morto il 26 gennaio 1697. Leibniz, che lo avvicinò, non esitò a dichiararlo (lettera a Oldenburg del 12 maggio 1676) « in geometria et analysi versatissimus ».

Il volumetto in questione consta di due parti, la prima delle quali contiene i fondamenti teorici del metodo di risoluzione, mentre la seconda è dedicata a svariate applicazioni. A porgere un'idea di quello può servire quanto segue:

Dati due punti $A\ C$ si descriva (Fig. 62, ove, come nelle seguenti, per chiarezza furono aggiunte alcune rette punteggiate) il cerchio di

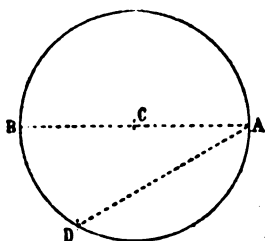



Fig. 62.

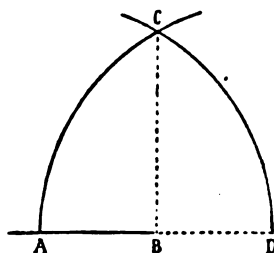



Fig. 63.

centro $C$ passante per $A$; portando il detto raggio a partire da $A$ sulla corrispondente periferia, dopo 6 passi si torna in $A$, mentre dopo 3 si giunge al punto $B$ diametralmente opposto a $A$ e dopo 2 si ha la corda dell'arco di 120°. Donde dei metodi per determinare col solo compasso il punto $B$ tale che sia $B\ C = A\ C$, e dato il segmento $a = A\ C$, i segmenti $2\,a$ e $a\sqrt{3}$.

Un altro problema che si può risolvere analogamente consiste nel condurre all'estremo $B$ di una data retta $A\ B$ (Fig. 63) la perpendico-

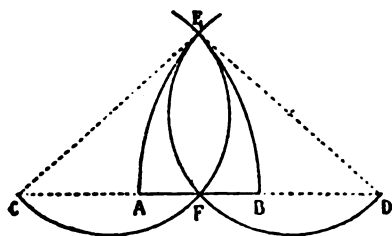



Fig. 64.

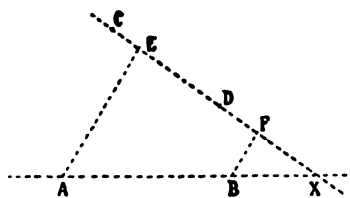



Fig. 65.

lare alla stessa. Si prolunghi infatti (v. sopra) $A\ B$ in modo che risulti $A\ D = 2\ A\ B$ e si descriva su $A\ D$ il triangolo equilatero $A\ C\ D$; i punti $B$ e $C$ determinano evidentemente la retta richiesta.

Del problema di determinare il centro di un dato segmento il nostro autore espone varie soluzioni; riferiamo quella che sembraci più pregevole. Si prolunghi (v. sopra) il segmento $A\ B$ (Fig. 64) da una parte e dall'altra in $C$ e $D$ in modo che risulti $C\ A = A\ B = B\ D$ e si costruisca su $C\ D$ un triangolo isoscele avente i lati $C\ E$ e $D\ E$ eguali al

doppio di *A B;* avendo l'autore in precedenza insegnato a costruire i centri dei segmenti *C E, D E* si possono descrivere le circonferenze sopra *C E* e *D E* come diametri; esse si taglieranno nel punto richiesto.

Mentre la I Parte dell'operetta del Mohr si aggira nel campo degli *Elementi* di Euclide, nella II sono trattati problemi più elevati, quali questioni di inserzione, il cosidetto teorema di Pothénot (risolto altrimenti dallo Stévin nel 1617) e alcune questioni di gnomonica. Ora è in questa sezione del suo scritto che il Mohr sentì il bisogno di determinare, col suo metodo, il punto comune a due rette *A B, C D* (Fig. 65). Per raggiungere lo scopo egli possiede tutti gli elementi: condotte, infatti, da *A* e *B* le perpendicolari *A E* e *B F* a *C D,* la distanza *A X* del punto cercato da *A* si può determinare mediante la seguente proporzione $AB : (AE - BF) = AX : AE$.

Congedandosi dal lettore il Mohr riconosce che alcune delle costruzioni da lui ideate sono più complicate delle analoghe basate sull'uso simultaneo di retta e compasso; ma osserva che lo scopo che egli si propose è quello di mostrare che dall'impiego della prima si può esonerarsi; e tale intento è dovere riconoscerlo, egli lo ha conseguito.

Se le costruzioni con una sola apertura di compasso o col solo uso di questo strumento sono da qualche arcigno matematico poste al livello di semplici esercitazioni sportive, ancora più severamente sono giudicate quelle eseguite col piegamento della carta. Tuttavia lo storico imparziale deve notare che la costruzione del pentagono regolare (o « noeud de cravate ») mediante siffatto artificio, mentre è di frequente attribuita a un geometra francese del secolo XIX (Edoardo Lucas), venne per la prima volta scoperta da un discepolo di B. Cavalieri, Urbano d'Aviso (n. a Roma intorno al 1618); egli la espose pubblicando un *Trattato sulla sfera* (Roma, 1656) da lui attribuito, sembra a torto, a Galileo.

## G. e T. Ceva

422 - Di gran lunga più importante, dal punto di vista teorico, di quanto sia l'opera del Mohr è la produzione geometrica di Giovanni Ceva. Questo insigne matematico nacque a Milano nel 1648; passò la miglior parte della sua vita a Mantova in qualità di matematico cesareo e commissario generale del ducato dei Gonzaga; ivi morì addì 13 dicembre 1734 « di anni 86 e mesi 6, per risoluzione di spiriti vitali » (come si esprime un cronista del tempo). Varie sue pubblicazioni mostrano in lui notevole originalità di pensiero (1); ma la più giustamente celebre è quella dedicata al Duca di Mantova Ferdinando Carlo; ivi è mostrata l'applicazione di considerazioni baricentriche alla ricerca e alla dimostrazione di teoremi geometrici. Fra questi eccelle il teorema che a ragione porta il nome del Ceva e che insegna la relazione che intercede fra i sei segmenti determinati sui lati di un triangolo da tre trasversali uscenti dai suoi vertici e passanti per il medesimo punto del suo

(1) Un suo scritto sulla teoria matematica della moneta lo fecero a ragione considerare per un precursore della econometria.

piano; il citato geometra ne deduce ad es. che le congiungenti dei vertici di un triangolo con i punti di contatto della circonferenza inscritta, concorrono in un punto (perciò a torto esso viene spesso designato come « punto di Nagel » del triangolo). La potenza di quel metodo di ricerca e dimostrazione è confermata dalla scoperta compiuta col suo mezzo dal Ceva della proposizione analoga nello spazio al teorema di Menelao nel piano, cioè della relazione che lega gli otto segmenti determinati da un piano sui lati di un quadrangolo generalmente sghembo. Altri cospicui risultati di varia specie sono esposti dal Ceva [1] in un'Appendice, sulla quale ci duole di non poterci arrestare, ce ne duole specialmente perchè Giovanni Ceva attende ancora quel completo studio sulla vita e sulle opere di cui avrebbe ben diritto.

Un passo del citato opuscolo ci fa conoscere un milanese insegnante del tempo, che tutto fa credere sia stato un buon matematico, cioè Pietro Paolo Caravaggio jr. (1659-1723) [2], al quale devesi una dimostrazione puramente geometrica del teorema di Ceva; essa è talmente semplice che merita di venire qui riferita, e talmente perspicua che si può comprendere anche senza il sussidio della figura: Nel triangolo $ABC$ le trasversali $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concorrano nel punto $O$; sussisteranno allora evidentemente le relazioni

$$BA_1 : CA_1 = BAA_1\,{}^{(3)} : CAA_1 = BOA_1 : COA_1 ,$$

le quali dànno per sottrazione

$$BA_1 : CA_1 = AOB : COA .$$

Similmente:

$$CB_1 : AB_1 = BOC : AOB \quad ; \quad AC_1 : BC_1 = COA : BOC .$$

Moltiplicando membro a membro si conclude

$$BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 = CA_1 \cdot AB_1 \cdot BC_1 \qquad \text{c. d. d.}$$

Giovanni Ceva ebbe per fratello un altro matematico che merita almeno un cenno da parte nostra; è Tommaso (n. a Milano il 20 dicembre 1648, m. ivi il 3 febbraio 1736 o 37), gesuita che insegnò nel Collegio del suo ordine che trovavasi allora nella grande metropoli lombarda e che ha gran nome per le sue poesie latine. Gli A. E. del giugno 1695 contengono un suo articolo destinato a far conoscere uno strumento con cui si può dividere un angolo in un numero qualunque di parti eguali; esso trovasi descritto e applicato dal de l'Hôpital (*Sections coniques*, Liv. X, Probl. VI) senza far cenno del Ceva. È un problema a cui si riferiscono anche alcune pagine d'un suo volumetto, al quale deve ricorrere chi voglia leggere nella sua forma originale la definizione delle curve da

---

[1] Così, mentre il Clavio erasi limitato a considerare le tangenti comuni esterne di due circonferenze, il Ceva considerò anche le interne (quando esistono).

[2] Era figlio di altro scienziato di egual nome (vissuto negli anni 1617-1688) al quale succedette come lettore di matematica nelle Scuole Palatine di Milano.

[3] Indichiamo così l'area del triangolo $BAA_1$.

lui chiamate « cycloides anomalae ». La lunga via che dobbiamo ancora percorrere non ci consente di trattenerci sopra questo e altri scritti minori del medesimo autore.

## Le opere algebriche di G. Wallis

423 - Della scienza del calcolo G. Wallis ha fatto due metodiche esposizioni: una che risale ai primi anni della sua carriera didattica (1657), l'altra (molto più ampia e elevata) che data dal periodo della maturità della sua lunga esistenza.

La prima porta il titolo *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum,* e sembra informata all'idea di mostrare che chi opera con numeri deve seguire le stesse norme di calcolo di chi usa le lettere, e mostra quanta famigliarità avesse l'autore, non soltanto con le lingue classiche, ma anche con l'arabo e l'ebraico. Premesse alcune generalità intorno alla natura e alla divisione della matematica, il Wallis introduce l'unità e i numeri interi facendo rilevare l'ufficio del 1º nel sistema di numerazione in uso. Scendendo alla numerazione parlata e scritta, fa noti i procedimenti usati allo scopo dai Latini, dai Greci e dagli Arabi, senza omettere un cenno sopra le frazioni decimali. Passando nel campo algebrico, egli fa conoscere i vari sistemi in uso per designare l'incognita e le successive potenze di essa. Seguono minuti particolari come si eseguano le operazioni aritmetiche e sui modi di verificarne i risultati, con interessanti applicazioni alla cronologia. Servendosi di quanto precede, l'autore espone algebricamente ciò che contiene il II Libro di Euclide e le regole per calcolare le più semplici aree piane. Il paragone di due numeri lo porta a occuparsi delle progressioni aritmetiche e geometriche: l'applicazione agli scacchi presenta scarsa novità, ma qualche lettore s'interesserà a trovare riprodotto una pagina araba ove sono narrate le origini del celebre giuoco. Si trova poi una nuova esposizione del V. Libro di Euclide, quasi preludio alla regola del tre (la cosidetta « regula aurea ») diretta, inversa e composta. Si apprendono da ultimo la regola di società e la teoria delle frazioni, aritmetiche e algebriche.

Assai più ampio è il programma svolto nella seconda delle opere algebriche del Wallis (pubblicata in inglese nel 1673 col titolo *Treatise of algebra both historical and practical,* rifatta e tradotta in latino nel 1685). È una vasta esposizione storica e dottrinale di ciò che era l'algebra verso il tramonto del secolo XVII, con l'inclusione di questioni che oggi ritengonsi estranee a questa disciplina, scritta in base alla letteratura relativa, a cominciare da Luca Pacioli (le opere del Fibonacci non erano state peranco dissepolte). Limiti di spazio e il desiderio di non ripeterci ci impediscono di descrivere il contenuto dei 112 Capitoli che la formano. Osserviamo in generale che nella parte teorica il Wallis si rivela per esperto insegnante [1], non esigendo dal lettore troppi sforzi

[1] Egli è l'inventore del vocabolo *mantissa* per indicare in generale la parte decimale di un numero frazionario, anche se questo non rappresenta un logaritmo.

per intenderlo. Come storico egli si mostra *in generale* pronto e disposto a riconoscere i meriti dei suoi predecessori (confermano questo giudizio alcuni suoi scritti storici pubblicati nelle *Philosophical Transactions*), siano essi o non inglesi. Diciamo « in generale », perchè di fronte a Descartes egli, traviato da esagerato nazionalismo, ha totalmente perduta la serenità di giudizio, giacchè si è sforzato di mostrare che la *Géométrie* è priva di qualunque novità ed importanza; secondo lui ciò che vi è di pregevole non è nuovo, ciò che è importante manca di originalità essendo trascritto dall'opera dell'Harriot (n. 333). Ora l'autore del *Discours de la méthode,* in una lettera al P. Mersenne del dicembre 1638, ha riconosciuto di possedere da tempo quest'opera, ma dichiara di averla percorsa solo dopo la pubblicazione della *Géométrie,* aggiungendo di non avervi notato che qualche punto di contatto con questa, il che ogni spassionato lettore non può che riconoscere per conforme al vero. Malgrado ciò l'accusa di plagio contro Descartes continuò a sussistere, forse per opera di Lord Cavendish (1703-1783), che viveva a Parigi a partire dal 1645 e che più tardi presiedette la Società Reale; se ne ha una prova in una lettera scritta dal Carcavy a Descartes, addì 24 settembre 1649, cioè nel momento in cui questi stava per intraprendere il viaggio che doveva riuscirgli fatale. È però il Wallis che gode del triste privilegio di aver proclamata a viso aperto quella calunnia, documentandola a modo suo [1], non ottenendo però altro risultato che quella di screditare se stesso e di rendere diffidenti i lettori della sua opera, i quali non dimenticano l'antico adagio « semel mentitus, semper mentitus ».

424 - Forse a complemento di questa grande enciclopedia algebrica, il Wallis scrisse (in inglese nel 1685) un'operetta in cui sono trattati temi che non vi avevano preso posto. Si trovano in essa calcolati i numeri delle combinazioni e delle permutazioni (« alternationes ») che possono formarsi con un certo numero di elementi, anche nel caso in cui essi non siano tutti distinti; riguardo al numero delle permutazioni egli ritiene prezzo dell'opera far rilevare l'enormità dei numeri a cui essi conducono; perciò calcola il numero di quelle che possono farsi con le 24 lettere dell'alfabeto e che trova essere 620448401733239439360000; supponendo di scriverne cinque in ognuno dei 525600 minuti che cadono in ciascun anno, veda il lettore quante vite occorrerebbe per esaurirle tutte! Il Wallis volgesi poi ad altro tema, cioè allo studio dei divisori di un numero, per risolvere la prima delle questioni proposte da Fermat nella sua nota sfida (v. n. 362).

Nello stesso anno 1685 e pure in inglese lo stesso matematico pubblicò una trattazione della teoria delle sezioni angolari (moltiplicazione e divisione degli archi) limitandosi ai casi in cui il moltiplicatore o divisore sia uno dei numeri 2, 3..., 6; fra le applicazioni fatte delle for-

---

[1] Oltre a molti passi della sua *Algebra* si veda la lettera a S. Morland (12 marzo 1688) inserita nel t. III, p. 207-213 delle *Opera mathematica*, nonchè l'altra (4 luglio 1692), riprodotta ivi p. 213-220 e diretta al P. Prestet (1650 circa - 1690), autore di due volumi di *Nouveaux Éléments de mathématiques*.

mole ottenute vanno notate le soluzioni di questioni proposte, una dal francese Francesco du Laurens nel 1667, l'altra dal belga Jacopo Wassennaar (v. p. 474) nel 1668, la prima relativa al cerchio, la seconda alla concoide esterna.

## E. G. Rahn e G. Pell

425 - I perfezionamenti arrecati alla simbolica algebrica durante la prima metà del secolo XVII non furono riguardati da tutti come definitivi. Fra coloro che si sforzarono di renderli migilori va ricordato lo svizzero E. G. Rahn (n. il 13 marzo 1622, m. il 27 maggio 1676) il quale, per consiglio e con l'aiuto di un amico, decise di fare una nuova esposizione della scienza del calcolo quale l'aveva appresa da Diofanto, Viète, Descartes e van Schooten: così ebbe origine la *Teutsche algebra* pubblicata a Zurigo nel 1659 (¹).

Si ritiene generalmente che quell'anonimo consigliere fosse Giovanni Pell; questi nacque a Southwick il 1° marzo 1611 e studiò a Cambridge, ove acquistò rinomanza di poliglotta. Nel 1643 fu chiamato a insegnare nell'Università di Amsterdam; tenne allora un corso sopra Diofanto, delle cui opere fece una completa traduzione, che rimase inedita, e diede in luce (nel 1646 in inglese, l'anno seguente in latino) una confutazione della pretesa quadratura del cerchio del matematico e astronomo danese Longomontano (v. p. 544). Rimpatriato nel 1652, si cattivò la fiducia di Cromwell, che lo inviò a Zurigo come agente diplomatico. Ritornato a Londra nel 1658, si accostò alla monarchia, vestì l'abito ecclesiastico e fu eletto membro della Società Reale di Londra. Nel 1672 pubblicò una ampia tavola di quadrati e morì il 12 dicembre 1685, lasciando un grande numero di fogli manoscritti, che dormono nel British Museum, nell'attesa di esame da parte di persona competente.

Il Rahn, nella sua opera, oltre i simboli già in uso, cioè +, —, =, >, < si serve per la moltiplicazione del segno * e per la divisione dell'altro ÷. Simboli più complicati vengono da lui impiegati per altri scopi; non essendo stati adottati poi, ci dispensiamo dal riferirli; rileviamo piuttosto che, per indicare l'elevazione a potenza, è usato da lui il vocabolo « involviren », donde deriva la parola « involution » usata tuttora allo stesso scopo da molti autori inglesi. Nella stessa opera si trova l'elenco dei numeri dispari non superiori a 24.000 non divisibili per 5, ognuno seguito dal suo minimo divisore o dalla lettera $p$ se si tratta di un numero primo. Essa (che è ricordata con rispetto da Leibniz) trovò un traduttore in inglese in Tommaso Backer (1625-1690); al riguardo va notato anzitutto che nel titolo del risultante volume (*An introduction to algebra, translated out of the high-dutch into english*, Londra 1668) il nome del Rahn è scomparso, e in secondo luogo che la versione venne migliorata per opera del Pell, a cui, in particolare, devesi se l'anzidetto elenco fu esteso sino a 100000. Ma ivi (e tanto meno nell'originale) non si trova traccia dell'equazione $x^2 + a y^2 = 1$, onde è

(¹) Il manoscritto di una II edizione, per volere dell'autore, trovasi nella civica Biblioteca di Zurigo.

vano cercarvi qualche giustificazione per la designazione di « equazione di Pell » data a quell'equazione da Euler e seguaci. Altrettanto ingiustificata, sino a prova in contrario, è l'attribuzione al Pell dei nuovi simboli introdotti dal Rahn, attribuzione dovuta al Wallis, il quale erroneamente ritenne che il Pell fosse l'autore di quel volume anonimo.

## G. Caramuel

426 - Chiude questa serie di algebristi post-cartesiani un matematico di cui la Spagna va superba benchè si tratti di persona di altra stirpe, che solo casualmente nacque a Madrid, e visse quasi sempre in altre parti d'Europa. Parliamo di Giovanni Caramuel. Egli nacque il 23 maggio 1606 dall'ingegnere Lorenzo Caramuel y Lobkowitz, oriundo boemo, e dall'olandese Catalina de Frisia. Sino da giovinetto mostrò attitudini agli studi scientifici, vestì l'abito di S. Benedetto e cominciò la sua carriera d'insegnante nel collegio d'Alcalà, di cui era stato alunno. Passò poi in Portogallo e a Louvain, ove si fece ammirare, non solo per il suo sapere, ma anche per atti di valore, che compì dopo avere momentaneamente mutata la tunica con la corazza. Trasferitosi in Iscozia, fu eletto vicario generale dell'Ordine Cistercense per la Gran Bretagna e l'Irlanda. Ritornò sul continente in qualità di abate di Disibodenberg (Palatinato); cacciatone dagli eserciti svedesi, riparò a Vienna, donde si trasferì a Praga, ove si trovò quando la città nel 1648 fu assalita dalle truppe di Gustavo Adolfo, e anche in tale contingenza diede prova di non comune valore. Papa Alessandro VII, che lo aveva conosciuto personalmente, lo chiamò a Roma, ma poco dopo i nemici del Caramuel ne ottennero l'allontanamento; fu allora nominato vescovo della Campania e poi arcivescovo di Taranto; per agevolargli il compimento dei suoi studi, il re di Spagna lo fece trasferire a Vigevano, ove morì nel 1682. Uomo di vasta coltura meravigliò i contemporanei per la sua operosità, chè le sue opere si fanno ammontare a duecentosessantadue e alcune sono grossi in-f°. A noi interessano i quattro volumi del suo *Cursus mathematicus* di cui molte pagine concernono la storia e la filosofia della matematica. Due di essi portano la data « Campania, 1670 » e il titolo speciale *Mathesis biceps vetus et nova*. Vi si nota l'osservazione della possibilità di concepire sistemi di numerazione a base differente da 10; il Caramuel la illustra mostrando come si presenti l'aritmetica quando si assuma come base 2, o 3, ecc.

Altra novità è l'introduzione di un nuovo sistema di logaritmi in una base $C$ tale che $\log_{10} C = 9$; l'autore aggiunge che fra i nuovi logaritmi e quelli a base 10 passa la relazione $\log_{10} N = 9 \log_C N$, ove $N$ è un numero qualsivoglia; si tratta di un perfezionamento del sistema neperiano, che ebbe vita transitoria, ma è ricco di una certa importanza teorica.

## E. Gunter e E. Wingate

427 - Nella medesima epoca due persone, nate entrambe in Inghilterra, si adoperarono con successo a diffondere la conoscenza e facilitare l'uso dei logaritmi; è dover nostro di segnalarle ai lettori.

Edoardo Gunter, nato nel 1581, entrò nel 1599 nell'Università di Oxford, ove ottenne i gradi di B. A. (1603) e M. A. (1606). Un metodo di proiezione della sfera terrestre da lui inventato, che circolava manoscritto, lo pose in relazione col Briggs e l'Oughtred. Inventò anche un quadrante portatile, che fu giudicato utilissimo in pratica. Nel 1619 ebbe una cattedra nel Gresham College di Londra, e l'anno seguente pubblicò. col titolo *Canon triangulorum,* una tavola di seni e tangenti ove s'incontrano per la prima volta i termini tecnici « coseno » e « cotangente ». Inventò anche un circolo di proporizone, che è una specie di regolo calcolatorio. Delle sue opere fu fatta una raccolta, che, a breve distanza, ebbe due edizioni (1624, 1636).

Edoardo Wingate nacque nel Yorkshire correndo l'anno 1596, e compì i propri studi nell'Università di Oxford durante il periodo 1610-1614. Passò quindi in Francia, ove, con la parola e con gli scritti, popolarizzò le invenzioni di Napier e di Gunter. Rientrato in patria mentre ferveva la guerra civile, ottenne un posto nella magistratura. Quando giunse a morte (13 dicembre 1657), gettando uno sguardo sulla propria opera, potè constatare con soddisfazione che essa non era stata vana, chè dei volumi da lui dedicati all'esposizione del calcolo logaritmico e alla costruzione e l'uso del circolo di proporzione, si ripetevano le edizioni in Inghilterra e in Francia.

## Uno scritto trigonometrico di G. Caswell

428 - Malgrado il moltiplicarsi di nuove branche della matematica durante il secolo XVII, la trigonometria non fu trascurata, grazie alle numerose e importanti applicazioni di cui è suscettibile. Ed è merito del Wallis di avere, con l'inserirla nel II Vol. delle sue *Opere*, salvata dall'inedito una nuova esposizione di essa dovuta a Giovanni Caswell. professore e vice-rettore dell'Università di Oxford. Compatriotta e seguace dell'Oughtred, l'autore fa largo uso di simboli, alcuni dei quali giova qui riferire:

$$R = \text{raggio},\ S = \text{seno},\ \Sigma = \text{coseno},\ s = \text{secante},$$
$$\sigma = \text{cosecante},\ T = \text{tangente},\ t = \text{cotangente},$$
$$V = \text{seno — verso d'un arco},$$
$$s\, v = \text{seno — verso del complemento}.$$

L'esposizione della trigonometria piana del Caswell è metodica, essendo tutta fondata sui teoremi dei seni, delle tangenti e del coseno. Nella trigonometria sferica egli considera il triedro corrispondente a un triangolo sferico e, per dedurre il teorema del coseno, ricorre a ribalta-

menti, dando così un convincente esempio dell'utilità di applicare alla trigonometria sferica alcuni procedimenti propri della geometria descrittiva. Si devono a lui dimostrazioni originali delle analogie di Napier e la pubblicazione di altre formole congeneri comunicategli da un parroco suo amico, Tommaso Backer, a noi già noto (v. n. 425), il cui nome è legato a soluzioni grafiche delle equazioni di grado superiore. Basta ciò a stabilire l'importanza della pubblicazione discorsa; essa porge una novella prova del fervore con cui era allora coltivata la matematica in Inghilterra; nessuna meraviglia, pertanto, se in quella nobile terra sia nato uno dei sommi di cui vita e opere sono narrate nel seguente Capitolo.

## BIBLIOGRAFIA


RENATI DESCARTES, *Geometria opera atque studio* FRANCISCI À SCHOOTEN. Francfurti ad Moenum 1649. (Contiene: R. DESCARTES, *Geometria, tribus libris comprehensa.* F. DEBEAUNE, *in illam Notae breves.* FRANCISCI À SCHOOTEN, *in eandem Commentarii recogniti & aucti.* F. À SCHOOTEN, *De Cubicarum aequationum resolutione.* F. À SCHOOTEN, *Additamentum in quo continentur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; & generalis regula de extrahendi quibuscumque radicibus binomiis.* J. HUDDENII, *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit.* H. VAN HEURAET, *Epistola, de curvarum linearum in rectas transmutatione*).

RENATI DESCARTES, *Matheseos universalis seu Introductio ad Geometriae methodum conscripta ab* ER. BARTHOLINO. Id. Id. (Contiene inoltre: F. DEBEAUNE, *Duo tractatus posthumi, alter de natura et constitutione, altre de limitibus aequationum.* J. DE WITT, *De elementis curvarum linearum libri duo.* F. À SCHOOTEN, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico in lucem editus a* F. À SCHOOTEN. *Notae et admadversiones tumultuariae in universum opus*).

P. DE LA HIRE, *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des paraboles, des ellipses et des hyperboles* (Paris, 1673).

P. DE LA HIRE, *Nouveaux éléments des sections coniques* (Paris, 1679).

P. DE LA HIRE, *Les lieux géométriques* (Paris, 1679).

P. DE LA HIRE, *La construction des liex analytiques* (Paris, 1679).

P. DE LA HIRE, *Sectiones conicae in novem libros distributae* (Paris, 1685).

*Analysis geometrica sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones.* Pars Prima: *De planis.* Authore D. ANTONIO HUGONE DE OMERIQUE Sanlucarense (Gadibus, 1698).

J. OZANAM, *Traité des lignes de premier genre expliquées par une méthode nouvelle et facile. Traité de la construction des équations pour la resolution des problèmes déterminés. Traité des lieux géométriques expliqués par une méthode courte et facile* (Paris, 1687) (¹).

J. OZANAM, *Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques* (Paris, 1690).

J. OZANAM, *Cours de mathématiques*, 5 Vol. (Paris, 1693).

J. OZANAM, *Récréations mathématiques et physiques* (Paris, 1694; Nouv. éd., Amsterdam, 1700; altra edizione curata dal MONTUCLA, Paris, 1778).

C. HUYGENS, *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro. Quibus subjuncta est* Ἐξέτασις *Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à Sancto Vincentio, editae anno* MDXLVII (Ludg. Bat., Anno MDCLI).

C. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa, accedunt eiusdem Problematum quorundam illustrium constructiones* (Ludg. Batav., MCCLIV).


(¹) Temi analoghi sono trattati in un voluminoso manoscritto esistente a Monaco di Baviera, da P. Tannery attribuito appunto all'Ozanam.

C. HUYGENS, *Ad C. V. Franc. Xaver. Ainscom S. I. Epistola, qua dilluuntur ea quibus Cyclometriae* Ἐξέτασις *Gregorii à Sancto Vincentio impugnata fuit* (Hagae Com., MDCLVI).
C. HUYGENS, *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae* (Ludg. Batav., 1657).
C. HUYGENS, *Opera varia* (Lugd. Bat., 1682).
C. HUYGENS, *Opuscula posthuma* (Lugd. Bat., 1703).
C. HUYGENS, *Opera reliqua* (Lugd. Bat., 1728).
*Oeuvres complètes de* HUYGENS, *publiées par la Société hollandaise des sciences* (sinora 16 Vol.; La Haye, 1888-1929).
A. ARNAULD, *Nouveax éléments de géométrie contenant, outre un ordre tout nouveau & des nouvelles démonstrations des propositions les plus communes, des nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, des nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était pas avisé, et des nouvelles manières de trouver & de démontrer la proportion des lignes* (Paris, 1667).
A. ARNAULD, *Solution d'un des plus celèbres et des plus difficiles problèmes d'arithmétique appellé communement les quarrez magiques* (Paris, 1667).
V. GIORDANO, *Euclide restituto overo gli antichi Elementi geometrici ristampati e facilitati* (Roma, 1680).
D. SCHWENTER, *Deliciae physico-mathematicae oder mathematische und philosophische Erquickstunden* (Nürnberg, 1636).
C. HENRY, *Problèmes de géométrie pratique de Mydorge, Enoncés et solutions* (Bull. di bibl. e storia delle scienze fis. e mat., t. XVII, 1883).
G. MOHR, *Euclides danicus bestaende ludi too deele* (Amsterdam, 1672; nuova ed., accompagnata da una versione in tedesco, Kobenhavn, 1928).
G. E. RAHN, *Teutsche Algebra, oder algebraische Rechenkunst zusamit ihrem Gebrauch* (Zürich, 1659).
G. CARAMUEL, *Cursus mathematicus* (il IV Vol. è intitolato *Mathesis biceps vetus*, ed è datato Campania 1670).
*The Works of* EDMUND GUNTER, *containing the descriptions and use of sector, cross-staff, quadrant and other instruments* (London, 1624).
E. WINGATE, *L'usage de la règle de proportion en arithmétique* (Paris, 1624).
E. WINGATE, *The use of the rule of proportion* (London, 1626).
E. WINGATE, *Arithmétique logaritmique* (Paris, 1626).
E. WINGATE, Λογαριθμοτεχνία (London, 1635; traduzione dell'opera precedente).
E. WINGATE, *Of natural and artificial arithmetique* (Londra, 1630).
G. CEVA, *De lineis rectis se invicem secantibus* (Mediolano, 1678).
G. CECA, *De re numeraria quod fieri potest geometrice tractata* (Mantua, 1711).
T. CEVA, *Opuscula mathematica* (Mediolani, 1699).

## CAPITOLO XXVIII

# LE ORIGINI DELL'ANALISI INFINITESIMALE: NEWTON E LEIBNIZ

## PARTE PRIMA: NEWTON

### Biografia

429 - L'anno stesso della morte di Galileo (1642), nel giorno di Natale, nacque Isacco Newton a Woolsthorpe (contea di Lincoln). Figlio postumo di un modesto proprietario di campagna, vide la luce prima del tempo ed era talmente gracile che la sua vita parve per molto tempo in pericolo. A tre anni, essendo la madre convolata a nuove nozze, fu affidato alle cure affettuose di prossimi congiunti, i quali, quando egli toccò i dodici anni, lo inviarono nella vicina città di Grantham per riceevervi, in una scuola che esiste tuttora, una istruzione conforme alla sua posizione sociale. Ivi, dopo un breve periodo di oscuro noviziato, egli emerse sopra i suoi condiscepoli, i quali più tardi si compiacevano di ricordarne l'indole dolce e l'ingegno vivacissimo, la passione per il disegno e la spiccata attitudine a costruire, nelle ore di ricreazione, ordigni di eccezionale complicazione e squisita fattura.

Sua madre, rimasta vedova una nuova volta, era nel frattempo ritornata nella casa del suo primo marito, accompagnata da tre figli avuti dal secondo. Massaia di ristrette vedute, nella speranza di arrotondare le scarse rendite della famiglia, decise di togliere dalla scuola il suo primogenito per farne un esperto agricoltore; ma non tardò ad accorgersi che era fatica sprecata, chè il giovinetto non s'interessava in alcun modo di affari, avendo il pensiero rivolto sempre a libri e meccanismi; in conseguenza egli fu rinviato a Grantham, con lo scopo di procurargli un'istruzione sufficiente per essere ammesso in una Università; un taccuino di appunti da lui presi allora mostra che in quell'epoca il suo principale interesse era rivolto verso esperienze di fisica e manipolazioni chimiche. Nel giugno 1661 egli fece il proprio ingresso nel Trinity College di Cambridge, il grande istituto d'istruzione di cui era destinato a divenire uno dei più brillanti elementi.

Nella celebre città universitaria egli giunse con un corredo di cognizioni forse meno ricco di quello che avevano parecchi dei suoi compagni, ma con la mente fresca e riposata; a lui toccò poi la singolare fortuna di trovare fra gli insegnanti Isacco Barrow, allora circa trentenne, che non tardò a scoprire nel suo nuovo alunno una intelligenza eccezionale. Appunto per suo consiglio Newton intraprese lo studio del-

l'*Ottica* del Kepler; se non che, essendo stato arrestato da alcuni sviluppi matematici superiori alle sue forze, si volse per aiuto ad Euclide; ma non tardò a stancarsi di un'opera che gli appariva insignificante: soltanto in età più matura ne riconobbe le doti eminenti e si rammaricò di una deliberazione dannosa, frutto di giovanile presunzione. Si volse allora a Descartes, da cui trasse ammaestramenti e ispirazione, e poi a Viète, Oughtred, van Schooten, interrompendo queste letture per dedicarsi a osservazioni astronomiche e compiere esperimenti di fisica e chimica. Proseguendo nei propri studi passò (1663) alle opere di Wallis, l'astro allora più brillante del cielo matematico inglese, e ne subì un'influenza profonda e benefica che il tempo fu incapace di cancellare. Frutto di siffatti studi è un manoscritto, che risale al 1665, nel quale, come vedremo, si trovano il teorema del binomio per un esponente qualunque, molti sviluppi in serie e le prime formole del calcolo flussionale, con applicazioni alle equazioni algebriche e alle curve piane. Nel gennaio di detto anno l'Università di Cambridge gli conferì il primo dei gradi universitari del tempo (B. A.). Nell'estate del medesimo anno la peste, che sino dal 1664 infieriva a Londra e dintorni, lo costrinse ad abbandonare momentaneamente l'« alma mater studiorum » e riparare nella casa materna. Cessato il terribile flagello che tante vittime aveva mietuto, ritornò a Cambridge e potè conseguire gli altri gradi universitari del tempo, cioè quelli di « Minor Fellow » (1° ottobre 1667) e poi di M. A. (16 marzo 1668).

430 - Benchè sino a quel momento il giovane scienziato nulla avesse dato alle stampe, pure grande era la considerazione di cui egli godeva negli ambienti accademici del tempo. Giovandosi dei risultati conseguiti, come dicemmo, sino dal 1665, egli compose la memoria *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* e nel 1669 la sottopose all'approvazione del proprio maestro Barrow, e questi, nell'estate del medesimo anno, la fece conoscere al Collins (p. 390) il quale chiese ed ottenne l'autorizzazione di trarne copie da comunicare ai propri numerosi corrispondenti; cosicchè tutto induce a credere che le prime scoperte di Newton abbiano raggiunto ampia diffusione fino da allora, cioè molto prima che fossero date alle stampe. Poco dopo, per invito del suo maestro ed amico Barrow, fece una seconda esposizione dei metodi da lui creati (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*) destinata ad essere data alle stampe in appendice ad una allor progettata versione dall'olandese in latino, di un trattato d'algebra di un certo Kuckhuysen [1]; il progetto essendo stato abbandonato, quel lavoro rimase inedito sino al 1736, quando ne fu pubblicata una versione in inglese. Ma il Barrow, che lesse quello scritto e lo ammirò, ne trasse una nuova prova del sommo valore del suo antico discepolo; la stima in cui egli lo teneva era tale che, con una deliberazione forse unica negli annali della pubblica istruzione, decise di cedergli la cattedra che egli occupava nella Università di Cambridge, passando con armi e bagagli alla teologia; in conseguenza

[1] Particolari al riguardo leggonsi in lettere scambiate fra Newton e J. Collins, la prima delle quali reca la data 11 luglio 1670 (*Correspondence of scientific men*, citata dalla Bibliografia che chiude il presente Capitolo, p. 592).

Newton, addì 29 ottobre 1669, fu eletto Professore Lucasiano e il re d'Inghilterra, per una speciale concessione, lo dispensò dal vestire l'abito talare, come avrebbero imposto le tavole di fondazione di quella cattedra.

431 - Il ventennio che corre dal 1667 al 1686, mentre fu estremamente fecondo per le scienze fisico-matematiche (1), nella vita di Newton si presenta deserto di avvenimenti degni di essere qui registrati. All'inizio della carriera d'insegnante egli si occupava con marcata preferenza di ottica; concepì allora quel telescopio a riflessione che reca tuttora il suo nome; ad esso s'interessò la Società Reale di Londra, la quale ordinò che nei suoi Atti ne fosse inserita una descrizione e si affrettò a chiamare nel proprio seno il giovane inventore (11 gennaio 1671). A questo grande sodalizio egli comunicò (lettera all'Oldenburg del 6 febbraio 1672) la scoperta della varia rifrangibilità dei raggi costituenti la luce bianca; malgrado le critiche mosse da più parti a tale meraviglioso risultato, esso, come è notorio, ha preso posto nell'elenco dei fenomeni su cui non è possibile alcun ragionevole dubbio, specialmente dopo che le relative esperienze furono descritte dal grande trattato che Newton pubblicò (1704) sull'*Ottica*.

Un altro argomento che fu a lungo oggetto di meditazione da parte di Newton era in quel tempo all'ordine del giorno; parliamo della ricerca delle leggi che governano la caduta dei gravi verso il centro della terra. Sembra che sino dal 1664 egli fosse convinto della verità della legge di gravitazione universale, già emessa da altri in forma ipotetica, secondo cui quella forza si eserciterebbe in ragione inversa del quadrato della distanza. Ma gli ostacoli che incontrò nella determinazione dell'attrazione esercitata sopra un punto esterno da una sfera materiale, nonchè la mancanza di un algoritmo generalmente noto per risolvere i problemi che andava incontrando, fecero ritardare la conclusione di quella fondamentale ricerca per quasi quattordici anni. Ripresala, dopo circa cinque anni d'intense meditazioni, avendo dimostrata l'applicabilità dell'anzidetta legge alla luna, si sentì in grado di assidere la meccanica dei corpi celesti su basi di granitica solidità.

432 - Di quanto egli andava elaborando la Società Reale di Londra fu informata nell'adunanza del 10 dicembre 1684 per bocca di un grande astronomo, a cui la scoperta di una cometa ha assicurato meritata popolarità: Edmondo Halley. Questi espose in quel giorno nelle sue linee generali il piano e i risultati di un trattato *Sul moto,* composto da New-

---

(1) È in quest'epoca che Newton giunse a trasformare, servendosi della procedura di calcolo da lui inventata, la vaga e diffusissima concezione di una attrazione governatrice del mondo, nel concetto preciso di gravitazione universale. Mancano attendibili particolari intorno ai modi in cui procedettero le relative ricerche. Si è soltanto serbato ricordo di una grave difficoltà in cui egli si è imbattuto. Alcuni storici ritennero che sia stata conseguenza dell'applicazione dell'imperfetta valutazione del diametro terrestre dovuta a Snellius, difficoltà che venne superata quando l'eminente scienziato conobbe e si servì del valore molto più preciso ottenuto dall'astronomo francese G. Picard (1620-1682). Ma di recente si trovarono delle prove che quello scoglio consisteva nella difficoltà di calcolare l'attrazione esercitata da una sfera solida sopra un punto esterno.

ton, e la detta Società immantinente incaricò l'Halley stesso di procurargliene comunicazione completa. L'invito fu accolto, e nella storica adunanza del 15 aprile 1685 al grande sodalizio inglese furono presentati i primi due Libri dell'immortale opera che doveva ricevere come titolo *Philosophiae naturalis principia mathematica;* ed esso, in preda a un ben giustificato entusiasmo, incaricò il proprio ufficio di presidenza di trovare i mezzi affinchè quell'opera potesse venire pubblicata sotto il proprio patronato. All'effettuazione di questo nobilissimo disegno si opposero da principio le strettezze del bilancio della Società Reale (cfr. p. 394); ma queste difficoltà furono superate quando il provvidenziale Halley assunse di farsi mallevadore presso il tipografo del rimborso delle spese di stampa. In conseguenza il manoscritto newtoniano fu recato in tipografia il 5 di giugno del 1686; l'Halley assunse l'ufficio di conrevisore della stampa e lo disimpegnò con tanto zelo e sì grande abilità che — tenendo conto anche dell'opera anteriormente spiegata a vantaggio dei *Principia* — fu detto con piena ragione che, senza lui, questi non avrebbero vista la luce; egli, che era anche buon latinista, vi premise alcuni versi da cui traspare tutta la sua ammirazione per Newton, l'ultimo dei quali suona così:

Nec fas est propius mortali attingere divos.

Grazie al suo zelo indefesso, nel luglio del seguente anno potè venire offerta a re Giacomo II la prima copia dell'opera destinata ad assicurare all'Inghilterra, durante circa un secolo, un indiscusso primato nelle scienze fisico-matematiche.

433 - Nel mese di febbraio del 1687 Newton fu scelto dall'Università di Cambridge come difensore dei suoi storici diritti minacciati dal sovrano del tempo ed egli adempì tale delicata missione con tanto successo che lo stesso Ateneo lo scelse come proprio rappresentante nel Parlamento che sedette dal gennaio 1689 al febbraio 1690; in siffatta qualità egli sostenne con moderazione non priva di fermezza i principi di libertà religiosa e civile contro chi intendeva conculcarli.

Ritornato alla pace degli studi, egli volse la mente alla teoria delle rifrazioni astronomiche, di cui può dirsi il creatore, ma nell'autunno 1692 ebbe a subire un grave attacco di nevrastenia, che fortunatamente egli non tardò a superare. Poco dopo Lord Halifax, allora cancelliere dello scacchiere, escogitò un progetto di radicale riforma del sistema monetario in uso, che allora presentava difetti gravissimi; ottenuto il parere favorevole dei competenti, per attuarlo nominò (19 marzo 1695) Newton ispettore della Zecca di Londra; l'aspettativa del governo inglese non fu delusa; i servigi da lui prestati furono talmente cospicui (e chi vuole misurarli non ha che consultare i rapporti da lui redatti e da tempo dati alle stampe) che, resosi vacante il posto di direttore di quell'importante stabilimento statale, Newton fu chiamato a occuparlo e lo conservò sino al termine della sua vita; da questo momento (1699) data il distacco del sommo investigatore dall'Università di cui era stato per molto tempo lustro e decoro. Nel medesimo anno 1699 l'Accademia delle Scienze di Parigi lo chiamava a occupare uno degli otto posti di membro straniero

di cui disponeva; nel 1703 fu eletto presidente della Società Reale di Londra, altra carica che tenne sino alla morte; e nel 1705, in occasione di una visita fatta dalla regina Anna all'Università di Cambridge, gli fu conferito il titolo di Sir, di cui amò sempre di fregiarsi.

434 - Le gravi cure inerenti al governo della Zecca di Londra assorbirono tanta parte dell'attività di Newton che non a torto fu detto avere esse ritardato di un secolo il progresso delle scienze fisico-matematiche. Tuttavia la partecipazione alla stampa o ristampa di suoi lavori, il fattivo interesse da lui manifestato per le polemiche che sollevarono alcune sue opere e, per dir tutto, le sue ricerche cronologiche, storiche e teologiche stanno a provare che egli non aveva abbandonato completamente gli studi.

Egli, che in giovanile età era di costituzione assai gracile, con l'andare degli anni si fece più robusto, come chiunque può riscontrare sopra i numerosi ritratti che di lui si conservano. Nel 1722, quando toccava gli ottant'anni, subì un primo attacco di mal della pietra, che riuscì a superare; tre anni dopo lottò vittoriosamente contro una violenta polmonite; ma un nuovo attacco di quel male lo spense il 20 marzo 1727, gettando nel lutto l'Inghilterra che lo venerava come una gloria nazionale. I suoi funerali furono solenni, quasi si trattasse di un membro della famiglia regnante; per unanime deliberazione fu eretta a lui una tomba sontuosa nell'Abbazia di Westminster, che tuttora esiste e su cui si legge una splendida epigrafe che chiudesi con le parole, tante volte ripetute: *Sibi gratulentur mortales, tale tantumque extitisse humani generis decus*; tributandogli tanti onori l'Inghilterra si è mostrata degna madre di un tale figlio (1).

## Flussioni e Fluenti

435 - Per conoscere i contributi dati da Newton all'analisi dell'infinito fa mestieri ricorrere agli opuscoli da noi già menzionati, scritti da lui in età giovanile, ma pubblicati soltanto quando i *Principia* lo avevano fatto giungere ai fastigi della gloria.

Il più antico è quello intitolato *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas,* composto verso il 1666, comunicato tre anni dopo al Barrow, che lo fece conoscere al Collins e a Lord Brouncker, e dato alle stampe nel 1712. Punto di partenza è la proposizione, dimostrata verso il termine del lavoro, che l'area della curva di equazione $y = ax^{m/n}$

(1) I numerosi manoscritti da lui lasciati passarono nelle mani della diletta nipote Caterina Barton (andata sposa a John Conduitt che successe a Newton nel governo della zecca di Londra) e quindi in quelle della figlia di Caterina, moglie al visconte di Lymington, figlio del primo Lord Portsmouth. Un altro nobile di questo nome, circa sessant'anni fa ne fece dono all'Università di Cambridge, la quale nel 1872 nominò una Commissione di cinque membri (fra cui erano l'astronomo Adams e il fisico-matematico Stokes) perchè riferisse sul contenuto di quanto essi contengono di provenienza dell'autore dei *Principia*; nel 1888 fu pubblicata la relazione da essa redatta; questa, nell'attesa dell'invocata edizione veramente completa delle *Opere* di quel grande, ne costituisce un'ottima preparazione.

è espressa da $\frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$; movendo i primi passi in una terra incognita il giovane scienziato è inciampato e caduto nell'errore di ritenere questo risultato valido anche nel caso $m + n = 0$ e che quindi si avesse $\int \frac{dx}{x} = \infty$. Se il secondo membro dell'equazione di una curva è la somma di termini della forma $a x^{m/n}$ la quadratura si ottiene addizionando altrettanti termini della forma

$$\frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} ;$$

noti il lettore la disinvoltura con cui Newton, sin da giovane, trattava potenze a esponenti non interi e positivi, della quale s'incontrano attestazioni anche in altri dei suoi scritti. Se il secondo membro della equazione data contiene frazioni o potenze a termini polinomi, Newton per ottenerne la quadratura ricorre a sviluppi in serie, che stabilisce generalizzando i procedimenti che l'aritmetica insegna per eseguire una divisione algebrica o estrarre una radice; questa geniale estensione gli ha permesso di quadrare l'iperbole e il cerchio ricorrendo agli sviluppi in serie di potenze intere e positive delle quantità $\sqrt{a^2 \pm x^2}$. Non va taciuto che Newton si è anche occupato della rettificazione della circonferenza; supponendo questa rappresentata dalla equazione $x^2 - x + y^2 = 0$, il suo arco è dato da

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}} = \int \frac{dx\sqrt{x - x^2}}{2(x - x^2)} ;$$

onde è chiaro come si possa calcolarlo ricorrendo a uno sviluppo in serie. Lo stesso concetto applicato all'iperbole $y(1 + x) = 1$ gli fece, non solo ritrovare la nota formola di Mercator

$$z = \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots ,$$

ma, per inversione, lo condusse all'altra

$$x = 1 + z + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!} + \dots ;$$

è la serie esponenziale, che fa qui il proprio ingresso nella scienza.

436 - Queste e altre delle cose esposte nel citato opuscolo si ritrovano nell'altro intitolato *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, destinato alla stampa sin da quando fu composto (1671), ma rimasto inedito sino al 1736. Essendo stato scritto con intenti didattici, è meno conciso del precedente e ricco di esempi e problemi interessanti; percorrendolo, sorge spontaneo il rimpianto per la sua tardiva pubblicazione, chè questa, se fatta tempestivamente, avrebbe impedito il sorgere di malintesi.

fecondi di dolorosi incidenti e, quel che più conta, avrebbe accelerato il cammino dei nuovi calcoli.

Anche nel *Methodus* Newton parte dal concetto di estendere all'algebra i procedimenti propri dell'aritmetica; così, per svolgere in serie il quoziente $a^2/(b + x)$ applica « mutatis mutandis » la regola per trasformare in frazione decimale il quoziente di due numeri, e per ottenere lo sviluppo di $\sqrt{a^2 + x^2}$ si serve di un procedimento modellato su quello in uso per estrarre la radice quadrata di un numero. Volendo poi calcolare per approssimazione la radice di un'equazione algebrica a coefficienti numerici egli ragiona sull'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ (esempio rimasto classico); a tale scopo parte dal valore approssimato $x = 2$, sostituisce nell'equazione data ad $x$, $y + 2$ e nel risultato trascura le potenze superiori di $y$; ottiene in tal modo un valore più approssimato, sul quale ragiona analogamente; è una procedura che rimase nella scienza. Cercando di applicare lo sviluppo in serie di $y$ in funzione di $x$, nell'ipotesi che queste quantità siano legate fra loro da un'equazione algebrica, egli ha suggerita un'altra procedura, che essa pure prese posto stabile nell'algebra; parliamo del celebre « parallelogramma di Newton ».

Queste generalità sugli sviluppi in serie porsero al sommo matematico gli ausiliari di cui si è servito nel seguito del suo scritto. Definite, infatti, le « flussioni » e le « fluenti » egli enuncia chiaramente i due problemi, inversi l'uno dell'altro, che sono fondamentali nell'analisi infinitesimale, cioè ricerca delle flussioni e ricerca delle fluenti; dà regole per risolvere il primo, lo inverte per sciogliere il secondo, senza però accennare ai casi in cui le norme risultanti non possono condurre allo scopo; a mostrare che ve ne sono, basta la considerazione seguente: quando si ha una relazione della forma $dy/dx = f(x)$, lo sviluppo in serie del secondo membro permette di determinare $y$; ma, se il secondo membro ha la forma $f(x, y)$, da quanto egli dice non risulta chiaro come lo stesso artificio possa condurre allo scopo (se lo fosse, qualunque equazione differenziale di I ordine sarebbe integrabile). Newton considera anche il caso di un'equazione fra flussioni di tre o più variabili, mostrando di avere visto chiaramente come in tal caso si possano stabilire fra le variabili stesse una o più relazioni arbitrarie.

Il nostro autore passa poi ad applicare le cose esposte alla risoluzione di problemi che sin d'allora erano giudicati di fondamentale importanza; determinazione dei valori massimi o minimi delle funzioni di una variabile (senza però assegnare criteri che servano a distinguere gli uni dagli altri), costruzione delle tangenti alle curve piane (mediante le sottotangenti), misura della curvatura e conseguente determinazione dei flessi, quadrature e rettificazioni. In tal modo dimostra che, quando siansi risoluti i succitati problemi fondamentali, risultano implicitamente sciolte tutte queste questioni. Non potendo arrestarci a enumerare i casi particolari da lui trattati, notiamo in generale che concernono tutte le curve speciali note nell'ultimo quarto del secolo XVII. Rileviamo da ultimo che Newton si è per primo occupato della ricerca delle curve quadrabili o rettificabili elementarmente, nonchè di quelle rettificabili mediante archi di curve note, lasciando all'Euler e suoi seguaci la gloria di sviscerare completamente questa bella questione.

437 - In nessuno dei precedenti scritti Newton sentì (o almeno espresse) il bisogno di introdurre una simbolica appropriata alle nuove procedure da lui create. Esso è manifestato e soddisfatto nel *Tractatus de quadratura curvarum,* scritto nel periodo 1665-66 (come dichiara l'autore e come è documentato da fogli tuttora esistenti portanti la data 20 maggio 1665) e pubblicato nel 1704 in appendice all'*Ottica.* Esso esordisce con la dichiarazione che tutte le curve si possono riguardare come generate dal movimento di un punto; se si decompone la corrispondente velocità secondo gli assi a cui è riferita la curva, si ottengono le « flussioni » delle coordinate del punto mobile, mentre la velocità stessa è la « flussione » dell'arco descritto da quel punto; viceversa questo è la « fluente » della velocità, mentre le coordinate del suo estremo sono le « fluenti » delle componenti di questa. Questi concetti costituiscono il fondamento del « metodo delle flussioni ». Newton ne segnalò la parentela con la « geometria degli indivisibili » e quelli che costituiscono il fondamentale « metodo delle prime e ultime ragioni », che troveremo (p. 571) applicato nei *Principia.* La base di quanto leggesi nel *Tractatus* di cui parliamo sta nella determinazione della flussione di $x^n$ per $n$ intero e positivo; la corrispondente espressione si ottiene calcolando mediante la formola del binomio il valore di $\frac{(x+h)_n - x_n}{h}$ e trascurando nel risultato le potenze di $h$. A questo punto Newton conviene di indicare con $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \ldots$ le flussioni successive di $x$ e insegna a calcolare la flussione del primo membro di un'equazione algebrica fra più quantità variabili; tale procedimento trovasi da lui esposto anche in una lettera al Collins del 10 dicembre 1672 sull'esempio

$$x^3 - 2\,x^2\,y - b\,x^2 + b\,y^2 - y^3 = 0\ ;$$

se l'equazione è razionale intera, per giungere al risultato basta un'applicazione ripetuta della regola per calcolare la flussione di $x^n$; se, invece, contiene dei termini irrazionali si opera nel modo che risulta dal seguente esempio: Sia $z = \sqrt{ax - y^2}$ l'espressione da derivare; se ne deduca $z^2 - a\,x + y^2 = 0$ e quindi $2\,zz' - a\,x' + 2\,yy' = 0$; riponendo per $z$ il suo valore si conclude

$$z' = \frac{a\,z' - 2\,y\,y'}{2\sqrt{a\,x - y^2}}\,,$$

che è il risultato cercato. Mediante siffatti artifici, accompagnati da opportuni cambiamenti di variabile, Newton giunge a calcolare gran numero di integrali di funzioni che oggi riguardansi come appartenenti alla classe dei differenziali binomi. Gli stessi mezzi abilitano a determinare curve suscettibili di quadratura con mezzi elementari; infatti, essendo $\int y \,.\, dx$ l'espressione dell'area di una curva, se si pone $\int y \,.\, dx = f(x)$, $f(x)$ essendo un polinomio intero (anche non razionale), l'equazione $y = f'(x)$ rappresenterà una curva dell'anzidetta specie.

I numerosi esempi dati da Newton per chiarire la procedura indi-

cata e le estese tabelle da lui poste a disposizione di coloro che intendono occuparsi di congeneri questioni provano l'importanza che egli a ragione vi attribuiva, e le parole di chiusa — « et his principiis via ad majora sternitur » — mostrano la sua fede nella fecondità dei metodi esposti.

438 - La quadratura delle curve ha continuato a occupare l'illustre matematico e in alcuni fogli pubblicati nel 1712 sotto il titolo *Methodus differentialis* si trova trattata la questione del calcolo per approssimazione degli integrali che non rientrano in alcuna delle categorie anteriormente considerate. L'artificio proposto per calcolare il valore di $\int f(x)dx$ consiste nel sostituire alla curva $y = f(x)$ una curva parabolica passante per un conveniente numero di punti di quella; è in sostanza la questione di determinare le costanti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ che entrano nell'equazione $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n$ conoscendo gli $n + 1$ valori che $y$ assume in corrispondenza di $n + 1$ assegnati valori di $x$; il risultato è rimasto nella scienza sotto il nome di « formola di interpolazione di Newton » (1). Alla stessa questione sono dedicate altre pagine intitolate *Regula differentiarum* scritte sino dal 1665 e ispirate da scritti del Briggs; su di esse furono date di recente ampie informazioni e le stesse vennero poi date alle stampe (2).

439 - Chi intende conoscere per intero i contributi dati da Newton all'analisi infinitesimale non può nè deve trascurare il suo carteggio scientifico, forzatamente entro i limiti in cui fu dato sinora alle stampe. Fra le lettere da lui scritte emergono per importanza le due che egli diresse all'Oldenburg il 13 giugno e il 24 agosto 1676 affinchè fossero comunicate a Leibniz; per la loro estensione e l'ampia notorietà che non tardarono a conseguire assurgono al livello di vere e proprie memorie scientifiche; l'una ha per principale argomento le serie, l'altra le flussioni; indicheremo brevemente quanto di essenziale vi si legge.

Cominciamo dalla *I Lettera destinata a Leibniz*. I. Vi si trova anzitutto il teorema del binomio per esponenti razionali qualunque, risultato di somma importanza che conferma la famigliarità dell'inventore con l'uso di esponenti fratti o negativi. - II. Seguono due quadri, uno destinato a far conoscere il procedimento per giungere al valore 2,09455184 per la radice positiva dell'equazione $y^2 - 2y - 5 = 0$ (che già incontrammo, p. 567, in altro scritto dello stesso autore) e per dedurre dall'equazione

$$y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$$

(1) Su di questa le prime pubbliche notizie furono date da NEWTON nel Lemma 5 del III Libro dei *Principia*, il quale a regione si considera come il germe della teoria delle differenze finite.

(2) Veggasi gli articoli di DUNCAN C. FRASER, *Newton and interpolation*, inserito nel volume commemorativo *Isaac Newton* 1642-1727 (London, 1927) e *Newton's interpolation formulas* nel N. 292 del « *Journal of the Institute of Actuaries* », nonchè il volume del medesimo autore citato nella Bibliografia relativa al presente Capitolo.

la serie

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64\,a} + \frac{131\,x^3}{512\,a^2} + \frac{509\,x^4}{16384\,a^3} + \ldots$$

III. Sviluppi in serie di *arc sen* x, *arc sen ver* x, *sen* x, di un arco ellittico cioè di

$$\int d\,x \sqrt{1 + a\,x^2}/\sqrt{1 + b\,x^2}),$$

dell'area dell'ellisse e di altre funzioni utili al calcolo dei logaritmi. - IV. Espressione in serie del volume di un elissoide rotondo.

La *II Lettera destinata a Leibniz* è tutta permeata da sentimenti di diffidenza verso i matematici del tempo chè i risultati esposti sono applicazioni del problema « Data aeqvatione qvotcvmqve flventes qvantitates involvente, flvxiones invenire, et vice versa » enunciato il quale viene celato sotto una scrittura composta del numero delle lettere di ciascuna specie che vi entrano, cioè: 6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12vx [1]. In detta lettera s'incontrano molti risultati relativi a quadrature di curve, i quali si ottengono oggi mediante integrazioni di funzioni che sono razionali o possono ridursi a tali cambiando la variabile. Newton, proseguendo, fa cenno del problema, che già segnalammo, di far passare una curva parabolica per un numero sufficiente di punti, per poi applicare il risultato al calcolo approssimato degli integrali definiti; ciò gli offre l'occasione per rilevare che i metodi da lui immaginati permettono di calcolare valori approssimati di $\pi$ con speditezza assai maggiore di quanto consenta l'uso della serie di Leibniz $1 - 1/3 + + 1/5 - 1/7 + \ldots$ (v. p. 578). Sorvolando sopra altre cose di minor rilievo, segnaliamo un secondo enigma, ancor più complicato di quello surriferito, avente il seguente significato: « Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus. Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendaes terminos assumptae seriei ».

La chiave del primo enigma fu data da Newton (e certamente egli solo avrebbe potuto darla!) in lettere dirette al Wallis il 27 agosto e il 17 settembre 1692 e da questo pubblicate nel T. II delle sue *Opere*, lettere di grande importanza perchè per la prima volta rivelarono al gran pubblico i concetti fondamentali del calcolo flussionale e parecchie delle scoperte che noi segnalammo in altri lavori anteriori. Altre applicazioni dei medesimi procedimenti furono fatte da Newton risolvendo alcune importanti questioni proposte, a mo' di sfida, da alcuni matematici del suo tempo.

---

[1] Non si stupisca il lettore di questo metodo adottato per prendere data; era il sistema generale usato allora: se ne servì Huygens nel 1669, quando scoperse un satellite di Saturno, e ne è traccia anche nella lettera da lui scritta a Leibniz il 26 marzo 1691; nè questi sono gli unici esempi del genere che potrebbersi citare; Galileo stesso se ne servì quando occupavasi delle fasi di Venere.

## Il metodo delle prime e ultime ragioni

440 - Scopo precipuo dell'« opus magnum » di Newton è di mostrare che le leggi regolatrici del moto degli astri scoperte da Kepler corrispondono a movimenti effettuati a cagione dell'attrazione esercitata da un punto fisso in ragione inversa del quadrato della distanza. Dei tre Libri che la costituiscono il I ha per tema il moto dei corpi in mezzi non resistenti e il II la risoluzione delle analoghe questioni per mezzi resistenti e il III lo studio del sistema del mondo. Un'analisi minuta di quanto essa contiene è estranea al còmpito nostro. Non v'ha dubbio che le relative ricerche furono compiute da Newton applicando i procedimenti algoritmici da lui creati; ma il timore di compromettere l'accettazione delle nuove conseguenze a cui era giunto col presentarle come applicazioni di metodi matematici dianzi ignoti, lo consigliò a esporre quanto aveva scoperto in una forma modellata su quello dei grandi geometri dell'antica Grecia. Per conseguenza nei *Principia* le flussioni non hanno parte alcuna (anche il nome di « flussione » s'incontra una sola volta, incidentalmente) e le ricerche in cui interviene l'infinito vengono condotte col « metodo delle prime e ultime ragioni », che, in fondo, equivale al metodo dei limiti ben noto ai nostri lettori. Esso riposa sull'applicazione del seguente *lemma*: « Due quantità, la cui differenza, in un tempo finito, diviene minore di qualsiasi quantità assegnabile finiscono per divenire fra loro eguali »; notisi che a Newton non è sfuggita (e lo ha scritto) che la via da lui battuta non differisce in fondo da quella aperta dal Cavalieri con la sua *Geometria degli indivisibili*. A dimostrare la singolare perizia con cui Newton maneggiava i procedimenti di carattere infinitesimale sta la determinazione da lui fatta della curva generatrice del solido di rivoluzione che incontra la minima resistenza movendosi in un fluido; così egli ha risoluto una questione che si considera oggi come di pertinenza del calcolo delle variazioni; pure ammirandolo si può lamentare che egli abbia tenuto celato il cammino che lo condusse a una conclusione di tanta importanza (1).

## La teoria delle coniche nei " Principia "

441 - Le Sezioni IV e V del I Libro dei *Principia* sono di pertinenza della teoria di quelle curve che Kepler aveva rivelato essere descritte dagli astri del nostro sistema planetario, giacchè hanno per iscopo la descrizione di una conica, prima (Sez. IV) nella supposizione che ne sia dato uno dei fuochi, poi (Sez. V) ammettendo che se ne conosca un numero sufficiente di punti e tangenti. Nella prima ipotesi Newton suppone che gli altri elementi dati siano successivamente: I. La lunghezza $a$ dell'asse maggiore e un punto e una tangente, o due punti, o due tangenti, con esame del caso ($a = \infty$) in cui la conica sia una parabola. - II. Il rapporto degli assi e un punto e una tangente, due tangenti, due punti, o finalmente una tangente col relativo punto di contatto. -

(1) Una profonda critica della soluzione newtoniana leggesi nell'articolo di A. R. Forsyth, *Newton's Problem of the Solid of least resistance*, inserito nel volume commemorativo indicato nella Bibliografia relativa al presente Capitolo.

III. Tre fra punti e tangenti. Nella seconda ipotesi i dati sono cinque fra punti e tangenti.

Le relative costruzioni riposano in parte sopra teoremi tratti da Apollonio, ma assai più sopra proposizioni originali. Una di queste insegna la seguente « generazione organica delle coniche »: « Se due angoli $a\ b$, $a'\ b'$ di grandezze costanti ruotano attorno ai loro vertici $V$, $V'$ in modo che il punto $a\ a'$ descriva una retta, il punto $b\ b'$ genererà una conica passante per i punti $V$, $V'$; se, viceversa, il punto $a\ a'$ percorre una conica passante per i punti $V$, $V'$, il punto $b\ b'$ descriverà una retta ». Altrove Newton ricorse per lo stesso scopo a una trasformazione geometrica che oggi si ravvisa per una speciale proiettività fra due piani. E, per descrivere una conica determinata da cinque tangenti, stabilì alcuni lemmi, l'ultimo dei quali insegna in ipotesi particolari la generazione di una conica come inviluppo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive. Reputiamo superfluo insistere sul notevole progresso in conseguenza compiuto dalla teoria delle sezioni coniche; notiamo soltanto che Newton era pienamente consapevole del valore di queste pagine della sua grande opera, chè, dopo avere insegnato a descrivere una di dette curve di cui conoscansi cinque punti, soggiunge: « E così noi abbiamo data una soluzione del famoso problema delle tre o quattro rette, cominciato a essere studiato da Euclide e portato a compimento da Apollonio; soluzione non mediante il calcolo » (evidente allusione a Descartes: v. p. 463) « ma mediante una costruzione geometrica, come appunto richiedevano gli antichi ».

## Origine della teoria generale delle curve algebriche

442 - Nella *Géométrie* di Descartes, come negli scritti dei suoi commentatori e seguaci, le linee piane sono considerate esclusivamente quali ausiliari nella risoluzione delle equazioni algebriche determinate; faremo ora vedere come Newton abbia per primo mostrato che esse sono enti geometrici ricchi di notevoli proprietà; così facendo egli ha scritte le prime pagine di una delle teorie più perfette e brillanti della matematica moderna. Il lavoro in cui egli ha esposte le relative ricerche ha per titolo *Enumeratio linearum tertii ordinis;* cominciato nel 1676, fu compiuto nel 1695 e pubblicato nel 1704 in Appendice all'*Ottica*. Mentre prima di Newton le coordinate erano state usate soltanto per esporre sotto nuova forma la teoria delle coniche, egli ha offerto l'esempio di applicazione metodica del calcolo algebrico allo studio e alla classificazione di una nuova categoria di figure geometriche, dianzi ignote nella loro generalità; e per conseguire lo scopo è ricorso al fecondo artificio di ridurre l'equazione generale delle curve considerate ad alcune forme tipiche, mediante opportune trasformazioni di coordinate.

Dal contenuto della I Sezione del suo scritto risulta che egli riteneva evidente o già nota l'invariabilità del grado di un'equazione in $x$, $y$ di fronte a una trasformazione di coordinate; essa ha per corollari la nozione di *ordine* di una curva algebrica e l'idea di classificare tutte le linee piane non trascendenti in base a tale concetto.

Maggiore importanza possiede la II Sezione, chè ivi Newton riesce

ad estendere a tutte le curve piane algebriche alcune note proprietà delle coniche; così arrivò ai seguenti teoremi: I. Data una curva algebrica piana, condotte quante si vogliano trasversali fra loro parallele, se si determina su ciascuna il centro delle medie distanze del gruppo d'intersezioni che essa contiene, si ottengono infiniti punti allogati sopra una retta (detta *diametro*). - II. Quando una curva algebrica possiede un numero di asintoti eguale al suo ordine, qualunque trasversale determina sopra la curva e sugli asintoti due gruppi di punti egualmente numerosi, aventi il medesimo centro delle medie distanze. - III. Se da un punto arbitrario del piano di una curva algebrica si conducono due trasversali parallele a due direzioni fisse, i prodotti dei segmenti di esse compresi fra quel punto e la curva stanno fra di loro in un rapporto che dipende esclusivamente dalla posizione di quel punto.

443 - Nella III Sezione del suo trattato Newton dimostra che l'equazione di una cubica piana può sempre ridursi ad una forma tale che il suo secondo membro sia $a x^3 + b x^2 + c x + d$, mentre il primo assume una delle espressioni $x y^2 + c y$, $x y$, $y^2$, $y$. Una speciale importanza possiedono le curve $y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d$ (dette « parabole divergenti ») chè riguardo ad esse egli ha scoperto il seguente fondamentale

*Teorema.* Come tutte le coniche possono ottenersi mediante proiezione (« per umbras ») dal cerchio, così a tutte le cubiche piane si può giungere proiettando una delle parabole divergenti.

Benchè Newton non dimostri questo bel risultato, pure che egli fosse in grado di farlo risulta dall'avere egli nella sua *Arithmetica universalis* insegnato come si determini l'equazione della sezione prodotta in un cono o in un iperboloide rotondo da un piano qualunque; con lo scoprire quel teorema egli ha posto in luce che la proiezione è un metodo di scoperta di portata ben più vasta di quanto risultava dalle opere di Desargues e Pascal (v. Cap. XXV). Egli poi non si è arrestato alla surriferita ripartizione in cinque gruppi di tutte le cubiche piane, ma le ha divise in 72 classi, suggerendo anche un'apposita nomenclatura (p. es. la parola « cuspidata » da lui adoperata è tuttora in uso, mentre la circonlocuzione « quae conjugatam habet ovalem infinite parvam, id est punctum » curva con punto isolato, che è scomparsa come troppo prolissa).

Nello studio di qualunque figura geometrica la questione della generazione ha non minore importanza di quella della classificazione, perciò il nostro matematico si volge ad essa dopo di avere ricordata la generazione organica delle coniche, che già incontrammo nei *Principia* (v. p. 572). Per generalizzarla egli parte ancora da due angoli $a\,b$, $a'\,b'$ di grandezze costanti e con i vertici $V$, $V'$ fissi e trova che, se il punto $a\,a'$ descrive una conica passante per uno dei vertici $V$, $V'$, il punto $b\,b'$ percorrerà una curva di 3° o 4° ordine, la prima con uno, la seconda con tre punti doppi. Da ciò egli desume le costruzioni di una cubica razionale, di cui si conoscano sette punti. Egli aggiunge che similmente si possono delineare altre curve di ordine ancora più elevato, *purchè* dotate di punti singolari, saggiamente avvertendo che assai più arduo è il problema di descrivere una curva esente da punti doppi.

Da ultimo, il sommo scienziato, inserendo nella sua monografia un capitolo dedicato alla risoluzione delle equazioni dei gradi 9-12 col mezzo di curve di 3° o 4° ordine, ha rese più perfette alcune pagine della *Géométrie* di Descartes. Ivi Newton applica la nozione di « iperbolismo » dianzi introdotta; p. es. la curva $x \cdot x y = 1$ è un « iperbolismo » dell'altra $x y = 1$. Per mostrare come tale nozione riesca utile a chi voglia risolvere graficamente una equazione algebrica, consideriamo (come fa Newton) l'equazione

$$a + c x^2 + d x^3 + e x^4 + f x^5 + g x^6 + h x^7 + k x^8 + l x^9 = 0;$$

dividendola per $x^6$ si ottiene

$$\frac{a}{x^6} + \frac{c}{x^4} + \frac{d x}{x^4} + \frac{e}{x^2} + \frac{f x}{x^2} + g + h x + k x^2 + l x^3 = 0,$$

e applicando il detto iperbolismo, cioè scrivendo $y$ invece di $1/x^2$, si giunge all'altra

$$a y^3 + c y^2 + d x y^2 + e y + f x y + g + h x + k x^2 + l x^3 = 0;$$

così si arriva a una cubica che è tagliata dall'altra $x y^2 = 1$ nei punti aventi per radici di quell'equazione di nono grado.

La grande importanza di questo lavoro di Newton fu riconosciuta al suo apparire; ne è prova la recensione pubblicata negli *Acta Eruditorum* del gennaio 1705, la quale non porta alcuna firma, ma si sa essere di Leibniz.

## L' " Arithmetica universalis ,,

444 - Dell'azione di Newton come insegnante si possiedono due documenti; le lezioni di *Ottica,* che non entrano nel nostro programma, e l'*Arithmetica universalis,* che invece esige da parte nostra un'analisi circostanziata, quantunque si tratti di un lavoro non scritto da lui, ma da qualche suo alunno, e pubblicato (1707) dal suo successore come professore universitario, non sappiamo se o non col suo consenso.

Il fatto che essa consta di due parti distinte, una destinata principalmente a esporre i metodi per risolvere algebricamente i problemi di geometria, l'altra dedicata alla teoria delle equazioni algebriche, ne pone in luce una dipendenza, non dichiarata ma evidente, dalla *Géométrie* di Descartes, opera che si direbbe supposta già nota e fors'anche continuamente sotto gli occhi dei discepoli a cui dirigevasi il grande insegnante.

Ad essi egli offre anzitutto una rapida esposizione delle operazioni aritmetiche, tanto con numeri quanto con lettere, usando una simbolica non differente da quella di Descartes, ma più perfetta per l'uso costante di esponenti; essa culmina nella ricerca dei fattori razionali dei polinomi.

Passando allo studio delle equazioni, l'autore compendia in sette regole le operazioni che si possono e che giova eseguire sulle equazioni prima di accingersi a risolverle; nè mancano pagine dedicate alle equa-

zioni con due incognite, specialmente riguardo alla importante operazione che oggi chiamasi « eliminazione » e di cui si era già occupato Fermat (v. n. 359). Al proposito Newton osserva che essa si esegue facilmente mediante sostituzione, quando una delle incognite entra linearmente in una delle equazioni date e anche quando, combinando opportunamente queste, si possa arrivare a una equazione di detta specie; appunto giovandosi di artifici di tal fatta egli per primo ha date le espressioni dei risultanti di una coppia di equazioni dei gradi 2 e 2, 3 e 2, 4 e 2, 3 e 3.

Queste generalità dottrinali sono ampiamente illustrate in 61 problemi completamente risolti; essi sono talmente notevoli per varietà ed eleganza che noi saremmo tentati di trascriverne gli enunciati; ma, anche così facendo, non arriveremmo a porgere ai lettori un'idea adeguata della raffinata arte didattica dell'autore; il quale talora non fa che applicare le norme generali, ma altre volte si apre nuove vie, certe volte si limita a far conoscere una soluzione della questione che ha per le mani, ma altre ne insegna parecchie e, quando risolve algebricamente un problebma, non manca di dedurre dal risultato la relativa costruzione geometrica. Alcuni dei quesiti trattati sono di carattere aritmetico, ma molti sono di « inserzione » (cfr. a pagina 60) e hanno per iscopo la costruzione di triangoli rettangoli o non e di altre figure e spesso conducono a conseguenze di generale interesse. Fra i problemi locali che s'incontrano segnaliamo quello che guida al ben noto « cerchio di Apollonio », il problema delle tre o quattro rette e la generazione organica delle coniche; di tali curve si ritrovano alcune costruzioni che già segnalammo nei *Principia;* in particolare sul cerchio sono trattati parecchi dei problemi di contatto che Viète risolse nel suo *Apollonius Gallus* (v. p. 365). Maggiore novità presenta una generazione della cissoide di Diocle col movimento di una squadra, la quale permette di descrivere quella curva con un movimento continuo. Un cenno, forzatamente fugace, meritano alcune questioni di meccanica e ottica, nonchè la determinazione dell'orbita di una cometa mediante tre o quattro osservazioni.

445 - Proseguendo nella lettura dell'opera newtoniana si avverte una elevazione del livello generale, perchè ci s'imbatte in proprietà generali delle equazioni algebriche. Il sommo scienziato spiega anzitutto, giovandosi d'illustrazioni geometriche, la molteplicità delle radici e la presenza di radici immaginarie, asserendo che un'equazione di grado $n$ non può ammettere più di $n$ radici. Senza citare Descartes, ne fa conoscere la regola per determinare il numero delle radici positive e negative di un'equazione in base alla considerazione delle variazioni e permanenze che offre il suo primo membro. Ma poichè, come è noto, essa non guida a risultati sicuri quando esistano radici immaginarie, così egli ne dà altra la cui esattezza ne fa perdonare la complicazione; essa fu dimostrata soltanto due secoli dopo [1].

---

[1] Enunciato e dimostrazione del teorema scoperto da Newton si trovano in un libro già largamente diffuso in Italia, cioè nella *Teoria delle equazioni* del TODHUNTER, tradotto da G. Battaglini (II ed., Napoli 1875, p. 218-231).

Seguono la trasformazione delle equazioni nei casi classici, le relazioni fra i coefficienti e le radici e (semplicemente enunciate) le relazioni tra le somme delle potenze simili delle radici ed i coefficienti, scoperta nella quale Newton era stato preceduto dal Girard (vedi pag. 441) dalle formole risultanti egli trae regole per determinare dei limiti per le radici di una equazione numerica; da ultimo si trovano i metodi di risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado.

L'ultima parte dell'*Arithmetica universalis* tratta della risoluzione grafica delle equazioni algebriche, argomento che, come sappiamo, era allora all'ordine del giorno. Ma in tale occasione Newton assume un'attitudine totalmente differente dagli antichi suoi predecessori. Mentre questi ritennero accettabile una costruzione avente il detto scopo quando entravano in gioco soltanto curve *dell'ordine più basso* possibile, Newton sostenne essere da darsi la preferenza alle curve che possono descriversi *con la massima facilità,* essendo egli convinto che una speculazione geometrica è elegante soltanto quando è semplice, che una costruzione ha valore solo quando è utile. Conformemente a tale opinione egli propugnò di ammettere nella geometria, accanto a la retta e il cerchio, la concoide nicomedea, di cui è nota la facile descrizione e la comoda applicazione ai problemi d'inserzione fra una retta e una curva [1]. A sostegno della sua tesi egli espone nuove soluzioni dei problemi cubici e biquadratici, frutti appunto dell'impiego di detta linea, arrestandosi in particolare sul problema di Delo e sulla trisezione dell'angolo. Nè va taciuto il complemento da lui offerto alla soluzione del primo di questi problemi data dagli antichi, servendosi della succitata (pag. prec.) descrizione della cissoide con moto continuo. Va da ultimo segnalata la soluzione dei problemi di 3° e 4° grado mediante il solo uso di rette e circoli, quando si abbia una conica già completamente tracciata.

Benchè non ci illudiamo di avere così segnalato tutto quanto d'importante si trovi nell'opera testè discorsa, pure da quanto dicemmo risulta che Newton, anche nel trattare argomenti non nuovi seppe illuminarli con vedute originali importanti, offrendo così una nuova luminosa conferma all'opinione non esistere campo per quanto largamente coltivato che sia incapace di compensare le fatiche di chi lo coltivi con artifici suggeriti dal genio.

---

## Parte Seconda: LEIBNIZ

### Biografia

446 - Goffredo Guglielmo Leibniz [2] nacque a Lipsia il 21 giugno (o, nel nuovo stile, il 1° luglio) 1646 in un ambiente essenzialmente giuridico-accademico, giacchè suo padre fu, durante l'ultimo periodo della sua vita (1640-1652), professore di morale in quella Università e suo

---

[1] Già dicemmo (p. 350) che Viète sostenne l'opportunità di ammettere le inserzioni fra le operazioni geometriche lecite.

[2] Questa è l'ortografia autentica, in quanto fu usata sempre dall'illustre pensatore.

nonno materno era stato professore di diritto nella stessa. Perduto il padre quando non aveva che sei anni, si può dire che egli abbia preso di sua iniziativa la direzione dei proprii studi; appassionato per la lettura (e infaticabile lettore rimase durante tutta la sua vita) egli passava lunghe ore nella biblioteca paterna, prendendo a capriccio i volumi che sembravano dovergli interessare; in uno schizzo autobiografico da lui scritto in età matura, egli attribuiva la scelta ad uno spirito famigliare che gli segnalava le opere da prescegliere con le parole *tolle, lege*. Nessuna meraviglia pertanto se, nella scuola secondaria che frequentò, sia apparso come un miracolo d'erudizione; a dodici anni era in grado di leggere correntemente il latino e sino d'allora s'interessò vivamente della logica come mezzo di ricerca della verità [1]; e poichè di tale argomento seguitò a interessarsi durante tutta la vita, come mostrano molti fogli inediti, così è a ragione riguardato come il fondatore della logica matematica; inoltre, sino da allora vagheggiava il pensiero di creare una lingua universale (pasigrafia) con cui dar vita a una scienza universale, immune da errori.

I suoi maestri, che riponevano in lui le maggiori speranze, furono a un certo momento allarmati dal vederlo orientarsi verso la poesia; ma egli si affrettò a rassicurarli col dir loro che il suo spirito non riusciva a soddisfarsi di cibi di una sola specie.

A partire dal semestre estivo del 1661 egli fu inscritto nel patrio Ateneo, al quale rimase fedele durante tutta la sua carriera universitaria, eccezione fatta per il semestre estivo del 1663, che passò a Jena per trovarsi a contatto col matematico Edoardo Weigel (1625-1699) professore in quella Università. A Lipsia conseguì successivamente i gradi di bacelliere (30 maggio 1663) e di « magister », prima in filosofia (26 gennaio 1664) e poi in giurisprudenza (12 luglio 1664). Una ostilità, di cui non è ben chiaro il motivo, lo sconsigliò di presentarsi ivi all'esame di laurea, la quale gli fu conferita dall'Università di Altdorf addì 5 novembre 1666 in seguito a presentazione di quella *Dissertatio de arte combinatoria,* che, ristampata a insaputa dell'autore nel 1690, diede luogo ad una vivace protesta da parte sua, che equivale alla sconfessione di un lavoro scritto quando egli era ancora digiuno di matematica. Da questo momento Leibniz lasciò per sempre la propria città natale.

447 - A Norimberga, ove si trasferì nei primi mesi del 1667, egli ebbe tra mano la *Geometria* del Cavalieri, da cui non trasse alcun profitto, e la *Synopsis geometrica* (Lugd. 1669) del gesuita francese Onorato Fabri (1606-1688) che invece egli ricordava con compiacimento in età matura. In quella città fece la conoscenza dell'eminente uomo politivo G. C. von Boineburg, il quale seppe apprezzare a dovere le sue eminenti doti intellettuali. Per suo invito lo seguì a Francoforte e per suo consiglio pubblicò un lavoro con idee originali e importanti relative all'insegnamento della giurisprudenza. Avendolo inviato in omaggio al Principe Elettore che risiedeva a Magonza, ottenne da lui un posto nel-

[1] Da alcune pagine tuttora inedite si trae la prova che ben prima dell'Euler egli immaginò la rappresentazione di un sillogismo mediante circoli, di cui è notoria l'utilità.

l'amministrazione dello Stato. Tale ufficio non doveva essere molto gravoso se permise a Leibniz di continuare i suoi studi filosofici e politici; ne sono prova le ricerche sul movimento dei corpi che sfociarono in un lavoro (*Hypothesis physica*), di cui la I Parte fu presentata alla Società Reale di Londra e la II anche all'Accademia delle Scienze di Parigi. Un suo progetto di invasione dell'Egitto da parte delle potenze europee fu approvato dall'Elettore Palatino e Leibniz ottenne dal suo sovrano la licenza di recarsi a Parigi per presentare a Luigi XIV il memoriale da lui redatto all'uopo; approfittandone, partì per la Francia nel marzo 1672. Quell'ardito disegno non ebbe seguito, perchè i ministri del Re Sole ritennero che, dopo Luigi IX, non si poteva più pensare a nuove crociate.

Tuttavia Leibniz, non solo rimase a Parigi in qualità di addetto d'ambasciata, ma fu inviato in missione a Londra (gennaio-marzo 1673); strinse allora amichevoli rapporti con l'Oldenburg, il quale lo fece nominare membro della Società Reale (9 aprile 1673). Nel frattempo il Principe Elettore di Magonza era morto e, poichè il duca Ernesto Augusto, suo successore, non ne condivideva le idee, Leibniz cessò dall'occupare qual sia posizione ufficiale. Della maggiore libertà concessagli egli approfittò per stringere amichevoli relazioni con i più eminenti pensatori francesi di quel tempo. Fece anche la conoscenza dell'Huygens, il quale, consigliandogli lo studio delle opere di Archimede, Apollonio, Pascal, ecc., lo orientò definitivamente verso la ricerca scientifica, facendogli superare lo stato che egli ebbe a designare come in « superba mathesis ignorantia ». Allora ebbe anche notizia della macchina aritmetica di Pascal e non tardò ad inventare uno « strumentum arithmeticum » più perfetto, giacchè, mentre quella serve esclusivamente per le addizioni e le sottrazioni, questo aiuta anche nell'eseguire moltiplicazioni, divisioni e estrazioni di radici (1).

Continuando nei propri studi prese notizia dei lavori di Descartes e degli altri matematici che si occuparono di questioni infinitesimali durante il secolo XVII (non esclusi il Mengoli, su cui l'Oldenburg aveva richiamata la sua attenzione, e il Mercator, segnalatogli dal Pell); per dichiarazione sua fu Pascal che esercitò su di lui la più profonda e duratura influenza. Queste letture destarono in lui pensieri originali, grazie a cui, sino dal 1673, escogitò nuovi metodi per tracciare le tangenti e scoprì l'intimo legame fra il problema inverso delle tangenti e il problema della quadratura di una curva; cosicchè, avuta notizia dall'Oldenburg di risulti conseguiti da Newton, potè affermare di esservi giunto per proprio conto con mezzi differenti. Dell'importanza delle procedure da lui scoperte egli era pienamente consapevole, chè ebbe a dichiararle una estensione di tutti quelli precedentemente noti e germe di tutti i futuri sviluppi dell'alta analisi; e in tale fiducia fu rafforzato dalla scoperta della formola, oggi celebre, $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 -$

---

(1) Una descrizione di questa macchina leggesi nella *Miscellanea Berolinensia* del 1710; la costruzione costò, a quanto affermasi, non meno di 24 mila talleri; un modello scoperto nel 1876 nell'Università di Gottinga passò quattro anni dopo ad Hannover, ove ora si trova.

$-1/7 + \ldots$ [1], che dà una nuova soluzione analitica del problema della quadratura del cerchio. Giova anche rilevare che una spinta a proseguire in tali studi egli ebbe da un suo compatriotta, E. W. von Tschirnhausen (v. Cap. seg.), che passò con lui a Parigi il periodo che va dal settembre 1675 al novembre 1676.

448 - Il soggiorno di Leibniz a Parigi, così decisivo per la sua carriera e così fecondo per la scienza, volgeva ormai al termine. Sino dall'aprile 1673 Giovanni Federico, duca di Brunswick, gli aveva offerto un onorifico ufficio nella sua corte; Leibniz temporeggiò nel rispondere, perchè sapeva di ottenere, con l'appoggio dell'abate Gallois, un posto nell'Accademia di Parigi; l'insuccesso di tale tentativo (dovuto al rifiuto di Leibniz di passare al cattolicesimo) lo indusse ad accettare la carica di bibliotecario e consigliere aulico presso quel sovrano. In conseguenza lasciò Parigi nell'ottobre 1675, toccò Londra (ove il Collins gli mostrò la corrispondenza da lui tenuta con scienziati del tempo), Amsterdam (ove conferì con l'Hudde) e l'Aja (e vi conobbe Spinoza) e nel dicembre 1676 raggiunse la sua definitiva sede ufficiale. I doveri della sua carica non gli vietarono di volgere la mente alla scienza, come prova la sua corrispondenza con l'Oldenburg e i lavori *Méthode générale pour mener les touchantes des lignes courbes, Nova algebrae promotio* (ove esistono le prime traccie della teoria dei determinanti) e altri ancora; a pubblicare i frutti dei suoi antichi e recenti studi egli fu indotto dalla fondazione (1682) degli *Acta Eruditorum* (periodico che designeremo in seguito con le lettere A. E.), ove, come vedremo, egli ha insertia la maggior parte delle sue memorie matematiche.

449 - L'incarico avuto di scrivere una storia della Casa Brunswick-Lüneburg necessitò da parte sua estese ricerche di documenti, non soltanto in Germania, ma anche in Austria e in Italia. In conseguenza durante quattro anni lo troviamo peregrinando di archivio in archivio; prima a Vienna; di qui si partì alla fine di febbraio 1689 e per Venezia, Ferrara, Modena, Bologna e Loreto giunse a Roma il 14 aprile dello stesso anno. Nell'eterna città rimase sei mesi, fu aggregato all'Accademia Fisico-matematica fondata da Ciampini e vi conobbe V. Giordano (v. n. 417) che non mancò d'inviargli in omaggio il suo *Euclides restitutus.* Si spinse poi sino a Napoli, donde iniziò il suo viaggio di ritorno; a Firenze si abboccò col Magliabecchi e il Viviani; a Bologna conobbe D. Guglielmini; a Modena sostò due mesi facendo ricerche storiche con l'aiuto del Tiraboschi; si restituì finalmente a Brunswick per porre a profitto l'ingente materiale raccolto.

Spirito eminentemente organizzatore, egli indusse l'Elettore di Brandeburgo, in procinto di divenire re di Prussia, a fondare a Berlino (1700) quella Società delle Scienze, di cui egli redasse il primo Statuto, destinata a divenire più tardi (1744) l'Accademia di Prussia. Venuto poi in relazione con Pietro il Grande lo persuase ad erigere un congenere

[1] Della pubblicazione di questa scoperta erasi incaricato un certo Sounday, morto improvvisamente di apoplessia, di cui Leibniz parla in una lettera scritta al Gallois nel dicembre 1878.

istituto a Pietroburgo; azioni analoghe svolse in seguito a Dresda e Vienna. La sua partecipazione alle trattative che portarono una dinastia Hannoveriana sul trono d'Inghilterra lo resero inviso al partito Tory; fu questa certamente una delle ragioni per cui al momento della sua morte (14 novembre 1716) gli fu negata la commemorazione di prammatica da parte della Società Reale di Londra, di cui senza dubbio egli fu uno dei membri più illustri. Altri dica se del pari giustificati siano stati l'assenza di rappresentanti della corte di Brunswick dai suoi funerali e il silenzio serbato a suo riguardo dalla Società delle Scienze di Berlino, di cui egli era stato il primo presidente; quasi a fare onorevole ammenda di questa non casuale dimenticanza l'Accademia di Prussia intitola tuttora al di lui nome la sua solenne adunanza annuale. L'Accademia di Parigi invece, per bocca del suo eloquente segretario generale Fontenelle, gli tributò (13 novembre 1717) quell'elogio di cui egli aveva ben diritto.

## Analisi combinatoria e Caratteristica geometrica

450 - Dall'autore passiamo all'opera, cominciando dai lavori che, pure essendo meno importanti di altri che esamineremo in seguito, pure servono a porgere un concetto della orientazione filosofica del suo pensiero, manifestatasi nell'infanzia e conservatasi sino alla sua tarda età.

I primi contributi dati da Leibniz alle scienze esatte si trovano nella sua già ricordata *Dissertatio de arte combinatoria,* destinata, come fa supporre il titolo, allo studio delle permutazioni (« variationes ») e combinazioni (« complexiones ») che possono formarsi con un certo numero di oggetti; è un lavoro di scarso valore, chè vi si trovano proposizioni evidenti quando si abbia sott'occhio la tabella dei valori di $n!$ per $n = 1, 2, \ldots, 24$, esposta dall'autore; il lettore può giudicarle dalle seguenti formole che le esprimono in linguaggio moderno:

$$n! \equiv 0 \pmod{2} \text{ se } n > 1;\quad n! \equiv 0 \pmod{10} \text{ se } n > 4;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k! \equiv 1 \pmod{2},\ \sum_{k=1}^{k=n} k! \equiv 3 \pmod{10} \text{ supposto } n > 3.$$

$$n! \equiv 0 \ (\text{mod. } m!) \text{ se } m < n;$$

$$2 \cdot n! - (n-1)\cdot(n-1)! = n! + (n-1)!;$$

$$\overline{(n!)}^2/(n-1)! = (n+1)! - n!$$

Sgraziatamente nella *Dissertatio* non mancano errori; tale è l'asserzione che le permutazioni che si possono fare con le note *do, do, re, mi, fa sol* sono 600, mentre in realtà non sono che 360 (¹).

Se scarsa è l'importanza del citato scritto dal punto di vista mate-

(¹) Alla medesima epoca appartiene forse un frammento postumo di LEIBNIZ intitolato *De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria*, nella quale si legge l'osservazione che il prodotto $(a + 1)\ (a + 2) \ldots (a + n)$ è divisibile per $1, 2 \ldots n$ qualunque sia l'intero $a$.

matico, altrettanto non può ripetere chi contempli nel suo insieme l'opera di Leibniz; chè vi si incontra l'originale idea che, se fosse possibile risolvere tutti i concetti complessi in elementi semplici e esprimere questi con pochi simboli, si avrebbe « ipso facto » un procedimento, non solo per esprimere in modo perspicuo le verità già note, ma anche per scoprirne delle nuove; l'odierna logica matematica ha tentato e si sforza di attuare questo seducente programma (¹).

451 - A Parigi Leibniz apprese quanto Desargues e Pascal avevano fatto per dare un nuovo assetto alla teoria delle coniche. Col suo spirito generalizzatore egli allora concepì la possibilità di un nuovo calcolo, o « caracteristica geometrica », atto a effettuare qualunque ricerca nel campo dell'estensione figurata. Rimpatriato, seguitava a riflettere su questo argomento, in data 10 agosto 1679 ne tentava una prima esposizione e poco dopo (8 settembre 1679) faceva conoscere al suo venerato maestro Huygens le proprie idee sull'argomento. Esse non incontrarono gran favore presso il grande olandese, il quale poco dopo (22 novembre 1679) gli manifestava scarsa fiducia nella fecondità dell'ancora ipotetica analisi geometrica ed esortava Leibniz a non abbandonare le ricerche infinitesimali, in cui aveva raccolti tanti frutti succosi. Donde la spiegazione del fatto che Leibniz non diede i suoi lavori sull'argomento in pascolo alla pubblicità; ma, compulsando alcuni suoi manoscritti, recentemente dati alle stampe, non è impossibile formarsi un concetto delle sue idee sull'argomento.

Per *carattere* egli intendeva qualunque cosa atta ad esprimere una relazione in cui presentasi un determinato oggetto e che può agevolarne il maneggio; per esempio « figura » è il carattere di un oggetto a tre dimensioni. Secondo lui notevole è il vantaggio che si ottiene designando con lettere gli enti geometrici, perchè così si è esonerati da ricorrere sempre al graficismo. In certi casi semplici la cosa è possibile, chè, ad esempio, scrivendo $B\,C = C\,A = A\,B$ si esprime che il triangolo $A\,B\,C$ è equilatero, mentre con la scrittura $A\,B + B\,C = A\,C$ si dice che i tre punti $A$, $B$, $C$ sono in linea retta. Per estendere la portata di siffatte considerazioni egli parte dal punto come generatore delle linee; queste a loro volta producono le superficie e queste altre i solidi. Fra le linee emerge la retta, caratterizzata dalla proprietà di sovrapporsi a se stessa quando venga fatta ruotare tenendone fissi due punti; seguono le definizioni di cerchio e piano, nonchè l'indicazione di nuovi simboli per esprimere che un punto descrive una linea, una superficie o un solido o per far conoscere l'identità di due figure, cioè la possibilità di portarle a coincidere: questi simboli non sono però adoperati costantemente da Leibniz e non vennero usati da altri. Per mostrare come si possano far manovrare questi ausiliari logici egli dimostra che ogni sezione piana di una sfera è un circolo. Ma imparzialità storica impone che si riconosca come egli non riesca a trasfondere nel lettore la sua

(¹) Questa geniale veduta non venne svolta nè da lui nè dai suoi immediati seguaci; soltanto in tempi assai prossimi a noi furono in Germania intraprese allo scopo ricerche metodiche, di cui tuttora attendonsi i risultati.

fiducia nella reale utilità del nuovo metodo di ricerca ed esposizione delle verità matematiche; tuttavia, quasi due secoli più tardi, H. Grassmann mostrava che il grande filosofo aveva deposto un germe non mancante di virtù feconda.

## Analisi infinitesimale

452 - La storia della figliazione delle idee che condussero Leibniz alla creazione del calcolo infinitesimale non potrà scriversi che quando saranno posti a disposizione di tutti i suoi numerosi manoscritti tuttora inediti; oggi si può soltanto segnalare quel po' di luce che proviene dal suo carteggio e dalle pagine date alle stampe, approfittando della sua lodevole abitudine di apporre una data quasi ad ogni pagina da lui vergata. Ma prima di scendere a particolari tecnici fa mestieri rilevare che, nel corso della sua disputa con i Cartesiani, capitanati da Catalan e Papin, egli fece conoscere (*Nouvelles de la république des lettres,* 1684) alcune generalità che porgono utili indicazioni intorno alle direttive da lui seguite nel compiere le relative ricerche, in quanto contengono una chiara esposizione del « principio di continuità ». Si tratta di una direttiva generale che egli dice essergli servita in molte occasioni; ha origine nell'infinito e secondo lui è indispensabile in geometria; essa può enunciarsi come segue: « Quando la differenza di due casi può essere diminuita al disotto di qualunque quantità data *in datis,* essa deve potere essere anche diminuita al disotto di ogni grandezza anche *in quaesitis* »; più famigliarmente, come dice Leibniz, « quando i casi (ossia ciò che è dato) si accostano indefinitamente e finiscono per confondersi, bisogna che le conseguenze o avvenimenti (ossia ciò che è domandato) facciano altrettanto ». Secondo lui ciò dipende da un principio ancor più ampio che si enuncia « datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata ». Egli lo illustra con l'esempio della parabola riguardata quale forma limite dell'ellisse e con quello del riposo considerato come movimento di velocità infinitesima.

453 - Accostandoci a quanto è di più diretta pertinenza dell'algoritmo infinitesimale, facciamo noto che quando Leibniz, durante il suo soggiorno a Parigi, studiò la *Géométrie* di Descartes, la sua attenzione certamente fu attratta dal problema delle tangenti e dal suo inverso, del primo dei quali soltanto Descartes aveva indicata la soluzione per qualche caso particolare. Allora egli si propose di risolverli entrambi, ricorrendo al « triangolo caratteristico », figura che egli aveva vista considerata e applicata con successo da Barrow e più ancora da Pascal. Quel triangolo è simile tanto a quello formato da tangente, sottangente e ordinata, quanto dall'analogo risultante da normale, sunnormale e ordinata. Ciò lo condusse alla fondamentale scoperta dell'identità fra il problema inverso delle tangenti e quello della quadratura delle aree piane, scoperta che documenti autentici tuttora esistenti fanno risalire al 1673: egli approfondì poi lo studio dei metodi sino allora proposti per calcolare le aree piane e non tardò a giungere alla sua celebre

serie che esprime il valore di $\pi/4$ (v. p. 578). La data esatta di questo importante trovato non è nota, ma tutto fa credere risalga al 1674, se non prima, dal momento che se ne trova menzione in una lettera di Huygens del 7 novembre di quell'anno, in risposta ad altra (perduta) direttagli poco prima da Leibniz; e va rilevato che il celebre matematico olandese, compreso di legittima ammirazione, profetizzò che quella formola « serait célèbre parmi les géomètres ».

Compiuta la redazione di uno scritto destinato a far conoscere questa nuova soluzione analitica del problema della quadratura del cerchio (prima stesura di un lavoro pubblicato nel 1682 negli A. E.), Leibniz ritornò al problema generale della quadratura delle aree piane e, mentre studiava una dimostrazione di Pascal, come un lampo (v. lettera al marchese de l'Hôpital del 27 dicembre 1694) gli apparve la verità della relazione $N \,.\, d\,x = y \,.\, d\,s$, $N$ essendo la lunghezza della normale nel punto ove ha sede il differenziale dell'arco $d\,s$; donde un nuovo concetto di quadratura, dal momento che quella relazione prova essere *area* $= \int N \,.\, d\,s$. Aggiunge che altra relazione analoga trae origine dalla considerazione della sottotangente. È a questo proposito che Leibniz introdusse il nuovo simbolo d'integrale (deformazione dell'iniziale di *somma*), esprimendo con $\int y$ la stessa quantità che Cavalieri considerava come somma delle ordinate e designava con *omn y*. Leibniz rileva subito che si ha

$$\int x = x^2/2, \int x^2 = x^3/3, \int (a\,y/b) = (a/b) \int y\,,$$

supposte $a$ e $b$ costanti, $\int y + \int z = \int (y + z)$. « Satis haec nova et notabilia », egli dice a ragione, « cum novum genus calculi inducant ». Aggiunge che l'operazione designata col simbolo $\int$ aumenta il numero delle dimensioni della quantità su cui si esegue e considera eziandio la sua inversa, la quale invece lo diminuisce e che egli designa con la lettera $d$. Tutto ciò si legge in un manoscritto che reca la data 29 ottobre 1675, da registrarsi *albo lapillo* nella storia delle matematiche.

Era naturale che Leibniz si proponesse di porre alla prova i nuovi algoritmi da lui inventati applicandoli ad importanti problemi; e infatti in alcune pagine scritte l'11 novembre 1675 si trova, fra l'altro, la soluzione del seguente: « Determinare la curva tale che la porzione dell'asse delle $x$ compresa fra la normale in un punto qualunque della curva e la corrispondente ordinata sia inversamente proporzionale all'ordinata stessa ». Si tratta d'integrare l'equazione differenziale $y \,.\, d\,y/d\,x = a^2/y$; siccome questa dà $y^3 = 3\,a^2\,(x - x_0)$, così a ragione Leibniz conclude che la linea domandata è una parabola cubica. Nel corso di tale ricerca egli sostituisce al primitivo simbolo $x/d$ il $d\,x$ destinato a rimanere; « idem est », egli scrive, « $d\,x$ et $x/d$, id est differentia inter duas $x$ proximas ». Gli si affaccia poi la questione se $d\,(x\,y)$ sia eguale a $d\,x \,.\, d\,y$ e $d\,(x/y)$ a $d\,x/d\,y$, e in uno scritto datato 21 no-

vembre 1675 risolve negativamente la prima scrivendo

$$y \cdot dx = d(xy) - x \cdot dy;$$

l'intima gioia che egli risente per i risultati trovati traspare dalla lettera che egli scrisse all'Oldenburg il 29 dicembre dello stesso anno.

Che il metodo da lui creato servisse pure a risolvere il problema delle tangenti e il suo inverso è dichiarato in alcune pagine da lui scritte nei mesi di giugno e luglio 1676, ove trovasi cenno di alcuni dei problemi che Debeaune propose a Descartes (v. p. 468). La soluzione del più semplice si trova nella memoria *Nova methodus* di cui parleremo nel n. seg.; l'altro consiste nel « trovare una curva in cui il rapporto fra l'ordinata e la sottotangente sia eguale a quello fra una data retta e il segmento di ordinata compreso fra la curva e una data retta ». Questo problema traducesi in un'equazione differenziale lineare di I ordine; se Leibniz sino d'allora riuscì a integrarla, il suo metodo non doveva differire sostanzialmente da quello che egli accennò in una lettera al de l'Hôpital del 27 dicembre 1694 [1] e che egli comunicò a Gabriele Manfredi in data 10 aprile 1708 (*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* T. IX, p. 274).

Da tutto ciò emerge che il nostro matematico durante il suo soggiorno a Parigi aveva creato dei procedimenti infinitesimali di indiscutibile originalità e ammirabile potenza, nei quali si rispecchiano la tendenza simbolizzatrice di chi a ragione proclamava in un'occasione che « les choses composées ne sçauraient être si bien démelées par l'esprit humain sans aide de caractères » e altra volta che « une partie du secret de l'analyse consiste dans la caractéristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert ». Perciò, rispondendo (27 agosto 1676) alla lettera in cui l'Oldenburg gli comunicava la I Lettera di Newton (v. p. 569), egli con piena ragione potè dichiarare che trattavasi di cose aventi scopi analoghi, ma differenti dalle proprie; il che egli confermò al ricevere la II; in tale occasione egli enumerò i problemi che era in grado di risolvere, ma (attenendosi al sistema adottato dai suoi contemporanei, i quali enunciavano problemi, li risolvevano anche, ma si guardavano dal far conoscere i metodi all'uopo applicati) si astenne dal rivelare le procedure da lui inventate [2]. Però un suo manoscritto che reca la data 11 luglio 1677 e il titolo *Méthode générale pour mener les touchantes des lignes courbes sans calcul et sans réduction des quantités irrationnelles*, induce a ritenere che egli abbia allora pensato, sia pure per un momento soltanto, a svelare il proprio segreto; che abbia desistito dal farlo nel desiderio di renderlo più perfetto, risulta dal carteggio da lui tenuto col Tschirnhausen negli anni 1678-1684.

---

(1) Dalla stessa risulta che Leibniz sapeva pure integrare le equazioni di 1° ordine omogenee.

(2) L'unica sua pubblicazione del tempo è un articolo inserito nel J. S. (= *Journal des Sçavants*) ove è dimostrata l'esistenza di un'area cicloidale esattamente quadrabile, differente da quella antecedentemente scoperta da Huygens (v. p. 544).

454 - Ora fu appunto la corrispondenza con questo matematico che indusse Leibniz a svelare i metodi da lui inventati; chè Tschirnhausen, non riuscendo a comprendere lo spirito e l'importanza dell'algoritmo leibniziano, s'illuse di essere in possesso di un metodo di quadratura suo proprio. Leibniz ne contestò l'originalità in via privata; ma quando, ciò non ostante, il Tschirnhausen lo pubblicò negli A. E. dell'ottobre 1683. Leibniz dopo di averne rilevata (A. E. maggio 1684) l'identità fondamentale con il proprio, si avvide della necessità di documentare i propri diritti con una esposizione completa delle sue idee. Così ebbe origine la memoria intitolata *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (A. E. ottobre 1684), uno dei più eminenti scritti di cui vada superba la letteratura matematica. A stabilirne la somma importanza basta il seguente elenco di risultati ivi esposti: Supposto $a$ costante e $x, y, \ldots$ variabili, si ha:

$$d \cdot a = 0; \quad d \cdot a x = a \cdot d x;$$

$$d(z - y + w + x) = d x - d y + d w + d x;$$

$$d \cdot x w = x \cdot d w + w \cdot d x; \quad d \cdot \frac{v}{y} = \frac{\mp v d y \pm y d v}{y^2}$$

(ove l'ambiguità di segni deriva dal non avere Leibniz fatte convenzioni precise sui segni da attribuirsi alle coordinate);

$$d \cdot x^a = a \cdot x^{a-1} d x, \quad d \sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} d x \sqrt[b]{x^{a-b}},$$

$$d \cdot \frac{1}{\sqrt[b]{x_a}} = - \frac{a d x}{b \sqrt[b]{x^{a+b}}}$$

(qui s'incontra per la prima volta il segno : per indicare la divisione). Il grande geometra rileva che le due ultime formole sono contenute nella precedente quando si attribuiscano all'esponente valori non interi e positivi, ma, data la poca famigliarità dei matematici del suo tempo con esponenti qualunque, giudicò opportuno dimostrarle a parte. Stabilisce poi che un massimo o un minimo è caratterizzato dall'annullarsi della derivata prima, mentre per distinguere gli uni dagli altri dice che fa mestieri di ricorrere alla derivata seconda; l'annullarsi di questa per la funzione $f(x)$ ha luogo nei punti di flesso della curva $y = f(x)$.

Leibniz non a torto insiste sul fatto che le sue regole di differenziazione sono applicabili anche a funzioni in cui entrino frazioni e radicali, e per mostrare ciò sopra un esempio complicato differenzia esattamente l'equazione

$$\frac{x}{y} + \frac{(a + b x)(c - x^2)}{(e x + f x^2)^2} + \frac{a x \sqrt{g^2 + y^2} + y^2}{\sqrt{h^2 + l x + m x^2}} = 0.$$

Per mostrare poi come si applichino le regole da lui date per de-

terminare i valori estremi delle funzioni di una variabile, tratta il seguente problema: Dati due punti $E, C$ situati in un piano da parti opposte di una retta $S S$, trovare su questa un punto $F$ tale che risulti $h \cdot E F + r \cdot F C$ minimo, ove $h$ e $r$ sono coefficienti dati. È il problema della rifrazione della luce, e il risultato a cui pervenne Leibniz è conforme alla legge di Snellio-Descartes (di cui Leibniz erasi già occupato in A. E. del 1682) e conferma il principio proclamato da Fermat (lettera a C. de la Chambre del 1° gennaio 1662), secondo cui « la nature agit toujours par les voies les plus courtes ».

Nel titolo della memoria di cui è parola Leibniz afferma l'applicabilità del metodo di costruzione delle tangenti a curve nella cui equazione entrano irrazionali; ebbene, per dimostrare ciò, egli sceglie un esempio offerto da Descartes (v. la lettera scritta da Fermat a Carcavy addì 20 agosto 1650); si tratta della curva luogo dei punti per cui è costante la somma delle distanze da un certo numero di punti fissi; Leibniz, raggiungendo lo scopo, ha vinto una difficoltà che il grande filosofo francese aveva giudicata insormontabile. Da ultimo egli dimostra essere una logaritmica la curva per cui la sottotangente è costante e così risolve il primo dei più volte citati problemi proposti da Debeaune a Descartes.

A Leibniz appartengono anche i primi risultati concernenti il calcolo delle derivate d'ordine superiore, chè nella lettera da lui scritta a Giovanni Bernoulli il 6-16 marzo 1695 si incontra la celebre formola che serve a calcolare l'$n^{ma}$ derivata di un prodotto di due fattori. L'analogia di aspetto fra tale formola e quella che dà la potenza $n^{ma}$ di un binomio gli fece intravvedere delle analogie fra potenze e derivate, ed egli esortò il suo giovane corrispondente ad approfondirle; ma tale suggerimento non sembra essere stato seguito.

455 - Passiamo alle pubblicazioni leibniziane concernenti il calcolo integrale. In articoli pubblicati negli anni 1702-03 negli A. E. egli si è occupato con successo della integrazione per serie e di quella delle funzioni razionali, nel caso in cui il denominatore è scomponibile in fattori lineari reali, accennando alle difficoltà che s'incontrano quando questa condizione non è soddisfatta. Che egli abbia volto il pensiero anche all'analoga operazione per funzioni non razionali è dimostrato da un frammento postumo nel quale trovansi sviluppate alcune idee da lui adombrate in una lettera scritta a Giovanni Bernoulli nell'aprile 1705; frammento in cui sono considerati gli integrali della forma

$$\int f(x) \sqrt[q]{F(x)}\, d x,$$

senza però conseguire risultati di carattere definitivo, il che non era possibile senza una previa classificazione delle funzioni considerate. Appartiene a lui l'osservazione (A. E. 1686) che i segni $d$ e $\int$ permettono di far scomparire le funzioni trascendenti da certe equazioni non algebriche; per es. la cicloide ordinaria, generata dal cerchio di raggio 1,

può rappresentarsi mediante l'equazione

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int dx / \sqrt{2x - x^2}.$$

Leibniz per primo ha considerate equazioni (da lui dette *trascendenti*) ove l'incognita si trova negli esponenti (*Journal des Savants*, cioè J. S., 1692) e ha mostrato che per risolverle si deve ricorrere a logaritmi; e infatti, ad esempio, dall'equazione

$$c^x = a \cdot b^{x-1}$$

egli trovò così la soluzione

$$x = \frac{\log a - \log b}{\log c - \log b}.$$

Attrasse pure la sua attenzione la questione (v. n. 418) dell'angolo di contatto (A. E. 1686), che egli collegò alla teoria generale dell'osculazione, con riferimenti alla teoria delle evolute di Huygens. Le serie, di cui aveva mostrato l'uso nell'integrazione delle equazioni differenziali (A. E. aprile 1693), furono da lui studiate a proposito della curiosa successione $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ che vedremo più innanzi essere collegata al nome di Guido Grandi.

Nulla è più atto a fare accettare i nuovi metodi di calcolo che il mostrarne l'applicazione alla risoluzione di problemi nuovi e interessanti; conscio di ciò Leibniz si è servito di quelli da lui inventati per questioni a cui, ai suoi tempi, interessavasi il mondo matematico; citiamo le più cospicue: Determinazione (A. E. 1689) della linea isocrona (lungo la quale un punto scorre senza accelerazione), problema ben noto a chi conosce la sua disputa con i Cartesiani; problema analogo per la catenaria (A. E. 1691, 1692 e 1699), per l'isocrona paracentrica (A. E. 1694), per la « linea celerrimi descensus » o « brachistochrona » (la ricerca era stata proposta da Giovanni Bernoulli, ad un invito del quale devesi altro lavoro di Leibniz, A. E. 1693); ancora risoluzione dell'enigma fiorentino, proposto da V. Viviani (v. p. 435) (scritto postumo); ricerche sulla trattrice (A. E. 1693) provocate da un problema proposto dal medico Perrault (lettera a Huygens dell'1-11 ottobre 1693).

Come era prevedibile, la novità e l'arditezza dei metodi leibniziani destarono qualche opposizione che era urgente debellare. Ed infatti il filosofo dell'ottimismo giudicò prezzo dell'opera confutare (A. E. 1695) le *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia* (Amstelod., 1695) di Bernardo Nieuwentijt, medico e sindaco di una piccola città olandese (n. il 19 agosto 1654, m. il 30 maggio 1718). Le obiezioni che questi mosse a Leibniz sono di due specie. Le une rivestono un carattere piuttosto filosofico, essendo relative al concetto di infinitesimi di varii ordini; sono difficoltà che si affacciarono a molti, e non soltanto nella prima fase di sviluppo della analisi infinitesimale, ma che non ostacolarono il cammino trionfale di questa. Le altre sono di natura tecnica, giacchè si riferiscono alla differenzia-

zione di una espressione di una funzione $w$ della forma $u^v$; per dimostrarne l'infondatezza Leibniz scelse una via che si batte ancor oggi; cioè, dalla relazione $w = u^v$, dedusse l'altra $\log w = v \cdot \log u$, donde successivamente:

$$\frac{dw}{w} = dv \cdot \log u + v \cdot \frac{du}{u}, \quad dw = u^v \cdot \log u \cdot dv + v \cdot u^{v-1} \cdot du.$$

Così egli completò in un punto importante i suoi precedenti contributi all'algoritmo differenziale. Il Nostro ha volto la sua instancabile mente anche all'applicazione delle matematiche ai fenomeni offerti dal civile consorzio; basta a provarlo l'articolo *Meditatio juridico-mathematica de interusuria simplice* (A. E. 1683). Lo stesso tema trovasi svolto ulteriormente da Giacomo Bernoulli nella memoria *Questiones nouvelle de usuris* (Ivi 1690) e molto tempo dopo dal Conte Girolamo Rinaldi nel terzo ed ultimo dei suoi *Opuscula geometrica et analytica* (Padova 1769); gli altri due trattano della descrizione di una conica di cui si conosce l'equazione cartesiana e la sommazione di certe serie.

Leibniz non ha neppure trascurato le differenze finite ma non diede alle stampe i numerosi fogli da lui vergati sull'argomento; riguardo a particolari relativi è forza attendere la pubblicazione delle sue *Opere complete.*

## Aritmetica e Algebra

456 - La concezione e l'elaborazione del calcolo infinitesimale costituiscono un'impresa di tal mole che potevasi ritenere avesse assorbita tutta l'attività matematica di Leibniz, tanto più quando si tien conto che egli consacrò molte delle sue meditazioni a questioni di meccanica e fisica (sulle quali non possiamo arrestarci) e che gran parte del suo tempo fu assorbita da doveri ufficiali, ricerche archivistiche e pubblicazioni storiche. Ma quel grande, durante tutta la sua vita, come da giovinetto (v. p. 577), non poteva saziarsi di un solo cibo; la sua mente irrequieta di tutto s'interessava, a tutto collaborava; cosicchè non vi è ramo della matematica a cui egli non abbia arrecato qualche contributo, ed è da lamentare che molte idee da lui rapidamente notate in migliaia di fogli rimasti sepolti negli scaffali di un'antica biblioteca siano ancora inedite o abbiano veduta la luce quando ciò che contengono era già stato sfruttato e superato. Questa considerazione però non ci esonera dal far conoscere ai nostri lettori quelle giunte a nostra cognizione.

Notiamo anzitutto che, di mano in mano che Leibniz approfondiva lo studio delle scienze esatte, sempre più convincevasi della necessità di stabilirne rigorosamente i fondamenti; ciò egli giudicava della massima importanza, non soltanto per renderle più perfette, ma anche per spianare la via a coloro che aspiravano a coltivarle. Anzi, è appunto l'« ars inveniendi » che gli stava particolarmente a cuore, come è attestato da manoscritti intitolati *Clavis mathematica arcana*, *Inventarium mathematicum*, *Thesaurus mathematicus*, posteriori all'inven-

zione dell'analisi infinitesimale, composti alcuni a servizio dei principianti, altri per coloro che aspirano alla dignità di scopritori. Sono pagine geniali, da cui, se non erriamo, non fu ancora tratto tutto il frutto che sono forse capaci di dare.

457 - Volgendoci all'esame degli argomenti speciali studiati da Leibniz, accenniamo brevemente alle molte pagine da lui dedicate all'aritmetica a base 2, argomento a cui fu indotto da notizie, più o meno autentiche, relative alla matematica dei Cinesi (v. p. 164). Arrestiamoci piuttosto sui contributi da lui dati alla teoria dei numeri [1], branca a cui non poteva non prestare attenzione chi aveva vissuto a Parigi nel periodo in cui preponderante era l'influenza esercitata da Fermat e vi aveva stretta relazione col Frenicle. A lui non sfuggirono l'importanza e le imperfezioni della teoria dei numeri primi. « Si leur progression était bien connue, elle servirait à nous découvrir le mystère des nombres en général », egli scriveva in una lettera pubblica del J. S. del febbraio 1678, ove esponeva l'osservazione sperimentale da lui fatta (esaminando tutti i numeri primi non superiori a 510 511) che se si diminuisce di 1 o 5 un numero primo si ottiene un multiplo di 6 [2], non mancando di avvertire che la proposizione reciproca non è vera. Risale alla medesima epoca (29 dicembre 1678) una sua dimostrazione del teorema di Fermat (v. n. 361) secondo cui l'area di un triangolo rettangolo in numeri interi non può essere un quadrato. Inoltre in alcuni fogli di recente dati alle stampe si trova schizzata la prima dimostrazione del « piccolo » teorema di Fermat. Essa fu data da Leibniz nel corso di estese ricerche da lui intraprese nell'intento di scoprire un criterio atto a distinguere i numeri primi dai numeri composti, questione importante che egli ha il merito di avere enunciata per primo. È possibile che di quel teorema egli abbia udito parlare durante il suo soggiorno a Parigi (si ricordi che la prima menzione di esso trovasi in una lettera scritta da Fermat a Frenicle il 1 ottobre 1640); ma tutto induce a ritenere che quella dimostrazione sia stata concepita da Leibniz prima che conoscesse la collezione delle *Opere* del grande tolosano. Di quel teorema egli tentò un'inversione, che avrebbe dovuto servire come criterio discriminatore per i numeri primi; ma probabilmente l'averne avvertito l'imperfezione fu il motivo che lo distolse dal dare l'ultima mano e dal pubblicare lo scritto da lui progettato per esporre metodicamente le proprie ricerche aritmetiche. Riguardo a queste va notato che in tali studi egli procedette talvolta empiricamente, ma spesso applicò il calcolo combinatorio e con tanto successo che, ben prima del Wilson, scoperse il teorema d'aritmetica che ne porta il nome.

Nella citata dimostrazione è applicata l'espressione della potenza di un polinomio scoperta da Leibniz nell'ottobre 1676 durante il tragitto per mare dall'Inghilterra all'Olanda; lo si legge in un frammento

---

(1) Si veda l'interessantissima lettera da lui scritta al Gallois nel mese di dicembre 1678.

(2) L'essere un numero primo maggiore di 3 di una delle forme $6n \pm 1$ fu scoperto prima di Leibniz, dal canonico bergamasco Pietro Bongo (m. 24 settembre 1601), come prova il volume *Numerorum mysteria* (Venet., 1599); lo notò anche il Cataldi (v. p. 406).

dal titolo *Nova algebrae promotio* e inoltre ne è fatto cenno nelle lettere che nel 1695 Leibniz scrisse a Giovanni Bernoulli. Ulteriori notizie sulle ricerche artimetiche di Leibniz verranno indubbiamente date dalla pubblicazione di pagine tuttora inedite.

458 - Siamo così passati, quasi senza avvedercene, nel campo algebrico, ove rimaniamo per rilevare che Leibniz ha per primo avvertito l'utilità della notazione a doppio indice, che egli usò con una disinvoltura ancora maggiore di noi, perchè si servì di indici non sostenuti da lettere. Particolari al riguardo si leggono in molte pagine dei manoscritti da lui relitti e in una lettera indirizzata al marchese de l'Hôpital il 28 aprile 1693. Ivi è insegnato il procedimento da seguire quando si debbano eliminare *due* incognite fra *tre* equazioni lineari. A tale scopo il nostro matematico scrive queste come segue:

$$10 + 11\,x + 12\,y = 0$$
$$20 + 21\,x + 22\,y = 0$$
$$30 + 31\,x + 32\,y = 0;$$

moltiplicando la prima per 22 e la seconda per 12 e sottraendo i risultati si giunge a un'equazione con la sola $x$; una congenere operazione eseguita sulla prima e terza dà una seconda equazione del medesimo tipo; paragonando i valori di $x$ tratti dalle due risultanti equazioni si giunge allo scopo; il risultato viene da lui scritto sotto la seguente forma

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0\,, \end{matrix}$$

scrittura in cui il lettore riconoscerà un'impressionante (per quanto imperfetta) antecipazione dei determinanti. L'indiscutibile importanza di siffatte considerazioni viene ancora aumentata per il fatto che Leibniz ha notato che esse possono, con i debiti cambiamenti, applicarsi quando si tratta di eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche di gradi superiori all'unità. Se, infatti, si considerano per fissare le idee, le due equazioni

$$10 + 11\,x + 12\,x^2 = 0 \quad , \quad 20 + 21\,x + 22\,x^2 = 0 \ ,$$

si moltiplichi la prima per $30 + 31\,x$ e la seconda per $40 + 41\,x$ e si scelgano le arbitrarie 30, 31, 40, 41 in modo che nei due prodotti risultino eguali i termini costanti e i coefficienti di $x$ e $x^2$; per la coesistenza delle due equazioni dovranno risultare fra loro eguali anche i coefficienti di $x^3$. Così si ottengono in tutto quattro equazioni lineari omogenee in quelle quantità ausiliari e la loro eliminazione (v. sopra) guida al risultato cercato; Leibniz lo scrive supponendo eguali a 1 i coefficienti 12 e 22, caso a cui ci si può sempre ridurre. È appena necessario notare che concetti analoghi sono in uso ancora oggi; onde non v'ha dubbio che, se le pagine ora segnalate fossero venute prima in dominio del pubblico, la teoria dell'eliminazione sarebbe giunta assai prima a maturità.

Leibniz si è anche occupato della risoluzione delle equazioni algebriche letterali di grado qualunque, sforzandosi di scuotere la fiducia che, come vedremo (n. 462), il Tschirnhausen nutriva di poter giungere allo scopo riducendo a binomie le equazioni risolvende; nè mancò di aggiungere qualche assennata osservazione alle pagine dedicate dall'Ozanam, nel suo *Cours de mathématiques* (v. n. 409), alla razionalizzazione delle equazioni contenenti radicali.

## Geometria

459 - Molto modesti sono i contributi dati da Leibniz alla geometria. Sul teorema di Pitagora egli fece l'osservazione che esso è in fondo identico all'altro che afferma essere la perpendicolare calata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa media proporzionale fra i segmenti di questa; a tale conclusione egli pervenne per via di sintesi, ammettendo cioè per vero quel teorema e traendone lecite conseguenze.

Durante il suo soggiorno a Firenze gli fu mostrato l'opuscolo di Antonio di Monforte (v. p. 387) contenente le soluzioni di quei problemi proposti da un matematico, che nascondevasi « sotto la tavola », di cui facemmo cenno parlando di Viviani (v. n. 268). Leibniz non essendo stato soddisfatto del contenuto di esso, espose in una lunga lettera diretta al Magliabecchi le proprie vedute al riguardo; data la scarsa importanza di quei problemi ci sentiamo esonerati dal riassumere questa lettera. Finalmente egli fece un'aggiunta concernente la complanazione del cono obliquo ad una memoria del Varignon inserita nel T. III (1727) delle *Miscellanea Berolinensia*.

Questi modesti scritti non aggiungono alcuna foglia d'alloro alla corona che adorna il capo venerato del matematico di cui ci siamo ora occupati; segnalandoli non abbiamo inteso che dare l'ultima pennellata al quadro che tentammo di presentare della sua multiforme attività scientifica. Questa diede frutti, non soltanto di grande importanza, ma di così spiccata originalità, che sembra incredibile possa esserne stata a lui contestata la paternità. Tuttavia vedremo nel Cap. XXX che anche ciò è avvenuto (quante volte il vero non è verosimile!); ma vedremo anche che i colpi diretti contro di lui non raggiunsero lo scopo di farlo scendere dall'alta posizione scientifica da lui occupata, posizione che certamente sarà ancora innalzata quando tutti i suoi scritti saranno resi di pubblica ragione.

## BIBLIOGRAFIA

*Philosophiae naturalis Principia mathematica. Auctore* Is. Newton (Londini, 1687; II. ed., 1713; III ed., 1726).
*Opticks. Also two treatise of the species and magnitudes of curvilinear figures* (cioè *Enumeratio linearum tertii ordinis* e *Tractatus de quadratura curvarum;* London, 1704).
*Arithmetica universalis* (Cambridge, 1707).

I. NEWTON, *Opuscula mathematica, philosophica et philologica recensuit* J. CASTILLIONEUS (3 Vol. Genevae et Lausannae, 1744; t. I, *Matematica*; t. II, *Filosofia*; t. III, *Cronologia*).

ISAACI NEWTON, *Opera quae extant omnia, Commentariis illustrabat* S. HORSELEY (5 Vol. London, 1779-1785; l'ultimo volume contiene gli scritti cronologici e teologici).

*A Catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers written by or bellonging to* SIR ISAAC NEWTON, *the scientific portion of which has been presented by the* EARL OF PORTSMOUTH *to the University of Cambridge* (Cambridge, 1888).

DUNCAN C. FRASER, *Newton's interpolation formulas* (London, 1927).

D. E. SMITH, *Two unpublished Documents of Sir Isaac Newton* (nel volume commemorativo *Is. Newton* 1642-1727, London, 1927).

S. J. RIGAUD, *Correspondence of scientific men of the seventeenth Century,* 2 Vol. (Oxford, 1841).

W. W. ROUSE BALL, *An Essay on Newton's Principia* (London, 1893; in Appendice trovansi numerose lettere del tempo).

J. EDLESTON, *Correspondence of Sir. I. Newton and Prof. Côtes, including Letters of other eminent men, from the originals in Trinity College, Cambridge* (Cambridge, 1850).

*La Méthode des fluxions et des Suites infinies par* M. le Chevalier NEWTON (Paris, 1740).

*Leibnizens Mathematische Schriften herausgegeben* VON C. J. GERHARDT (Berlin-Halle, 7 Vol. e un Suppl., 1849-1863).

E. BODEMANN, *Der Briefwechsel des G. W. Leibniz* (Hannover, 1889).

E. BODEMANN, *Die Leibniz-Handschriften der Höffentlichen Bibliothek zu Hannover* (Ivi, 1895).

C. J. GERHARDT, *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikem,* Vol. I (Berlin, 1891), senza seguito.

G. VACCA, *Sui manoscritti inediti di Leibniz* (Boll. di bibl. e storia delle scienze matematiche, t. II, 1899).

L. COUTURAT, *Opuscules et Fragments inédits de Leibniz* (Paris, 1903).

D. MAHNKE, *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung* (Bibl. math., III Ser., t. XIII, 1912-13).

J. D. CHILD, *The early Manuscripts of Leibniz Translated from the Latin texts, published by* C. J. GERHARDT, *Wiht critical and historical Notes* (Chicago-London, 1920).

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, *Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von den Preussischen Akademie der Wissenschaften.* Darmstadt, 1923 e segg. (L'edizione comprenderà 40 Volumi in 4°).

GRAEVEN UND SCHUHARDT, *Leibnizens Bilder* (Berliner Abhandlungen, 1916).

*Die Differenzrechnung bei Leibniz von E. Hofmann und H. Wieleitner, mit Zusätzen von* D. MAHUBE (Ivi, 1931).

## CAPITOLO XXIX

# I FIANCHEGGIATORI

### Parte Prima: I NEWTONIANI

460 - Durante l'ultimo ventennio del secolo XVII i matematici del tempo si aggrupparono secondo due sistemi planetari aventi per centri i fulgidi astri a cui è dedicato il Capitolo precedente. Per molti l'opera matematica si estese ad una parte del secolo successivo; ma, essendo a parecchi di essi stata affidata una parte, più o meno cospicua, nel solenne dibattito che stava per divampare, ci corre l'obbligo di presentarli sin d'ora ai nostri lettori.

Primo ci si presenta l'eminente astronomo che, come vedemmo (v. p. 564), rese possibile la pubblicazione dei *Principia* di Newton: Edmondo Halley. Egli nacque nei pressi di Londra l'8 novembre 1656; studiò nel Queens College di Oxford, ma non conseguì alcun grado, avendo giovanissimo intrapreso un viaggio a Sant'Elena a scopi astronomici. Ritornato in Inghilterra fu eletto (7 novembre 1678) F. R. S. (cioè Fellow Royal Society) e nelle « Transactions » di quel celebre sodalizio inserì pregiati lavori algebrici. Successe al Wallis nella cattedra che questi occupava ad Oxford e si spense il 14 gennaio 1741-42. Morto D. Gregory assunse e condusse a termine (1710) l'edizione da lui progettata delle *Coniche* di Apollonio (v. p. 531), aggiungendovi del suo una verosimile divinazione dell'ultimo Libro. Tradusse dall'arabo in latino l'opuscolo *De sectione rationis* del Pergeo e tentò con buon successo una restituzione di quello che tratta *De sectione spatii;* finalmente si deve a lui una pregevole edizione dei lavori di Sereno (v. p. 77).

Incontriamo in seguito coloro che assunsero l'importante ufficio di curare le nuove edizioni dei *Principia,* fatte durante la vita di Newton.

Uno è Ruggero Cotes; nato a Burbage (Leicestershire) il 10 luglio 1682, entrò nel 1699 nel Trinity College di Cambridge e ivi nel 1705 ottenne, oltre i consueti gradi, il posto di Fellow; l'anno seguente gli fu conferita ivi la cattedra Plumiana di astronomia; nel 1711 fu nominato F. R. S.; morì il 5 giugno 1716. Venuto in contatto con Newton, non tardò a conquistarne la stima e fu incaricato di curare la II edizione dei *Principia*; tale collaborazione col sommo inglese cominciò nel 1709 e diede luogo a dolorosi incidenti, su cui non è il caso di dilungarci, e ad una lunga corrispondenza, che, grazie al grande interesse scientifico che possiede, venne data alle stampe (v. p. 592). Quando (1713) la II edizione dei *Principia* fu pronta, il Cotes vi premise una

prefazione che è tutta una difesa di Newton dagli attacchi dei Cartesiani. L'alta considerazione che Newton nutriva per lui è documentata dalle parole « se Cotes avesse vissuto noi avremmo appreso qualche cosa » da lui pronunciate quando ebbe notizia della sua morte immatura; che essa fosse giustificata risulterà dall'esame delle sue opere, delle quali, per ragioni cronologiche, parleremo più avanti.

Essendosi esaurita anche la II edizione dei *Principia,* di sovraintendere alla III fu incaricato un professore di medicina del Gresham College di Londra, Enrico Pemberton (n. a Londra nel 1694, m. ad Oxford il 9 marzo 1771), il quale dal 1720 era F. R. S. Egli ha un posto nella storia delle scienze per un volume intitolato *View of sir Isaac Newton philosophy,* pubblicato nel 1728, due anni dopo l'edizione dei *Principia* di cui aveva sorvegliata la stampa.

461 - Dell'opuscolo *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* si fece editore (1711-12) Guglielmo Jones (n. nel 1675, m. a Londra addì 3 luglio 1749). Autodidatta per educazione, si rivelò cultore delle matematiche con alcune opere destinate alla istruzione nei naviganti [1]; esse lo fecero conoscere favorevolmente a Newton, il quale gli affidò alcuni suoi manoscritti, affinchè ne curasse la stampa, e, essendo stato soddisfatto del modo con cui egli aveva adempiuto questo onorevole incarico, lo fece eleggere F. R. S. (30 novembre 1712).

Ignoriamo per quale via il manoscritto dell'altro opuscolo *Methodus fluxionum et seriérum infinitarum* sia pervenuto nelle mani di Giovanni Colson; ciò che a noi importa è che egli lo tradusse in inglese e lo pubblicò con verbosi commenti nel 1736-37; l'originale vide la luce soltanto nel 1744 per merito del Castillon (p. 592). Il Colson era nato a Lichtfield nel 1680; nel 1713 fu eletto F. R. S. e nel 1739 professore Lucasiano dell'Università di Cambridge; qui morì il 20 gennaio 1760.

Quella pubblicazione produsse grande impressione sopra un giovane gentiluomo francese destinato a divenire uno dei più famosi naturalisti francesi, G. L. Leclerc Buffon (n. il 7 settembre 1707, m. a Parigi il 16 aprile 1788), il quale si affrettò (1740) a pubblicare una versione del lavoro newtoniano, non dei commenti colsoniani, da lui giudicati poco favorevolmente.

*L'Arithmetica universalis* vide la luce (1707) per merito di Guglielmo Whiston (n. a Norton il 9 dicembre 1667, m. a Cambridge il 22 agosto 1752), teologo che, indotto allo studio delle scienze dalle lezioni di D. Gregory sui *Principia*, ebbe l'onore di succedere a Newton sulla cattedra Lucasiana; allora ebbe occasione di prendere notizia di quell'opera e decise di portarla a disposizione di tutti.

Un cenno da parte nostra merita anche un altro teologo, Samuele Clarke (n. l'11 ottobre 1675, m. il 12 maggio 1729), il quale, col tradurre l'*Ottica* di Newton dall'inglese in latino, assicurò a quell'opera insigne una più larga diffusione fra i dotti.

(1) La sua *Synopsis Palmariarum Matheseos: or a New Introduction to the Mathematics* (London, 1706) va citata perchè contiene il primo uso della lettera $\pi$ per indicare il rapporto fra circonferenza e diametro. Il passo relativo trovasi riprodotto a p. 347 di *A Source Book in Mathematics* by D. E. SMITH (New York, 1929).

462 - Fra coloro a cui Newton ricorse ogni qualvolta volle scendere in campo per difendersi a visiera calata, emerge Giovanni Keill. Egli nacque a Edinburgo il 1° dicembre 1671, studiò in quell'Università sotto la direzione di D. Gregory e questo seguì quando egli si trasferì a Cambridge; ivi tenne lezioni di commento a Newton e sperava che ciò gli valesse ad assicurargli la successione del Gregory; ma il posto di professore Saviliano gli fu concesso soltanto dopo la morte del Caswell (v. p. 558) che eragli stato preferito. Nel frattempo occupò varii uffici e scrisse articoli in appoggio di Newton nelle P. T. della Società Reale a cui apparteneva dal 25 aprile 1701. Si hanno di lui una pregiata edizione di Euclide (1715) e alcuni scritti di carattere didattico; morì il 31 agosto 1721.

Un altro che agì quale strumento nelle mani di Newton è Giuseppe Raphson (dal 1698 F. R. S., m. nel 1715-16) chè a questo egli somministrò i materiali per una *Storia delle flussioni* pubblicata in inglese e latino l'anno seguente la sua morte; è doveroso avvertire che le notizie ivi esposte non possono essere accolte prima di un severo controllo. Il nome del Raphson s'incontra nei trattati inglesi sulla teoria delle equazioni per un perfezionamento da lui suggerito (1697) alla regola data da Newton per approssimare le radici.

Nell'orbita newtoniana s'incontrano anche due stranieri, che meritano di venir qui ricordati.

Il primo, Nicola Faccio di Duiller (appartenente a famiglia oriunda di Chiavenna), nacque a Basilea addì 16 febbraio 1664 ed ebbe vita avventurosa; nel 1678 divenne cittadino di Ginevra; quattro anni dopo lo troviamo a Parigi collaboratore del celebre astronomo Gian Domenico Cassini; nel 1687 si trasferì a Londra e si cattivò la stima dei matematici colà residenti che lo elessero F. R. S. (2 maggio 1688). Di altri suoi viaggi in Olanda e in Isvizzera non è necessario parlare, e così degli altri casi della sua esistenza (1), che finì in Inghilterra nel 1713, è incerto se il 28 aprile o il 12 maggio.

L'altro è Antonio Conti (cognome originario Schinella) nato a Padova nel 1697. Studiò a Venezia sotto la direzione dei Padri dell'Oratorio e ivi fu ordinato prete. Avido di sapere seguì a Padova le lezioni dell'Hermann quando questi vi era professore, e stabilì relazioni epistolari con G. Grandi e G. Manfredi. Prese poi a viaggiare; nel 1713 era a Parigi e due anni dopo a Londra; allora conobbe Newton, che lo fece nominare F. R. S. Ritornò poi sul continente, peregrinando in Olanda e Germania; si restituì ancora una volta in Inghiterra (1717) che lasciò poi per Parigi. Nel 1726 rientrò nella città sua nativa, ove morì il 6 aprile 1749, lasciando un grande numero di scritti filosofici e letterari; vedremo nel prossimo Capitolo che egli tentò di porre termine ad un aspro dibattito, ma non vi riuscì, nè sfuggì alla sorte dei pacieri sfortunati, di inimicarsi entrambi i contendenti.

Origine continentale ha eziandio Abramo de Moivre, nato di famiglia protestante a Vitry (Sciampagna) il 26 maggio 1667; studiò a Sédan

(1) Fu imprigionato per motivi politici e a Londra subì l'onta della berlina; attraversò anche un periodo di pazzia.

e Parigi, ma le tribolazioni procurate ai seguaci di Calvino e Lutero, dalla revoca dell'editto di Nantes 23 ottobre 1685) lo indussero a riparare in Inghilterra; gli è dal 27 aprile 1688 che s'inizia il suo soggiorno a Londra. Una comunicazione fatta nel 1695 alla Società Reale relativa al calcolo delle flussioni gli valse (1697) il posto di F. R. S., onore di cui lo mostrarono ben degno le opere che esamineremo più tardi e che lo fecero poi aggregare alle Accademie di Berlino (1735) e Parigi 1754); morì il 27 novembre 1754.

Nei primordi della sua carriera ebbe una disputa scientifica con Giorgio Cheyne (n. nel 1671, m. a Bach il 12 aprile 1743), esso pure F. R. S. e autore di un mediocre lavoro intitolato *Fluxionum methodus inversa, sive quantitatum fluentium leges generationis* (Londra, 1704).

463 - Dobbiamo anche citare un inglese, che potrebbe prendere posto nella II Parte del presente Cap., Giovanni Craig (m. il 12 ottobre 1731), giacchè gli per primo abbracciò le idee di Leibniz, con ammirabile prestezza se ne assimilò i metodi e li applicò nell'opera intitolata *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi* (1685). Il Craig viveva allora a Cambridge ed aveva con Newton rapporti talmente amichevoli che questi, non solo lesse il manoscritto di quell'opera, ma concesse che venisse ivi pubblicato per la prima volta il teorema del binomio. L'opera stessa accese una polemica fra l'autore e Giacomo Bernoulli, su cui non possiamo fermarci. Notiamo piuttosto che col tempo il Craig si orientò verso le procedure newtoniane come risulta da un suo posteriore volume (*De calculo fluentium*, 1718). Si devono a lui pregevoli ricerche sulla brachistocrona, sulla curva generatrice del solido di minima resistenza e su altre questioni allora in discussione. Ma l'opera che gli assicurò la massima celebrità è quella intitolata *Theologiae christianae principia matematica* (Londra, 1699) che qui citiamo, non già per intercalare una nota gaia in questa arida esposizione bio-bibliografica, ma per segnalare al lettore una pubblicazione che è un autentico segno dei tempi, giacchè prova che i grandi successi ottenuti allora con l'aiuto dei nuovi calcoli avevano fatta nascere l'illusione che, col mezzo di essi, potessero venire sciolti tutti gli enigmi di cui riboccano la terra ed il cielo (1).

Fu discepolo del Craig Guglielmo Burnet (1688-1729), vescovo di Salisbury, che tenne corrispondenza con Giovanni Bernoulli (2); benchè nulla si conosca di suoi scritti, pure egli deve avere goduto fama di dottrina se sino dal 1708 era F. R. S.

Un cenno elogioso merita anche Giovanni Machin, professore di astronomia nel Gresham College di Londra, F. R. S. dal 30 novembre 1710 e segretario di questo sodalizio durante il trentennio 1718-1747. Tradusse in inglese i *Principia* e morì il 9 giugno 1751. Nelle P. T. pub-

---

(1) Il Craig parte dalla supposizione che la fiducia nell'attendibilità delle notizie trasmesse di generazione in generazione diminuisca col quadrato del tempo; in conseguenza la fede nella verità dei miracoli narrati negli Evangeli decresce di giorno in giorno e scomparirà nell'anno 3150; ma, secondo lui, allora il mondo avrà cessato di esistere.

(2) G. Eneström ha pubblicate (*Bibl. mathem.*, nuova serie, t. XII, 1878, p. 50-2) due lettere appartenenti a questa corrispondenza.

blicò una memoria sulla « curva brevissimi descensus »; ma è generalmente noto per avere scoperta una serie che, grazie alla sua rapidissima convergenza, è tuttora usata da chi intende calcolare il valore di $\pi$; è dover nostro qui riferirla:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \ldots\right] - \\ - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right];$$

essa permise di trovare agevolmente un valore di quella costante con 100 decimali [1].

Chiude questa serie uno scienziato di tale levatura che i contemporanei lo giudicarono per l'unico matematico del suo tempo (escluso, naturalmente, Newton) che fosse capace di essere paragonato ai Bernoulli; è Brook Taylor, le cui principali opere videro la luce nel corso del secolo XVIII. Egli nacque a Edmonton (Essex) addì 18 agosto 1685; dal 1701 fu alunno del Collegio S. Giovanni di Cambridge, tenne corrispondenza con Keill e Machin e pubblicò notevoli articoli nelle P. T., che non tardarono a fargli accordare il grado di F. R. S. (3 aprile 1712). Morendo (27 dicembre 1731) lasciò molti scritti tuttora inediti, fra cui una nuova trattazione della teoria dei logaritmi.

---

## PARTE SECONDA: I LEIBNIZIANI

### C. Huygens

464 - Fra coloro che abbracciarono e, applicandole, perfezionarono le idee di Leibniz, un posto onorevole spetta a un grande a noi già noto C. Huygens. Le amichevoli relazioni fra questi due sommi, iniziatesi durante il loro soggiorno a Parigi, continuarono anche dopo che entrambi lasciarono la Francia, chè Leibniz durante tutta la sua vita riconobbe nell'Huygens il giudice più illuminato e giustamente severo di quanto egli andava scrivendo. Il carteggio fra loro dopo qualche interruzione dovuta alle svariate occupazioni e alle molte peregrinazioni del bibliotecario del duca d'Hannover, assunse un andamento regolare e continuativo in occasione del problema della curva isocrona, che dicemmo (p. 582) proposto da Leibniz nel corso della sua disputa con i Cartesiani. Huygens se ne interessò e pubblicò alcune proprietà della curva richiesta nel fascicolo di ottobre 1687 delle *Nouvelles de la république des lettres*. Questo giunse nelle mani di Leibniz in principio dell'anno successivo e gli produsse una così grande gioia che egli non potè resistere al piacere di manifestarla al suo antico maestro, e poche set-

[1] Quella formula fu pubblicata nel vol. intitolato *Synopsis palmariarum matheseos* (London, 1706).

timane dopo il suo ritorno dall'Italia gli fece alcune comunicazioni scientifiche, ove era convenientemente applicato il calcolo differenziale. Huygens, essendo abituato ai metodi classici, incontrò da principio qualche difficoltà a comprenderle; in pari tempo si occupò della determinazione della catenaria, questione frattanto proposta da Giacomo Bernoulli; avendo poi riconosciuto come le soluzioni datene da Leibniz e dai fratelli Bernoulli fossero superiori a quella a cui egli era giunto, si dichiarò (lettere del 1° settembre 1691 e del 17 settembre 1693) convinto dell'eccellenza del nuovo algoritmo ed esortò il suo corrispondente a farne un'esposizione metodica completa; nell'attesa se ne impadronì pienamente, il che va citato come fenomeno ammirando in un uomo di oltre sessant'anni. Leibniz sembra avere in massima accolto quel suggerimento, ma la cosa non ebbe seguito perchè nel frattempo il marchese de l'Hôpital pubblicò (v. n. 477) la sua *Analyse des infiniment petits*. La morte di Huygens, accaduta poco dopo, tolse a Leibniz un collaboratore del più alto valore scientifico e morale, alle nuove teorie un sostenitore e cultore della massima autorità.

## W. von Tschirnhausen

465 - Già dicemmo (v. p. 578) che Leibniz, durante il proprio soggiorno a Parigi, ebbe cordiali rapporti con un suo connazionale che coltivava con successo le scienze, Walther von Tschirnhausen, il quale, avendo lasciate, come matematico, traccie durevoli del suo passaggio sulla terra, ha diritto a un posto nella presente storia. Egli nacque nei pressi di Görlitz (Prussia) il 10 aprile 1651; mentre studiava nell'Università di Leida ove erasi recato nel 1668) ebbe luogo (1672) l'invasione francese delle Provincie Unite deliberata da Luigi XIV; allora si arruolò nell'esercito che difendeva la terra che lo ospitava, compiendo atti di straordinario valore. Rimpatriato nel 1675, ricominciò poco dopo le sue peregrinazioni, visitando l'Inghilterra, la Francia, l'Italia (a Roma rimase non meno di un anno) e spingendosi sino a Malta; così ebbe occasione di avvicinare le più eminenti personalità del suo tempo (Hudde, Huygens, Wallis, Newton, Collins, Oldenburg, Michelangelo Ricci, Borelli), per non parlare di Leibniz, che, appena rimpatriato (1679), visitò ad Hannover; con altri studiosi stabilì amichevoli rapporti e mantenne corrispondenza epistolare. Durante un posteriore suo soggiorno a Parigi fu eletto membro di quell'Accademia (22 luglio 1682), donde la spiegazione del fatto che la *Medicina mentis,* la più nota delle sue pubblicazioni, è dedicata a Luigi XIV. A partire dal 1700 abitò a Dresda o nei dintorni ed ebbe molto a soffrire per l'invasione della Sassonia da parte degli Svedesi; morì l'11 ottobre 1708, lasciando così buona fama di scienziato che il Fontenelle si affrettò a dedicare alla sua memoria uno dei suoi celebri *Eloges*. Prima di addentrarci nell'esame delle sue opere giova osservare in generale che egli, grazie alla sua propensione per considerazioni generali di natura filosofica e per i suoi studi di logica, manifesta un'indiscutibile affinità con Leibniz, del quale forse subì l'influenza sulle rive della Senna.

466 - Le prime ricerche del Tschirnhausen concernono il problema della quadratura; di esse è parola in lettere scritte da Roma a Leibniz nei giorni 27 gennaio e 10 aprile 1678, nelle quali è percepibile l'influsso che sullo scrivente esercitò il Cavalieri. Quel problema è anche il soggetto di un articolo inserito negli A. E. dell'ottobre 1683 (firmato, come gli altri dello stesso autore, con le iniziali D. T.); ma il procedimento suggerito fu, come sappiamo (p. 585), pubblicamente criticato da Leibniz, il quale vi notò alcuni errori e indiscutibili coincidenze con quanto egli aveva comunicato all'autore mentre abitavano entrambi la Francia; fu ciò l'origine di discussioni le quali, benchè improntate a reciproca stima, resero fredde le loro relazioni e causarono l'interruzione subita dal loro carteggio durante il periodo 1684-1693. A noi è vietato il dilungarci su questo incidente e sull'analogo che ebbe per attori, oltre il Tschirnhausen, Giovanni Bernoulli; notiamo soltanto che a torto il nostro matematico riteneva che una curva chiusa non quadrabile per intero nol fosse neppure in alcuna sua parte e rileviamo in generale che, mentre egli compiacevasi di fare suo punto d'appoggio di certi metodi universali — di cui affermavasi inventore, su cui manteneva il segreto e che quindi è impossibile giudicare — se ne servì per scoprire delle proposizioni particolari, non prive di novità ed eleganza.

Osservazioni analoghe si possono fare riguardo alle sue ricerche sulla rettificazione delle curve; qui però, lasciandosi trascinare a generalizzazione affrettate, asserì cose contrarie al vero; ciò però non deve far dimenticare che, con le sue ricerche sopra le coppie di archi di una curva a differenza rettificabile, inaugurò un campo di studi che altri dimostrarono poi di grande fertilità e di notevole importanza.

467 - Se mediocremente felice fu il Tschirnhausen nei suoi studi di calcolo integrale, non più fortunato fu in quelli sul calcolo differenziale. Infatti i metodi da lui proposti (A. E. dicembre 1682 e marzo 1683) per determinare le tangenti alle curve e i valori estremi delle funzioni peccano per mancanza di generalità; e tale menda fu notata anche in quello esposto nella memoria intitolata *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indéfiniment petite* (Mém. de l'Acad., Paris 1702). Questo cenno relativo al problema delle tangenti ci porta a notare che lo stesso matematico, nella sua *Medicina mentis*, partendo dall'idea che le figure geometriche sono da considerarsi come generate da un movimento riferibile a certi elementi fissi, concepì le curve come descritte dal moto di uno stilo che tende un filo con un estremo fisso e che passa costantemente per altri punti dati o si avvolge attorno a date curve; suggerì, in conseguenza, una classificazione delle curve piane e s'illuse di avere scoperto un procedimento per costruire la tangente in un punto qualunque di una linea definita come sopra. Sgraziatamente questo metodo è generalmente errato, come rilevò il Faccio de Duiller (Bibl. Univ. et Historique, T. V, 1687); il Tschirnhausen riconobbe il proprio torto (Id., T. X, 1688) e nella II ed. della sua *Medicina mentis* si sforzò di rimediarvi, ma senza raggiungere pienamente lo scopo; vi riuscirono l'Hôpital nella sua *Analyse des infiniment petits* (II Sez., Prop. 10) e Leibniz (J. S., settem-

bre 1693) applicando una sua regola generale per la composizione dei movimenti.

468 - La geometria deve essere grata al matematico di cui ci occupiamo per l'introduzione di una nuova importante categoria di curve connesse ad una qualunque linea piana, alla quale egli fu condotto dalle ricerche sulla teoria della luce: le caustiche. Per rintracciare le origini delle relative investigazioni fa d'uopo ricorrere a una lettera da lui scritta a Leibniz il 7 aprile 1681; ivi è parola dell'inviluppo dei raggi riflessi da un cerchio, nell'ipotesi che la sorgente luminosa si trovi all'infinito. Nella sua risposta (13 maggio 1681) Leibniz a torto negò l'esistenza di una curva generata nell'indicato modo; Tschirnhausen non si arrese, giacchè un anno dopo (27 maggio 1682) comunicò al suo illustre corrispondente il riassunto di una memoria sull'argomento da lui presentata all'Accademia di Parigi (v. anche A. E., novembre 1682). In una lettera posteriore (di data sconosciuta) Leibniz, senza insistere sulla difficoltà prima affacciata, rilevò un errore commesso dallo Tschirnhausen nell'assegnare la catottrica del cerchio; questi riconobbe il proprio torto (A. E. febbraio 1690) e risolse, questa volta esattamente. il problema analogo per una parabola; così diede termine alle sue ricerche teoriche originate dalla costruzione delle lenti, operazione in cui egli raggiunse una singolare perizia.

469 - Il nostro autore si è anche occupato di algebra, volgendo la propria mente alla più alta delle questioni che allora dibattevansi riguardo alle equazioni algebriche letterali, cioè la ricerca di formule atte a risolverle. Gli studi relativi furono iniziati a Roma; lo prova una lettera scritta a Leibniz il 10 aprile 1678, il cui contenuto trovasi criticato nella risposta fatta da questo. Ma il pubblico fu edotto dei risultati che essi diedero soltanto dal fascicolo di maggio 1683 degli A. E. Risulta dall'articolo ivi inserito da D. T. che l'autore partiva dall'osservazione che, come in un'equazione di 3° grado (poteva anzi dire di grado qualunque) si può fare scomparire il secondo termine mediante una sostituzione della forma $y = x + a$, così in una di grado $n$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

si possono fare scomparire gli $n - 1$ termini interposti fra il primo e l'ultimo sostituendo ad $x$ una nuova incognita $y$ legata alla prima da una relazione della forma

$$y = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1},$$

disponendo convenientemente delle costanti $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$; così si giunge a un'equazione binomia che si può risolvere con un'estrazione di radice. L'idea madre di questo procedimento è senza dubbio geniale, ma la sua traduzione in atto urta contro un'insormontabile difficoltà: la determinazione delle costanti $b$ esige in generale che si risolvano equazioni di grado superiore a $n$. Ciò non ostante la *trasformazione di Tschirnhausen* è rimasta nella scienza e vedremo a suo tempo che, in partico-

lare, essa condusse alla risoluzione delle equazioni di 5° grado. Perciò in questa, come in altre occasioni, il nostro matematico ha concepita un'idea originale lasciando ad altri di trarne i frutti che essa era in grado di dare. Pensatore indipendente, ma impetuoso e forse poco riflessivo, egli ha oscurata la propria fama commettendo non pochi nè lievi errori; audace seminatore di idee, lasciò ad altri il còmpito di stabilirne il valore apportandovi indispensabili perfezionamenti e facendone nuove applicazioni; la storia imparziale riconosce i suoi meriti e proclama di quanto la scienza in conseguenza gli è debitrice.

## Giacomo Bernoulli

470 - Più ancora di Huygens (che scomparve dalla scena del mondo quando il calcolo infinitesimale contava pochi anni di vita) contribuirono al trionfo delle idee di Leibniz i due fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli, di cui ora dobbiamo occuparci.

Il primo nacque a Basilea addì 27 dicembre 1654; fu destinato dal padre alla carriera ecclesiastica, ma una vocazione irresistibile lo fece volgere alle scienze, in cui si addestrò senza ricorrere all'aiuto di alcun maestro. A partire dal 1676 viaggiò in Isvizzera e in Francia prima, in Inghilterra e in Olanda poi. Nel 1687 gli fu conferita una cattedra nel patrio Ateneo e non tardò ad attrarre, attorno a sè gran numero di alunni da ogni parte d'Europa. Colpito d'ammirazione per la memoria fondamentale di Leibniz (v. p. 585), sino dal 15 dicembre 1687 gli scrisse per chiedergli qualche chiarimento al riguardo; Leibniz, che trovavasi allora in viaggio, non ricevette detta lettera che nel 1690; col rispondergli iniziò un importante carteggio scientifico, che (prescindendo da una lacuna dovuta a un malinteso e che va dal 1697 al 1702, durò sino alla morte del grande matematico svizzero). Questo nel 1699 fu eletto membro dell'Accademia di Parigi e due anni dopo di quella di Berlino; morì il 16 agosto 1705. Gli editori delle sue *Opere* con grande saggezza ne ordinarono gli scritti in base a un criterio cronologico; così resero facile a tutti il seguire l'evoluzione del suo pensiero scientifico. In tal modo si avverte che egli, nei primordii della sua carriera, prese notizia di tutta la letteratura scientifica del tempo; soltanto quando si aperse a lui dinnanzi la prospettiva di occupare una cattedra nell'Università di Basilea, concentrò i propri sforzi sulle matematiche. E nella Dissertazione all'uopo pubblicata in data 4 febbraio 1687 trattò tre problemi: uno aritmetico, geometrico il secondo e il terzo astronomico, riguardo ai quali basti notare che il secondo era stato proposto da un matematico di Amsterdam e agli occhi moderni si presenta come il caso particolare del cosiddetto « problema di Malfatti » corrispondente all'ipotesi che il triangolo dato sia isoscele.

471 - Che agli inizi della sua carriera didattica Giacomo Bernoulli si interessasse principalmente di questioni attinenti agli elementi della matematica è documentato dalla prima delle Dissertazioni di Laurea

discusse sotto la sua direzione (5 ottobre 1688) [1], argomento della quale è la teoria euclidea dei rapporti e delle proporzioni. Pure relativo alla geometria elementare, ma più importante, è il primo degli articoli da lui pubblicati negli A. E. (novembre 1687); è ivi risolto il problema di dividere un triangolo in quattro parti equivalenti mediante due rette fra loro perpendicolari; l'autore dimostra, con l'aiuto dell'algebra, che si tratta di una questione di 8° grado, che si scioglie segando con una conica una certa curva di 4° ordine; risultato notevole di cui Leibniz riconobbe il valore in un passo del suo scritto postumo intitolato *Nova algebrae promotio.* Questo saggio di applicazione dell'algebra alla geometria porta a concludere che sino da quell'epoca il Bernoulli fosse famigliare con la geometria cartesiana: ciò è confermato da due articoli inseriti nella stessa raccolta (A. E. giugno 1688 e settembre 1689), nel primo dei quali si leggono nuove riflessioni intorno alle curve d'ordine minimo necessarie per risolvere graficamente le equazioni algebriche, mentre l'altro tratta della risoluzione approssimata mediante rette e circoli dei problemi solidi e ipersolidi: sono questi i primi commenti fatti dal matematico di Basilea alla *Géométrie* di Descartes; di altri con carattere più algebrico egli arricchì l'edizione in latino da lui curata di questa celebre opera.

472 - Cinque dissertazioni di laurea discusse in sua presenza nei giorni 7 giugno 1689, 18 novembre 1692, 14 novembre 1696, 16 dicembre 1698 e 8 aprile 1704 mostrano il suo costante fattivo interesse per la teoria delle serie e il suo orientamento verso le teorie più elevate dell'analisi matematica. Siffatto mutamento fu prodotto, come dicemmo, dalla memoria con cui Leibniz gettò le basi del calcolo differenziale; lo studio approfondito di essa, fatto in unione al suo più giovane fratello Giovanni, lo rese padrone del novello algoritmo, cosicchè sino dal maggio 1690 egli era in grado di pubblicare negli A. E. una pregevole soluzione del problema leibniziano della « curva descensus aequabilis », nella quale incontrasi per la prima volta la locuzione « calcolo integrale », di cui Giovanni Bernoulli rivendicò poi a sè stesso la paternità. A sua volta Giacomo Bernoulli propose la ricerca della curva funicolare, o catenaria, che eseguì al pari di Leibniz e Huygens (A. E. giugno 1691). Altre applicazioni dei nuovi calcoli furono da lui fatte alla « parabola elicoide » di equazione polare $\varrho = \sqrt{2 a p \omega + a}$ (A. E. gennaio 1691), alla spirale logaritmica, alla curva lossodromica e alla velaria (Id., giugno 1691). Sopra la spirale logaritmica egli ritornò poco dopo (A. E. maggio 1692) in un lavoro nel quale è proposto di aggregare a una curva altre differenti dall'evoluta e dalle caustiche dianzi considerate. Avendo applicati siffatti concetti alla spirale logaritmica, ottenne con meraviviglia linee della medesima specie; pieno di entusiasmo per questa mirabile spirale, che in ogni occasione rivelavasi « simillima filia matri », la riguardò quale simbolo della forza nelle avversità e manifestò il voto

(1) L'avere gli editori delle *Opere* di GIACOMO BERNOULLI inserite, fra i lavori recanti la sua firma, parecchie dissertazioni di laurea scritte da suoi discepoli, induce a ritenere che queste fossero opera assai più del maestro che di costoro.

che la figura relativa fosse scolpita sulla sua tomba col motto « eadem mutata resurgo », voto che fu esaudito. Poco dopo (A. E. maggio 1692) egli rilevò nella cicloide altri fenomeni analoghi, e dalla risoluzione dell'enigma geometrico proposto dal Viviani (v. p. 435) (A. E. giugno 1692) fu indotto a occuparsi della complanazione delle quadriche rotonde (A. E. ottobre 1696). Le ricerche di Leibniz sopra l'angolo di contatto e l'osculazione ne suggerirono altre al nostro geometra (A. E. giugno 1693). La determinazione dell'equazione della curva elastica fu da lui compiuta sino dal 1691 e fatta conoscere negli A. E. con uno di quegli inesplicabili anagrammi che erano allora di moda (v. p. 570); il mistero fu rivelato da lui stesso (A. E. giugno 1694) in un'importante memoria ove quella ricerca è esposta in tutti i suoi particolari; più tardi la rettificazione della curva elastica gli diede il modo di perfezionare la sua soluzione del problema dell'isocrona paracentrica, e poco dopo (A. E. settembre 1694) notò che lo stesso risultato poteva ottenersi ricorrendo a un'altra curva algebrica, cioè di quella quartica che ricevette poi il nome di « lemniscata ».

473 - Altra prova dell'incessante benefica influenza esercitata sul nostro da Leibniz è rappresentata da un suo scritto (A. E. ottobre 1694) ove, fra l'altro, è toccato il problema delle traiettorie ortogonali, che fu ampliamente trattato da lui più tardi (A. E. Maggio 1698). Generalizzando uno dei problemi proposti dal Debeaune (A. E. luglio 1696 e settembre 1697) egli si occupò con successo dell'equazione differenziale

$$a \cdot dy = yp \cdot dx + by^n q \cdot dx,$$

$p$ e $q$ essendo note funzioni di $x$.

È nostro dovere notare qui che fra i fogli da lui relitti si trovarono, oltre a studi sull'integrazione di espressioni differenziali notevoli e altri concernenti la separazione delle variabili in particolari equazioni differenziali.

Pure fra le sue pagine inedite si trova il primo cenno della questione di determinare la curva (oggi detta *clotoide*) in ogni punto della quale il raggio di curvatura è proporzionale all'arco; mentre in un suo articolo (A. E. Novembre 1700) si trova una notevole espressione del raggio di curvatura di una linea algebrica. Egli risolse anche (A. E. giugno 1693) il problema, proposto da suo fratello Giovanni, di determinare la curva per cui è costante il rapporto fra la tangente e la sottangente: altrettanto fece riguardo alla « curva celerrimi descensus » (A. E. maggio 1697), mostrandosi in tale occasione di statura non inferiore a Leibniz, Newton e de l'Hôpital, altri risolutori di quel problema.

Le relazioni fra i due fratelli Giacomo e Giovanni, che in gioventù erano quali passano d'ordinario fra un maestro illuminato e un devoto discepolo, coll'andar del tempo si fecero fredde, ma non apertamente ostili. La guerra fu dichiarata in conseguenza di alcune questioni proposte dal « junior » nel J. S. del 26 agosto 1697; esse appartengono alla classe dei problemi isoperimetrici, di cui è notoria la somma importanza. Le soluzioni datene da Giacomo (A. E. giugno 1698) accesero fra loro una fiera disputa, documentata dagli scritti che il lettore tro-

verà riprodotti nelle *Opere* del primo [1]; soltanto molto più tardi (1718), quando il « senior » da più di un decennio riposava nella pace del sepolcro, l'altro riconobbe la giustezza delle critiche da lui rivoltegli e non tentò più di togliere valore a scritti egregi, in cui oggi si ravvisa un'anticipazione del calcolo delle variazioni.

Non è questo un completo bilancio dell'opera scientifica di Giacomo Bernoulli, se non altro perchè dovemmo passare sotto silenzio le applicazioni del calcolo infinitesimale da lui fatte alla meccanica e le ricerche sulle probabilità, riassunte in un volume (l'*Ars conjectandi*) pubblicato un decennio dopo la sua morte. Ma quanto dicemmo sembraci sufficiente a mostrare quale prezioso contributo egli abbia dato all'analisi dell'infinito; invece di attardarsi in isterili discussioni filosofiche sul significato infinitesimale e infinito, egli ha preferito applicare il nuovo algoritmo alla risoluzione di importanti problemi, ben vedendo che con ciò si trovava occasione per perfezionarlo e si accresceva il favore di cui godeva. E quando si riflette che egli fu maestro a se stesso e che una somma di lavoro quale risulta dalle sue *Opere* fu compiuta nel breve periodo interposto fra il 1686 e il 1705, ben si comprende l'ammirazione che egli destò nei contemporanei, e si è indotti a condividerla noi pure, suoi posteri lontani.

## Giovanni Bernoulli e G. F. de l'Hôpital

474 - I fatti più cospicui della vita del primo di questi matematici si apprendono da alcuni appunti rinvenuti fra le sue carte e che furono scritti, ignoriamo con quale scopo, verso il tramonto della sua lunga esistenza [2]. Egli nacque a Basilea il 27 luglio 1667, decimo figlio di Nicolò Bernoulli; da questo era destinato alla mercatura, ma, dopo un anno di pratica a Neuenburg (città delle vicinanze di Neuchatel) egli volle ritornare sotto il tetto paterno per riprendere gli studi forzatamente interrotti; il padre, benchè notasse melanconicamente che un'altra volta erano ostacolati i propri disegni, non insistette, ed ebbe la soddisfazione di vedere il proprio figlio, sino dal 1685, conseguire il grado di « magister » in filosofia. Mentre frequentava l'Università di Basilea, egli, sotto la guida del fratello Giacomo (così questi narra in una lettera a Leibniz del 15 novembre 1702) si dedicò con grande impegno allo studio delle matematiche; esaurite le antiche, si volse alle opere moderne (fra cui, per sua dichiarazione, quelle di Descartes); ma la più potente influenza egli subì dal primo scritto di Leibniz sul calcolo infinitesimale e poi dalla corrispondenza con questo grande, cominciata nel 1693 e chiusa con la morte dello stesso. Verso la fine del 1690 egli

(1) La forma definitiva della soluzione data dal Bernoulli pel problema isoperimetrico trovasi ampiamente illustrata in una memoria inserita negli A. E. del giugno 1700; questa è commentata in una Dissertazione di Laurea, discussa a Basilea in presenza dell'eminente matematico, nel mese di marzo 1701.

(2) Altra autobiografia (o meglio autoapologia) di Giovanni Bernoulli, che va sino al 1742, fu pubblicata da R. Wolf nel II Vol. delle sue *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* (Zürich, 1859).

si recò a Ginevra e nell'autunno seguente in Francia, prima a Lione, quindi a Parigi, ove rimase più a lungo di quanto avesse progettato per effetto delle molteplici relazioni scientifiche da lui strette colà. In quell'epoca il Padre Malebranche adunava settimanalmente nella propria casa le persone che coltivavano le scienze; essendo stato invitato a partecipare a queste riunioni, il giovane matematico svizzero vi conobbe il marchese de l'Hôpital, il quale gli manifestò il desiderio di essere da lui istruito nel calcolo differenziale, cosa che il Bernoulli fece, non solo oralmente ma anche consegnandogli numerosi appunti, non solo a Parigi ma anche nella villa marchionale di Blois (1). Rientrato a Parigi conobbe il Varignon, col quale mantenne relazioni epistolari durante tutta la sua vita. Per desiderio dei suoi parenti ritornò a Basilea nel 1692; in questa Università, due anni dopo, conseguì il grado di dottore in medicina; nel 1695 accettò una cattedra offertagli nell'Unversità di Groninga e vi rimase dieci anni, ma ne fu allontanato per opera di teologi intolleranti, che lo accusarono di socinianismo. Durante il viaggio dall'Olanda in Svizzera apprese la morte del fratello Giacomo, e al suo giungere a Basilea fu incontrato dal Senato accademico, venuto in corpo ad offrirgli la cattedra già illustrata dal fratello, senza assoggettarlo alle ordinarie formalità del pubblico concorso. Egli accettò e tenne l'orazione inaugurale il 17 novembre 1705.

Il successo che coronò il suo insegnamento è provato dal gran numero di giovani accorsi ad ascoltarlo da ogni parte d'Europa, alcuni dei quali non tardarono a salire a grande fama, e dalle frequenti chiamate che egli ricevette da altre grandi Università; mentre l'alta considerazione di cui egli godeva nel mondo scientifico è documentata dal fatto che egli appartenne alle più insigni corporazioni scientifiche del suo tempo (Parigi, Berlino, Londra, Bologna, Pietroburgo). Il carteggio da lui tenuto con i maggiori scienziati del suo tempo possiede tuttora un grande valore scientifico e storico.

Sospettoso e invidioso per indole, si inimicò con Giacomo, suo fratello e maestro, col quale i rapporti finirono col meritare l'epiteto di « fraterni » soltanto da chi volga la mente a Abele e Caino. Che più? Si scagliò, pieno di collera, anche contro il figlio Daniele, quando questi fu dall'Accademia di Parigi giudicato degno di condividere col padre il premio relativo al concorso dell'anno 1734. Morì a Basilea il 1° gennaio 1748, circondato dalla venerazione dei suoi concittadini che lo consideravano, non senza ragione, per un novello Archimede, pur facendo qualche riserva intorno al secondo dei versi scritti da Voltaire e posti come epigrafe alla collezione delle sue *Opere*:

Son Esprit vit la vérité
Et son Coeur connut la justice
Il a fait l'honneur de la Suisse
Et celui de l'humanité.

(1) Durante questo soggiorno campestre egli fu avvicinato anche dal P. Carlo Reyneau (1656-1728), che di quanto apprese dal Bernoulli si giovò largamente nello scrivere la sua *Analyse demontrée* (Paris, 1703), opera che lo fece proclamare dal Fontenelle con patente esagerazione, « l'Euclide de la haute Géométrie ».

Da questo rapido schizzo biografico emerge che la carriera scientifica del secondo Bernoulli si estendè a quasi tutta la prima metà del secolo XVIII; essendoci noi proposti in questo momento di descrivere soltanto la prima fase di sviluppo del calcolo infinitesimale, limiteremo le nostre considerazioni a quanto egli scrisse sull'argomento prima di occupare la cattedra di Basilea, riserbandoci di esaminare il resto più avanti.

475 - Ma, prima, imparzialità storica ci fa obbligo di segnalare un poco felice tentativo da lui fatto (J. S., 1693) per guadagnare sessanta pistole promesse a chi, senza ricorrere ai lavori del Rolle, mostrasse come risolvere graficamente un'equazione algebrica mediante il tracciamento di una linea opportuna, nell'ipotesi che fosse disegnata una porzione qualsiasi di una curva ausiliare. Alla pubblica risposta da lui data furono pubblicamente mosse giuste critiche da un anonimo che era forse il proponitore e che sembra differisse infinitamente poco dal Rolle [1]; ad esse egli si sforzò invano di replicare (J. S. 1694), cosicchè le sessanta pistole, depositate presso un notaio di Parigi, finirono col ritornare al generoso proponitore.

Buon numero degli scritti di Giovanni Bernoulli non posteriori al 1705 trattano gli stessi problemi attorno a cui vedemmo che si affaticavano gli altri matematici del tempo: ricerca dell'equazione della catenaria (A. E. giugno 1691), determinazione dell'equazione delle caustiche senza ricorrere a derivazioni (ivi, gennaio 1692), curva velaria (J. S. aprile 1692), linee di Debeaune (J. S. settembre 1692 e A. E. maggio 1693 e febbraio 1696) e altre curve speciali notevoli.

In una pagina inedita di commento a una memoria di Leibniz (A. E. aprile 1693), il nostro — a cui non era sfuggita la limitata possibilità di eseguire integrazioni in termini finiti — ha indicato un metodo generale di quadratura che, per la sua genialità indiscutibile e grande, va qui riferito; supposto che $y$ sia una data funzione di $x$, si scriva l'identità

$$y \cdot dx = y \cdot dx + x \cdot dy - x \cdot dy - \\ - \frac{x^2 \cdot d^2 y}{2!\,dx} + \frac{x^2 \cdot d^2 y}{2!\,dx} + \frac{x^3 \cdot d^3 y}{3!\,dx^2} - \frac{x^3 \cdot d^3 y}{3!\,dx^2} + \dots,$$

ossia

$$y \cdot dx = (y \cdot dx + x \cdot dy) - \\ - \left(x \cdot dy + \frac{x^2 \cdot d^2 y}{2!\,dx}\right) + \left(\frac{x^2 \cdot d^2 y}{2!\,dx} + \frac{x^3 \cdot d^3 y}{3!\,dx^2}\right) - \dots$$

Ora l'integrazione dei vari binomi che stanno nel secondo membro potendosi eseguire da chi ricorda la formola che serve a trovare la derivata del prodotto di due fattori, si conclude

$$\int y \cdot dx = y \cdot x - \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x^3}{3!}\ \frac{d^2 y}{dx^2} \dots;$$

[1] Lo fa credere la citazione che vi si legge di uno scritto dato in luce sotto il nome di Remi Lochell, trasparente anagramma di Michel Rolle.

è appunto quanto ha trovato il nostro autore, onde a ragione il secondo membro di questa relazione porta il nome di *Serie di Bernoulli*.

476 - A Giovanni Bernoulli spetta anche il merito di avere, svolgendo alcuni accenni di Leibniz, gettate le basi del « calcolo degli esponenziali », da lui chiamato *percurrents* (A. E. marzo 1697); nel relativo lavoro s'incontrano le curve $x^x = y$, $x^x = a^y$, $x^x + x = x^y + y$, ecc. e, quel che più monta, regole per differenziare le espressioni del tipo $\log f(x)$. Per primo egli ha pubblicamente osservato (A. E. ottobre 1694) che un'ordinaria equazione differenziale ammette infinite curve integrali, alcune dotate di flessi, altre non, nè gli è sfuggita l'utilità della separazione delle variabili per chi voglia integrare un'equazione differenziale. In un lavoro accolto nel 1702 dall'Accademia di Parigi fra le sue memorie egli ha insegnato a integrare le frazioni razionali, nell'ipotesi che le radici del denominatore siano tutte semplici, ma senza supporre che siano reali. Due anni dopo (A. E. agosto 1704) mostrò come si determini il vero valore per $x = a$ di una espressione $y$ della forma $f(x)/F(x)$ nell'ipotesi che sia $f(a) = 0$, $F(a) = 0$, ma senza supporre che le funzioni algebriche $f$ e $F$ fossero esenti da radicali; l'artificio proposto consiste nel razionalizzare l'equazione $y F(x) - f(x) = 0$, e poi dividere l'equazione risultante per una conveniente potenza di $x - a$; fatto $x = a$, l'equazione risultante in $y$ ha per una sua radice il cercato vero valore di $x$. L'espressione del raggio di curvatura di una curva algebrica che vedemmo doversi a Giacomo Bernoulli (p. 603) indusse Giovanni a trattare (A. E. aprile 1701) l'analoga questione per curve trascendenti. Un anonimo olandese avendo proposto nel 1703 il problema « Une courbe algébrique (vulgairement appelée géométrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussi, géométriques, mais d'espèces différentes, lesquelles soient de la même longueur que la proposée » condusse il nostro geometra alla concezione delle « curve reptorie » (A. E. agosto 1705), e la scoperta fatta da Huygens e Leibniz (p. 589) di aree cicloidali esattamente quadrabili lo portò a determinarne infinite altre dotate della medesima prerogativa (A. E. luglio 1699, giugno 1700 e aprile 1701). Riguardo al problema degli isoperimetri (v. p. 603), se anche i massimi allora furono conquistati dal fratello maggiore, pure spetta all'altro il merito di avere enunciato il seguente principio, la cui utilità è dimostrata da moltissime applicazioni fattene: Una curva dotata di una proprietà di minimo lungo tutto il suo corso, ne godrà pure in una sua porzione per quanto piccola. Lo spazio ci manca per descrivere i contributi dati dal Bernoulli al problema della rettificazione delle curve (A. E. agosto 1695, giugno e settembre 1698) e a quello del solido di minima resistenza (ivi, novembre 1699 e giugno 1700). Ma non ci è lecito passare sotto silenzio una classe di questioni sulle curve piane da lui trattate perchè la geometria cartesiana sembrava incapace di risolverle. Tale è il problema che consiste nella determinazione di una curva che condivida col cerchio la proprietà $OP \cdot OQ =$ $=$ cost., o che goda dell'altra $OP^n + OQ^n =$ cost., ove $P$ e $Q$ sono due intersezioni della curva con una trasversale condotta per il punto fisso $O$ (A. E. giugno e dicembre 1696). Daremo termine a queste notizie ri-

levando che il nostro matematico per primo attribuì alla parola « funzione » il significato di « quantità composta in un modo qualunque mediante una variabile e delle costanti », significato che rimase nella scienza durante tutto il secolo XVIII e oltre, cioè sino a quando si trovò necessario considerare le funzioni indipendentemente dalla loro rappresentazione analitica, giovandosi del concetto di corrispondenza.

477 - Fra i numerosi discepoli che ebbe Giovanni Bernoulli il primo, in ordine di tempo, a noi noto è Guglielmo Francesco de l'Hôpital marchese di Saint-Même e signore di altre terre. Egli nacque nel 1661 e sino da giovane mostrò grande attitudine per le scienze; ciò non ostante fu dalla famiglia destinato alla carriera delle armi; ma una imperfezione della vista lo costrinse ad abbandonarla ben presto. Avendo conosciuto personalmente Giovanni Bernoulli, profittò tanto dei suoi insegnamenti che sino dal 1693 fu in grado di risolvere il problema, proposto dal suo maestro, di « determinare una curva per cui è costante il rapporto fra tangente e sottotangente ». Congeneri successi coronarono i suoi sforzi per risolvere altri problemi allora all'ordine del giorno (brachistocrona, solido di minima resistenza, ecc.). La notorietà in conseguenza raggiunta gli fece aprire le porte dell'Accademia di Parigi e gli permise di entrare in rapporti epistolari con Huygens e Leibniz. Morì poco più che quarantenne il 2 febbraio 1704.

478 - Dell'analisi sublime egli è benemerito, meno per la risoluzione di speciali problemi, che per avere pubblicata la prima esposizione metodica di quanto allora sapevasi di calcolo differenziale (non pensò a fare altrettanto per l'integrale avendo appreso che Leibniz aveva in animo di esporlo lui stesso). È l'*Analyse des infiniment petits,* pubblicata anonima nel 1696, ristampata col nome d'autore nel 1715 e poi altre volte. Essa fu composta utilizzando quanto era stato stampato sull'argomento, come risulta dalla seguente dichiarazione, inserita nella Prefazione: « Je reconnais devoir beaucoup aux lumières de MM. Bernoulli, surtout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs decouvetres et de celles de M. Leibniz. C'est porquoi je consent qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser ».

Prima di iniziare una sia pur succinta esposizione del contenuto di detta opera, osserviamo che l'analisi non vi si presenta come una disciplina autonoma, ma come un ausiliare indispensabile a chi voglia investigare le proprietà delle curve piane. La I Sezione contiene le regole di differenziazione delle espressioni scaturenti dall'applicazione delle ordinarie operazioni aritmetiche. Che esse permettano di determinare le tangenti alle curve piane (mediante le sottotangenti) viene dall'autore dimostrato nella II Sezione su molteplici esempi. La determinazione dei massimi e minimi trovasi esposta nella III, ove però si cerca indarno un criterio discriminatore degli uni dagli altri. Per determinare i punti d'inflessione e di regresso l'autore è indotto a introdurre le derivate di ordine superiore (Sez. IV); però, secondo l'autore, la ricerca di quei punti non esige che le seconde. Le tre Sezioni successive contengono

applicazioni di quanto precede alla ricerca delle evolute e delle caustiche delle due specie e l'VIII agli inviluppi di linee piane. La IX, benchè presentata dall'autore come di secondaria importanza, agli occhi nostri ne possiede una grandissima, perchè vi si legge il celebre metodo (detto ancora *regola di de l'Hôpital*) per determinare i veri valori delle espressioni che si presentano sotto la forma 0/0; però non vi è fatta allusione alcuna alla possibilità che anche il quoziente delle derivate si presenti sotto la medesima forma singolare. L'ultima Sezione tratta (per usare la nomenclatura moderna) la determinazione delle derivate di funzioni definite come radici di equazioni algebriche.

In questo rapido sunto non potemmo segnalare la chiarezza e precisione dello stile dell'autore, nè la ricchezza di esempi, che rendono attraente una materia di sua natura arida; a tali doti l'*Analyse* deve il grande successo che essa seppe rapidamente conquistare e lungamente conservare.

479 - Dal carteggio di Giovanni Bernoulli che trovasi nella Biblioteca Reale di Stoccolma risulta che egli, informato della progettata pubblicazione del suo antico alunno, non mosse contro di essa obiezione alcuna; ricevendo poi una copia dell'*Analyse* non misurò le lodi al donatore. Ma, sia che leggendo una nota del Saurin (v. più avanti) egli s'irritasse vedendo attribuita all'Hôpital la scoperta della regola relativa alle espressioni 0/0, sia che una elogiosa recensione dell'*Analyse* inserita nel J. S. gli facesse apparire troppo vaga e imprecisa la dichiarazione surriferita relativa alle fonti a cui l'autore aveva attinto, fatto sta che egli mutò talmente parere, che giunse a muovere all'Hôpital accusa di plagio e finì per asserire (lettera a Leibniz dell'8 febbraio 1698) che egli non aveva fatto che tradurre in francese gli appunti redatti dal Bernoulli mentre lo istruiva nei nuovi calcoli; finalmente, dopo la morte del marchese, rivendicò a sè stesso (A. E. agosto 1704) l'invenzione della regola per trovare i veri valori delle espressioni di forma indeterminata.

La questione di sapere quanto giustificata fosse tale accusa rimase per circa due secoli irresoluta, cioè sino al giorno in cui accurate ricerche eseguite nella Biblioteca civica di Basilea fortunatamente condussero al ritrovamento degli appunti bernoulliani. Ora uno spassionato esame comparativo di questi con l'*Analyse* guida a concludere che il Bernoulli era in notevole misura dalla parte della ragione; giacchè il punto di partenza e il piano generale sono identici nei due scritti e persino gli esempi addotti dal matematico francese si trovano nella quasi totalità nelle note vergate dal suo antico maestro. Ma de l'Hôpital ha il merito di avere corrette molte inesattezze commesse dal Bernoulli nell'esecuzione dei calcoli e nel tracciamento delle figure, senza parlare di quello di avere trasformati dei secchi appunti in un'esposizione affascinante, la quale, appunto per le sue doti estetiche, esercitò una decisiva influenza sul progresso della scienza.

L'accusa surriferita trovasi implicitamente confermata nell'esordio di una esposizione del calcolo integrale, inserita fra le *Opere* del Bernoulli come tratta da lezioni da lui impartite negli anni 1691-92 al mar-

chese de l'Hôpital; esso infatti comincia con le parole « vidimus in praecedentibus », illustrate con la seguente nota in calce: « L'Autore intende riferirsi alle precedenti lezioni di calcolo differenziale impartite all'illustre de l'Hôpital, le quali furono omesse perchè già pubblicate nel volume intitolato *Analyse des infiniment petits,* che trovasi nelle mani di tutti ».

Le *Lezioni di calcolo integrale* impartite al marchese de l'Hôpital 1691-92 possiedono indiscutibile interesse, non soltanto tenendo conto di chi ne è autore, ma anche perchè rappresentano la prima opera del genere che si conosca e perchè permettono di misurare lo stato in cui trovavasi allora quella materia. Dalla prima di dette *Lezioni* risulta che sapevansi integrare soltanto le potenze, anche ad esponente frazionario, e le funzioni che ad esse possono ridursi mediante opportuni cambiamenti di variabile. Per guidare nella ricerca di tali artifici il Bernoulli saggiamente consiglia di ispirarsi a Diofanto; nè manca di avvertire che per far attingere ai risultati tutta la generalità che lor compete è necessario aggiungere una costante arbitraria. Se, pertanto, scarsi sono i fondamenti dottrinali posti dal nostro matematico, ricchissima è la collezione delle applicazioni. Egli infatti insegna l'intervento dell'integrazione nel calcolo delle aree e nella risoluzione del problema inverso delle tangenti, illustrando, in questa come in ogni altra occasione, le considerazioni generali sopra esempi numerosi e assai bene scelti. La nozione di cerchio osculatore lo conduce alla teoria delle evolute ed evolventi, con applicazione alla rettificazione delle curve. Seguono ampie ricerche sopra le caustiche per riflessione e per rifrazione, con speciale riguardo ai casi in cui la curva considerata sia un cerchio, una parabola o una cicloide. Buon numero di *Lezioni* sono consacrate ai problemi fisico-matematici affrontati dai matematici di quel tempo (« curva descensus aequalibis », isocrona paracentrica, tautocrona, catenaria, curva elastica, velaria, lintearia, con un cenno sulla rifrazione atmosferica). La quadratura per serie porta l'autore ad occuparsi anche dell'applicazione delle stesse al calcolo delle radici dei numeri o alla risoluzione delle equazioni numeriche. Come epilogo il Bernoulli insegna la risoluzione grafica delle equazioni cubiche e biquadratiche. Benchè, come risulta da quanto dicemmo, molte di queste pagine non siano a rigore di pertinenza del calcolo integrale, pure è da lamentare che le *Lezioni* del Bernoulli siano state pubblicate mezzo secolo dopo che erano state dettate; nel 1742, quando videro la luce nella collezione delle sue *Opere,* il calcolo integrale aveva raggiunto un tale stato di sviluppo, che esse saranno apparse ormai antiquate, epperò non avranno esercitata la benefica influenza che se ne poteva ragionevolmente attendere.

480 - Ritornando a de l'Hôpital, ci corre l'obbligo di osservare che, per preparare i lettori all'intelligenza del calcolo differenziale, egli scrisse un eccellente *Traité analytique des sections coniques,* a cui, nel giorno della deplorata sua morte, non mancava che la prefazione; malgrado questa lacuna esso fu pubblicato egualmente e le numerose edizioni che ebbe provano la favorevole accoglienza che ricevette. E ben la meritava.

se non altro per i perfezionamenti che arrecò al metodo cartesiano; ivi, infatti, s'incontrano entrambi gli assi (non necessariamente ortogonali) e alle coordinate vengono per la prima volta attribuiti segni con le convenzioni ancor oggi in uso; però l'autore prudentemente assicura il lettore che si limiterà a descrivere i fenomeni che accadono entro l'angolo delle direzioni positive degli assi coordinati.

Quale sia la materia trattata in detta opera e come sia distribuita risulta dai seguenti titoli dei dieci Libri che la compongono: I. Della parabola. - II. Dell'ellisse. - III. Dell'iperbole. - IV. Delle tre sezioni coniche. - V. Paragone delle tre sezioni coniche e dei loro segmenti. - VI. Delle tre sezioni coniche considerate nel solido. - VII. Dei luoghi geometrici. - VIII. Dei problemi indeterminanti. - IX. Della costruzione delle equazioni. - X. Dei problemi determinati.

Riguardo al metodo di esposizione va rilevato che l'autore, dopo di avere stabilite e discusse le equazioni canoniche delle tre coniche, si è proposto di assegnare criteri discriminatori di ogni specie, applicabili all'equazione generale di 2° grado, e benchè non abbia raggiunta la perfezione degli odierni enunciati, percorse un tratto della via che doveva condurvi.

Come risulta anche dalla sua *Analyse,* il de l'Hôpital era piuttosto una persona colta che un pensatore originale, e delle sue vaste cognizioni sulla letteratura del suo tempo ha approfittato per accrescere le attrattive della sua esposizione, risolvendo le principali questioni giudicate allora interessanti, astenendosi però in generale dall'indicare le fonti a cui attinse. Citiamo le più cospicue: Costruzione di una conica determinata da un numero sufficiente di punti e tangenti; ricerca delle sezioni circolari di un cono quadrico; problema proposto da Ruggiero di Ventimiglia nel *Giornale dei letterati* di Parma (aprile 1693) ed imperfettamente risolto dal P. G. Saccheri; polisezione di un angolo qualunque col mezzo d'un apparato inventato dal P. T. Ceva (v. p. 553); divisione di un triangolo in quattro parti equivalenti col mezzo di due rette fra loro perpendicolari (metodo di Giacomo Bernoulli, p. 602); generazione organica delle coniche, secondo Newton (v. p. 572); ricerca (già effettuata nei *Principia*) del punto le cui distanze da tre punti dati abbiano fra loro differenze assegnate.

Concludendo diremo che l'autore, con questo *Traité,* ha pienamente raggiunto lo scopo che si era prefisso, cioè di preparare i lettori all'intelligenza della sua *Analyse* e in generale degli scritti sull'analisi infinitesimale.

## BIBLIOGRAFIA

E. W. von Tschirnhausen, *Medicina mentis, sive Tentamen genuinae Logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates. Cui annexa est Medicina corporis, seu Cogitationes admodum probabiles de conservanda sanitate* (Amstelodami, 1686).

Jacobi Bernoulli, *Basileensis, Opera* (Due vol., Genevae, 1744).

Johannis Bernoulli, *Opera omnia in quatuor tomos distributa* (Lausannae et Genevae, 1742).

JOHANNIS BERNOULLI, *Lectiones de calculo differentialium. Mit einem Vorwort von* P. SCHAFHEITLIN (Verh. der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. XXXIV, 1922).

*Die Differentialrechnung von* JOHANNIS BERNOULLI *aus dem Jahre* 1691/92, *übersetzt von* P. SCHAFHEITLIN (Ostwald's Klassiker der exakten Gesellschaften Nr. 211, Leipzig, 1922).

R. WOLF, *Erinnerung an Johann I Bernoulli aus Basel* (Archiv für Math. und Physik, t. XIII, 1849; ivi l'autobiografia del Bernoulli).

DE L'HÔPITAL, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696).

DE L'HÔPITAL, *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez.* Ouvrage postume (Paris, 1707).

G. ENESTRÖM, *Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'« Analyse des infiniment petits »* (Bibliotheca mathematica, nuova serie, t. VIII, 1894; ivi si trovano alcune lettere inedite del BERNOULLI).

N. FATIO DUILLERIUS, *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex. Cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia* (Londini, 1699).

## CAPITOLO XXX

# LA GRANDE CONTESA

481 - Se il lettore che ci ha seguiti sin qui getta uno sguardo d'insieme sul Capitolo precedente, non tarderà a rilevare che, mentre il metodo delle flussioni si presenta sotto l'aspetto di una pianta pallida e tisicuzza per difetto di aria e luce, il calcolo infinitesimale prosperava in modo prodigioso, grazie all'opera entusiastica, illuminata, concorde di un gruppo di matematici di primo ordine. Siffatto paragone — che Newton non può avere mancato d'istituire — turbò certamente la gioia in lui prodotta dalle concordi attestazioni di ammirazione che, dalla sua isola e dal continente, giungevano al creatore della teoria della gravitazione universale.

Ora vedemmo che da tempo egli aveva stabilite con Leibniz relazioni, non dirette ma improntate a stima e perfettamente cortesi; dal canto suo Leibniz, avuta da giovane notizia che l'Inghilterra era sede d'importanti investigazioni matematiche, si adoperò per essere regolarmente informato dei risultati che vi si andavano ottenendo; in conseguenza di tali premure egli conobbe le scoperte di G. Gregory e Mercator e potè leggere le lettere scritte da Newton il 13 giugno e il 24 ottobre 1676 appunto perchè gli venissero comunicate. Riguardo alla seconda va qui ricordato (v. p. 570) che ivi, relativamente al metodo delle flussioni, si legge un solo enunciato sotto l'enigmatica forma

$$6a \quad cc \quad d \quad ae \quad 13e \quad ff \quad 7i \quad 3l \quad 9n \quad 4o \quad 4q \quad rr \quad 4s \quad 8t \quad 12v \quad x;$$

soltanto una decina d'anni dopo si seppe che il significato ne era il seguente: « Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et viceversa ». Ora (facciamo subito questa non inutile osservazione) è evidente che, ove pure Leibniz fosse riuscito a decifrare quell'enigma, ben poco avrebbe progredito nella conoscenza dei procedimenti newtoniani. Nel rispondere a quelle lettere (5 aprile 1677) Leibniz tratteggiò con mano sicura la natura e gli scopi dell'analisi dell'infinito; ed avrebbe certamente fatte poi altre comunicazioni sull'argomento, ove la morte dell'Oldenburg (agosto 1678) non avesse distrutta la via di comunicazione fra i due grandi scienziati.

482 - Per ottenere ulteriori notizie intorno agli studi matematici di Leibniz fa mestieri toccare l'ottobre 1684, epoca in cui egli pubblicò la fondamentale memoria che analizzammo nel n. 456. Il non avere ivi fatto alcuna menzione delle analoghe investigazioni intraprese da altri si spiega

considerando che si tratta di un lavoro destinato a dare rapida notizia di metodi originali; ma questo silenzio, essendo stato interpretato come artificiosa dimenticanza, appare oggi come uno dei passi falsi messi, dai contendenti durante l'asperrima lotta che stava per divampare. Newton, che conobbe indubbiamente il lavoro di Leibniz prima di presentare alla Società Reale di Londra il manoscritto dei *Principia,* contrappose al mutismo del suo emulo la seguente dichiarazione, sotto forma di Scolio nel I Libro:

« Nel corso di una corrispondenza che ebbe luogo circa dieci anni fa fra l'eminente matematico G. G. Leibniz e me, avendo io annunziato di possedere un metodo per determinare i massimi e minimi, condurre le tangenti ed eseguire somiglianti operazioni, applicabile tanto alle grandezze razionali quanto alle irrazionali, e celato tale metodo trasponendo le lettere che entrano nella frase: Data aequatione... » (v. sopra), « quell'uomo illustre replicò di essersi egli pure imbattuto in un procedimento della medesima specie e mi comunicò il suo metodo che differisce dal mio soltanto nelle parole e nella notazione. Il fondamento di entrambi è contenuto nel precedente lemma » (differenziazione di una potenza).

In queste misurate parole Leibniz e altri con lui ritennero trovarsi l'esplicito riconoscimento dei suoi diritti alla meravigliosa invenzione; ma persone, che passano per interpreti autorizzati del pensiero newtoniano, asseriscono invece che Newton intese esclusivamente affermare che egli *per primo* aveva fatta a Leibniz una comunicazione sull'argomento; se tale era realmente il suo intendimento, conviene credere che egli opinasse essere ufficio della parola, non di manifestare, ma di nascondere il pensiero dell'uomo.

Leibniz che, come sappiamo, trovavasi allora in viaggio, assorbito da ricerche archivistiche, non conobbe — se si accorda fede alle sue parole — i *Principia* od almeno non prestò ad essi la debita attenzione; e quando si volse nuovamente a studi fisico-matematici pubblicò negli A. E. del gennaio 1689 un infelice *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente,* nel quale, senza citare Newton espose alcune delle conclusioni a cui questi era anteriormente giunto, non senza aggiungere del suo parecchi errori. Questo secondo passo falso mosso dal filosofo dell'ottimismo provocò l'intervento del Wallis, il quale, per assidere sopra solide basi i diritti di Newton sui nuovi calcoli, inserì nel II Volume (1695) delle sue *Opere* alcuni brani dell'opuscolo *Tractatus de quadratura curvarum,* allora inedito.

483 - Malgrado questi incidenti, che soltanto più tardi assunsero il carattere di scaramuccie annunziatrici di una vera battaglia, le relazioni fra i due sommi antagonisti non subirono radicali deviazioni: stanno a provarlo la pubblicazione in Inghilterra (col consenso di Newton che ne lesse il manoscritto) di un'opera di sapore leibniziano quale è quella del Craig (p. 596) e la seguente dichiarazione fatta dal marchese de l'Hôpital nella Prefazione della sua *Analyse*: « C'est encore une justice due au savant M. Newton, et que M. Leibniz lui a rendue lui même: Qu'il avait aussi trouvé quelque chose de semblable au calcul dif-

férentiel, comme il paroit par l'excellent Livre intitulé, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la caractéristique de M. Leibniz rend le sien beaucoup plus facile et plus expeditif; outre qu'il est d'un secours merveilleux en bien de rencontres ». Aggiungiamo che i sentimenti amichevoli di Leibniz risultano anche dalle frasi scritte da lui ad Huygens quando apprese (da persone che le avevano esagerate) le notizie intorno alla nevrastenia da cui Newton era stato colpito (v. p. 564).

Ma questo stato di cose subì una metamorfosi profonda per colpa di Faccio di Duillier, autore (v. p. 612) di un opuscolo pubblicato a Londra nel 1699 sulla « linea brevissimi descensus » e sulla curva generatrice del solido di rivoluzione che incontra la minima resistenza procedendo in un fluido. Vi si trattavano questioni prettamente scientifiche; ma l'autore, per dare sfogo al risentimento che nutriva contro Leibniz per un pretesto torto da lui ricevutone [1] e senza dubbio per rendersi favorevole l'ambiente in cui viveva, fece (spontaneamente o subendo un'alta ispirazione?) un'antecipata protesta contro chiunque avesse voluto annoverarlo fra i discepoli di Leibniz, aggiungendo essere Newton *primo inventore* dei nuovi calcoli e non potere Leibniz pretendere che al titolo di *secondo* [2]. Questa dichiarazione egli affermava di essere costretto a fare per evitare che il silenzio del modesto Newton, di fronte alle declamazioni laudative dei numerosi seguaci di Leibniz, inducesse il pubblico matematico ad apprezzamenti del tutto erronei [3]. Parole certamente aspre e dure, ma non lesive per l'onore di Leibniz, dal momento che non racchiudevano alcun cenno di indebita appropriazione. Leibniz rispose (A. E. maggio 1700) citando come prova inconfutabile dei propri diritti il contenuto del surriferito Scolio dei *Principia*. Faccio tentò di ribattere, confermando il proprio punto di vista, ma ci è ignoto con quali argomenti perchè il suo scritto (benchè approvato da Giacomo Bernoulli) fu respinto dalla direzione degli A. E., la quale, probabilmente per suggerimento di Leibniz, si dichiarò aliena per principio dall'incoraggiare ogni sorta di polemiche: la disputa venne così momentaneamente soffocata, ma la fiaccola era celata sotto il moggio!

484 - Come si è visto, Newton pubblicando nel 1704 la sua *Ottica* vi aggiungeva in appendice il *Tractatus de quadratura curvarum* e l'*Enumeratio linearum tertii ordinis*; ora siccome questi scritti non hanno il benchè minimo rapporto con la teoria della luce, così è evidente che la loro pubblicazione fu decisa soltanto a tutela dei diritti di proprietà dell'autore, induzione questa la quale riceve una conferma dalla circostanza

(1) Ci è ignoto di che cosa si trattasse; forse era un affronto immaginario, perchè nel carteggio Leibniz-Huygens si leggono apprezzamenti favorevoli al Faccio. L'attitudine del Faccio può anche interpretarsi come atto di gratitudine per avere Newton giudicata favorevolmente la spiegazione della causa della gravità da lui proposta in una memoria che F. Bopp ha di recente rintracciata e pubblicata (v. Schriften der Strassburgerwissen. Gesell., X Helt, 1929).

(2) È un'opinione manifestata dal Faccio sino dal 28 dicembre 1691 scrivendo ad Huygens.

(3) Da alcune frasi riferite dal Dutens (1730-1812) nella sua edizione delle *Opere* di Leibnitz (t. III, p. 488) risulta che Newton affermò essere il Faccio « en état de former un jugement veritable » sulla questione.

che nell'esordio di quel volume è detto che si tratta di lavori che risalgono agli anni 1665-66. Di queste Appendici gli A. E. del gennaio 1705 pubblicarono una recensione anonima, ma che si sa essere stata scritta da Leibniz (1); ivi, fra l'altro è istituito un paragone fra il metodo, per così dire, inglese e quello tedesco; e siccome è ivi detto che Newton nei *Principia* fece uso di « flussioni » invece che di « differenziali », così veniva delicatamente insinuato che egli avesse tratta dagli scritti di Leibniz l'idea madre del procedimento applicato. Appunto in tale senso Newton interpretò quelle frasi della recensione e appunto per ciò se ne sentì gravemente offeso; in conseguenza una risposta, sotto qualche forma, non poteva mancare. Essa però si fece attendere tre anni e apparve nelle P. T. del 1708 sotto forma di lettera del Keill (che conosciamo, p. 595, per creatura di Newton) ad Halley (che ne era il più ardente ammiratore). Detta lettera ha l'apparenza di una comunicazione scientifica sopra la legge delle forze centrali; ma in un passo di essa è affermato che Newton è *senza alcun dubbio* il primo inventore del calcolo delle flussioni, Leibniz non avendo fatto altro che servirsene con notazioni differenti.

Equivaleva ciò a una ritorsione della presunta accusa di plagio? Come tale venne interpretata da Leibniz, il quale, riguardando non a torto il Keill come semplice esecutore d'una altrui deliberazione, nel marzo 1711 (noti il lettore la lentezza con cui allora procedevano le cose), giovandosi della sua qualità di F. R. S., rivolse ad Hans Sloane (2), che era allora segretario di quella corporazione, una energica protesta contro quell'asserzione, accompagnata dalla domanda che al Keill venisse imposto di manifestare senza ambiguità il proprio pensiero intorno all'origine e al primo stadio di sviluppo dei nuovi calcoli; a sostegno di questa domanda Leibniz invocava la testimonianza di Newton stesso (Scolio citato dei *Principia*).

485 - L'epistola del grande pensatore, letta alla Società Reale in un'adunanza tenuta in principio del successivo aprile, diede luogo ad una lunga e vivacissima discussione, nel corso della quale lo stesso pre-

---

(1) Non sarà giudicato fuor di proposito se noi qui riferiamo i passi più salienti di questo storico documento:

« L'ingegnosissimo autore prima di giungere alla quadratura delle curve (o per meglio dire delle figure curvilinee) premette una breve introduzione. Per ben comprenderla si deve sapere che quando una grandezza qualunque cresce con continuità, come ad esempio una retta crescente per il movimento di un suo punto, che la descrive, gli aumenti istantanei si chiamano *differenze*, cioè fra lo stato primitivo di quella grandezza e quello che essa è divenuta per effetto di quella variazione istantanea; da ciò nacque il *calcolo differenziale* e il suo inverso *sommatorio*, i cui elementi furono esposti in questi Atti da G. G. Leibniz e di cui furono mostrate svariate applicazioni tanto da lui quanto dai fratelli Bernoulli e dal marchese de l'Hôpital (la cui recente immatura morte deve addolorare profondamente tutti coloro che amano la scienza più profonda). In luogo delle differenze leibniziane Newton si serve, e si è sempre servito di *flussioni*, « *quae sint quam proxime ut fluentium augmenta aequalibus temporis particularis quam minimis genita* ». Nei suoi *Principia matematica philosophiae naturalis* e in altri scritti posteriori egli ne fece un uso elegante come Onorato Fabri nella sua *Synopsis geometrica* fece compiere alla scienza un progresso sostituendo il movimento al metodo di Cavalieri ».

(2) Questo uomo eminente, celebre come medico, come botanico e come viaggiatore, nacque il 16 aprile 1660; sino dal 21 gennaio 1685 era F. R. S., e della Società Reale fu segretario nel periodo 1693-1712 e presidente negli anni 1727-1741. Morì l'11 gennaio 1753.

sidente, uscendo dal riserbo che eragli tanto caro, prese la parola per far conoscere la genesi delle proprie scoperte. Il dibattito fu chiuso, dando incarico al Keill di riassumere il racconto fatto da Newton, in una lettera da inviarsi a Leibniz, previa approvazione della Società Reale. Il Keill assolse sollecitamente l'incarico ricevuto, tanto che il suo lavoro potè venire letto e approvato in una riunione che tenne quel sodalizio prima che spirasse il mese di maggio 1711. Con tale atto la Società Reale cominciò a partecipare ufficialmente alla lotta e, per bocca del Keill, dichiarò essere Newton primo inventore del calcolo infinitesimale, avendone egli esposti i principii in una lettera scritta per essere comunicata a Leibniz, mediante frasi comprensibili ad una persona dell'intelligenza di questo (notisi che qui si allude al famoso anagramma che riferimmo a p. 613): in tal modo l'accusa di plagio veniva forse attenuata, ma non ritirata del tutto.

Come potevasi prevedere, Leibniz non si appagò di questo mediocre risultato; filosofo dell'ottimismo, in pratica egli sapeva ben vedere quando le cose non procedevano nel migliore dei modi possibili, epperò sullo scorcio del 1711 (29 dicembre) riscrisse allo Sloane, anzitutto per rilevare che, secondo lui, il Keill nella sua lettera lo aveva offeso ancora più vivamente che nella sua anteriore pubblicazione, quindi per affermare di essere pervenuto da solo al calcolo infinitesimale, finalmente per chiedere che la Società Reale emettesse per mezzo del proprio presidente un voto di esplicita e severa disapprovazione verso di chi aveva osato attentare all'onorabilità di uno dei suoi membri.

486 - La lettera di Leibniz, comunicata alla Società Reale in un'adunanza tenuta in principio di marzo 1712, portò al parossismo l'eccitazione degli animi. L'autorevole consesso, chiamato direttamente in causa, nel timore di addivenire « ab irato » a una deliberazione di cui dovesse un giorno pentirsi, si appigliò al classico sistema dilatorio adottato nelle più delicate contingenze da tutte le assemblee che si rispettano, incaricò cioè una Commissione di esaminare scrupolosamente le lettere e gli altri documenti relativi alla questione di priorità sollevata da Leibniz e di riferire intorno alle conseguenze emergenti. In realtà si trattava, non di un collegio di arbitri imparziali (chè in tal caso Leibniz avrebbe avuto il diritto di partecipare in qualche modo alla costituzione e poi alle deliberazioni di esso), ma di un gruppo di persone delegate a porre in evidenza i diritti di una delle parti contendenti. In origine l'anzidetta Commissione fu composta di sei membri, ma in seguito si trovò opportuno di raddoppiare questo numero; oltre ai matematici a noi noti che portano i nomi di Halley, Jones, Burnet, Machin, de Moivre e Brook Taylor, furono chiamati a farne parte alcuni personaggi estranei alla scienza, fra gli altri l'ambasciatore del re di Prussia presso la Corte d'Inghilterra. Newton non figurava fra i componenti la Commissione, ma partecipò costantemente ai suoi lavori, non soltanto per porre a disposizione di essa i documenti da lui posseduti, ma dirigendone i lavori con l'abilità che era da attendersi da un tale genio.

La Commissione di cui è parola si pose attivamente al lavoro e lo condusse con tanto impegno che, prima della fine di maggio 1712, fu in

grado di rendere conto ai propri mandanti delle conclusioni a cui era pervenuta. Secondo queste, il Keill, proclamando Newton primo inventore dei nuovi calcoli, non aveva commessa alcuna ingiustizia verso Leibniz; perciò il suo operato meritava approvazione generale e completa. La stessa Commissione, nel lodevole intento di porre i competenti in materia in grado di misurare il valore dei « considerando » della riferita sentenza, propose la pubblicazione di un volume nel quale fossero fedelmente riprodotte le lettere documentatrici delle scoperte di Newton. Questo sensato suggerimento venne accolto senza contrasti e furono incaricati Halley, Jones e Machin di curare la preparazione e sorvegliare la stampa del progettato volume. Così ebbe origine la celebre opera che d'ordinario si cita con l'abbreviazione di *Commercium epistolicum* e il cui primo esemplare stampato fu presentato alla Società Reale di Londra nella seduta inaugurale dell'anno accademico 1713. Tirata in un numero esiguo di copie, fu distribuita per ordine di Newton, nella sua qualità di presidente del grande sodalizio, ai commissari e alle persone in qualche maniera interessate al dibattito; Newton stesso ne scrisse una breve recensione che fu subito pubblicata (anonima) nelle P. T.

487 - Leibniz, il quale trovavasi allora a Vienna, ne ricevette una prima notizia dal ben noto filosofo Cristiano Wolf (1679-1754) e poi l'esemplare a lui destinato pel tramite del diplomatico che rappresentava allora a Londra l'Elettore di Hannover. Prima di deliberare sopra quanto gli conveniva di fare volle conoscere il pensiero del suo diletto amico Giovanni Bernoulli; e questi non esitò a comunicarglielo, esigendo però che ne fosse fatto l'uso più riserbato, affinchè non venissero turbate le cordiali relazioni da lui stabilite con Newton e con gli altri matematici della Società Reale. Ora siccome il giudizio del Bernoulli era francamente favorevole a Leibniz, così questi non seppe resistere alla tentazione di divulgarlo, e, non appena rientrato in Hannover, diede alle stampe (29 luglio 1713) la lettera scrittagli dal matematico di Basilea; però, onde calmare la coscienza che gli rimproverava questa indiscrezione, la pubblicò come proveniente da un « eminente matematico », facendola seguire da riflessioni sue proprie; i due scienziati contendenti vi venivano designati con le trasparentissime sigle N...n e L...z. Siffatta pubblicazione fu fatta in latino come « charta volans »; ma Leibniz si affrettò a tradurla in francese per ottenere l'inserzione nel *Journal littéraire*, quasi risposta a una recensione del *Commercium epistolicum* fatta pubblicare ivi dal Keill.

Tutti compresero chi fosse quell'« eminente matematico » amico di Leibniz, e Newton fu profondamente addolorato dalle dichiarazioni da lui fatte, nelle quali gli parve di scorgere l'accusa di malafede e disonestà scientifica. Nell'intento di mostrarne l'infondatezza, egli — che durante tutta questa controversia preferì la parte di suggeritore a quella di attore — somministrò al fido Keill gli elementi per una esauriente confutazione dello scritto dei due amici e questa fece apparire nella stessa annata 1714 del citato *Journal littéraire*. Limitiamoci a rilevare che ivi è asserito che l'« eminente matematico » a cui erasi rivolto Leibniz altri non era che il secondo Bernoulli; ora questi, atterrito dall'ura-

gano che udiva rumoreggiare sull'innocente suo capo, si affannò a scrivere a tutti i proprii conoscenti (arrivando persino al giuramento) che quella attribuzione era cervellotica e falsa, senza però riuscire a persuadere alcuno, chè la verità si era già fatta strada.

488 - Emerge da quanto precede che la contesa stava divenendo di giorno in giorno più acre, violenta e accanita, e tendeva a coinvolgere un numero sempre maggiore di persone; era, perciò, naturale che sorgesse in qualcuno il pensiero di intromettersi per comporre il dissidio. Vi si provò sino dal 1714 un gentiluomo inglese, certo Chamberlayne, cominciando col dirigersi direttamente a Leibniz; ma ben presto dovette riconoscere che trattavasi di un còmpito superiore alle proprie forze. L'ufficio di paciere fu poi assunto dall'abate Conti; appunto per sua iniziativa la presidenza della Società Reale di Londra invitò i ministri delle potenze estere accreditati presso la Corte di S. Giacomo ad un esame collegiale della totalità dei documenti relativi alla « vexata quaestio ». Quali di essi abbiano accettato l'invito ci è ignoto, come siamo all'oscuro riguardo ai particolari del convegno che avrebbe potuto assumere storica importanza; sappiamo soltanto che il Barone di Kilmannsegg, rappresentante dell'Hannover, propose che, per porre un termine alla lunga e spinosa controversia, Newton stesso esponesse per iscritto al suo competitore le proprie ragioni. Tale suggerimento fu accolto dai convenuti e da Newton medesimo; ma questi, per non dipartirsi da un sistema da lui costantemente tenuto, preferì dirigere la convenuta lettera al Conti, con l'intesa che questi la comunicasse a Leibniz; essa porta la data 26 febbraio 1715-16; ma ben presto si dovette con dolore riconoscere che lo specifico ritenuto infallibile era riuscito inefficace contro una malattia che aveva ormai assunti tutti i caratteri della cronicità.

Infatti Leibniz inviò al Conti una risposta di forma tutt'altro che amichevole e abbastanza altezzosa; ciò che vi si trova d'importante per la scienza è che egli « per tastare il polso ai matematici inglesi » (si legga Newton) propose loro il problema delle traiettorie ortogonali, di cui già eransi occupati, oltre a lui stesso, i due Bernoulli. Si narra (e l'aneddoto ottenne larga diffusione avendolo inserito il Fontenelle nel suo *Elogio* di Leibniz) che Newton ne lesse l'enunciato rincasando alle 4 pomeridiane dopo una giornata d'intenso lavoro ufficiale; prima di coricarsi lo aveva risolto, nel modo che si apprende da un articolo anonimo da lui pubblicato nelle P. T. del 1716 (ove si cerca invano il nome di Leibniz).

489 - All'epistola newtoniana Leibniz giudicò opportuno di replicare anche pubblicamente con altra indirizzata ai matematici francesi, i soli da cui egli attendeva speranzoso un giudizio spassionato e sereno. Nello stesso tempo egli volgeva la mente ad un nuovo *Commercium epistolicum,* da contrapporsi a quello pubblicato dalla Società Reale [1];

[1] Il frammento postumo dal titolo *Historia et origo calculi differentialis* doveva forse servire come esordio alla progettata pubblicazione.

ed è probabilmente nel mentre raccoglieva e ordinava i materiali con cui comporlo che commetteva un'azione riprovevole, che non trovò scusa neppure presso i suoi più convinti fautori; cioè, in un foglio contenente un primo saggio del calcolo differenziale, egli mutò la data *1675* in *1673*, con l'evidente proposito di meglio documentare l'indipendenza delle proprie scoperte da quelle del suo rivale; l'insaziabile curiosità dei posteri — talvolta d'inescusabile indiscrezione, ma nel caso attuale veramente provvidenziale per la causa della verità e della giustizia — ha scoperto questo criminoso tentativo e ha condannato senza appello chi lo ha commesso, benchè esso non abbia avuto alcun pratico risultato: chè la terribile arma con cui Leibniz sperava di ridurre al silenzio il proprio implacabile avversario si palesò impotente per la sopravvenuta morte dell'audace combattente.

Ma, purtroppo, gli odi degli uomini bene spesso non si spengono neppure di fronte alla santità di un sepolcro; prova ne sia che la scomparsa di Leibniz non placò il suo illustre competitore e della sua inestinguibile ostilità esistono prove autentiche che lo storico, sia pur con rammarico, ha il dovere di registrare. Non appena egli apprese la scomparsa del filosofo-matematico, ne pubblicò due lettere relative alle origini del calcolo infinitesimale, scritte nel 1715, accompagnandole di commenti tanto più inopportuni in quanto non potevano venire confutati. Inoltre comunicò al Raphson i documenti fondamentali per la sua *History of fluxions* (v. p. 595), la quale non solo riducesi a un'apologia di Newton, ma è talmente partigiana che l'autore non esitò a sostenere che Leibniz era riuscito a decifrare il noto anagramma newtoniano (v. p. 613); in tal modo, per strappare una gemma dalla fulgida corona che orna il capo del sommo filosofo, si giunse ad attribuirgli una potenza divinatrice, veramente sovrumana.

490 - Nell'intento di maggiormente diffondere nel mondo il *Commercium epistolicum*, Newton ne provocò una nuova edizione (1722), apportandovi qualche abile ritocco, corredandolo di una nuova prefazione e aggiungendovi la recensione della I edizione che dicemmo pubblicata da tempo nelle P. T., l'una e l'altra anonime, ma indiscutibilmente opera sua. Finalmente dispose che nella III edizione (1726) dei *Principia* venisse radicalmente modificato il celebre Scolio relativo a Leibniz (v. p. 614) in modo che scomparisse il nome di questo, e dopo lunga esitazione (della quale fanno fede alcuni fogli manoscritti che esistono ancor oggi), si fissò nella dicitura seguente:

« Nel corso di una mia lettera a J. Collins, dopo avere descritto un metodo per le tangenti, che io sospettavo coincidesse con altro di Sluse allora inedito, io aggiungevo l'osservazione seguente: *È questo un caso particolare o meglio un corollario di un metodo generale, applicabile a qualsiasi calcolo laborioso, non soltanto per la costruzione delle tangenti a tutte le curve geometriche o meccaniche o di altre linee relative ad altre curve, ma anche alla risoluzione di altre specie di problemi concernenti la curvatura, la quadratura e la rettificazione, e i centri di gravità delle curve, e non è limitato (come il metodo dei massimi e minimi di Hudde) alle equazioni immuni da irrazionalità. Questo fu da me incluso*

*in quello che serve a risolvere le equazioni mediante sviluppi in serie.* Tale è il contenuto della citata lettera. E le ultime parole si riferiscono ad una memoria da me scritta nel 1671. Il fondamento di quel metodo generale trovasi nel precedente lemma ».

Ora, paragonando il nuovo testo all'antico si vede che Newton, col mantenere immutate le prime e le ultime parole e col conservare l'andamento generale del discorso, volle far passare inosservato il sostanziale mutamento da lui fatto subire al contenuto di quello Scolio; ma s'illuse facendo assegnamento sopra la cecità o distrazione dei lettori; i quali, al contrario, avvertito il sapiente ma illecito armeggio dell'autore, non esitarono a decretare contro di lui un biasimo solenne, che la storia imparziale si è affrettata a ratificare.

491 - Neppure la scomparsa d'uno dei contendenti chiuse definitivamente una discussione [1], che, da un dibattito con carattere esclusivamente dottrinale, aveva finito per assurgere al livello di lotta fra due popoli, raramente amici, ma che durante il primo quarto del secolo XVIII trovavansi in uno stato di permanente dissenso a cagione dei segreti maneggi (a cui Leibniz non fu estraneo) che, morta la regina Anna (1714), finirono per portare sul trono d'Inghilterra Giorgio I della Casa di Hannover.

Però, di mano in mano che venivano bandite considerazioni squisitamente personali, la grande contesa andò gradatamente perdendo asprezza e violenza, cosicchè la questione di priorità potè venire finalmente discussa con serena equità, anche da storici conterranei dell'uno o dell'altro dei contendenti.

Se anche una sentenza definitiva e completa non potrà venire pronunziata se non dopo che sarà posto a disposizione di tutti il più intimo contenuto delle carte lasciate dai due antagonisti, pure si può sin d'ora asserire che i nuovi calcoli non furono esclusiva opera loro. È ben vero che di essi è gloria imperitura l'avere riconosciuto come le infinitiformi questioni matematiche a cui conducono l'algebra, la geometria e la filosofia naturale si possono trattare uniformemente quando siasi in grado di eseguire le due operazioni di differenziazione e integrazione, l'avere di più posta in luce la profonda relazione esistente fra esse e l'avere insegnato a eseguirle almeno nei casi più ovvii. Ma sarebbe vano ogni tentativo per negare che l'uno e l'altro completarono, da differenti punti di vista e con criteri proprii, un mirabile edificio le cui basi erano state poste, circa venti secoli prima, da Eudosso e Archimede; edificio che aveva già raggiunta notevole altezza grazie alle meritorie fatiche di alcuni discepoli di Galileo (primi B. Cavalieri e E. Torricelli), di Kepler e Wallis, di Descartes e Fermat e di altri investigatori di minor grado che non mancammo di citare nelle pagine precedenti. Quanto vi aggiunsero i due grandi emuli, ognuno per proprio conto, è di stile talmente differente che — senza escludere qualche possibile e forse inavvertita influenza dell'uno sull'altro — l'assoluta proprietà di ciascuno su quanto

---

[1] « Procès qui n'est encore terminé », scriveva nel 1740 il Buffon nella prefazione della traduzione che citammo a p. 594.

lasciò scritto non può ragionevolmente essere revocata in dubbio. Mentre in Newton appare evidente la tormentosa preoccupazione di spiegare e interpretare matematicamente i fatti naturali, Leibniz non riuscì mai a spogliarsi dell'abito mentale proprio ai cultori della filosofia e della logica; mentre per il primo è la determinazione del contenuto di figure a una, due o tre dimensioni lo scopo supremo dell'alta analisi, per Leibniz è la differenziazione l'operazione fondamentale su cui devono concentrarsi gli sforzi dell'analista; e l'uso metodico delle caratteristiche $d$ e $\int$ è talmente conforme alla tendenza verso il simbolismo che caratterizza tutta l'opera scientifica di Leibniz che, anche ove non ne esistessero prove indiscutibili e indiscusse, si potrebbe attribuirne a lui l'invenzione in base a semplici considerazioni intrinseche.

492 - Proseguendo nei nostri studi vedremo che a questi simboli deve la vita la moderna analisi matematica; ed è nostra convinzione che se Newton pugnò con tanta ostinazione per far riconoscere i suoi diritti di proprietà sulle nuove procedure, è appunto quando, nell'intimo del suo cuore, misurò l'indiscutibile superiorità dei democratici procedimenti usati sul continente sul complicato metodo geometrico-meccanico, del cui delicato maneggio forse egli solo poteva dirsi completamente padrone.

Sgraziatamente, impegnata la lotta, i due combattenti, come troppo spesso avviene, non furono sempre scrupolosi nella scelta delle armi; paragonando il contegno irreprensibile da essi tenuto in ogni occasione, prima che venissero aperte le ostilità, con atti deplorevoli e deplorati da essi commessi nel corso della pugna, il pensiero ricorre all'eroe di Machiavelli, il quale si mantenne virtuoso sino al giorno in cui gli si presentò la prospettiva di poter venire in possesso di una corona. Per tali offese alla legge morale nessun giudice coscienzioso pronuncierebbe l'assoluzione; ma lo storico, contemplando da lungi la meravigliosa fioritura, gloria delle nuove provincie scoperte da Newton e Leibniz, non insiste su considerazioni estranee al proprio còmpito, e, assillato e sospinto dalla legittima impazienza dei lettori, passa a narrare le nuove battaglie e ad esaltare le clamorose vittorie di cui furono teatro i conquistati territori.

## BIBLIOGRAFIA

*Commercium epistolicum* D. JOHANNIS COLLINS *et aliorum de Analysi promota: jussu Societatis Regiae in lucem editum* (Londini, 1712; II. ed., ivi, 1722; III ed., ivi, 1725).

*Commercium epistolicum* J. COLLINS *et aliorum de Analysi promota ou Correspondance de* J. COLLINS *et d'autres célèbres du* XVII *Siècle relative à l'analyse supérieure réimprimée sur l'édition originale de* 1712 *avec l'indication des variantes de l'édition de* 1722, *complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par* J. B. BIOT *et* F. LEFORT (Paris, 1856).

CAPITOLO XXXI

# DURANTE LA GRANDE CONTESA

## PARTE PRIMA: NELLA SVIZZERA TEDESCA

### Giovanni Bernoulli

493 - Era a credersi che l'aspra guerra generata dalla duplice invenzione del calcolo infinitesimale sarebbe stata combattuta, in appoggio a Leibniz, da matematici tedeschi. Ma in Germania non esisteva allora alcuno in grado di assumere tale gravissimo còmpito; se ne trovavano invece, parecchi e valorosi, nella Svizzera tedesca; alcuni sono a noi già noti, se anche non perfettamente; di altri diremo nel presente Capitolo, cominciando dal completare il quadro della produzione matematica dei primi: fra questi campeggia gigante Giovanni Bernoulli.

La sua produzione matematica posteriore alla sua assunzione alla cattedra di Basilea fu abbondante, di cospicuo valore e svariata, giacchè abbraccia, oltre quasi tutte le branche della matematica pura, la meccanica dei solidi e dei fluidi, la fisica e la manovra delle navi; ma dei suoi scritti relativi a questi tre argomenti non è còmpito nostro di parlare.

Buon numero dei suoi lavori prettamente teorici del Bernoulli trattano questioni di cui egli erasi occupato anche prima e arrecano perfezionamenti e sviluppi ai risultati dianzi stabiliti. Così troviamo ulteriori studi sulle curve reptorie, sugli isoperimetri, sulle trajettorie ortogonali, sulla trasformazione di una curva in altra di eguale lunghezza e sulle linee funicolare ed elastica.

Continuando poi le sue ricerche sul calcolo esponenziale egli ha ottenuto un risultato che, comunicato a Leibniz sino dalla fine del secolo XVII. ne destò l'ammirazione; esso concerne la quadratura della porzione della curva $y = x^x$ compresa fra $x = 0$ e $x = 1$, e fu ottenuto applicando la serie esponenziale; si osservi, a tale scopo che, essendo

$$y = e^{x \log x} = 1 + \sum_1^\infty \frac{x^n}{n!} (\log x)^n$$

integrando si trova

$$\int y\, dx = x + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \int x^n (\log x)^n \cdot dx.$$

Ora gli integrali che stanno nel secondo membro si possono calcolare mediante ripetute applicazioni dell'integrazione per parti; presi

poi per limiti di detti integrali 0 e 1 si giunge alla seguente espressione dell'area cercata: $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n_n}$, che è appunto quella scoperta dal Bernoulli.

Durante il secondo decennio del secolo XVIII la grande contesa di cui parlammo nel precedente Capitolo manteneva gli animi dei matematici inglesi seguaci di Newton in uno stato di ostilità, più o meno palese, rispetto a quelli che gloriavansi di chiamarsi discepoli di Leibniz. Una prova di tale condizione è offerta da una disputa sorta fra B. Taylor e Giovanni Bernoulli quando il primo si dolse (A. E., 1716) che le sue opere non fossero apprezzate a dovere sul continente; il lettore desideroso di particolari al riguardo li troverà nel II Volume delle *Opere* dell'eminente matematico di Basilea. Qui giova rilevare come un'eco di questo episodio si udì quando questi nel 1719 ricevette, pel tramite del Montmort (v. più avanti, n. 543), l'enunciato del seguente Problema, proposto da B. Taylor a tutti i matematici « non inglesi »: Determinare mediante quadratura del circolo o dell'iperbole l'integrale di

$$(1) \qquad d z \cdot z^{\frac{\delta}{\lambda} q - 1} : (e + f z^q + g z^{2q}),$$

ove $z$ è variabile, $e, f, g, q$ sono costanti, $\delta$ è un numero qualunque positivo o negativo, e $\lambda$ un numero qualunque della serie 2, 4, 8, 16, 32,... Il proponente aggiunse una critica a quanto Leibniz scrisse (A. E., 1702, p. 218) ritardo all'integrale di $d x : (x^4 + a^4)$, il quale rientra nel tipo generale precedente, e accennò all'estensione della proposta ricerca all'integrale di

$$d z \cdot z^{\frac{\delta}{\lambda} q - 1} (e + f z^q + g z^{2q} + h z^{3q}).$$

Ora chi ricorda un lavoro inserito dal Bernoulli nelle *Memorie* dell'Accademia di Parigi (p. 607) non tarderà a riconoscere che egli era mirabilmente preparato a risolvere quella questione. Nell'accingersi ad esporre il proprio metodo, egli attenua anzitutto il peso di quell'appunto al suo venerato maestro, stabilendo la identità

$$\frac{1}{x^4 + a^4} = \frac{\frac{1}{2a^2} + \frac{x}{2a^3\sqrt{2}}}{x^2 + a x \sqrt{2 + a^2}} + \frac{\frac{1}{2a^2} - \frac{x}{2a^3\sqrt{2}}}{x^2 - a x \sqrt{2 + a^2}},$$

e poi espone con tutti i particolari necessari il calcolo dell'integrale (1), distinguendo accuratamente i vari casi che si possono presentare. Di altre sue dispute con gl'Inglesi dànno notizia gli A. E. del febbraio 1723, mentre altri risultati concernenti gli integrali di differenziali binomi sono enunciati in fine della succitata risposta al Taylor e furono dimostrati dal figlio Nicola negli A. E. dell'ottobre 1720.

494 - Proseguendo nel nostro riassunto dell'opera del secondo Bernoulli, notiamo che egli ha indicato un'elegante applicazione del calcolo integrale a una questione fondamentale di trigonometria; per darne

notizia poniamo

$$x = \operatorname{tg} A \quad , \quad y = \operatorname{tg} B \ ,$$

ossia

$$A = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad , \quad B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y;$$

siccome ne deriva

$$d\,A = \frac{d\,x}{1 + x^2} \quad , \quad d\,B = \frac{d\,y}{1 + y^2} \ ,$$

così, supposto $B = n \,.\, A$, risulta:

$$\frac{d\,y}{1 + y^2} = n \frac{d\,x}{1 + x^2} \ ,$$

onde, applicando le formole d'integrazione delle frazioni razionali,

$$\left(\frac{y - i}{y + i}\right) = \left(\frac{x - i}{x + i}\right)^n$$

ossia

$$y = i \ \frac{(x + i)^n + (x - i)^n}{(x + i)^n - (x - i)^n}$$

cioè

$$\operatorname{tg} n\, A = i \ \frac{(\operatorname{tg} A + i)^n + (\operatorname{tg} A - i)^n}{(\operatorname{tg} A + i)^n - (\operatorname{tg} A - i)^n} \ , \tag{2}$$

risultato che, per $n$ intero positivo, coincide con la notissima espressione che dà la tangente di un arco multiplo di un altro. Ora il Bernoulli, a ragione convinto del dovere un risultato di carattere elementare potersi ottenere elementarmente, mostrò che alla (2) potevasi giungere applicando la formola che dà $tg\ (a + b + c + ...)$, facendovi $a = b = = c = ...$: a tale scopo stabilì direttamente la relazione

$$\operatorname{tg} (a + b + c + ...) = \tag{3}$$

$$= \frac{\Sigma \operatorname{tg} a - \Sigma \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \Sigma \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c - ...}{1 - \Sigma \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \Sigma \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} d - ...} \ ,$$

che non tardò a prendere posto in qualunque trattato di trigonometria.

Lo stesso autore avvertì che la curva logaritmica, oltre il noto ramo continuo, ne ammette un altro punteggiato simmetrico al precedente rispetto all'asse delle ascisse; usò in molti casi il metodo di induzione completa; e, l'anno stesso in cui veniva pubblicata la II edizione delle *Recherches de Mathématiques et Physique* del Parent (v. più avanti, n. 537) scriveva a Leibniz (in data 6 febbraio 1715) alcune frasi donde risulta che egli possedeva una idea perfettamente chiara della rappresentazione di una superficie mediante un'equazione; di tale rappresentazione nel 1728 egli si giovò per dare una migliore soluzione del problema delle linee geodetiche, di cui si era occupata sino dal 1698.

495 - Molte delle pagine scritte da Giovanni Bernoulli insegnano artifici da usarsi quando si voglia integrare un'equazione differenziale. Così in una memoria inserita nel T. I. dei *Comment, Acad. Petrop.* egli si occupò (non per primo però, v. n. 518) dell'integrazione delle equazioni differenziali omogenee e le integrò con l'artificio ancor oggi in uso, arrestandosi in particolare su quelle della forma $(a\,x + b\,y)\,d\,x + (c\,x + e\,y)\,d\,y = 0$; ma queste ha anche integrato ammettendo « a priori » che l'integrale avesse la forma $(x + \alpha\,y)^m\,(x + \beta\,y)^n = \text{cost.}$; identificando alla proposta l'equazione che ne nasce per differenziazione si ottengono equazioni sufficienti alla determinazione delle quattro costanti $\alpha$, $\beta$, $m$, $n$. Altri tipi più complicati trovansi considerati nel T. IV delle sue *Opere* per applicarvi la separazione delle variabili e l'abbassamento dell'ordine. Varie questioni di analisi esigono si decompongano binomi della forma $x^n - 1$, e il Bernoulli ha somministrato ai calcolatori (id. id.) utili tabelle di scomposizione, nel calcolare le quali egli ha data pure una dimostrazione del notissimo teorema di Côtes (v. n. 515).

Anche delle serie, questo mirabile ausiliare dell'analisi, il nostro matematico si è occupato con notevoli risultati, alcuni dei quali meritano di venire qui ricordati [1]. Egli ha studiate le serie in cui i numeratori dei termini formano una progressione aritmetica e i denominatori una progressione geometrica e, con una opportuna scomposizione dei termini stessi, è giunto alla relazione

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a + n\,b}{c\;e^n} = \frac{a\,e^2 - a\,e + b\,e}{c\,e^2 - 2\,c\,e + c},$$

senza però notare che essa sussiste soltanto quando $e > 1$. Si ha poi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a}{[b + (n-1)\,c]\;[b + n\,c]} = \frac{a}{b\,c},$$

come si riconosce facilmente scomponendo ogni termine della serie nella differenza di due frazioni.

Il Bernoulli ne dedusse la divergenza della serie armonica [2], osservando che, particolarizzando la formola precedente, si ottengono le seguenti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = 1$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{20} + \ldots = \frac{1}{4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

---

[1] Già negli A. E. del novembre 1694 egli aveva fatto conoscere una serie sostanzialmente identica a quella di Taylor.

[2] Sappiamo che ciò non era sfuggito al Menzoli.

onde, addizionando membro a membro, si conclude:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

relazione che sarebbe assurda se il secondo membro fosse finito; esso è, quindi, infinito. Questo ragionamento è molto interessante in quanto è appunto quello che condusse il Bernoulli alla scoperta della divergenza della serie armonica. Incontriamo poi il risultato espresso dalla formola

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_1^\infty \frac{1}{n^2},$$

dovuta, come vedremo, ad Euler, ma stabilita con un procedimento che abilita a sommare tutte le serie della forma $\Sigma\ (1\ :\ n^{2r})$, ove $r$ è un intero positivo; per esempio si ha

$$\frac{\pi^4}{90}=\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}.$$

Connesse a queste ricerche sono altre che condussero il Bernoulli al calcolo delle somme

$$1^m+2^m+\ldots+n^m,$$

per $m$ intero e positivo, ricorrendo al metodo dei coefficienti indeterminati.

Rileviamo ancora che egli si è pure occupato dello studio della espressione

$$x=\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\ldots}}},$$

ed ha rilevato che $x$ è la radice positiva dell'equazione

$$x^n-x-a=0;$$

ad esempio per $n=2$, $a=2$ si ha $x=2$ e per $n=2$, $a=6$ si ha invece $x=3$. Una questione di teoria delle probabilità lo ha poi condotto a stabilire che il massimo termine dello sviluppo di $(a+b)^n$ occupa il posto espresso dal più grande intero contenuto nella frazione $(n+1)\,b:(a+b)$.

**496** - Benchè particolarmente orientato verso l'analisi, il Bernoulli non ha trascurato del tutto la scienza dell'estensione; per non parlare delle questioni di geometria infinitesimale, di cui egli si è occupato con successo (per primo egli ha stabilita l'equazione differenziale delle linee geodetiche), alludiamo a quanto scrisse sulle epicicloidi sferiche, per rettificare quanto G. Hermann (v. n. 498) scrisse sull'argomento, ed ai problemi e teoremi di geometria elementare che egli fece inserire nel T. IV delle sue *Opere*. Non riuscirà poi discaro ai lettori il vedere qui riferita la dimostrazione da lui congegnata per il teorema di Ceva (v.

p. 552), al quale ignoriamo se egli sia giunto da sè o se lo abbia appreso dal matematico milanese (1). Sia $B\ C\ D$ (fig. 66) il triangolo dato, $A$ il punto per il quale passano le trasversali $B\ F$, $C\ E$, $D\ G$. Si conducano $C\ I$ parallela alla retta $D\ A\ G$ e $D\ H$ parallela a $C\ A\ E$, entrambe terminate alla retta $B\ F$. Risultano allora due coppie di triangoli simili $A\ C\ I$, $H\ D\ A$ e $A\ F\ C$, $H\ F\ D$, donde traesi successivamente

$$\frac{CF}{FD} = \frac{AC}{HD} = \frac{AI}{AH} = \frac{AI}{AB} \cdot \frac{AB}{AH} = \frac{CG}{GB} \cdot \frac{BE}{ED};$$

dunque si ha in valore assoluto $CF \,.\, BG \,.\, DE = CG \,.\, BE \,.\, DF$, $q\,.\,e\,.\,d.$

Un ultimo lato della mente del Bernoulli ci è rivelato da alcune sue pagine di carattere critico. Critica è infatti l'indole di una lettera da lui inviata al Burnett il 9 gennaio 1709 per dimostrare illusorio il metodo per trasformare una curva in altra equilunga esposto dal Craig (1731?) nelle P. T. del 1708 (il Craig riconobbe il proprio torto). Lo stesso carattere possiedono una lettera scritta al Montmort il 7 maggio 1710 per sottoporre a un esame rigoroso alcuni passi del suo *Essai d'Analyse sur les Jeux du hazard* ed altra destinata all'autore (2) di un *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital* (Paris, 1721). Ma gli strali più acuminati furono lanciati dal Bernoulli contro l'opuscolo del matematico scozzese (v. n. 500) Giorgio Cheyne intitolato *Fluxionum methodus inversa* e più ancora contro *A Method of Fluxions* dello Stone (v. n. 514), che nel 1735 era stato tradotto in francese; anzi il tono aggressivo usato dal nostro matematico contro questi due porge una nuova prova della continuazione dell'animosità fra Inglesi e Tedeschi derivata dalla disputa intorno alle origini del calcolo infinitesimale, anche dopo la scomparsa di Leibniz e Newton.

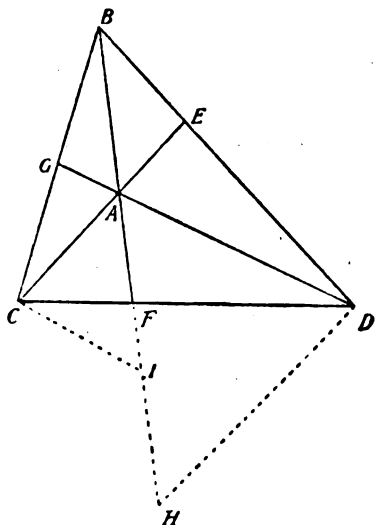



Fig. 66.

Non sapremmo chiudere meglio questi cenni che segnalando una

(1) Comunque la priorità del Ceva è induscutibile, onde ingiusto è (come taluno fece) attribuire quel teorema al Bernoulli.

(2) Nella collezione delle *Opere* di Giovanni Bernoulli, che sono state stampate a Losanna, per ragioni facili a comprendersi, è taciuto il nome dell'autore, che viveva allora in quella città. Si tratta infatti di Pietro de Crouzas. Egli nacque a Losanna il 13 aprile 1663; soggiornò per ragioni di studio successivamente a Ginevra, Rotterdam e Parigi. Rimpatriato, nel 1684 ebbe cattedra nel patrio Ateneo; ma nel 1724 credette opportuno accettare un posto nell'Università di Groninga, ove rimase due anni; fu poi chiamato a Kassel per istruire il principe Federico. Nel 1735 ritornò a Losanna e tre anni dopo vi riebbe l'antico ufficio, in cui rimase sin quasi alla morte, avvenuta il 22 febbraio 1750.

breve nota del Bernoulli, pubblicata per la prima volta nel IV Volume delle sue *Opere,* da cui si apprende che le infinite evolventi successive di una curva piana tendono a una determinata forma limite, che è una cicloide; è un fatto molto notevole che fu dimostrato da Euler (*Comment. Petrop.,* 1764), Legendre (*Exercices de Calcul integral.* VI Partie), Poisson (*Journ. de l'Ecole polyt.,* XVIII Cahier, 1820) e possiamo aggiungere Lagrange, benchè non abbia ancora vista la luce una memoria sull'argomento letta all'Accademia di Berlino il 13 luglio 1760 e il cui originale esiste tuttora nella Biblioteca dell'Istituto di Francia.

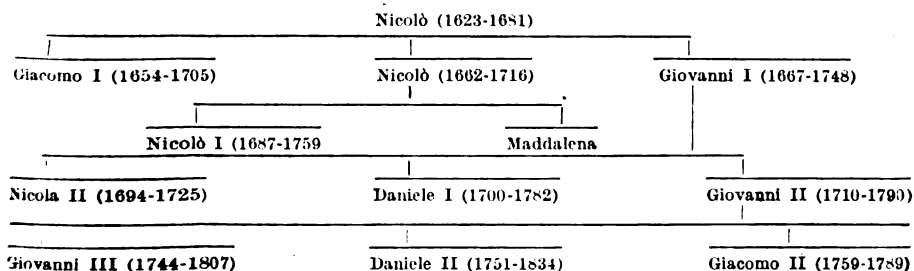
Questo bel risultato porge una nuova conferma dell'originalità di colui sulla cui tomba furono incise le seguenti parole:

HOC SUB LAPIDE REQUIESCIT
VIR QUO MAIOREM INGENIO BASILEA NON TULIT
SAECULI SUI ARCHIMEDES
NON ILLIS EUROPAE LUMINIBUS
CARTESIIS, NEWTONIS, LEIBNITZIIS
MATHEMATUM SCIENTIA SECUNDUS
JOANNES BERNOULLI.

## I Bernoulli delle seguenti generazioni

497 - Una delle più notevoli caratteristiche del secolo XVIII è rappresentata dall'incontrarvisi famiglie comprendenti parecchi investigatori nel campo matematico. La più numerosa s'intitola dal nome dei due eminenti scienziati che più di qualunque altro promossero lo sviluppo del calcolo infinitesimale creato da Leibniz. È appena necessario avvertire che alludiamo ai Bernoulli, dinastia tanto numerosa che i suoi membri debbono venire designati, oltrechè col loro nome, con un numero d'ordine (1).

E appunto nipote dei due fondatori di questa dinastia, Giacomo I e Giovanni I, e discepolo di ambedue, è Nicolò I, nato a Basilea il 10 ottobre 1687, morto ivi il 29 novembre 1759. Grazie a l'appoggio di Leibniz la Repubblica veneta gli conferì (23 settembre 1716) nell'Università di Padova la cattedra già tenuta dall'Hermann (v. n. 499), ed egli l'oc-

(1) Non è fuor di luogo riferire qui l'albero genealogico redatto da R. WOLF e pubblicato in un articolo del *Bullettino di Bibl. e storia* (t. II, 1869) contenente le più ampie notizie intorno al carteggio dei Bernoulli (famiglia oriunda di Anversa e che, dopo un soggiorno a Francoforte, prese stabile dimora a Basilea):

cupò con plauso durante un triennio; lasciata l'Italia si restituì a Basilea, nella cui Università egli insegnò sino alla morte. Due sono i soggetti che egli coltivò di preferenza: cioè la teoria delle serie e quella delle probabilità; la corrispondenza da lui tenuta con Leibniz mostra che egli fu uno dei primi a vedere chiaro nella teoria della convergenza delle serie; mentre quella di lui col Montmort è tanto importante che fu inserita nella II edizione di un'opera che vedremo (v. n. 536) scritta da questo matematico; nè va taciuto che è suo merito l'avere tratto dall'inedito l'*Ars conjectandi* (v. n. 542) di suo zio Giacomo I.

Nicolò II è invece figlio di Giovanni I. Nacque a Basilea il 27 gennaio 1695, ivi si addottorò il 9 giugno 1711 e morì a Pietroburgo il 29 luglio 1726. Sino da giovane diede prova di spiccate attitudini per la matematica, come prova la soluzione da lui data (A. E., maggio 1716) pel problema di determinare le traiettorie ortogonali delle $\infty^1$ iperboli aventi comuni i vertici. Viaggiò in Francia e in Italia; ma nel 1722 fu richiamato a Basilea dal padre che gli impose di concorrere a una cattedra di diritto vacante in quella Università. La sorte non essendogli stata favorevole, passò alla Facoltà giuridica di Berna, ove rimase sino al 1725, e l'abbandonò per meglio dedicarsi alla matematica, avendogli Pietro il Grande rivolto l'invito di occupare un posto nell'Accademia da lui istituita nella capitale del suo impero; l'inclemenza del clima di Pietroburgo lo spense poco dopo (1), lasciando nei contemporanei la convinzione che la matematica aveva così perduto un valente cultore, convinzione la quale è condivisa dai posteri che ammirano la sua memoria sull'equazione di Riccati (*Comment. Acad. Petrop.*, T. I) e il carteggio scientifico da lui tenuto con un esimio cultore dell'aritmetica superiore, C. Goldbach (v. n. 564).

498 - Fratello del precedente è Daniele I Bernoulli, nato a Groninga il 29 gennaio 1700, morto a Basilea il 17 marzo 1782. In matematica fu istruito dal padre Giovanni I e da Nicolò II; quello voleva avviarlo al commercio; il figlio si orientò invece verso la medicina, senza trascurare le scienze esatte; in tale ribellione deve cercarsi la prima radice dell'insanabile dissenso che non tardò a manifestarsi fra padre e figlio (1). Nel 1724 pubblicò una miscellanea dal titolo *Exercitationes quaedam mathematicae* (Venetiis). Essa è in parte polemica, giacchè concerne una controversia sui giuochi d'azzardo sorta fra i due fondatori della dinastia bernoulliana e Giovanni Rizzetti (matematico veneto morto nel 1754). Ma in buona parte (ed a ciò deve la sua importanza) è di carattere dottrinale; chè, oltre alla soluzione di un problema sulle lunule quadrabili proposta da Goldbach, contiene, sotto forma esplicita le condizioni affinchè l'equazione differenziale conosciuta sotto il nome di Riccati può integrarsi mediante separazione delle variabili. Tale

(1) Una commovente necrologia scritta dal fratello Daniele trovasi allegata a una lettera che questi diresse a Goldbach il 9 novembre 1728.

(2) Il dissenso si mutò in guerra aperta nel 1734 quando l'Accademia di Parigi divise fra di essi il premio sul tema posto allora a concorso (in quell'occasione Giovanni si mostrò seguace di Cartesio e Daniele di Newton); a gettare legna sul fuoco contribuì la mala azione commessa dal padre appropriandosi cose che il figlio aveva inserite nella sua *Idrodinamica*.

questione venne proposta da Jacopo Riccati (v. n. 521) nell'articolo intitolato ***Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus***, pubblicato nel Supplemento al T. VIII (1724) degli A. E., e subito il Bernoulli ne aveva dato la soluzione « characteribus occultis » sotto la seguente forma: 14 *a*, 6 *b*, 6 *c*, 8 *d*, 13 *e*, 5 *f*, 2 *g*, 4 *h*, 33 *i*, 6 *l*, 21 *m*, 26 *n*, 16 *o*, 8 *p*, 5 *q*, 17 *r*, 16 *s*, 25 *t*, 32 *u*, 5 *x*, 5 *y*, +, —, —, ±, 4, 2, 1; ora, la spiegazione di questo enigma (che certamente nessuno avrebbe saputo trovare) si legge appunto in alcune importanti pagine delle citate *Exercitationes*.

Chiamato a Pietroburgo nel 1725 ([1]) insieme al fratello Nicolò II, non tardò ad affermarsi per matematico di primo ordine, vincendo, nel periodo 1725-1757, dieci premi su temi proposti dall'Accademia di Parigi. Nel 1733 lasciò la Russia, per occupare nel patrio Ateneo, sino alla sua morte, la cattedra di anatomia e botanica. Le accademie di Bologna, Berlino e Parigi, nonchè la Società Reale di Londra, lo chiamarono nel proprio seno in riconoscimento dell'importanza dei lavori da lui compiuti. Egli, infatti, è il fondatore dell'idrodinamica teorica, scienza a cui impose questo nome e di cui scrisse (1738) un'esposizione che non tardò a divenire classica, mentre nella meccanica il suo nome è legato al principio della conservazione delle forze vive e nella teoria delle probabilità al fondamentale concetto di « aspettazione morale ». Restringendoci in questo momento a quanto appartiene alla matematica pura, ricorderemo le sue ricerche sopra le serie ricorrenti e la loro applicazione alla risoluzione delle equazioni algebriche (*Comment. Acad. Petrop.*, T. III; secondo lui, data l'equazione $f(x) = 0$ e posto $1/f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, dopo un certo numero di termini, il quoziente $a_r/a_{r+1}$ dà alternativamente un valore maggiore o minore di una radice della data); ci riserbiamo di ritornare poi (v. n. 538) sulle applicazioni da lui fatte del calcolo integrale a problemi relativi alle probabilità.

Un terzo figlio di Giovanni I è Giovanni II Bernoulli; egli nacque a Basilea il 18 maggio 1710; successe al padre nell'insegnamento della matematica in quell'Università (1748) e morì il 18 luglio 1790. Delle sue eminenti doti d'investigatore fanno fede quattro memorie premiate dall'Accademia di Parigi; il suo carattere indolente (di cui parlò incidentalmente il fratello Daniele) gli vietò di stampare nella scienza un'orma più vasta e profonda.

Fu suo figlio Giovanni III, nato a Basilea il 4 novembre 1744, morto a Berlino il 13 luglio 1807. Appena laureato, Federico II lo chiamò ad occupare un posto nell'Accademia prussiana, onore di cui si mostrò degno con importanti lavori astronomici. Negli anni 1786-89 fu uno dei direttori del *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, che è uno dei primi periodici matematici che abbia vista la luce in Europa (v. n. 644). Curò anche la pubblicazione di alcuni lavori del Lambert e di una versione francese dell'*Algebra* di Euler.

---

([1]) I biografi del matematico in questione parlano di una sua chiamata a Genova in vista di una fondazione ivi di un'Accademia; ma l'Archivio di Stato di detta città, esplorato per incarico di chi scrive, non rivelò alcuna traccia di tal fatto; si tratta forse di uno scambio di Ginevra con Genova.

Altro figlio di Giovanni II fu Giacomo II Bernoulli, nato a Basilea il 17 ottobre 1759; non essendogli riuscito di ottenere una cattedra nel patrio Ateneo, accettò nel 1786 un posto nell'Accademia di Pietroburgo, ma non potè occuparlo a lungo, essendo perito annegato nella Neva il 3 luglio 1789, I pregevoli suoi lavori di meccanica provano che egli avrebbe potuto continuare degnamente le tradizioni di famiglia, ove il destino gli fosse stato più amico.

## G. E. Hermann

499 - L'ultimo dei matematici prodotti dal fecondo vivaio avente per sua sede Basilea fu Giacomo Enrico Hermann, che nacque appunto in quella città il 16 luglio 1678. Ricevette dalla propria famiglia un'educazione accuratissima; compì poi i proprî studi nel patrio Ateneo: benchè indirizzato alla teologia fu ammaestrato nelle matematiche da Giacomo Bernoulli. Del suo profitto in tale materia fa fede la *Responsio ad Cl. Nieuwentyt* [1] *considerationes secundas circa Calculi differentialis Principia* (Basileae, 1700), di cui gli A. E. del 1701 pubblicarono una recensione elogiosa, che si sa scritta da Giacomo Bernoulli stesso. Leibniz, grato per quella difesa, fece nominare subito l'Hermann a membro della neonata Accademia di Berlino e (28 aprile 1707) professore nell'Università di Padova [2].

La maggior parte della sua produzione scientifica appartiene all'astronomia e all'idraulica; qui va soltanto ricordata la sua opera giovanile intitolata *Miscellanea* (Venet., 1709), ove è descritta una nuova macchina calcolatrice, che vien citata con elogi dagli storici di tali apparecchi. In tale indirizzo egli fu seguìto da un suo discepolo, G. B. Suardi (n. a Brescia il 9 gennaio 1711, m. ivi il 2 marzo 1764), di cui va con sommo onore ricordato il volume intitolato *Nuovi strumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne, e di molte altre* (Brescia, 1752), ove per la prima volta è avvertita la possibilità di considerare l'ellisse come epicicloide e ne è fatta applicazione alla descrizione meccanica della curva.

Nel 1712 l'Hermann (sentendosi a disagio in un paese cattolico, egli protestante) si trasferì a Francoforte (ove scrisse la *Phoronomia, seu de Viribus et Motibus corporum solidorum et fluidorum;* (Amstel., 1716), che è la più importante delle sue pubblicazioni, e ove rimase sino al 1724. Passò poi a Pietroburgo, in qualità di membro di quell'Accademia, e si restituì nel 1730 a Basilea col grado di professore di

---

(1) Bernardo Nieuwentyt (nato nell'Olanda settentrionale il 10 agosto 1654, morto il 30 maggio 1718) fu medico e sindaco di Purverend, nonchè autore di due opere critiche, cioè: *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas Principia* (Amstel., 1695) e *Analysis Infinitorum* (Id., 1696).

(2) Era la cattedra già illustrata da Galileo e occupata successivamente da Camillo Gloriosi (1613-1622), Bartolomeo Sovero (1624-1629), Andrea Argoli (1632-1657), Andrea Moretti (1661), Stefano degli Angeli (1663-1697) e Domenico Guglielmini (1698-1702). All'Hermann succedette Giovanni Poleni (nato a Venezia il 23 agosto 1683, morto a Padova il 15 novembre 1761) che salì a tal fama che alla sua morte venne solennemente commemorato all'Accademia delle Scienze di Parigi, a cui apparteneva.

morale e di diritto naturale, con l'intesa di ottenere la prima cattedra di matematica che si fosse resa vacante; ma egli morì (11 giugno 1733) prima che si verificasse tale circostanza.

Gli A. E. e le *Memorie delle Accademie* di Berlino e Pietroburgo contengono buon numero di lavori dell'Hermann sopra questioni di algebra e di calcolo infinitesimale; sulle inesattezze da lui commesse nello studio delle epicicloidi sferiche (*Comment. Petrop.,* 1728) non è il caso d'insistere dopo che furono rilevate e corrette da Giovanni Bernoulli (v. p. 627). Arrestiamoci invece un momento sopra la memoria *De superficiebus ad aequationes locales revocatis variisque eorum affectionibus* (*Comment. Petrop.*, T. VI, 1732-33), notevole contributo alla geometria analitica dello spazio, allora in fasce. Ivi l'Hermann considera i tre assi di riferimento di un sistema cartesiano, notando che godono ciascuno della proprietà che in tutti i loro punti due coordinate sono nulle. Scopo precipuo della memoria è di mostrare come s'interpretino alcune speciali equazioni fra $x, y, z$. La prima di esse è la seguente:

$$ax + by + cz - e^2 = 0; \tag{4}$$

per dimostrare che rappresenta un piano l'Hermann determina i punti $B, C, D$ della superficie (4) posti sugli assi coordinati; allora considera il piano $B\,C\,D$ e dimostra che le coordinate di tutti i suoi punti soddisfano la data equazione. Nota anche che la quantità $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ misura il seno dell'angolo che il piano $B\,C\,D$ forma col piano $x\,y$. Le altre equazioni da lui interpretate sono le seguenti:

$$z^2 - ax - by = 0; \quad z^2 - xy = 0;$$
$$z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = 0;$$
$$ax^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = 0.$$

Assurgendo poi a considerazioni più generali mostra che, detta $u$ una funzione arbitraria di $z$, la equazione $u^2 = x^2 + y^2$ rappresenta una superficie di rotazione. Finalmente per mostrare, su un esempio, come risolvasi il problema inverso, cioè come si determini l'equazione di una superficie definita geometricamente, egli trova l'equazione del cono-cuneo di Wallis, sotto la forma $(b - z)\,(a^2 - y^2) = b^2 x^2$.

---

## PARTE SECONDA: IN INGHILTERRA

### Berkeley e il dibattito da lui provocato

500 - Alla teoria delle flussioni, Newton, come vedemmo, dedicò qualche pagina dei *Principia* e varî opuscoli, intesi a farne conoscere i fondamenti e alcune applicazioni, opuscoli i quali, prima di vedere la luce, avevano girato manoscritti almeno entro il triangolo avente per vertici Cambridge, Londra, Oxford. Ora, data la riconosciuta somma importanza di quella procedura, era naturale che a molti nascesse l'idea di diffonderne la conoscenza con esposizioni metodiche complete.

Vi si accinse per primo un dottore in teologia che studiò matematica con tanto successo da divenire apprezzato insegnante, entrare nella Società Reale e divenirne per un anno segretario: parliamo di John Harris (n. forse nel 1666, m. il 7 settembre 1719); egli, in un breve trattato di algebra stampato nel 1702, dedicò 22 delle 136 pagine di cui consta appunto alla teoria delle flussioni, pagine le quali costituiscono forse la più antica pubblicazione sull'argomento. Va rilevato che allo stesso tema l'Harris dedicò qualche pagina del suo *Lexicon technicum* (1710) e che altrettanto fece W. Jones, persona a noi già nota (vedi pag. 594), nella sua *Synopsis Palmariarium Matheseos*.

Più estesa è la trattazione di quella teoria dovuta a Humphry Ditton (n. il 29 maggio 1675, m. il 15 ottobre 1715), il quale si accinse a scriverla in seguito a uno studio approfondito dei *Principia*; essa fu pubblicata nel 1706 e John Clarke (n. a Norwich nel 1682, m. in Salsbury il 10 febbraio 1757) venti anni dopo ritenne opportuno di curarne una nuova edizione. Giova osservare che il Ditton diede prova della sua perizia scientifica anche con lavori pubblicati nelle P. T. e negli A. E. e mediante un trattato di prospettiva, il quale però ebbe la sventura di venire eclissato da quello di B. Taylor (v. n. 511).

Devesi anche osservare che la *History of fluxions* (vedi pagina 595) del Raphson ha, oltre il dichiarato intento storico, uno dottrinale, quello cioè, per usare le parole stesse dell'autore, « to open a plain and easy way for Beginners to understand these Matters ».

Una prova dell'ampio interesse destato in Inghilterra dai *Principia*, grazie alle considerazioni di carattere infinitesimale che vi si leggono, è offerta da un'opera (cfr. p. 628) scritta da un medico di grande reputazione, Giorgio Cheyne (n. nel 1671 nei pressi di Aberdeen, m. a Baath il 13 aprile 1743), chè la II Parte di essa è presentata come « containing the nature and kinds of infinites, their Arithmetic and Uses, and the Philosophical Principles of revealed Religion ».

501 - Queste opere puramente espositive di idee altrui non fecero compiere alla nostra scienza alcun effettivo progresso. Questo fu determinato (« le vie di Dio son molte! » scrisse a ragione A. Manzoni) da uno che, scambio di calcare le orme di Newton, si atteggiò ad oppositore di lui; alludiamo all'illustre prelato Giovanni Berkeley (n. a Kilorin il 12 marzo 1684, vescovo di Cleyne dal 19 maggio 1734, m. a Oxford il 14 gennaio 1753). In un'opera pubblicata nel 1734 e diretta a « an infidel mathematician » (che sembra fosse l'Halley) egli volle dimostrare che la geometria è contraria alla fede, e che i geometri sono miscredenti; essi, con una singolare contraddizione di spirito, credono nel calcolo newtoniano, mentre questo è in generale falso; se in certe applicazioni esso guida alla verità, gli è grazie a una compensazione di errori, puramente casuale.

Questo scritto fu una bomba gettata nel campo newtoniano, quasi un inizio di ostilità senza dichiarazione di guerra.

A confutare il battagliero prelato si accinse James Jurin, che era considerato come uno degli uomini più dotti del suo tempo. Nato a Londra il 15 dicembre 1684, nell'Università di Cambridge conseguì tutti

i gradi sino a quello di dottore in medicina; nel 1717 fu eletto F. R. S. e della grande corporazione scientifica inglese fu segretario nel periodo 1721-1727; morì il 29 marzo 1750. Avendo appresi i metodi newtoniani dalla bocca stessa del loro inventore, era in grado di assolvere il còmpito che si era assunto; forse con l'aiuto di Roberto Smith (n. nel 1689, m. il 2 febbraio 1768, successore di Côtes nella cattedra Plumiana della Università di Cambridge) sotto il pseudonimo di *Philaletes Cantabrigiensis,* egli pubblicò, nello stesso anno 1734 in cui era apparso l'attacco berkeleyano, un volume inteso a provare che a Newton erano attribuite idee a cui egli era totalmente estraneo. Indipendentemente dal Jurin una tesi analoga fu sostenuta da un altro professore di matematica, pochissimo conosciuto, John Walton.

I concordanti argomenti addotti dai due valenti newtoniani non convinsero il Berkeley, il quale, dirigendosi ad entrambi, pubblicò un altro scritto per confermare, mediante nuove considerazioni, le sue vedute. La discussione continuò, non avendo voluto nè il Jurin nè il Walton che prendesse radice l'opinione che ai metodi newtoniani non si dovesse prestare alcuna fede. E il Berkeley allora accalorandosi maggiormente replicò adducendo « ragioni per non rispondere » al Walton, dichiarato « vain and impertinent »; il Walton non si diede per vinto, come può vedersi dalla nuova edizione del suo precedente scritto, arricchita di una vivace Appendice. Il Berkeley pel momento si tacque; ma da alcune parole da lui pubblicate nel 1744 risulta che i suoi oppositori non erano stati capaci di smuoverlo dalle sue posizioni; sicchè i suoi compatriotti ne avranno tratto novelle conferme all'opinione che

A man convinced against his will
Is of the same opinion still.

502 - Eppure nel frattempo era uscita per le stampe un'opera, non critica nè polemica, ma essenzialmente dottrinale, ove, senza nominare il Berkeley, si gettava gran luce sopra la questione che stavasi dibattendo. Ne è autore Benjamin Robins (n. a Baath nel 1707, m. in India il 29 luglio 1781 o il 12 febbraio 1782), il quale era destinato a divenire un'autorità talmente rispettata riguardo all'artiglieria che l'Euler ne tradusse e commentò uno scritto sull'argomento. La succitata opera possiede un'indiscutibile importanza [1], grazie agli sforzi, non infruttuosi, fatti dall'autore per precisare i concetti fondamentali dell'analisi infinitesimale. Essa fu origine di un cortese ed elevato dibattito fra l'autore, il Jurin e il Pemberton (vedi pag. 594), la quale si svolse nelle colonne di due giornali letterari del tempo, *The Present State of the Republick of Letters* e *The Works of the Learned* (anni 1736-1737).

Tale discussione è la più importante di quante siansi avute in Inghilterra sul concetto di limite; essa portò su di questo grande luce e finì per bandire l'uso delle « prime e ultime ragioni ». Risalendo alle più lontane origini di essa, si è portati a concludere che gli è al Berkeley che devesi un nuovo orientamento nel pensiero matematico dei compa-

[1] Tale qualità fu misconosciuta dal Buffon che criticò aspramente il Robins nella prefazione della sua versione del *Metodo delle flussioni* di Newton (vedi p. 594).

triotti di Newton, il quale è percepibile durante tutto il secolo XVIII. Ad esso risale poi il merito di avere dato origine a un risveglio nella produzione analitica inglese. A dimostrare ciò — senza parlare delle verbose ed inconcludenti illustrazioni del Colson al *Metodo delle Flussioni* di Newton, da lui dato alle stampe (vedi pag. 594) — citeremo un trattato sulle flussioni di James Hodgson (1672-1755), un opuscolo anonimo sullo stesso argomento attribuito a Thomas Bayes, e altre esposizioni della medesima disciplina dovute a James Smith, Benjamin Martin (1) e John Rowe, tutte pubblicate fra il 1736 e il 1741.

A questi nomi va aggiunto quello di un uomo di alto valore che esercitò una grande e benefica influenza sullo sviluppo della matematica in Inghilterra: Thomas Simpson. Egli nacque nel Leicestershire il 20 agosto 1710. L'eclisse dell'11 maggio 1724 lo indusse a dedicarsi alle scienze esatte; i nuovi calcoli apprese dal de l'Hôpital tradotto dallo Stone, e li coltivò con tanto successo che fu eletto professore di matematica nella R. Accademia militare di Wolwich (25 agosto 1743) e poco dopo (5 dicembre 1745) F. R. S. Fu assiduo collaboratore del periodico *The Ladies' Diary* e lo diresse durante gli anni 1754-60. Le P. T. accolsero alcune sue pregevoli memorie; diede alla teoria delle probabilità contributi importanti di cui diremo più avanti (v. n. 544); i suoi trattati di algebra, geometria e trigonometria furono giudicati assai favorevolmente. Ma l'opera che in questo momento c'interessa in modo particolare, è la sua trattazione della teoria delle flussioni. Essa contrassegna un distacco da Newton nella definizione di flussione; Newton la considerava come una velocità, Simpson l'interpretò come una distanza finita. Sul valore di tale mutamento i pareri possono essere e furono discordi; ma ciò che è indiscutibile si è che Simpson svolse la teoria in un modo che prestava il fianco alla critica molto meno del metodo newtoniano, perchè gl'infinitesimi non vi sono mai usati. Malgrado il favore con cui vennero accolte queste modificazioni metodologiche, il Simpson non ebbe scrupoli di ritoccare in qualche punto importante la propria esposizione in una posteriore (1750) pubblicazione sull'argomento, giovandosi delle idee esposte in un anonimo opuscolo pubblicato a Londra nel 1741 col titolo *An Explanation of Fluxions in a Short Essay on the Theory* (2). Una critica sfavorevole della nuova opera del Simpson scatenò una piccola tempesta, come il lettore potrebbe vedere nel periodico del tempo intitolato *Mathematical Exercises* (1751).

## C. Maclaurin

503 - Ma delle opere intese a scagionare Newton dagli appunti del Berkely, la più importante (anche indipendentemente dallo scopo polemico con cui fu scritta) è *A Treatise of Fluxions*, giacchè ivi il metodo

(1) Noti il lettore nel titolo (v. *Bibliografia*) dell'opera del Martin la presenza di un vocabolo (*pangeometria*) destinato a ricomparire più tardi nella scienza con altro significato.

(2) L'autore è F. Blake (n. nel 1708, F. R. S. dal 1746, m. nel 1774); lo ha rivelato F. M. Clarke nell'articolo *On a anonymous Essai on Fluxions publisched in* 1741 (Scripta mathematica, T. II, 1734).

flussionale è esposto in una forma modellata rigorosamente su quella usata dai matematici del periodo aureo della geometria greca, nell'intento di mostrarne la legittimità. Nobile còmpito che nessuno poteva assolvere meglio di colui che sino da quando era studente nell'Università di Glasgow (ove fu ammesso nel 1709) aveva mostrato la più spiccata attitudine per la ricerca geometrica.

È Colin Maclaurin; nato a Kilmodan nel febbraio del 1698, a soli ventun anni fu chiamato ad insegnare nel Collegio Marischal di Aberdeen; nello stesso anno visitò a Londra Newton, che lo fece eleggere F R. S. Viaggiò poi in Francia e nel 1724 conseguì dall'Accademia di Parigi un premio per una memoria sull'urto dei corpi. Rimpatriato, nel novembre 1725 ottenne una cattedra di matematica nell'Università di Edinburgo, grazie all'appoggio di Newton, che s'impegnò di contribuire al suo onorario con 20 sterline all'anno; in quel posto rimase sino alla sua morte, avvenuta il 14 giugno 1746.

Prescindendo da alcuni contributi da lui dati alle P. T., è dovere nostro arrestarci sul volume pubblicato dal Maclaurin nel 1720 col titolo *Geometria organica sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis*. Nella I Sezione di esso le coordinate cartesiane sono applicate alla dimostrazione della generazione organica delle coniche ideata da Newton. Più originale è la II, giacchè si riferisce alla descrizione delle curve di terzo ordine con punto doppio e porge notevoli complementi ai contributi dati da quel grande alla conoscenza delle cubiche piane. La III tratta, pure dal punto di vista costruttivo, delle quartiche e delle cubiche piane esenti da punti doppi; contiene poi osservazioni di carattere generale intorno al numero e alla posizione dei punti singolari delle curve algebriche (ad es. Maclaurin osserva che una curva di quarto ordine non può possedere più di tre punti doppi e che questi non possono essere collineari). Nella IV Sezione l'autore assurge alla considerazione di curve piane d'ordine qualunque ed insegna a generarle con opportuni movimenti di rette. A partire da questo punto egli tratta della generazione delle curve algebriche col mezzo di curve d'ordine inferiore; notiamo ivi le considerazioni concernenti le podarie, di cui il Maclaurin aveva già esposto il concetto e stabilite alcune proprietà, in una memoria inserita nelle P. T. del 1718. Nel corso di tali ricerche egli s'imbattè in risultati importanti per il loro carattere generale; così egli ha visto che due curve degli ordini $m, n$ si tagliano in $m\,n$ punti e che una curva d'ordine $n$ è generalmente determinata da $n\,(n+3)/2$ dei suoi punti; in particolare una cubica è generalmente determinata da 9 punti; ma il fatto che due curve di terzo ordine si taglino in 9 punti, si presentò a lui sotto l'aspetto di un paradosso che non riuscì a spiegare. Il Maclaurin mostrò poi che una curva d'ordine $n$ ha al massimo $(n-1)\;(n-2)/2$ punti doppi, osservando che, se ne avesse uno di più, per essi e per altri $n-3$ punti della curva si potrebbe far passare una curva dell'ordine $n-2$ segante la data in $n\,(n-2)+1$ punti. L'opera si chiude con la risoluzione dei due seguenti problemi: Far passare una curva d'ordine $2\,n$ per $n\,(n+3)/2$ punti semplici e per altri tre che ne siano multipli secondo $n$; oppure che abbia 3 punti dati per $n$-pli, un altro punto dato $(n-1)$-plo e passi per altri $2\,n$ punti

semplici dati. Tutto ciò basta a stabilire il valore grande e permanente della *Geometria organica*.

Ad essa l'autore diede un complemento dimostrando nelle P. T. del 1735 la seguente proposizione: « se tutti i lati di un poligono semplice ruotano attorno ad altrettanti punti fissi e tutti i vertici meno uno descrivono curve algebriche degli ordini $m, n, p, ...$, il rimanente descriverà una curva dell'ordine $2\, m\, n\, p ,,,$ »; particolarizzandola giunse per conto suo al teorema dell'esagrammo mistico, che allora non aveva peranco vista la luce.

504 - Nel 1740 l'Accademia di Parigi conferì un nuovo premio al Maclaurin per una memoria sul flusso del mare; un paio d'anni dopo venivano pubblicati i due volumi del *Treatise on Fluxions* (notisi che del I Volume la stampa era completa sino dal 1737), ove in 754 pagine di serrato ragionamento geometrico si trovano, non soltanto esposti i fondamenti del calcolo flussionale, ma ne vengono fatte conoscere le principali applicazioni geometriche e meccaniche. Lagrange, benchè di mentalità spiccatamente analitica, non esitò a dichiarare che il trattato in questione è un « chef d'oeuvre de géométrie qu'on peut comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux ». Altrettanto onorevole pel Maclaurin è il fatto che Clairaut (v. n. 541) il quale stava allora studiando analiticamente il problema dell'attrazione di un corpo su un punto interno, quando ne conobbe la trattazione del matematico inglese, non esitò a dichiarare che si era in presenza di una questione in cui la geometria doveva preferirsi al calcolo.

Bisogna però avvertire che, benchè scritta nello stile degli antichi, l'opera del Maclaurin contiene cose che l'analisi moderna accolse nel proprio seno e di cui è dovere dello storico di tenere parola. Si deve a lui l'osservazione che la curva di equazione

$$y = \frac{A\, x^m + B\, x^{m-1} + ...}{a\, x^n + b\, x^{n-1} + ...}$$

per $n > m$ ha quale asintoto l'asse delle $x$ e che l'area che essa chiude con gli assi coordinati è finita soltanto quando $n > m + 1$; di ciò egli fece applicazione alla sommazione di alcune serie già considerate da Giovanni Bernoulli. Appartiene poi a lui la seguente dimostrazione del teorema del binomio: pongasi

$$(1 + x)^n = 1 + A\, x + B\, x^2 + C\, x^3 + D\, x^4 + ... ;$$

con differenziazioni successive se ne trae:

$$n\,(1 + x)^{n-1} = A + 2\, B\, x + 3\, C\, x^2 + 4\, D\, x^3 + ...$$

$$n\,(n-1)\,(1 + x)^{n-2} = 2\, B + 3 \cdot 2 \cdot C\, x + 4 \cdot 3 \cdot D\, x^2 + ...$$

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(1 + x)^{n-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1\, C + 4 \cdot 3 \cdot 2\, D\, x + ...$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

ora, essendo queste relazioni identiche, sussistono per $x = 0$ e dànno

allora

$$A = n \quad , \quad B = \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad C = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots ,$$

d'onde il risultato noto. Con metodo simile si può dimostrare il teorema del polinomio, che Maclaurin attribuisce a de Moivre. Un ragionamento analogo è pure applicabile per determinare i coefficienti di una funzione qualunque $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$, infatti se ne trae successivamente

$$\begin{aligned} f'\ (x) &= B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + \dots \\ f''\ (x) &= \qquad 2 \cdot 1\,C\,x + 3 \cdot 2 \cdot D\,x + \dots \\ f'''\,(x) &= \qquad\qquad 3 \cdot 2 \cdot D + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

perciò, facendo $x = 0$, si conclude:

$$A = f(0) \quad , \quad B = f'(0) \quad , \quad C = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}, \; D = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots ,$$

epperò

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \dots ,$$

risultato nel quale il lettore ravviserà la serie che porta il nome del Maclaurin, quantunque (è lui stesso che lo rileva) non sia sfuggita a B. Taylor. Notiamo ancora che il Maclaurin è giunto (probabilmente indipendentemente dall'Euler di cui porta il nome) alla notevole formola seguente:

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n) = \\ = \int_x^{x+n+1} f(z)\,dz - \frac{1}{2}\Big[f(x+n+1) - f(x)\Big] + \\ + \frac{1}{12}\Big[f'(x+n+1) - f'(x)\Big] + \dots \end{aligned}$$

Lo stesso autore ha investigati geometricamente gli integrali provenienti dalla rettificazione delle coniche e finalmente ha legato il proprio nome a un importante teorema sull'attrazione degli ellissoidi.

505 - Dopo la sua morte fu pubblicato (1748) un suo pregevole *Treatise on Algebra* (London, 1748) che ebbe numersoe edizioni e traduzioni [1]; quantunque l'autore lo designi per un semplice commento all'*Aritmetica universale* di Newton, si spinge più oltre di questa, chè, ad esempio, vi si trova il parallelogrammo di Newton. Fra le novità che vi s'incontrano citiamo la seguente: se nell'equazione $f(x) = 0$ si fa

(1) Chi scrive ne conosce soltanto la versione francese liberamente eseguita, giovandosi delle opere posteriori congeneri di Euler e Cramer, da Esprit Pézénas (n. ad Avignone il 28 novembre 1692, m. ivi il 4 febbraio 1776), il quale aveva prima tradotto anche una memoria sulle flussioni di Newton.

$x = y + c$, e si sceglie $c$ in modo che risultino positivi tutti i coefficienti dell'equazione risultante in $y$, $c$ sarà un limite superiore delle radici della data equazione. Maclaurin ha ivi riprodotto anche un suo tentativo (P. T., 1726) per dimostrare il teorema di Newton sulle radici immaginarie delle equazioni (vedi pag. 575); benchè egli non sia riuscito nell'intento, pure ebbe in conseguenza una disputa con Giorgio Campbell (P. T., 1729), autore di ricerche congeneri, che il lettore troverà esposte, insieme a quelle del Maclaurin, nella versione francese dell'*Arit. Univ.* dovuta al Beaudeux.

La stessa opera del Maclaurin ha un'importante Appendice recante il titolo *De Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus Tractatus* (¹). Da questa si apprendono quattro teoremi generali sulle curve algebriche, che rappresentano notevoli generalizzazioni di quelli che vedemmo nell'*Enumeratio* newtoniana (vedi pag. 572) e di cui sono fatte numerose applicazioni alle curve di 3° e 4° ordine; cosicchè per una duplice ragione la si può riguardare per un proseguimento di questo lavoro del sommo inglese. Fra le scoperte ivi esposte limitiamoci a rilevare il teorema secondo cui la congiungente di due flessi di una cubica piana taglia la curva in un terzo flesso. Vi si incontra anche il teorema di Pascal, che così raggiunse ampia notorietà prima della pubblicazione (1779) dell'*Essai sur les coniques*.

Oltre alle molte prove, offerte da quanto precede, dell'essere stato il Maclaurin un fedele, ma geniale, interprete del pensiero newtoniano, altra ne è data dall'altro suo scritto di carattere espositivo dal titolo *An Account on Sir Isaac Newton's Philosophy*, pubblicato dopo la sua morte per cura degli amici, con lo scopo di venire in soccorso dei figli.

506 - Stimiamo qui il momento di osservare che all'estensione alle curve di ordine superiore della generazione organica delle coniche ideata da Newton giunse, indipendentemente dal Maclaurin, un suo conterraneo, William Braikenridge o Brakenridge, « ecclesiae anglicanae presbyter » e F. R. S., morto il 30 lugilo 1762 a Londra, ove aveva occupato importanti cariche nel pubblico insegnamento. La prova di quella sua scoperta è offerta dall'opuscolo intitolato *Exercitatio Geometriae de Descriptione Linearum Curvarum* (London, 1733), di cui un estratto fu inserito nelle P. T. del 1735. La detta coincidenza diede materia a una questione di priorità, che non può provenire da disonestà dei contendenti, perchè era cosa ben naturale che gli epigoni di Newton proseguissero in tutte le vie da lui aperte; di quella questione basti segnalare le origini.

Nel 1726 il Braikenridge trovavasi a Edimburgo e allora scoperse le principali proposizioni dell'*Exercitatio*. L'anno seguente, essendo a Londra, ne tenne parola a John Craig, il quale le riferì al Maclaurin, che pure trovavasi allora a Londra, e il Maclaurin gli mostrò, senza farglielo leggere, un manoscritto, dicendogli che conteneva proposizioni congeneri. La cosa per il momento non ebbe seguito; ma il Mac-

(¹) Nella V edizione, 1788, di quell'opera si trova una versione inglese di detta Appendice; nel 1856 E. de Jonquières (v. n. 687) ne pubblicò una versione francese commentata.

laurin, quando vide la succitata *Exercitatio,* si affrettò a pubblicare nelle P. T. la memoria che già citammo, asserendo che il contenuto della stessa risaliva al 1721, quando egli trovavasi in Francia, che anzi egli aveva anche cominciata la stampa del suo lavoro, che interruppe quando rimpatriò, ma ne inserì qualche pagina sino dal 1727 nella sua *Algebra* che, manoscritta, correva allora per le mani di tutti. Il dibattito non ebbe ulteriore continuazione, probabilmente perchè l'indipendenza delle due scoperte e la buona fede dei due matematici apparvero indiscutibili, e forse anche perchè nell'invenzione contestata non si ravvisò cospicua importanza.

## Da Saunderson a Côtes

507 - Circa contemporaneo del Maclaurin fu Nicola Saunderson, il quale nacque a Thurlston (Yorkshire) nel gennaio 1682; colpito a dodici mesi da un violento attacco di vaiuolo, perdette per sempre la vista. Malgrado questa immensa sciagura, si procurò una vasta conoscenza delle letterature classiche, e potè dare prova di spiccate attitudini matematiche, eseguendo con sorprendente disinvoltura complicati calcoli aritmetici. Trasferitosi a Cambridge nel 1707, ottenne ospitalità nel Christ's College; ivi si dedicò all'insegnamento privato e lo esercitò con tanto successo che nel 1711 fu chiamato a occupare una cattedra di matematica in quella celebre Università, Giorgio II, re d'Inghilterra, lo nominò dottore in giurisprudenza in occasione di una visita da lui fatta a Cambridge nel 1728. Il Saunderson morì fra l'universale rimpianto il 19 aprile 1739. La sua ottima fama riposa più sul suo insegnamento che sopra ricerche originali, giacchè non è suo piccolo merito l'avere rese intelligibili ai propri ascoltatori le più astruse opere di Newton. Per consiglio degli amici trasse dalle sue lezioni due volumi intitolati *Elements of Algebra* (Cambridge, 1740), di cui a noi sta sott'occhio la versione francese. (Amsterdam e Leipzig, 1756) dovuta a un certo de Joncourt. Prima di indicarne il contenuto rileviamo che questa si apre con un articolo intitolato « L'arithmétique palpable du Docteur Saunderson dechiffrée » scritto dal suo successore nella cattedra di Cambridge, e destinato a far conoscere un apparato da lui inventato e usato per eseguire i calcoli aritmetici; è un quadro diviso in tanti quadratini che ricorda un po' l'abaco degli antichi.

L'*Algebra* dello sventurato professore di Cambridge si apre con un Libro che tratta del calcolo algebrico sino alle equazioni di primo grado con un'incognita; il metodo di risoluzione trovasi applicato a molti ploblemi nel II Libro. Il III comincia con alcune considerazioni concernenti l'estrazione di radici quadrate, preludio utile per la risoluzione delle equazioni di secondo grado o riducibili a tali, scopo precipuo di detto Libro. Il successivo è costituito da molti problemi risolubili con equazioni lineari o quadratiche; i due ultimi problemi hanno per iscopo la determinazione di quattro o cinque numeri in progressione geometrica, supposte note la loro somma o la somma dei loro quadrati; le soluzioni esposte appartengono ad A. de Moivre. Il Libro V è dedicato alle proporzioni, alla teoria degli irrazionali e ai problemi

che ammettono infinite soluzioni: molti di questi rientrano nel tipo dei « problemi dei cento uccelli » che incontrammo non soltanto in Cina, ma più volte anche nella letteratura europea; l'ultimo si riferisce alla costruzione del quadrato magico di $7^2$ elementi; riguardo ad esso il Saunderson cita lavori di due matematici francesi. Uno di essi, Filippo de la Hire, è a noi già noto (vedi pag. 538) e qui ci si presenta come autore di una memoria intitolata *Construction des carrés magiques* (Mém. de Paris, 1705); il secondo è Giuseppe Sauveur (n. a La Flèche il 24 marzo 1653, m. a Parigi il 9 luglio 1716) a cui devesi altro lavoro di egual titolo (Mém. de Paris, 1710).

Di questioni indeterminate il Saunderson seguita ad occuparsi nel Libro VI, nel quale sono trattati non meno di trenta dei problemi quadratici già risolti da Diofanto, applicando alcuni lemmi intercalati nel testo. Sorvoliamo sul Libro successivo dedicato alla teoria euclidea dei rapporti e delle proporzioni, per segnalare invece l'VIII, che tratta dell'applicazione dell'algebra alla geometria, prima a problemi determinati, poi alla ricerca di luoghi geometrici. Dal Libro IX apprendesi anzitutto la formola del binomio, poi la teoria e la pratica dei logaritmi, finalmente utili particolari sul calcolo con irrazionali. Gli elementi della teoria generale delle equazioni algebriche riempiono la prima parte del Libro X, mentre nel seguito sono insegnati i metodi di risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado; riguardo alle prime il Saunderson riferisce il procedimento risolutivo insegnato dal Côtes nell'*Harmonia Mensurarum*, mentre nel trattare delle altre s'inspirò alla memoria del Colson intitolata *Aequationum cubicarum et biquadraticarum, tum analytica, tum geometrica et mechanica, resolutio universalis* (P. T., 1707).

Gettando uno sguardo d'insieme sull'opera testè brevemente riassunta, sorge qualche dubbio intorno alla bontà dei criteri adottati nella distribuzione della materia; ma non si può non riconoscere la perizia dimostrata dall'autore nella scelta degli esempi, la generalità con cui questi sono enunciati e risolti, finalmente la chiarezza del suo stile. Cresce pregio all'opera discorsa una lettera di A. de Moivre, posta come epilogo e destinata a diffondere il metodo ideato da questo illustre matematico per estrarre la radice cubica da una quantità complessa $a + i\,b$; esso consiste nel porre

$$\sqrt[3]{a + i\,b} = x + i\,y;$$

si ha in conseguenza

$$a = x^3 - 3\,x\,y^2 \quad , \quad b = 3\,x^2\,y - y;$$

eliminando $y$ fra queste due equazioni si trova una equazione in $x$ che ha la forma di quelle che servono alla trisezione dell'angolo; donde la soluzione del problema. Questo procedimento è applicato al calcolo di $\sqrt[3]{81 + i\sqrt{2700}}$, già scelto dal Wallis per dimostrare l'*inesistenza* del caso irriducibile; si conclude che in tale occasione l'autore dell'*Arithmetica Infinitorum* trovavasi dalla parte del torto.

Parecchi anni dopo la morte del Saunderson fu pubblicato (1756) un altro volume, certamente tratto dalle sue lezioni, destinato a dimo-

strare sopra numerose applicazioni che il metodo newtoniano delle flussioni si poteva esporre geometricamente in modo pienamente soddisfacente; ci basti segnalarne l'esistenza, per provare che alla scomparsa dell'autore non seguì completa dimenticanza da parte di chi lo aveva conosciuto ed apprezzato.

508 - Scarsi ed incompleti sono i dati biografici intorno a Giacomo Stirling. Egli nacque nel 1692 a Garden (Scozia); dal 1710 fu alunno dell'Università di Oxford ed è ricordato come partecipante ai tumulti studenteschi che la turbarono negli anni 1714-16 in causa del mutamento di monarchia avvenuto in quell'epoca in Inghilterra; però sino d'allora diede prova di spiccate attitudini alla ricerca matematica, chè J. Keill, scrivendo a Newton il 24 febbraio 1715, tenne parola di una sua soluzione di un problema sulle traiettorie ortogonali. Nel 1717 pubblicò il suo primo lavoro e nello stesso anno, trovandosi a disagio in patria per motivi politici, dietro suggerimento dell'abate Conti, seguì a Venezia Nicola Tron, ambasciatore della Serenissima a Londra, con la speranza di ottenere una cattedra nell'Università di Padova. Non avendo conseguito l'intento, dopo due anni di soggiorno a Venezia, rimpatriò; nel 1719 ottenne che una sua memoria intitolata *Methodus differentialis Newtoniana* fosse pubblicata dalla Società Reale di Londra e in questa fu ammesso nel 1726. Nulla si conosce di preciso intorno a questo periodo della sua vita, se non che egli insegnò in un'accademia privata di Londra; esso ebbe termine nel 1735, quando lo Stirling assunse la direzione di una società mineraria scozzese. Nei primordi di questa nuova carriera egli potè ancora occuparsi di scienza, come è provato dalla corrispondenza che egli mantenne con eminenti matematici del suo tempo e dal fatto che alla morte del Maclaurin si pensò a lui come successore (la cosa non ebbe seguito per ragioni politiche); ma poi gli fu forza di pensare esclusivamente agli affari (nel 1754 si dimise da F. R. S.) e così riuscì a trasformare un'impresa commerciale passiva in un'azienda floridissima. Morì nel 1770 a Edimburgo, ove erasi recato per ragioni di salute.

Il lavoro giovanile dello Stirling, a cui alludemmo più sopra, ha per titolo: *Lineae tertii ordinis Newtonianae, sive Illustratio Tractatus D. Newtoni de Enumeratione linearum tertii ordinis* (Oxford, 1717). Come risulta da queste parole, esso ha per iscopo di dimostrare i teoremi enunciati da Newton nel suo lavoro sulle cubiche piane (p. 572) [1]; ma nel corso delle relative ricerche egli di più notò che, oltre alle 72 specie di cubiche enumerate da Newton, se ne trovano altre quattro; ne mancavano ancora due, una delle quali si trova segnalata in una lettera scritta allo Stirling da Nicolò I Bernoulli in data 1° aprile 1733. Notiamo che a lui, come dianzi all'Hermann (*Phoronomia*, 1716) e poi al Maclaurin, non sfuggì il fatto che una curva d'ordine $n$ è in generale determinata da $n(n+3)/2$ dei suoi punti. Nella stessa opera lo Stirling ha mostrato di sapere discutere l'equazione di una curva, attardandosi di preferenza sopra le coniche.

[1] Altre dimostrazioni di quanto enunciò NEWTON nell'*Enumeratio* furono date da PATRICK MURDOCH (F. R. S. dal 1745, m. il 12 novembre 1774) nell'opuscolo *Newtoni Genesis curvarum per umbras* (London, 1746).

509 - Al pari dell'or discorso lavoro, colloca lo Stirling fra i commentatori di Newton la succitata memoria pubblicata nelle P. T. del 1719, gran parte della quale fu riprodotta nella maggiore delle sue opere, quella cioè avente per titolo *Methodus differentialis, sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum infinitarum* (Londini, 1730). Non è — come potrebbe dedursi dal titolo — un trattato di calcolo differenziale, ma piuttosto una serie di applicazioni delle differenze finite, le quali condussero l'autore a risultati importanti, che non tardarono a conseguire un posto stabile nell'analisi matematica; ricorderemo le principali.

Nell'*Introduzione* alla sua opera lo Stirling si occupa della trasformazione delle serie, suggerendo allo scopo l'uso della seguente formola:

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \sum_{r=0}^{r=n-1} C_n^r x^{n-r}$$

$$1/x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r T_n^r / x^{n+r}$$

ove $C_n^r$ e $T_n^r$ sono coefficienti numerici chiamati oggi *numeri di Stirling* di I e II specie.

Nella I Parte della sua opera l'autore si occupa della sommazione delle serie; applicando un teorema di Newton egli giunge a un risultato che oggi scrivesi come segue

$$\int_0^z x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{z^p(1-z)^q}{p} F(p+q, 1, p+1, z),$$

ove $F$ rappresenta la funzione ipergeometrica di Gauss, cioè

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \dots;$$

notisi che per $z = 1$ l'integrale che sta al primo membro diviene il noto integrale euleriano di I specie. Più innanzi egli indica un procedimento conveniente per calcolare la somma di un certo numero di termini della serie leibniziana

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

così, arrestandola al suo 23° termine, trova come somma 0,7853981634 (onde $\pi = 3{,}1415926536$), risultato che non può raggiungersi eseguendo un'addizione diretta; « id quod » osserva l'autore « olim multum desiderabat Leibnitius ». A lui devesi poi un primo criterio di convergenza di un prodotto di infiniti fattori; applicandolo egli stabilì rigorosamente la nota formola di Wallis (p. 519)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}$$

Altre sue ricerche concernono le serie ricorrenti, inventate in quell'epoca, come vedremo (n. 510), dal « suo amico » de Moivre.

La II Parte della medesima opera tratta, come è detto nel titolo, dell'interpolazione delle serie, in applicazione del seguente postulato: « data una serie di termini equidistanti, nonchè la sua legge di formazione, i termini intermedi seguono la medesima legge ». Di somma importanza sono le conseguenze che ne trae lo Stirling. Così egli, nello stesso tempo di Euler, dimostrò essere $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ; inoltre scoprì che, supposto $n$ grandissimo, sussite la relazione seguente

$$n! = n^n \sqrt{2 n \pi}\, e^{-n + \frac{\theta}{12 n}} \quad \text{ove} \quad 0 < \theta < 1;$$

è la celebre *formola di Stirling,* usata di continuo nel calcolo di fattoriali. Finalmente il nome del geniale matematico inglese è legato alla serie

$$\frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \ldots$$

ove i coefficienti $B_i$ sono i numeri di Bernoulli; essa è divergente, ma, rientrando nella categoria delle serie dette oggi « asintotiche », torna giovevole in molti casi.

L'originalità dello Stirling, che già risulta da quanto precede, potrebbe venire ulteriormente stabilita da un esame del suo carteggio scientifico, il che a noi è vietato dall'economia generale della presente *Storia* (¹).

510 - Ci corre l'obbligo di parlare ora dell'opera scientifica di un personaggio che incontrammo nel corso del dibattito per l'invenzione del calcolo infinitesimale (p. 595): A. de Moivre. Più di 160 generosi sottoscrittori, avendo resa possibile la pubblicazione della sua opera *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* (Londini, 1730), arricchirono la letteratura matematica di un volume la cui importanza emerge da quanto ora diremo.

Il I degli otto Libri che lo costituiscono si apre con un lemma semplicemente enunciato e che oggi si esprime con la seguente formola:

$$2 \cos \frac{\alpha}{n} = \sqrt[n]{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{\sqrt[n]{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}}.$$

Segue un altro lemma che insegna la decomposizione in fattori semplici di una frazione avente 1 per numeratore e per denominatore un polinomio scomponibile in fattori lineari semplici. In un terzo lemma si apprende che, se il polinomio $f(x)$ di grado $n$ ha 1 per coefficiente della potenza massima e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ per radici, si ha

$$f'(a_1) = (a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n),$$

(¹) Al nostro silenzio sopperisce il volume: C. Tweedie, *James Stirling. A. Sketch of his Life and Works, along with his scientific Correspondence* (Oxford, 1922).

formola utile nella scomposizione anzidetta. Questi preliminari guidano alla decomposizione in frazioni semplici delle frazioni $1/(1 \pm z^n)$ e $1/(1 \pm 2\, l\, z^n + z^{2n})$, alle quali si può ricondurre il calcolo analogo per la frazione $1/(e + f\, z^n + g\, z^{2n})$.

Il II Libro si apre (Cap. I) con la riproduzione della dimostrazione del surriferito I Lemma data dall'autore nelle P. T. del 1707; egli vi unisce quella del teorema di Côtes (v. n. 513) con corollari ed applicazioni. Il Cap. II del medesimo Libro è dedicato alla teoria delle « serie ricorrenti », nuovi enti analitici che l'autore ha concepiti e denominati nel corso dei suoi studi sulla teoria delle probabilità, di cui diremo nel Cap. seguente. « Ricorrente » si chiama una serie di potenze $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ quando il coefficiente di un suo termine qualunque è esprimibile come funzione lineare degli $r$ precedenti (« scala di relazione »); tali sono, non soltanto le progressioni geometriche, ma anche le serie che nascono dall'addizionare i termini omologhi di quante si vogliano progressioni siffatte; inversamente ogni serie ricorrente può ottenersi in tal modo, epperò scriversi sotto la forma $A/(x - m) + B/(x - n) + C/(x - p) + \dots$; perciò ogni serie ricorrente può ottenersi dividendo l'unità per un polinomio, funzione di una variabile; donde emerge la stretta relazione esistente fra le serie ricorrenti e la scomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici.

Il de Moivre si volge poi (Libro III, Cap. I) al calcolo di una classe di integrali esprimibili mediante i noti simboli dell'analisi, cioè ai seguenti:

$$\int \frac{dz}{z}, \quad \int \frac{s^2\, dz}{s^2 + z^2}, \quad \int \frac{z^{\pm m}\, dz}{1 + 2\, a\, z + z^2}, \quad \int \frac{z^m\, dz}{1 + 2\, l\, z^n + z^{2n}},$$

ove $m$ e $n$ non sono necessariamente interi.

Il II Cap. dello stesso Libro consta di tre Lemmi, il primo dei quali assegna la forma del risultato che si ottiene scomponendo in frazioni semplici una funzione razionale, nel caso in cui il denominatore abbia radici multiple, mentre negli altri due è dimostrato che gli integrali

$$\int \frac{z^{\theta - 1}\, dz}{(e + f\, z^n)^{\lambda + 1}}, \quad \int \frac{z^{\theta - 1}\, dz}{(e + f\, z^n + g\, z^{2n})^{\lambda + 1}}$$

possono calcolarsi elementarmente o dipendono dalla rettificazione delle sezioni coniche. Ricerche congeneri sono esposte nel Capitolo successivo, mentre quelle con cui si chiude il II Libro riguardano le equazioni dette « reciproche », altro prodotto secondario delle ricerche dell'autore sulla teoria delle probabilità. Nel caso in cui il grado sia pari il de Moivre scrive un'equazione reciproca sotto la forma

$$z^{2n} + a_1\, z^{2n-1} + a_2\, z^{2n-2} + \dots + a_2\, z^2 + a_1\, z + 1 = 0;$$

immagina poi di scomporre il primo membro in $n$ fattori delle forme $z^2 + a\, z + 1$, $z^2 + b\, z + 1, \dots$ e trova che le indeterminate $a, b, \dots$ sono radici di una equazione del grado $n$, alla quale può giungersi eliminando $z$ fra l'equazione proposta e la seguente $z^2 + x\, z + 1 = 0$: il risul-

tato viene da lui ottenuto per $n = 2, 3, 4, 5, 6$ e poi scritto in generale. Al de Moivre non sfugge la esistenza di equazioni reciproche di grado dispari, e nota che hanno sempre la radice $-1$; liberate dal fattore $z + 1$, si ricade in quelle del tipo precedente.

Ritornando nel Libro IV alle serie ricorrenti, il de Moivre mostra che, datane la scala di relazione, si può calcolarne un termine qualunque e poi la somma; nel corso della ricerca s'incontra il teorema del polinomio per il caso in cui debbasi elevare a potenza un'espressione ordinata secondo le potenze crescenti di una variabile. Il Libro V si riferisce a quello che nella dottrina delle probabilità si chiama « teorema di Giacomo Bernoulli » (cfr. n. 535) e ad altre questioni che s'incontrano nella stessa. In un campo più teorico si ritorna col Libro VI, dedicato alla teoria delle serie la cui somma dipende dalla quadratura del circolo, dell'iperbole o di entrambe, le quali sono dette rispettivamente « circolari », « iperboliche » o « miste », mentre l'epiteto di « determinate » viene dato alle serie di potenze. Per calcolarne le somme de Moivre si serve della differenziazione e dell'integrazione e così ottiene alcuni risultati già noti ed altri nuovi.

Il Libro VII ha in parte carattere polemico, giacchè il de Moivre confuta il de Montmort ed entra, sia pure incidentalmente, nella questione delle origini del calcolo infinitesimale, non ancora spenta malgrado la scomparsa dei contendenti; poi egli, che non perdeva mai di vista le questioni di probabilità, si occupa del calcolo combinatorio, facendone applicazioni a problemi di detta specie. Col Libro VIII (nel quale è riprodotta una memoria pubblicata nelle P. T. del 1717) il de Moivre dà prova di essere in grado di servirsi con mirabile disinvoltura dei metodi geometrici preferiti da Newton; vi si legge, infatti, una « Disquisitio geometrica » relativa alle forze centripete, ove è esposto e applicato il seguente nuovo teorema: il prodotto dei raggi che uniscono i fuochi a un punto qualunque di una conica a centro è eguale al quadrato del semidiametro della curva parallelo alla tangente in quel punto. Seguono applicazioni e corollari su cui non ci è possibile arrestarci, malgrado il loro valore.

Di altri importanti scritti del de Moivre verrà tenuto parola nel seguente Capitolo; ma, prima di lasciarlo, segnaleremo una sua memoria inserita nelle P. T. del 1707, nella quale sono studiate alcune vaste classi di equazioni algebriche risolubili algebricamente; a questo lavoro s'ispirò più tardi Euler, il quale ne estese i risultati (v. n. 552).

511 - Di Brook Taylor, a cui ora ci volgiamo, ci è nota (p. 597) la vita e la partecipazione al dibattito fra Leibniz e Newton; ora indicheremo quali contributi egli abbia dati alle scienze di cui narriamo la storia; essi concernono due provincie totalmente distinte, una geometrica e analitica l'altra, onde vanno esaminati separatamente.

Per giudicare l'originalità di quelli della prima specie giova tenere presente che l'utilità della proiezione centrale per la ricerca delle proprietà delle figure fu posta in luce da Newton con l'insegnare la ripartizione in cinque grandi classi di tutte le cubiche piane. Alla tacita esortazione di perfezionare quel metodo che sprigionasi dalle pa-

gine di Newton, devesi forse se il Taylor scelse la proiezione centrale come oggetto delle proprie meditazioni. Dei risultati ottenuti egli diede un saggio nel 1715 con l'opuscolo intitolato *Linear Perspective*, il quale, quattro anni dopo, fu ristampato sotto forma migliore col titolo *New Principles of Linear Perspective*. La stringatezza dello stile in cui è scritto ne vietò la diffusione fra gli artisti a cui era destinata; perciò Giovanni Colson, altro personaggio a noi noto (p. 594), ne pubblicò nel 1749 una nuova edizione, dopo avervi arrecato opportuni ritocchi e aggiunte esplicative. La lettura delle ottanta pagine di cui consta tale lavoro porge al lettore moderno una di quelle gradite sorprese che offre talora la lettura di opere antiche; giacchè vi si ritrovano tutti i concetti che stanno oggi a base del metodo della proiezione centrale, parte integrante di ogni corso di geometria descrittiva. Trattandosi di materia nuova, l'autore fu costretto a creare una nuova nomenclatura, e poichè la prospettiva può riguardarsi come un proseguimento della geometria elementare, così egli si sentì in dovere di enunciare i postulati da cui mosse. I problemi da lui trattati nella I Parte del suo scritto sono, non soltanto i consueti di natura descrittiva, ma anche quelli metrici, che egli risolve, come si pratica ancora oggi, ricorrendo all'antipolarità rispetto al circolo di distanza. Nella II Parte il Taylor risolse anche alcuni problemi inversi, aventi cioè per iscopo la ricostruzione di una figura di cui si conosce la rappresentazione prospettica. Il successo che ebbe questo lavoro risulta constatando che nei trattati di prospettiva pubblicati poi in Inghilterra ne è visibile l'influenza.

512 - Ancor più palese risulta l'influsso di Newton nell'altra opera del Taylor intitolata *Methodus Incrementorum directa et inversa* (London, 1715), da lui scritta in latino affinchè potesse essere letta anche dai dotti continentali; pubblicata nel momento in cui ardeva la grande contesa fra Inghilterra e Germania, non vi si trova alcun cenno dei lavori compiuti nella scuola leibniziana e, se vi si leggono i nomi di Cavalieri e Wallis, gli è soltanto per far rilevare la superiorità del metodo di Newton su quello degli indivisibili.

Per indicare le flussioni il Taylor usa la simbolica newtoniana; ma, avendone notato le manchevolezze si sforzò di perfezionarla, introducendo nuovi simboli; se non che questi sono talmente complicati che si può ben dire abbiano avuto l'opera del Taylor tanto per culla quanto per tomba; notiamo però che, avendo usato il simbolo $y_n$ per designare la $n$-ma derivata di $y$ anche per $n = -1$, egli può riguardarsi come un precursore riguardo alla teoria dei differenziali ad indice qualunque; inoltre, essendosi egli emancipato dall'ipotesi che gli incrementi fossero infinitesimi, ci si presenta come uno dei più efficaci fautori del calcolo delle differenze finite.

Scendendo a più minuti particolari, noteremo anzitutto che il Taylor ha insegnato le formole che servono a mutare la variabile indipendente in un'equazione differenziale ordinaria. Nel Cap. VI egli ha dimostrato (sia pure con un ragionamento non soddisfacente del tutto) [1]

---

[1] Vedi un articolo di J. CAQUÉ nel T. X (1845) del *Journal* di Liouville.

la serie che (seguendo il suggerimento dato da S. Lhuillier nel 1786) reca ordinariamente il suo nome [1]; supposto, infatti, che la variabile $z$ subisca l'incremento $v$, una funzione $x$ di $z$, diverrà, con le nostre notazioni,

$$x + \frac{v}{1}\frac{dx}{dz} + \frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3 x}{dz^3} + \ldots;$$

essa è dedotta con un passaggio al limite delle formole d'interpolazione di Newton:

$$f(x + n\,\Delta\, x) = \sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}\Delta^i f(x).$$

Lo stesso matematico scoperse la formola d'integrazione per parti

$$\int s\cdot dr = rs - \int r\frac{ds}{dr}\cdot dr$$

e ne fece un'applicazione che merita di venire qui riferita.

Pongasi

$$\int r\frac{ds}{dr}dr = \frac{r^2}{2}\frac{ds}{dr} + q;$$

derivando si ottiene

$$r\frac{ds}{dr} = r\frac{ds}{dr} + \frac{r^2}{2}\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{dq}{ds},$$

onde

$$\frac{dq}{ds} = -\frac{r^2}{2}\frac{d^2 s}{dr^2},\quad q = -\int\frac{r^2}{2}\frac{d^2 s}{dr^2}dr;$$

proseguendo nello stesso modo si finisce per concludere che

$$\int s\,dr = rs - \frac{r^2}{2\,!}\frac{ds}{dr} + \frac{r^3}{3\,!}\frac{d^2 s}{dr^2} - \ldots;$$

è il risultato esposto da Giacomo Bernoulli negli A. E. del 1694; tale antecipazione venne rilevata nel Fascicolo di maggio 1721 di questo periodico, senza provocare alcuna protesta da parte del Taylor, onde è dubbio se si tratti o non di una coincidenza fortuita.

513 - Dei metodi esposti nella I Parte del suo volume l'autore nella II fece svariate applicazioni, non soltanto di carattere analitico (interpolazioni), ma anche geometriche (problema degli isoperimetri), fisiche (rifrazione atmosferica) e meccaniche (catenaria, corde vibranti, centro d'oscillazione).

Aggiungiamo che della serie da lui scoperta egli fece uso (P. T.,

---

[1] Da una lettera scritta dal Taylor al Machin addì 26 luglio 1712 risulta che sino da allora egli era in possesso della sua formola.

1717) per risolvere per approssimazione un'equazione algebrica

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

ecco come procedette: della cercata radice egli suppose di avere trovato un valore approssimato $x_0$; $f(x_0)$ non è $= 0$, sia $= k$; se invece $x_0 + h$ è il valore esatto di quella radice, sarà $f(x_0 + h) = 0$: ora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \ldots$$

e per essere $f(x_0 + h) = 0$, $f(x_0) = k$ si ottiene

$$0 = k + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots;$$

ora, mentre nel metodo di approssimazione di Newton questa serie si arresta al suo secondo termine, Taylor la troncò al terzo e trovò così per determinare $h$ la equazione quadratica

$$0 = k + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0).$$

Seguono altre osservazioni semplificatrici, le quali però non valsero a salvare questo procedimento da un completo abbandono.

Nello stesso volume delle P. T. trovasi un altro lavoro, in cui il Taylor risolse un problema sulle traiettorie ortogonali proposto da Giovanni Bernoulli (cfr. lettera a Leibniz dell'11 marzo 1716) come sfida ai matematici inglesi; le curve richieste dovevano incontrare ad angolo retto le linee (dette oggi di Ribaucour) i cui raggi di curvatura sono divisi in un rapporto costante da una retta fissa; il Taylor ne trovò l'equazione differenziale, così porgendo una novella conferma della sua non comune perizia analitica.

514 - Ben poco si conosce intorno ad un altro matematico inglese di questo tempo, Edoardo Stone (m. nel 1768). Figlio di un giardiniere del duca d'Argyll, essendo stato da questo sorpreso mentre leggeva i *Principia* di Newton, ebbe da lui incoraggiamento e valido aiuto nei suoi studi. Nel 1720 tradusse in inglese le *Sections coniques* del marchese de l'Hôpital e dieci anni dopo pubblicò l'opera intitolata *The Method of Fluxions both directed and inverse*, di cui la prima parte non è che la versione inglese dell'*Analyse des infiniments petits* del citato autore; la II — che concerne il calcolo integrale — fu a sua volta tradotta in francese dall'architetto Rondet; ma chi ricorda le critiche aspre e non ingiustificate fatte da Giovanni Bernoulli appunto a tale versione (v. p. 628) è indotto a concludere che lo Stone siasi accinto a un'impresa superiore alle proprie forze. Oltre a due edizioni di Euclide (1728, 1752) si ha di lui ancora *A New mathematical Dictionary* (Londra, I ed., 1725; II ed., 1743). Ma il suo lavoro più originale è una memoria inserita nelle P. T. del 1740, ove sono segnalate due curve di terzo ordine sfuggite a Newton e Stirling, osservazione a cui non toglie valore il fatto che fu fatta anche da N. Bernoulli e Nicole. Il 22 aprile 1725 fu eletto F. R. S.; ma otto anni dopo si dimise per non pagare la pre-

scritta quota annuale, chè, con la morte del suo generoso protettore, egli cadde in uno stato di miseria, contro cui combattè durante tutto il resto della sua vita.

515 - Quando R. Côtes (lo scienziato con cui chiuderemo il presente Capitolo) morì avendo appena compiuto il suo trentaquattresimo anno di età (p. 593), i manoscritti da lui lasciati furono esaminati dal cugino Robert Smith (v. n. 450), suo successore nella cattedra plumiana dell'Università di Cambridge; questi ne fece un'accurata revisione, li dispose in buon ordine e nel 1722 ne pubblicò una parte col titolo *Harmonia Mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum angulorum mensuras promotae* (1).

La prima parte di questo volume è intitolata *Elementa Logometriae* ed è la riproduzione di una memoria sul calcolo logaritmico presentata dal Cotes alla Società Reale e pubblicata nelle P. T. del 1714; vi si trova il concetto generale ed il nome di « modulo di un sistema logaritmico » che l'Halley aveva considerato nel caso dei logaritmi decimali. Notevole è che ivi è introdotto come misura del rapporto di due segmenti (*mensura rationis*) il logaritmo, moltiplicato per una costante, di detto rapporto, proposta nella quale il lettore ravviserà una sorprendente antecipazione della misura di un segmento in geometria non-euclidea. Altre due sezioni della stessa opera sono dedicate alla differenziazione e all'integrazione di speciali funzioni di una variabile. Fra le formole di calcolo differenziale stabilite da Cotes notiamo quelle che dànno le derivate di sen $x$, tg $x$ e sec $x$, di cui egli fece applicazioni allo studio delle variazioni subite dagli elementi di un triangolo rettilineo del quale si suppongono costanti un lato e uno degli angoli. D'altronde le formole d'integrazione da lui stabilite completano quelle dovute a Newton e sono distribuite in una raccolta di tavole d'integrali comprendenti 18 forme principali.

Il nome del Cotes è poi legato a un elegante teorema a cui facemmo allusione parlando del de Moivre (v. p. 645); esso porge una notevole rappresentazione geometrica dei fattori dei trinomi $x^{2n} \pm 2 \cos a \cdot x^m + 1$; per risparmio di spazio rinviamo il lettore desideroso di particolari sull'argomento al *Trattato di Trigonometria* del Serret (p. 227 della traduzione italiana). Aggiungiamo che egli ha anche scoperto il teorema che stabilisce l'esistenza della polare retta di un punto rispetto ad una curva algebrica, teorema che fu per primo dimostrato dal Maclaurin.

R. Smith ha tratto dalle carte lasciate dal Cotes un altro volume a cui diede il seguente titolo: *Opera Miscellanea Aestimatio Errorum in mixta Mathesi* (Cambridge, 1722); è uno dei primi lavori sulla questione di determinare i modi più convenienti per combinare i risultati delle osservazioni. Un corso di lezioni sulla meccanica dei fluidi, la cui pubblicazione è dovuta pure alle fraterne cure dello Smith, è estraneo al quadro della presente storia.

(1) L'opera del Cotes fu tradotta in francese dal benedettino C. Walmesley (1721-1797) col titolo *Analyse des mesures des rapports et des angles, ou réduction des intégrations aux logarithmes et aux arcs de cercles* (Paris, 1748).

## BIBLIOGRAFIA [1].

JOHN HARRIS, *A new short Treatise of Algebra* (London, 1702).

HUMPHRY DITTON, *An Institution of Fluxions containing the first Principles, Operations and Applications of that admirable Method as invented by Sir Isaac Newton* (London, 1706).

GEORG CHEYNE, *Philosophical Principles of Religion* (London, 1715).

G. BERKELEY, *The Analyst: or a Discourse adressed to an infided Mathematician. Wehrein it is examined whether the Obiect, Principles, and Inference of the Modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith* (London, 1734).

*Geometry no Friend to Infidelity; or a Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians. In a Letter to the Author of the Analyst.* By PHILALETES CANTABRIGIENSIS (London, 1734).

J. WALTON, *A Vindication of Sir Isaac Newton's Principles of Fluxions, against the Objections contained in Analyst* (Dublin, 1734).

G. BERKELEY, *A Defence of Free-Thinking in Mathematics. In Answer to a Pamphlet of Philaletes Cantabrigiensis. Also an Appendix concerning Mr. Walton's Vindications. By the Author of «The Minute Philosopher»*. (Dublin, 1734).

J. WALTON, *Catechism of the Author of the Minute Philosopher fully answer'd* (Dublin, 1735; II ediz., stesso anno).

*The minute Mathematician; or The Free Thinker no Just Thinker.* By PHILALETES CANTABRIGIENSIS (London 1735).

G. BERKELEY, *Reasons for not replying to Mr. Walton's Full Answer* (London, 1735).

B. ROBINS, *A Discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's Methods of Fluxions on of Prime and ultimate Ratios* (London, 1735).

J. JURIN, *A Letter to... Esquire, In Answer to Mr. Robin's Full Confutation of the Reply to his Remarks on the Essay upon distinct and indistinct Vision* (*London*, 1741).

J. HODGSON, *The Doctrine of Fluxions, founded on Sir Isaac Newton's Method published by himself in his Tract upon the Quadrature of Curves* (London, 1736).

(Anonimo), *Introduction in the Doctrine of Fluxions and Defence of the Mathematicians against the Analyst* (London, 1736).

JAMES SMITH, *A New Treatise on Fluxions, containing:* I. *The Elements of Fluxions, demonstrated in the easy Propositions, without first or last Ratios.* II. *A Treatise of nascent and evanescent Quantities, first and last ratios.* III. *Sir Isaac Newton's Demonstration of the Fluxions enlarged and illustrated.* IV. *Answer to the Principal Objections to the Analyst* (London, 1737).

TH. SIMPSON, *A new Treatise on Fluxions, wherehin the direct and inverse Method are demonstrated after a new, clear and concise Manner, with their Application to Physics and Astronomy* (London, 1737).

B. MARTIN, Παγγεωμετπία *or the Elements of all Geometry* (London, 1739).

B. MARTIN, *System of Mathematical Institutions, agreable to the Present State of the Newtonian Mathesis* (London, 1759).

J. ROWE, *An Introduction of to the Doctrine of Fluxions, Revised by several Gentlemen well skill'd in the Mathematics* (London, 1741).

T. SIMPSON, *The Doctrine and Applications of Fluxions* (London, 1750).

N. SAUNDERSON, *The Method of Fluxions applied to a select number of useful Problems* (London, 1756).

H. BATEMAN, *The correspondence of Brook Taylor* (Bibl. math., III Ser., Vol. VII, 1906-07).

[1] In generale non vengono ripetuti i titoli già indicati completamente nel testo.

# CAPITOLO XXXII

# I NUOVI CALCOLI IN ITALIA ED IN FRANCIA

## Parte Prima: IN ITALIA

### G. Grandi

516 - Le prime pubbliche manifestazioni dell'interesse della patria nostra per le nuove idee che andavano sviluppandosi sotto l'ispirazione di Leibniz e Newton, sono da ricercarsi negli scritti di Guido Grandi. Questo fecondo scrittore nacque a Cremona il 1° ottobre 1671; a sedici anni vestì l'abito camaldolese e mutò in Guido il nome di Francesco Lodovico che eragli stato imposto al fonte battesimale. Disgustato della filosofia peripatetica, si volse all'amena letteratura; ma, essendo stato destinato nel 1694 a insegnare quella materia a Firenze nel convento del proprio ordine, fu indotto allo studio dei *Principia* di Newton e, per intenderli, si vide costretto ad approfondirsi nella geometria; in tale scienza fece progressi tanto rapidi da scoprire nuove proprietà della cissoide e della concoide e riuscire a determinare i flessi di questa curva (ciò per rispondere ad una sfida lanciata da un tedesco venuto a Firenze ad istruire i figli del Granduca di Toscana). Nel 1700 fu chiamato a Roma; ma Cosimo de' Medici, per evitare la sua partenza, gli conferì la cattedra di filosofia straordinaria nell'Università di Pisa (1700), che poi mutò (1714) con quella di matematica. Nel 1707 era stato nominato anche matematico del Granduca di Toscana, e due anni dopo fu ammesso nella Società Reale di Londra. Morì il 4 luglio 1742. La stima di cui godeva presso i matematici del tempo è documentata dal suo vasto carteggio scientifico, conservato nella Biblioteca dell'Università di Pisa.

Il Grandi si occupò con successo anche di meccanica teorica e pratica; in particolare partecipò alle ricerche di idraulica che tanto interessavano allora i governi dell'Italia centrale. Insieme ad altri collaborò alla I edizione fiorentina delle *Opere di Galileo* e vi inserì una « Nota al trattato del Galileo sul moto naturalmente accelerato », ove trovasi la definizione della curva erroneamente attribuita a Maria Gaetana Agnesi e chiamata « versiera » (latinamente « versoria »).

Non ci arresteremo sulla polemica che egli ebbe col suo collega Alessandro Marchetti (n. a Pontormo il 17 marzo 1633, m. ivi il 6 settembre 1714), chè non presenta ormai alcun interesse; nè sulle sue opere didattiche, solo notando che le numerose edizioni di cui furono onorate è prova dei loro pregi.

517 - Lo scritto con cui il Grandi ha iniziato la sua carriera di pubblicista ha per iscopo di dimostrare l'esattezza della soluzione data dal Viviani per il famoso « enigma fiorentino » (p. 435). La dimostrazione in parola essendo stata scritta in latino, il Grandi la fece precedere dalla versione nella stessa lingua di quanto aveva scritto l'ultimo discepolo di Galileo; essa è una nuova applicazione del metodo degli indivisibili. Il Grandi aggiunse di suo la risoluzione di alcuni nuovi problemi, ove trovasi applicato il seguente teorema: Qualunque porzione di superficie di un cono retto sta alla propria projezione ortogonale sulla base, come il lato del cono sta al raggio della base: gli A. E. (Gennaio 1701), pure riconoscendo le qualità del lavoro del Grandi, non mancarono di rilevare che quel teorema appartiene a Giacomo Bernoulli, che lo espose nel 1696, appunto negli A. E.

Proseguendo nello stesso ordine di ricerche, il Grandi si è proposto ed è riuscito (1701) a stabilire la verità dei teoremi sulla curva logaritmica che Huygens aveva enunciati dieci anni prima nel suo noto lavoro che tratta *De la Cause de la Pesanteur;* essi concernono la costanza della sottotangente e l'area compresa fra la curva, l'asintoto e un'ordinata, e sono dimostrati, essi pure, col metodo degli indivisibili; tutto fa credere che egli non abbia avuta notizia alcuna degli analoghi studi precedentemente fatti da E. Torricelli (p. 431). Del proprio il Grandi aggiunge la considerazione delle curve più generali, di equazione cartesiana $y = (\log x)^n$, per $n$ intero positivo; studiò anche la curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione $\omega = \log \varrho$ che egli aveva appresa nella lettera di Descartes al P. Mersenne del 12 settembre 1638 e che chiamò « spirale geometrica », come aveva già fatto il Torricelli nella lettera a M. A. Ricci del 17 marzo 1646, a lui certamente ignota. Maggiore novità (non nel metodo, ma nei risultati) presenta un'Appendice al succitato lavoro, in risposta a questioni propostegli da Tommaso Ceva con lettera del 1° agosto 1701. Essa concerne la curva situata su un cono circolare retto che ha per projezione ortogonale sulla base una spirale d'Archimede col polo nel centro di questa. Si tratta di una curva già considerata da Pappo (IV Libro della *Collezione matematica*) e da B. Pascal (p. 512); nell'opera in discorso essa viene definita come trajettoria del moto risultante dalla composizione di una rotazione uniforme di una generatrice del cono e di una traslazione pure uniforme di un punto che percorre quella generatrice partendo dal vertice. Emerge da questa definizione che è una spirale d'Archimede anche la curva che nasce da detta trajettoria quando il cono viene sviluppato su di un piano. Da ciò il Grandi fu indotto a proporsi il problema di costruire per punti una curva che appartenga ad un cono circolare retto e di cui si conosca lo sviluppo su di un piano, oppure la projezione ortogonale sulla base del dato cono. Le costruzioni da lui proposte non differiscono da quelle oggi in uso nella geometria descrittiva, onde ne costituiscono un'antecipazione, tanto più notevole in quanto il Grandi fa rilevare l'importanza teorica dell'operazione di sviluppo e ne fa applicazione alla curva dello stesso cono che projettasi sulla sua base in una spirale logaritmica.

518 - A due anni di distanza il Grandi pubblicò un altro scritto che possiede un indiscutibile valore storico perchè contrassegna l'abbandono da parte di lui dei metodi infinitesimali in uso nella scuola galileiana per adottare quelli inventati da Leibniz; perciò si può dire che il suo volume intitolato *Quadratura Circuli et Hyperbolae* porga la prima pubblica manifestazione dell'ingresso in Italia dei nuovi calcoli. Esauritasene la prima edizione, nel 1710 ne uscì una seconda (l'unica che noi conosciamo) arricchita, fra l'altro, di uno squarcio di lettera direttagli da Leibniz in data 21 luglio 1705 (1).

Il volume in questione consta di due parti, una dedicata al circolo e l'altra all'iperbole. La prima contiene due dimostrazioni della celebre formola leibniziana

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

caso particolare dell'altra

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

essa pure dimostrata dal Grandi. Originale è l'introduzione della classe di curve di equazione generale

$$(a^2 + y^2)^{m/2} = a^{m \pm n} x^{\pm n},$$

fra cui trovansi l'iperbole equilatera e la parabola. La seconda parte contiene formole concernenti i logaritmi; ad esempio la seguente

$$\log \frac{1}{1-a} = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots$$

che, in particolare, per $a = \frac{1}{2}$ dà

$$\log 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \ldots$$

Una I Appendice della stessa opera contiene alcune formole di quadratura, e appunto da ciò l'autore è indotto a far conoscere il metodo comunicatogli da Gabriele Manfredi (lettera dell'8 agosto 1702) per rettificare mediante serie le curve di equazione $y = x^m$. Quando avremo aggiunto che una II Appendice si riferisce al problema bernoulliano di trasformare una curva piana in altra di eguale lunghezza, avremo compiuta la raccolta dei fatti che dimostrano come, sino dall'alba del secolo XVIII, il Grandi si era pienamente impadronito dei metodi leibniziani, sì da potersene servire con piena sicurezza.

Una ulteriore conferma è offerta dall'altro scritto *De Infinitis Infinitorum et Infinite Parvorum Ordinibus*, nel quale trovansi esposti i

(1) Non la si trova fra quelle scambiatesi fra i due scienziati e inserite nella collezione *Leibnizens Mathematische Schriften*.

fondamenti del calcolo infinitesimale secondo quel grande, e applicati a sostenere la legittimità degli « spazi più che infiniti del Wallis » [1], in opposizione alle ragioni in contrario che vedremo (n. 535) addotte dal Varignon. Il geometra francese replicò negli A. E. dell'aprile 1712, e il nostro vi rispose l'anno appresso con una nuova pubblicazione. I due valorosi antagonisti conservarono ciascuno la propria opinione, ma il pubblico fu ed è concorde nel ritenere che dalla parte della ragione fosse il matematico francese.

519 - Non è questo l'unico caso in cui qualche opinione del Grandi ebbe a sollevare discussioni e proteste; di altra, grazie allo scalpore che sollevò, va qui fatta menzione. Prendendo le mosse dalla formola

$$\frac{a}{1+x} = a - a\,x + a\,x^2 - a\,x^3 + \cdots \tag{1}$$

e facendo ivi $x = 1$, egli concluse (lettera a Leibniz del 15 novembre 1705) essere

$$\frac{a}{2} = a - a + a - a + a - a + \ldots$$

Ora a seconda che si scrive il secondo membro di questa equazione sotto l'una o l'altra delle forme

$$(a - a) + (a - a) + \ldots \quad , \quad a - (a - a) - (a - a) - \ldots$$

si ottiene come somma 0 o $a$, la cui media aritmetica è appunto $a/2$; da ciò un'apparente giustificazione di quel risultato, la quale però non soddisfece tutti, donde lunghe discussioni (a cui partecipò lo stesso Leibniz) fra matematici e filosofi del tempo, durante cui venne anche avanzata l'opinione che la formola del Grandi porgesse una spiegazione della creazione del mondo dal nulla; non è il caso di diffonderci sopra una questione che non ha più ragione di sussistere e d'interessare oggi che tutti sanno che la formola (1) è applicabile *soltanto* quando il valore assoluto di $x$ è inferiore a 1.

L'ultimo dei lavori del Grandi su cui dobbiamo intrattenerci concerne una nuova classe di curve piane o sferiche; le prime sono le « rodonee » (o rose) di equazione polare $\varrho = a \operatorname{sen} \mu\,\omega$, le altre sono le analoghe sulla sfera (furono chiamate « clelie » in onore della Contessa Borromeo). Delle relative ricerche i cenni di più antica data si trovano in una lettera scritta dal Grandi al Leibniz nel dicembre 1713, mentre la prima comunicazione al pubblico fu fatta mediante una memoria inserita dieci anni dopo nelle P. T. Ma l'esposizione completa dei risul-

---

[1] Ad essi l'autore dell'*Arithmetica Infinitorum* era giunto occupandosi della quadratura delle iperboli $x^m\,y^n = a^{m+n}$; la formula relativa è notoriamente $\frac{n}{n-m}\, a^{\frac{n+m}{n}}\, x^{\frac{n-m}{n}}$; ora quando $n > m$ quest'espressione risulta finita e positiva, per $n = m$ diviene infinita e quando finalmente $n < m$ assume un valore negativo. Tale fatto, di apparenza paradossale, impressionò il Wallis, il quale s'illuse di aggiustare tutto introducendo il concetto di spazi più che infiniti. Il Grandi si atteggiò a difensore del Wallis.

tati ottenuti dal nostro matematico leggesi in una importante pubblicazione speciale, la quale conferma che egli aveva il pieno possesso dell'algoritmo infinitesimale.

Senza arrestarci sopra le soluzioni da lui indicate per due problemi meccanici (A. E. Febbrajo 1714), rileviamo che le curve $y = (\log x)^2$, che rientrano in una classe di linee che vedemmo (p. 654) da lui immaginate, furono studiate da un suo contemporaneo, allievo del Viviani, Lorenzo Lorenzini. Questi nacque a Firenze il 5 luglio 1652; essendo incorso nello sdegno del suo sovrano, passò prigioniero nel Maschio di Volterra gli anni migliori della sua vita (1681-1707); morì nella sua città natale il 26 maggio 1721. L'anno stesso della sua morte vide la luce un opuscolo dal titolo *Exercitatio geometrica,* ove sono studiate col metodo degli antichi le curve di equazione $y^{m+n} = x^m (1 \pm x^n)$; è un estratto di un più esteso lavoro il cui manoscritto trovasi sepolto a Firenze, col titolo *Opera Geometrica autographa*. nell'attesa di essere esaminato da persona competente ed eventualmente dato alle stampe.

## Dai fratelli Manfredi a M. G. Agnesi

520 - Gabriele Manfredi, di cui facemmo fugace menzione (n. 518), e suo fratello Eustachio appartengono ad una illustre famiglia di Bologna. Il secondo nacque in detta città addì 20 settembre 1674; in omaggio ai desideri paterni si laureò in giurisprudenza, ma ben presto, lasciando codici e pandette, si volse alla filosofia e sino dal 1691 fondò nella propria casa l'Accademia dei Filosofi Inquieti, primo germe dell'attuale Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. La munificenza di un concittadino avendogli concesso di istituire nella sua stessa abitazione un osservatorio astronomico, potè compiere importanti esplorazioni celesti; i suoi postumi *Elementi della Geometria piana e solida, e della Trigonometria* (Bologna, 1755) gli dànno diritto di una citazione onorevole nella presente storia; morì in patria il 15 febbraio 1739.

Più giovane di lui è il fratello Gabriele, il quale nacque il 25 marzo 1681; fu avviato allo studio della medicina, ma ben presto se ne allontanò per intolleranza degli spettacoli offerti dall'umanità dolorante: si volse allora alla matematica, ottenendo risultati talmente importanti che nel 1720 il Senato di Bologna lo chiamò ad occupare una cattedra di matematica in quella gloriosa Università; morì il 13 ottobre 1761.

Nel mondo matematico Gabriele Manfredi si fece conoscere pubblicando (Bologna, 1707) l'importante opuscolo intitolato *De Constructione Aequationum differentialium primi gradus*, che è la prima opera di puro calcolo integrale che sia stata pubblicata in Italia. Essa consta di sei sezioni. La I ha per iscopo di mostrare come si ottenga l'equazione differenziale (di primo ordine) a cui soddisfa una data curva definita da una sua proprietà infinitesimale, non solo quando la si riferisca ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ma anche quando si ricorra a sistemi più complicati; molti esempi opportunamente scelti illustrano le considerazioni generali esposte. Altrettanti si trovano nella II sezione, ove l'autore entra nel vivo del suo tema, insegnando l'inte-

grazione delle equazioni differenziali di primo ordine nell'ipotesi che le variabili siano separate; della stessa specie sono le equazioni della forma $dy = f(x) \, . \, dx$, a cui è dedicata la III Sezione, i pregi della quale risultano dalle osservazioni suggerite all'autore dagli esempi addotti. Alle equazioni differenziali di primo ordine, ma di grado superiore, si riferisce la IV Sezione, mentre nella V si ritorna a quelle di primo grado per mostrare come si integrano quando le variabili si possano separare ricorrendo ad operazioni algebriche. L'ultima Sezione è la più importante, perchè vi si apprende una serie di artifici mediante cui si giunge alla separazione delle variabili; giova riferire quali siano le equazioni considerate:

$$y\,dx + x\,dy = f(y)\,dy \quad , \quad y\,dx - x\,dy = f(y)\,dy;$$

$$a\,dx = y\,dx - x\,dy;$$

$$a^2\,dy = b\,\varphi(x)\,dx + \psi(x)\,y\,dx;$$

$$b^{n+1}\,dy = b^{\,n-1}\,\varphi(x)\,dx + \psi(x)\,y^n\,dx.$$

Emerge da ciò che a G. Manfredi spetta il merito, oltre che di avere suggeriti alcuni artifici utili per integrare alcune equazioni differenziali di primo ordine, quello di avere posto un po' d'assetto ad una materia che, sino dai primordi del secolo XVIII, aveva trovati parecchi cultori. Tale merito fu subito riconosciuto da Leibniz il quale, al ricevere il lavoro del Manfredi, gli scrisse (da Hannover in data 10 aprile 1708) augurando che « l'Italia continuasse a contribuire al progresso della matematica in modo degno della patria di S. dal Ferro, L. Ferrari, B. Cavalieri e E. Torricelli », e comunicandogli il risultato da lui ottenuto integrando una equazione differenziale (lineare) della forma (non sfuggita al Manfredi stesso) $dy/dx = z + vy$, ove $z$ e $v$ si suppongono funzioni della sola $x$; tale risultato è quello ormai classico che oggi si scrive, sottintendendo la costante d'integrazione, come segue:

$$y = e^{\int v\,dx} \int z\, e^{-\int v\,dx}\, dx.$$

Continuando a meditare sullo stesso argomento il Manfredi pubblicò nel T. XVII del *Giornale dei Letterati d'Italia* (Venezia, 1714) un *Breve Schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte dell'equazioni differenziali del primo grado*, ove è insegnata l'integrazione delle equazioni differenziali omogenee in $x$, $y$ mediante la sostituzione $u = x/y$; è questo un risultato a cui pervenne anche Giovanni Bernoulli, ma il Manfredi sostenne energicamente i proprî diritti di priorità in una pagina largamente documentata, che il Fabroni pubblicò in appendice alla biografia del geniale matematico bolognese (¹).

Altro contributo dato all'analisi dallo stesso matematico si trova nell'articolo intitolato *Soluzione di un problema appartenente al Calcolo integrale* (Supplementi al *Giornale dei Letterati d'Italia*, Volume II, Venezia, 1722). Ivi si trovano notevolmente estesi i risultati otte-

(¹) *Vitae Italorum doctrina excellentium*, vol. V (Pisis, 1779), p. 214.

nuti dal Hermann (A. E., agosto 1719) trattando un celebre problema proposto da B. Taylor (v. p. 624) ai matematici continentali; anche in tale circostanza il Manfredi seppe mostrarsi analista di singolare perizia, giudizio che riceve ulteriori conferme da altri scritti inseriti nei *Commentari* dell'Accademia di Bologna, sui quali l'abbondanza di materia ci impedisce di arrestarci.

521 - Un'altra cospicua famiglia italiana che diede alle matematiche rilevanti contributi è quella dei Riccati, di cui dobbiamo ora occuparci. Il primo dei suoi membri che merita la nostra attenzione, è Jacopo, nato a Venezia il 28 maggio 1676. Per volere del padre studiò giurisprudenza; ma subendo l'influenza di Stefano degli Angeli (p. 524), allora insegnante nell'Università di Padova, si addestrò nei più recenti metodi di analisi matematica e sino dal 1710 se ne mostrò in possesso risolvendo la seguente questione proposta nel T. III del *Giornale dei Letterati d'Italia*: Trovare la forza centrale a cui si richiede soggiaccia un mobile per descrivere una data curva in un mezzo ripieno di un fluido la cui densità varî secondo una certa proporzione e resista al mobile in qualsivoglia altra ragione composta di quella stessa e di qualsiasi altra multipla della velocità. Ben presto le sue pubblicazioni si moltiplicarono e crebbero d'importanza; in conseguenza egli fu considerato come uno dei più eminenti matematici del suo tempo: onde non è meraviglia se Pietro il Grande lo invitasse a recarsi a Pietroburgo in qualità di presidente di quell'Accademia; ma egli non volle lasciare l'Italia e morì a Treviso il 1° maggio 1754.

Le opere di Jacopo Riccati meritano da parte nostra un'esposizione particolareggiata. Negli anni 1722-23 egli si assunse di istruire nel calcolo infinitesimale Lodovico Riva e Giuseppe Suzzi [1] e pubblicò le sue lezioni. Ivi l'eminente matematico espose i metodi di integrazione delle equazioni differenziali di primo ordine noti ai suoi tempi, nonchè quelli che servono a ridurre al primo quelle di ordine superiore: con ciò egli proseguì nella via battuta da G. Manfredi, documentando così l'ininterrotta continuità dello sviluppo dell'analisi infinitesimale presso di noi. Scendendo a più minuti particolari, diremo che il Riccati si occupa anzitutto delle equazioni differenziali che si possono integrare mediante opportune trasformazioni algebriche; poi di quelle che s'integrano mediante cambiamenti di variabili; e, dopo avere indicati alcuni artifici suggeriti da Giovanni Bernoulli (A. E. 1697 e 1700), fa conoscere il metodo del Manfredi per integrare le equazioni omogenee; da ultimo fa notare che talvolta, quando si voglia determinare una curva dotata di proprietà assegnate, giova riferirla a sistemi di coordinate differenti dagli ordinari. Nella II Parte delle sue lezioni il Riccati espone su parecchi esempi gli artifici d'integrazione da lui stesso immaginati. Uno

[1] Sono due discepoli che fanno onore al maestro. Il primo a partire dal 1720 fu professore di astronomia e meteorologia nell'Università di Padova e nel 1725 pubblicò a Venezia un volume di *Miscellanea*, ove sono dimostrati alcuni teoremi d'integrazione enunciati da Giovanni Bernoulli (A. E., 1719). Nello stesso anno e nella medesima città il secondo diede in luce alcune *Disquisitiones mathematicae*, ove è studiata la questione di trovare infinite lunole quadrabili, che aveva già occupato il I Nicolò Bernoulli.

consiste nello sforzarsi di ridurre la equazione proposta ad essere omogenea. Più originale è quello da lui chiamato « della dimezzata separazione », la cui applicazione si svolge in tre fasi: *a*) Si scriva l'equazione integranda in modo che un gruppo dei suoi termini, dopo di avere moltiplicata o divisa tutta l'equazione per un'opportuna funzione dell'incognita, risulti integrabile; *b*) Si esegua l'integrazione e si ponga il risultato eguale a una nuova incognita e si elimini dal risultato una delle variabili primitive; *c*) Sull'equazione risultante si operi similmente, ecc. Avendosi ad es. l'equazione

$$\frac{x^3\,d\,y + y^3\,d\,x}{(x^2+y^2)\,\sqrt{x^2+y^2-x^2\,y^2}} = f\,(x)\,d\,x$$

la si scriva come segue

$$\frac{x^3\,y^3}{(x^2+y^2)\,\sqrt{x^2+y^2-x^2\,y^2}}\left(\frac{d\,x}{x^3}+\frac{d\,y}{y^3}\right) = f\,(x)\,d\,x$$

e si ponga

$$\frac{d\,x}{x^3}+\frac{d\,y}{y^3} = -\,d\,p \quad , \quad \text{onde} \quad p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).$$

Eliminando $y$ si trova

$$-\,\frac{d\,p}{2\,p\,\sqrt{2\,p-1}} = f\,(x)\,d\,x,$$

cosicchè le variabili sono separate. Questo procedimento fu esposto per la prima volta dall'autore nel *Giornale dei Letterati d'Italia* (T. XXI, 1715) e prima comunicato a Bernardino Zendrini, matematico e sopraintendente delle acque degli Stati Veneti (n. vicino a Brescia il 7 aprile 1679, m. a Venezia il 18 Maggio 1747) e da questo a Leibniz, il quale lo giudicò assai ingegnoso e incoraggiò l'autore a proseguire nelle sue meditazioni sull'argomento [1]. Un terzo artificio ideato dal Riccati, e che può servire in certi casi, consiste nel porre $x = A\,y^m + B$, ove le funzioni $A$ e $B$ debbono scegliersi in modo da ottenere la separazione delle variabili. Nella III Parte delle sue lezioni il Riccati tratta delle equazioni di ordine superiore, mostrando che alcuni degli artifici dianzi insegnati possono ancora applicarsi; di più espone e talora critica altri artifici suggeriti allo stesso scopo da alcuni matematici del suo tempo.

522 - Le equazioni differenziali sono il tema di altri lavori dello stesso matematico, di data anteriore alle lezioni testè riassunte. Infatti nel 1712 egli risolse nel *Giornale dei Letterati d'Italia* alcuni problemi relativi a curve piane definite da proprietà di curvatura, i quali meritano il nome di fondamentali e che esigono l'integrazione di equazioni differenziali di second'ordine. Per enunciarli comodamente chia-

---

[1] Vedi la lettera da lui scritta da Hannover nel Dicembre 1714 e pubblicata (non nei *Mathematische Schriften* di LEIBNIZ, ma) a p. 436 del T. I. delle *Opere* di J. RICCATI.

miamo $r$ il raggio di curvatura, $s$ l'arco di una curva riferita a coordinate cartesiane o polari $(\varrho, \omega)$ e $p$ la proiezione del raggio di curvatura sul corrispondente raggio vettore; allora le equazioni integrate dal Riccati si scrivono come segue: $r = f(\varrho)$, $r = f(p)$, $r = f(y)$.

I risultati da lui ottenuti sono rimasti nella scienza (¹), benchè non siano indicati col nome del Riccati; a suo merito va pure rilevato avere egli notato che la via da lui tenuta conduce anche all'integrazione di tutte le equazioni differenziali della forma $f\left(y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, che egli ha per primo considerate in generale. Fa sistema con quanto precede il contenuto di una memoria comunicata sino dal 1715 allo Zendrini, per essere pubblicata nel *Giornale dei Letterati d'Italia,* ma che non comparve che nel 1747 nei *Commentari* dell'Accademia di Bologna; ivi il Riccati ha integrata l'analoga equazione $r = f(s)$, problema di somma importanza, perchè, secondo i concetti moderni, consiste nella ricerca dell'equazione cartesiana di una curva definita dalla sua equazione intrinseca.

Ulteriori perfezionamenti alla neonata teoria delle equazioni differenziali vennero arrecati dall'eminente matematico veneto partecipando ad una discussione sollevata da una lacuna esistente nei *Principia* di Newton. Questi, dopo di avere dimostrato che, affinchè le orbite descritte dai pianeti siano sezioni coniche, la legge d'attrazione dev'essere quella dei quadrati inversi, asserì che, inversamente, quando vige detta legge, le traiettorie sono dell'indicata specie. Dal punto di vista matematico la questione si aggira sopra l'integrazione della equazione $-a\,d^2x = \dfrac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Che l'asserzione di Newton esigesse una prova venne rilevato dall'Hermann (*Giornale dei Letterati d'Italia*, T. II, 1710), il quale di più indicò un modo per congegnarne una; Giovanni Bernoulli, avutane comunicazione dall'Hermann stesso, vi fece alcune critiche (*Mém. de Paris,* 1710) basate sulla considerazione che il risultato mancava di generalità per l'assenza delle costanti introdotte dall'integrazione ed espose un proprio metodo esente da tale difetto. Ora, mentre Hermann trovò giuste le osservazioni del suo maestro, il Riccati (*Giornale dei Letterati d'Italia,* T. XIX, 1714) si sforzò di mostrarne l'infondatezza, osservando che l'assenza delle costanti d'integrazione non infirma sostanzialmente il risultato; il Bernoulli, uniformandosi a un sistema generale del tempo, rispose per bocca del nipote Nicolò (Id., T. XX, 1715); in tale risposta rileviamo l'osservazione che, per integrare l'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = 0,$$

(¹) Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* II Tl., II Aufl (Leipzig, 1878), p. 340; Boole, *A Treatise on Differential Equations,* IV Ed. (London 1877), p. 241.

giova scriverla sotto le due forme

$$\int \frac{x\,y\,d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{x\,y\,d\,y}{\sqrt{b^2 - y^2}} = 0\,,$$

$$\int d\,x \cdot \sqrt{b^2 - y^2} + \int d\,y\,\sqrt{a^2 - x^2} = 0;$$

ora eseguendo nella prima l'integrazione per parti si trova

$$-\left(x\,\sqrt{a^2 - y^2} + y\,\sqrt{a^2 - x^2}\right) +$$
$$+ \left(\int d\,x \cdot \sqrt{b^2 - y^2} + \int d\,y \cdot \sqrt{b^2 - x^2}\right) = 0$$

onde, tenendo conto della seconda si conclude essere

$$x\,\sqrt{b^2 - y^2} + y\,\sqrt{a^2 - x^2} = \text{cost.}$$

l'integrale della data equazione differenziale; questo artificio va qui registrato perchè vedremo che « mutatis mutandis » fu poi usato con successo in altri casi più complicati.

In una controrisposta (*Giornale dei Letterati d'Italia,* T. XXI, 1715) il Riccati dà notizia del suo metodo della dimezzata separazione delle variabili e rileva come a torto Giovanni Bernoulli si attribuisse l'invenzione della spirale iperbolica, che era stata scoperta prima dal Varignon; come si vede, la discussione finì per assumere un tono di personalità, che ci esonera dall'arrestarci più oltre su di essa. Solo notiamo che un'eco di questa contesa si trova negli A. E., e che nella chiusa di un articolo pubblicato ivi dal Riccati nell'ottobre 1723 il nostro matematico propose la ricerca dei casi d'integrabilità dell'equazione

$$x^m\,d\,x = d\,y + \frac{y^2\,d\,x}{x^n}\,,$$

destinata a rimanere nella scienza appunto col suo nome. Già dicemmo (p. 630) che Daniele Bernoulli diede la soluzione di questo problema, prima mediante uno degli oscuri anagrammi in uso a quel tempo, poi esplicitamente; il risultato da lui ottenuto si ritrova oggi nei trattati sulla materia [1].

523 - Anche in altre occasioni il Riccati si occupò con successo di speciali equazioni differenziali; così in un lavoro comunicato al Suzzi in data 5 marzo 1732, dallo studio *Del Moto dei Pendoli a Cicloide,* nell'ipotesi che la resistenza opposta dal mezzo sia proporzionale al quadrato della velocità, egli trovò occasione per applicare il suo metodo della dimezzata separazione all'equazione

$$a \cdot d\,s - s \cdot d\,s - n\,u^2 \cdot d\,s = u \cdot d\,u;$$

mentre in altro *Sopra le leggi delle resistenze con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto dei corpi solidi* egli ha integrata l'equazione diffe-

(1) Vedi per es. Forsyth, *Lehrbuch der Differential - Gleichungen, deutsch von* H. Maser (Braunschweig, 1889), p. 199.

renziale omogenea

$$-y \cdot dy + 2bu \cdot dy = u \cdot du$$

con un procedimento diverso da quello suggerito dal Manfredi.

Quantunque il campo in cui egli ottenne maggiori frutti sia quello delle equazioni differenziali, esso non è l'unico che egli abbia coltivato; invero egli ha immaginato un metodo per calcolare $\int dx : (ax^\alpha + + bx^\beta + \ldots)^p$, che oggi appare più complicato del necessario, ma che due secoli fa sembrò così pregevole che M. G. Agnesi vi accordò un posto delle sue *Instituzioni analitiche*; inoltre in una lettera diretta al Suzzi il 5 settembre 1725 egli si è occupato di un lieve errore commesso da Newton nella I edizione dei *Principia* e corretto nella II; ivi il nostro mostra essere infinitesimo del second'ordine il segmento compreso fra una curva e la tangente in un punto $P$ dell'ordinata relativa al punto della curva consecutivo a $P$. Lo spazio non consentendoci di indicare tutto quanto di pregevole si trova nelle *Opere* del Riccati, chiuderemo notando che egli ha arrecato qualche contributo non indegno di lui anche alla questione, che trovavasi all'ordine del giorno sino dai tempi di Descartes e Fermat (p. 479), di determinare le curve algebriche d'ordine minimo che devono impiegarsi per risolvere un problema geometrico di grado assegnato, facendo poi alcune applicazioni delle generalità esposte.

524 - Due figli di J. Riccati, sia pure con minor gloria, seguirono le sue orme.

Vincenzo è il primo; egli nacque a Treviso l'11 gennaio 1707; fu ascritto all'ordine dei Gesuiti, insegnò letteratura a Padova e matematica a Bologna e pubblicò varî lavori nei *Commentari* dell'Accademia felsinea; soppressa nel 1773 da Clemente XIV la Compagnia a cui apparteneva, si ritirò a Treviso nella casa paterna e ivi morì il 17 gennaio 1775.

Il suo valore matematico risulta palese esaminando due volumi nei quali egli ha adunate le sue principali memorie di matematica e fisica. Essi provano che egli era pienamente al corrente dell'analisi matematica nell'epoca pre-euleriana e che a varî capitoli di essa egli seppe arrecare qualche contributo. Così, per primo, ha definite le funzioni iperboliche, ne ha scoperte le relazioni con la funzione esponenziale e ne ha dati gli sviluppi in serie, non senza rilevarne l'intervento nell'integrazione delle funzioni razionali e in questioni di meccanica e fisica. Inoltre prese parte agli studi che facevansi allora sul significato della formola di risoluzione delle equazioni cubiche e indicò alcune nuove equazioni che possono risolversi mediante espressioni radicali; si occupò dell'integrazione di equazioni differenziali, alcune provenienti da problemi geometrici. Una memoria di Giovanni Bernoulli gli suggerì nuove considerazioni intorno al paragone delle lunghezze di due curve, e una dell'Hermann alcuni accorgimenti per discutere l'equazione delle coniche rappresentate in coordinate cartesiane. Finalmente si occupò assiduamente della rettificazione delle sezioni coniche, preludio della

teoria delle funzioni ellittiche. Vanno anche ricordate le *Institutiones analyticae* (due vol., Bologna, 1765-67) da lui composte in unione a Girolamo Saladini (n. a Lucca nel 1731, m. a Bologna il 1° luglio 1813) il quale ne fece poi (1776) un compendio in italiano.

Giordano, altro figlio di Jacopo Riccati, nacque pure a Treviso, il 25 febbraio 1709 e ivi morì il 20 luglio 1790. Avendo trascorsa l'intera sua vita come pensatore indipendente, gli unici episodi della sua vita sono rappresentati dalle sue pubblicazioni; fra queste, parecchie concernono la meccanica e la teoria del suono; ma la sua memoria intitolata *Teorema: Il nulla immaginario non può confondersi col reale* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, T. IV, 1788), mostra che egli non escluse dalle proprie meditazioni la matematica pura, mentre sul confine fra scienza e filosofia trovasi la sua memoria intitolata *Che lo studio delle Matematiche non favorisce la miscredenza* (Raccolta Calogerà, T. XXVII, 1775).

525 - Un'altra nobile famiglia italiana si acquistò grandi benemerenze nel campo matematico durante il secolo di cui ci occupiamo: il primo dei suoi membri di cui dobbiamo occuparci è Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano. Egli nacque a Sinigaglia il 26 settembre 1682; fu educato a Roma nel Collegio Clementino; a ventiquattro anni, senza alcun aiuto, prese a studiare matematica, spintovi da alcune frasi scritte dal Malebranche nella sua opera sopra la *Recherche de la vêrité,* e fece tali progressi che ben presto fu in grado di compiere qualche ricerca originale; prese a carteggiare col Grandi e poi con J. Riccati e coi PP. Leseur e Jacquier; vedremo che a lui si rivolse Lagrange ancora giovinetto per pubblicare il primo suo lavoro; ottenuto per eccezione il permesso di leggere gli A. E. (che, come pubblicazione originaria di un paese protestante non poteva circolare negli Stati Pontifici), potè seguire il movimento matematico che avveniva fuori d'Italia. Nel 1721 Luigi XV lo creò conte del suo Regno; nel 1745 Benedetto XIV, che lo apprezzava altamente, lo autorizzò ad aggiungere al primitivo cognome di Toschi quello di Fagnano e lo promosse al marchesato; quattro anni dopo il re delle due Sicilie lo nominò marchese di Sant'Onorio. Di una disputa che ebbe con Nicolò Bernoulli non volle rimanesse traccia nella raccolta delle sue opere. Appartenne alla Società Reale di Londra e all'Accademia di Berlino e, quando morì (18 maggio 1766), era in predicato per essere aggregato a quella di Parigi. Gli diedero grande rinomanza le ricerche sulla lemniscata di cui parleremo più innanzi; e, appunto per ricordarle, la figura di questa curva trovasi incisa sulla sua tomba con la scritta « Deo veritatis gloria ».

Suo figlio Giovanni Francesco nacque a Sinigaglia il 31 gennaio 1715; abbracciò la carriera ecclesiastica, nel 1752 fu fatto canonico della cattedrale della sua città e tre anni dopo arcidiacono. È autore di un trattato inedito sulle proprietà dei triangoli, ispiratogli dal congenere scritto del padre; di questo è in realtà opera un articolo in difesa dello stesso pubblicato nel 1741 nella *Raccolta* del Calogerà. Collaborò mediante articoli di analisi agli A. E e ad altre riviste italiane e straniere; ma si occupò anche di questioni elementari e ciò non senza frutto, giacchè a

lui si attribuisce la scoperta del teorema secondo cui il « triangolo avente per vertici i piedi delle altezze di un triangolo qualunque ha per bisettrici le altezze stesse ». Morì nella sua città nativa il 14 maggio 1797.

526 - G. C. Fagnano si affermò come provetto matematico pubblicando pregevoli articoli di calcolo integrale nel *Giornale dei Letterati d'Italia* e nella *Raccolta* Calogerà. Uno di essi concerne il problema proposto da B. Taylor (p. 624) e di cui non avevano sdegnato di occuparsi eminenti scienziati. Ma la sua originalità di pensiero cominciò a delinearsi chiaramente quando propose nel T. XIX (1714) del succitato *Giornale* il seguente

*Problema.* Sia data una parabola biquadratica primaria di equazione $y = x^4$, nonchè una porzione di essa; si domanda di assegnare un'altra porzione della medesima tale che la differenza delle porzioni medesime sia rettificabile.

Nessuno avendo risposto, il proponitore stesso presentò la chiave dell'enigma nei volumi XXII-XXIV (1715-16) dello stesso *Giornale*, così destando la generale ammirazione dei competenti.

Proseguendo in quest'ordine di ricerche egli scoperse un teorema di calcolo integrale (*Giornale*, T. XXVI, 1716) che guida ad un tempo alla rettificazione dell'ellisse, dell'iperbole e della cicloide; e, spingendosi ancora più oltre (Id., Vol. XXIX, XXX e XXXIV), compì ricerche sulla rettificazione della lemniscata, le quali, fra l'altro, mostrarono che per gli archi di questa curva, come per la circonferenza, la divisione in un numero di parti eguali può eseguirsi « regula et circine » ogniqualvolta quel numero ha un'espressione della forma $2^n \cdot 3 \cdot 5$. Esse collocano il Fagnano fra i fondatori della teoria delle funzioni ellittiche. Incoraggiato da tale successo, egli volse la mente alla parabola cubica (Id., Vol. XXXIII, 1722), all'evoluta della lemniscata, all'iperbole equilatera e all'ellisse $\frac{x^2}{2} + y^2 = a^2$ che oggi ancora reca il nome del Fagnano. Parecchie sue memorie concernono la classe di curve caratterizzata dalla seguente proprietà: l'angolo fatto delle corde uscenti da un punto con l'asse sta in un dato rapporto con quello formato dalle corrispondenti normali con l'asse stesso; sono le linee che portano oggi il nome di « spirali sinusoidi ». A una questione di calcolo integrale si riferiscono eziandio altri suoi scritti facenti parte della polemica da lui sostenuta con Nicolò Bernoulli: ci è forza di limitarci a segnalare l'esistenza e di fare altrettanto riguardo ad altri che gli assicurano un bel posto fra coloro che applicarono con successo i numeri immaginari al calcolo integrale.

527 - Un altro tema che il Fagnano ha studiato da vari punti di vista senza però interessare gran che i matematici, è la risoluzione delle equazioni di 2°, 3° e 4° grado, proponendo all'uopo parecchi nuovi procedimenti che meriterebbero di venire studiati e paragonati con gli altri congeneri. Sembra che a volgere la mente a questo soggetto il Fagnano sia stato indotto componendo l'estesa sua *Teoria generale delle Proporzioni geometriche,* prodotto definitivo degli studi di cui aveva dato saggio nella memoria intitolata *Supplemento al V Libro di Euclide*

(« Giornale dei Letterati d'Italia », T. XXXVIII, 1726). Ora quella *Teoria* è ben più notevole delle innumerevoli altre scritture intese a illustrare la più difficile sezione del grande codice geometrico da noi ereditato dai Greci; giacchè essa mostra che il Fagnano, ampliando le sue considerazioni, ha tentato, crediamo per primo, di dare un ordinamento razionale alle nozioni che avevansi allora sui numeri immaginari, creando per questi nuovi enti uno speciale algoritmo; è questo un merito che non gli è stato sinora riconosciuto. Dalle sue meditazioni sopra questo importante argomento egli trasse la convinzione che quei numeri si possono usare con piena fiducia; onde non ebbe scrupolo a servirsene quando ciò riusciva giovevole; notevoli sono le applicazioni da lui fatte di detti numeri alla moltiplicazione degli archi, benchè in tale via egli sia stato preceduto da Giovanni Bernoulli (v. p. 624).

Una terza faccia dell'attività del Fagnano va qui segnalata con l'intento di far riconoscere a lui meriti sconosciuti o ingiustamente negati; essa risulta dalla lunga memoria intitolata *Diverse proprietà dei Triangoli rettilinei dimostrate,* la quale si apre con le seguenti parole: « Hanno i triangoli rettilinei sì belle affezioni, che meritano di essere considerate dai geometri più di quello che abbian fatto sinora »; ora chi non ravvisa ivi concisamente indicato il programma della moderna geometria del triangolo. Non è dunque debito di giustizia lo scrivere il nome del Fagnano nella prima pagina della storia di questo capitolo della geometria? [1]. Ciò con tanta maggior ragione che il Fagnano ha basate le sue considerazioni sopra gli elementi (altezze, bisettrici, mediane, cerchi inscritti e circoscritti, ecc.) che intervengono anche oggi regolarmente in tutte le trattazioni della materia. Fra i risultati da lui ottenuti segnaliamo il fatto che prima dello Stewart (a cui d'ordinario è attribuita) egli ha scoperta la relazione

$$\overline{AD}^2 \cdot BC + \overline{BD}^2 \cdot CA + \overline{CD}^2 \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB,$$

che intercede fra tre punti $A, B, C$ di una retta e un quarto punto $D$ arbitrario.

Merita ancora di essere rilevata la generalità delle concezioni dell'autore, la quale risulta dal seguente enunciato: In tutti i triangoli $ABC$ di eguale base $AB$ si possono considerare innumerevoli elementi, come l'angolo al vertice, la corrispondente altezza, funzioni simili dei lati $AB$, $AC$, ecc.; ora se una di esse è costante, le altre risultano massime o minime quando il triangolo è isoscele. Le considerazioni in discorso hanno anche suggerito al Fagnano un elegante problema di massimo e minimo che è risolto dalle parabole e iperboli di ordine superiore; inoltre un nuovo metodo di risoluzione delle equazioni quadratiche; finalmente un grande numero di nuove dimostrazioni del teorema di Pitagora, le quali finora sfuggirono all'attenzione dei raccoglitori dei congeneri ragionamenti. Dai triangoli il Fagnano fu poi portato a occuparsi dei poligoni semplici piani e gobbi; così fu condotto a stabi-

(1) Il primo a seguirlo in questa via fu, come dicemmo (p. 664), suo figlio.

lire la seguente relazione

$$(\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \ldots + \overline{OA_n}^2) - (\overline{OM_1}^2 + \overline{OM_2}^2 + \ldots + \overline{OM_n}^2) =$$
$$= \frac{1}{n}(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \ldots + \overline{A^nA_1}^2),$$

nella quale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ designano i vertici di un arbitrario poligono, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ i centri dei lati consecutivi $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ e $O$ un punto arbitrario dello spazio.

I principali articoli pubblicati dal Fagnano e altri inediti furono da lui stesso raccolti in due volumi dati in luce nel 1750 col titolo *Produzioni matematiche;* ad essi rinviamo il lettore desideroso di conoscere per intero l'opera dell'eminente matematico marchigiano; che se egli poi aspira a conoscerne anche gli scritti polemici ed il carteggio, li troverà nella recente edizione di tutte le sue opere. Terminando noteremo che a dimostrare il cospicuo valore del contributo da lui dato alla scienza, più che le nostre stanno le parole scritte dall'Euler quando l'Accademia di Berlino lo incaricò di riferire intorno alle *Produzioni matematiche.*

528 - I lavori dei matematici di cui ci siamo testè occupati, ponendo in chiara luce lo stato di perfezione e sviluppo ormai conseguito dall'analisi, fecero nascere spontaneo il desiderio che un libro scritto nella nostra lingua ne agevolasse l'apprendimento alla gioventù italiana. A questo nobile compito si accinse una donna, Maria Gaetana Agnesi, nata a Milano da distinta famiglia il 16 maggio 1718. Essa, giovandosi dei consigli di J. Riccati e dell'aiuto di un ex-discepolo di G. Manfredi — parliamo del P. Ramiro Rampinelli (n. a Brescia il 10 agosto 1697, m. a Milano l'8 febbraio 1759) — compose e pubblicò nel 1748, dedicandole all'imperatrice Maria Teresa, quelle *Instituzioni Analitiche,* che la portarono d'un tratto ai fastigi della rinomanza. Il I Volume di quest'opera, sotto il titolo di « Analisi delle quantità finite », contiene quanto forma l'introduzione al calcolo infinitesimale, cioè la teoria delle equazioni algebriche e gli elementi della geometria analitica piana; nel II Volume invece si trova la parte essenziale del calcolo infinitesimale, cioè il calcolo differenziale, con le consuete applicazioni analitiche e geometriche, le regole d'integrazione e le equazioni differenziali. L'opera non spicca per originalità; già sappiamo (v. p. 653) che anche la « versiera » era stata considerata e denominata prima dell'Agnesi; ma si distingue per chiarezza e rigore di stile e per le numerose e interessanti applicazioni; in conseguenza, benchè abbia dovuto subire il paragone con una celebre opera pubblicata nello stesso anno dall'Euler (v. n. 557), fu giudicato in modo così favorevole da toccare presso certuni l'entusiasmo; e tale favorevole apprezzamento non fu di lieve durata, chè nel 1775 il II Volume fu pubblicato tradotto in francese e nel 1801 vide la luce la versione inglese da tempo compiuta da un matematico a noi già noto (il Colson).

Fra le manifestazioni di approvazione che ricevette l'autrice non appena compìta la sua meritoria fatica, va rilevata la sua elezione a in-

segnante dell'Università di Bologna, fatta da quel Senato accademico (16 settembre 1750) per volere del pontefice Benedetto XIV. Ma sulla cattedra l'Agnesi non è mai salita; non appena ultimata la stampa delle *Instituzioni*, essa abbandonò del tutto gli studi e, cedendo a una vocazione che aveva manifestata sino dai suoi anni giovanili, si diede totalmente a opere di carità, dalle quali potè distoglierla soltanto la morte, avvenuta il 9 gennaio 1799 (1).

---

## Parte Seconda: IN FRANCIA

### Fontenelle, Rolle e altri minori

529 - Scomparsi Descartes e Fermat, la Francia non diede durante qualche tempo alcun matematico di pari altezza, cosicchè alla fondazione dei nuovi calcoli essa non partecipò direttamente. Dei geometri francesi del tempo alcuni si proposero il còmpito di spianare le vie aperte da quei grandi; di questo tipo sono — oltre il de l'Hôpital — il Gesuita Claude Rabuel (n. nel 1668, insegnante nel Collegio che la Compagnia di Gesù aveva a Lione, m. ivi il 12 aprile 1768), autore di un verboso *Commentaire sur la Géométrie de Descartes* (Lyon, 1730) pubblicato per cura di un confratello, e l'altro ecclesiastico Jean Paul de Gua (n. a Carcassonne nel 1712, m. a Parigi il 2 giugno 1786), a cui devesi il volume intitolato *Usage de l'Analyse de Descartes pour decouvrir sans le secours du Calcul différentiel les Proprietés ou Affections principales des Lignes géométriques de tous les degrés* (Paris, 1740), lavoro piccolo di mole, ma ripieno di idee originali e di acute osservazioni. Siccome l'autore si limita a considerare curve algebriche, così nella maggior parte delle sue ricerche non ha bisogno (come è dichiarato nel titolo) di ricorrere al calcolo differenziale. Nelle due prime parti egli si occupa di curve d'ordine qualunque, nella terza restringe le proprie considerazioni alle cubiche. Per studiare il contegno di una curva in un suo punto, suppone che questo si trovi nell'origine, caso al quale ci si può sempre ridurre applicando le formole di trasformazione delle coordinate da lui previamente stabilite; si esonera poi dall'ipotesi che le coordinate siano ortogonali dimostrando che da queste $(x, y)$ si passa alle oblique $(z, u)$ mediante formole del seguente tipo:

$$x = z + n u; \quad y = m u.$$

Egli si serve poi del parallelogramma di Newton, che riduce a un « triangle algébrique », per determinare il gruppo di termini che eguagliato a 0 serve a rivelare la natura di quel punto singolare; va però notato (con l'Euler) che a tale scopo non basta sempre, come egli fa,

---

(1) Nella Biblioteca Ambrosiana di Milano si trovano raccolti in 25 volumi gli scritti inediti dell'Agnesi, fra cui un esteso commento alle *Sections coniques* del marchese de l'Hôpital.

limitarsi a considerare i primi due termini dell'equazione data. Il de Gua osserva poi che l'analogo studio dei rami infiniti si può fare in modo somigliante, anzi si può ridurre il secondo al primo, ricorrendo alla trasformazione (già usata da Newton)

$$x = 1/z \quad , \quad y = u/z.$$

Da ultimo il de Gua si propone di determinare le condizioni affinchè un punto situato comunque nel piano sia $k$-plo per una data curva, giungendo così alle note $k\,(k+1)/2$ condizioni, ricorrendo però alla considerazione di derivate. Notiamo finalmente che per eseguire l'eliminazione di $x$ fra due equazioni algebriche $f\,(x) = 0$, $F\,(x) = 0$ il citato matematico ricorre al massimo comun divisore dei due polinomi $f\,(x)$, $F\,(x)$: concetto mediocremente utile in pratica, ma di alto valore teorico, come fu dimostrato da geometri dei tempi nostri.

530 - All'incirca nello stesso tempo visse in Francia un altro matematico che, incurante della nuova orientazione che andava allora prendendo la matematica, si occupò esclusivamente di perfezionare i calcoli necessari per risolvere le equazioni algebriche a coefficienti numerici e per calcolare gli angoli: è Tommaso Fantet de Lagny. Nato a Lione il 7 novembre 1660, fu accolto nell'Accademia di Parigi nel 1695 e appunto nelle *Memorie* di questo illustre sodalizio pubblicò la miglior parte dei suoi lavori; dal 1697 al 1714 insegnò idrografia a Rochefort e poi occupò importanti uffici governativi nella capitale e qui morì il 12 aprile (?) 1734. Si incontrò con Leibniz sia nel propugnare l'adozione generale di un'aritmetica a base 2, sia nella scoperta della nota serie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$ che poi sostituì con altre più rapidamente convergenti. Per il calcolo delle radici delle equazioni numeriche si servì delle differenze successive, la cui teoria coltivò con costante impegno. Diede per primo (*Mem. di Parigi,* 1705) comode espressioni in serie di tg $x$ e sec $x$; per agevolare la determinazione degli angoli suggerì (*Mem. di Parigi,* 1724, 1725, 1727 e 1729) vari metodi, in parte fondati sull'uso di frazioni continue, i quali, secondo lui, dovevano costituire una nuova branca delle matematiche, chiamata *Goniometria.* È suo merito di avere, nel corso di siffatte ricerche, intuito, sebbene non rigorosamente dimostrato [1], che alla rettificazione della circonferenza non si può giungere ricorrendo esclusivamente a curve algebriche [2].

531 - Per apprendere il calcolo infinitesimale i francesi del tempo, ignari di altre lingue, oltre all'opera del marchese de l'Hôpital e poi

---

[1] Furono a lui ignote le congeneri di J. Gregory (v. n. 403).

[2] Il DE LAGNY è anche autore di una memoria dal superbo titolo *Méthode pour résoudre indéfiniment et d'une maniére complète en nombres entiers les problèmes indéterminés* (Mem. Acad., Paris, 1720). D. BERNOULLI rendendone conto a Euler (lettera del 18 Dicembre 1734, pubblicata in *Bibl. mathem.*, III Ser., T. VII, 1706, p. 142) dichiarò: *Es ist nichts, als leere Worte.*

al mediocre *Traité de Calcul intégral pour faire suite à l'Analyse des infiniment petits du Marquis de l'Hôpital* (Paris, 1752) di L. A. Bougainville (n. a Parigi l'11 novembre 1729, m. ivi il 31 novembre 1811), avevano a propria disposizione i volumi di Newton, Maclaurin, Stone, ecc. che vedemmo già tradotti nella loro lingua. Tuttavia una prova che anche sulla riva della Senna si provava interesse per le idee che si agitavano in Inghilterra e in Germania è offerta da un grosso volume, scritto da un letterato membro e poi segretario perpetuo dell'Accademia francese, dinanzi a cui recitò buon numero di *Eloges* di scienziati scomparsi, che sono ancora una preziosa fonte di attendibili informazioni: parliamo di Bernardo Le Boyer de Fontenelle (n. a Rouen l'11 febbraio 1657, m. quasi centenario a Parigi il 9 gennaio 1757). Egli, dopo avere accuratamente percorsa la letteratura matematica del suo tempo, si ritenne in grado di redigere un codice a cui obbedisse il più capriccioso e ribelle dei concetti che intervengono nella matematica; così nacque un volume di 548 pagine in 4° dal titolo *Eléments de la Géométrie de l'Infini* (Paris, 1728). Ma chi ha la pazienza di seguire i suoi verbosi ragionamenti non tarda a riconoscere che in ultima analisi il Fontenelle non fa altro che ammettere l'esistenza di un numero attualmente infinito, che indica con un simbolo speciale ($\infty$), e operare su questo quasi fosse un numero ordinario, col solo divario di trascurare in generale $\infty^m$ rispetto a $\infty^n$ se $m<n$; così dalla formola $p\,(p+1)\,(2\,p+1)/6$, che dà la somma dei quadrati dei primi $p$ numeri naturali, egli deduce che $1^2+2^2+\ldots+\infty^2=\infty^3/3$; perciò i suoi sforzi intesi a stabilire l'esistenza di infiniti e infinitesimi di tutti gli ordini furono riconosciuti privi di ogni valore probatorio. Non è qui il caso che noi ci addentriamo in una completa analisi dell'opera in discorso; d'altronde ciò fu fatto da penna ben superiore alla nostra, cioè dal d'Alembert, nell'articolo « Infini » dell'*Encyclopédie méthodique* (T. II, Paris, 1785) e da Lhuillier in un saggio di cui parleremo più avanti (n. 621); solo rileviamo che il volume del Fontenelle fu tolto dagli scaffali ove giaceva da decenni quando negli ultimi anni del secolo XIX le ricerche di Giorgio Cantor diedero origine alla distinzione fra « infinito potenziale » (cioè come limite) e « infinito attuale ».

## M. Rolle

532 - Di maggiore utilità per la nostra scienza furono alcuni lavori speciali di matematici francesi dello stesso tempo, di cui ora parleremo.

Michele Rolle nacque a Ambert (Alvernia) il 21 aprile 1652. A 23 anni andò a Parigi e senza ajuto di alcuno divenne così esperto nel maneggio dei numeri che nel 1682 riuscì a risolvere il seguente problema proposto di J. Ozanam (1640-1717): « Trovare quattro numeri tali che la differenza di due qualunque sia un quadrato e che sia pure un quadrato la somma di due qualunque dei tre primi »; di più, mentre il proponitore aveva asserito non esistere numeri risolutori che avessero meno di 50 cifre, il Rolle ne trovò di sole 7. Questo successo indusse Col-

bert a concedergli un sussidio, ben presto mutatosi in un'annua pensione. Nel 1685 fu eletto membro dell'Accademia delle Scienze; poco dopo il ministro Louvois lo fece ammettere a un impiego governativo, ma ben presto egli vi rinunziò, preferendo dedicarsi totalmente ai suoi prediletti studi algebrici. Porta la data 1690 il suo *Traité d'Algèbre* ove, fra l'altro, è esposto un algoritmo per risolvere le equazioni di 1° grado con due incognite, di cui diede poi la dimostrazione (1699), ma sotto forma assai oscura, nell'opuscolo intitolato *Méthode pour resoudre les Equations indéterminées de l'Algèbre*.

Dotato di spirito critico e polemico, mosse appunti a Descartes e così fu trascinato ad una disputa col de la Hire. È forse l'unico eminente matematico del tempo che non abbia avuto con Leibniz relazioni epistolari; forse ciò spiega il fatto che l'abate Gallois, il noto direttore del *Journal des Sçavants*, lo scelse come commilitone nella campagna che egli, nella sua antipatia per tutto ciò che è nuovo, mosse contro l'opera del marchese de l'Hôpital. Gli argomenti di cui il Rolle si giovò al detto scopo consistono in esempi di funzioni irrazionali a cui sembrano inapplicabili le ordinarie regole di differenziazione; per darne un'idea al lettore ci basterebbe trascrivere alcune pagine dell'*Histoire des Mathématiques* del Montucla (Nouv. éd., T. II, p. III), tolte da un manoscritto del Varignon, che fu strenuo campione delle nuove idee; lasciamo a lui di ricorrervi e notiamo che l'Accademia di Parigi, infastidita per essere stata involontariamente sede del dibattito, nel 1701 elesse una commissione composta di un non-matematico, il P. Tommaso Gouye (1650-1725), di un astronomo (G. D. Cassini) e di un geometra di antico stampo (il la Hire) per illuminarla sulla questione; ma fu delusa, perchè quella commissione non addivenne ad alcuna conclusione. Seguitando il Rolle nella sua campagna, trovò un nuovo oppositore in un altro membro dell'Accademia, G. Saurin (v. n. 536) (1), e allora il P. Gouye fu sostituito da un matematico e astronomo, il P. J. P. Bignon (1650-1725); ma anche dal nuovo tribunale si attese indarno una sentenza conclusiva, essendosi la nuova commissione limitata a disapprovare il Rolle per la forma dei suoi attacchi. Sembra che il Rolle finisse per riconoscere il proprio torto, perchè lasciò solo a combattere il Gallois; morto questo (1707), la controversia fu chiusa e i matematici francesi adottarono le vedute di de l'Hôpital, favorevoli a Leibniz. Il Rolle morì l'8 novembre 1719.

533 - L'opera che gli assicura un posto distinto nella storia delle matematiche è il succitato *Traité d'Algèbre*, ricco di nuove vedute, alla diffusione delle quali fu ostacolo la forma in cui sono esposte. Notiamo, infatti, che il succitato metodo per risolvere le equazioni di 1° grado con due incognite, in fondo non differisce da quello tratto da Lagrange dalla teoria delle frazioni continue. Altre innovazioni più notevoli nell'*Algèbre* del Rolle concernono le equazioni algebriche, il cui secondo membro viene supposto sempre $= 0$, ma che l'autore indica con la lettera $\theta$. Così, per approssimare le radici di un'equazione numerica, per

(1) Articolo di Sergeden. Spina, 1938, p. 126.

primo egli ha suggerito di sostituire nel suo primo membro all'incognita due valori che gli facciano assumere valori di segni contrari, e ciò in base alla considerazione che fra quei due numeri cade necessariamente una radice; come uno di tali valori è sempre preso lo zero, mentre l'altro si determina sottoponendo la data equazione a trasformazioni, alcune delle quali risalgono a Viète. Una consiste nel renderne interi tutti i coefficienti; un'altra nel mutare i segni delle radici col cambiare alternativamente i segni dei coefficienti stessi; una terza nel rendere eguale a 1 il coefficiente $a_0$ del termine di grado massimo, senza che gli altri cessino di essere interi; i coefficienti dell'equazione trasformata si ottengono da quelli della primitiva, moltiplicandoli per le potenze successive di $a_0$. Un'ultima trasformazione ha per iscopo di rendere positive tutte le radici della data equazione; Rolle *afferma* che ciò si ottiene ponendo $x = h - y$, ove $h = g/a_0 + 1 + a$, $-g$ essendo il massimo coefficiente negativo e $a$ essendo scelto in modo che $h$ risulti intero; allora questo è anche il numero da sostituire nel primo membro dell'equazione proposta. Altri valori intermedi da sostituire si determinano applicando « la méthode des cascades »; ora il nome di « cascades » viene dato dal Rolle a polinomi i quali altro non sono che le derivate del primo membro della proposta equazione; il loro nome è giustificato dalla seguente osservazione che col tempo acquistò un posto eminente nell'analisi e che oggi ancora reca il nome di *Teorema di Rolle*. Fra due radici consecutive dell'equazione $f(x) = 0$ non può cadere più di una radice dell'equazione $f'(x) = 0$. La relativa dimostrazione fu data dall'autore in uno scritto pubblicato dopo (Paris, 1691). Altre cose degne di nota nell'*Algèbre* stessa sono l'osservazione che $f(x_1) - f(x_2)$ è divisibile per $x_1 - x_2$ e che ogni radice $n$ — ma di un numero ha $n$ valori, di cui uno almeno è sempre reale e sono reali due quando $n$ è pari.

534 - Il Rolle, non pago di avere reso manifesto il proprio spirito ribelle combattendo le applicazioni del concetto di infinito ormai trionfante, si atteggiò anche a critico di Descartes nella memoria dal titolo *Eclaircissements sur la construction des égalités* (Mém. de l'Acad., 1707-1709). Per rendere edotti i nostri lettori della parte della *Géométrie* da lui scelta come bersaglio, ricordiamo che il metodo geometrico ivi usato per risolvere un'equazione algebrica $\varphi(x) = 0$ consiste nell'assumere un'equazione algebrica ausiliare $f(x, y) = 0$ e trasformarla in altra $F(x, y) = 0$, tenendo conto della data; la questione è allora ricondotta a determinare i punti comuni alle due curve $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$. Ora il geometra di cui ci occupiamo ha osservato che, data l'arbitrarietà dell'equazione ausiliare, si possono incontrare certi fenomeni che, diminuendone l'utilità, menomano la portata del procedimento cartesiano; possono, infatti, introdursi soluzioni estranee (ciò accade già nella risoluzione di una equazione cubica mediante due coniche) e può accadere che non si giunga a scoprire qualche radice reale; di quest'ultimo fatto il Rolle non riesce a rendersi ragione, mancandogli la nozione di punti immaginari ed ignorando egli il fatto che la congiungente di due punti immaginari può essere una retta reale. Nel corso di queste ricerche egli non si mostrò neppure esperto nell'interpretazione delle

equazioni fra coordinate, non riuscendo a scoprire che un'equazione di secondo grado da lui incontrata rappresenta una coppia di rette e che altra di quarto rappresenta due parabole; va invece rilevata a sua lode la disinvoltura con cui considera valori negativi delle coordinate e disegna le curve in cui s'imbatte. È anche suo merito di avere contribuito al perfezionamento della teoria dei numeri, avendo, nel suo citato volume del 1671, stabilite alcune proprietà dei numeri che sono ciascuno somma di due quadrati, alle quali giunse più tardi l'Euler, senza conoscere le indagini del Rolle.

## Varignon ed alcuni suoi contemporanei

535 - È giunto ora il momento di occuparci di un matematico che incontrammo (n. 518) come oppositore del Wallis e del Grandi: Pietro Varignon. Egli nacque a Caen nel 1654 e fu destinato dalla famiglia a vestire l'abito ecclesiastico; egli non si oppose a tale divisamento, ma dalla lettura di Euclide si trovò orientato verso le matematiche, nelle quali, da solo compì notevoli progressi. Nel 1686 si trasferì a Parigi e vi si fece conoscere favorevolmente mediante il *Projet d'une Nouvelle Méchanique*, che dedicò all'Accademia delle Scienze. Di questa egli divenne membro nel 1688, anno in cui fu pure chiamato ad insegnare nel Collegio Mazarin; più tardi gli fu conferita una cattedra anche nel Collegio Reale. Fu uno dei primi francesi che apprezzasse a dovere l'analisi infinitesimale, e fu appunto tale attitudine che lo trascinò a contendere col Rolle. Tenne carteggio scientifico con i luminari del suo tempo, Huygens e Leibniz, e morì il 22 dicembre 1722, legando le sue carte al Fontenelle, che curò una nuova edizione, totalmente rifatta, della sua *Méchanique*, l'opera su cui riposa principalmente la rinomanza dell'autore. Conoscitore perfetto della scienza del suo tempo, scrisse le *Réflexions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis* (Mém. de Paris, 1710) di cui ci sono già noti (v. p. 656) scopo ed intonazione (cfr. anche A. E., aprile 1712); il Varignon spiegò il fenomeno paradossale in cui erasi imbattuto il geometra inglese svolgendo all'incirca le considerazioni che oggi si usano allo stesso scopo. Carattere di critica ricostruttiva ha eziandio la memoria dello stesso autore intitolata *Précautions à prendre dans l'usage des Suites infinies* (Mém. de Paris, 1715) destinata a mostrare assurda la relazione grandiana $1/2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0 + 0 + 0 \ldots$ dal momento che le relazioni

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a} \mp \frac{b}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} \mp \ldots$$

sussistono esclusivamente nell'ipotesi $a > b$. Il Varignon aggiunge che altrettanto deve ripetersi riguardo allo sviluppo in serie di $1/(a \pm b)^n$, donde si vede adombrata la necessità di usare le serie soltanto dopo di averne riconosciuta la convergenza.

Per agevolare l'intelligenza de l'*Analyse des infiniment petits* de l'Hôpital ne scrisse un diligente commento non privo di vedute origi-

nali, il quale, trovato fra le sue carte, venne pubblicato dopo la sua morte. Finalmente la geometria è debitrice a lui di un metodo per raddoppiare il numero delle curve particolari (*Mém. de Paris,* 1704); geometricamente esso fondasi sopra una speciale costruzione, analiticamente nel sostituire, nell'equazione di una curva le coordinate cartesiane con le polari e viceversa; applicandolo egli è pervenuto a nuove linee notevoli, alcune delle quali erano già state, a sua insaputa, concepite da altri: a provare ciò basti citare la spirale logaritmica.

536 - Proseguendo nella nostra rassegna, incontriamo altri due scienziati che arrecarono all'analisi dell'infinito qualche perfezionamento degno di nota.

Il primo è Giuseppe Saurin; nato nel 1659 nei pressi di Valchiusa, abbandonò la religione protestante professata dalla sua famiglia e in conseguenza potè ottenere una pensione da Luigi XIV e un seggio nell'Accademia delle Scienze; a Parigi, ove si era trasferito, morì il 29 dicembre 1737. Delle varie memorie da lui presentate a quel sodalizio merita di venire segnalata quella intitolata *Remarques sur un cas singulier du problème général des tangentès* (Mém. de l'Acad., 1716 e 1723), chè ivi è rilevato che nell'*Analyse des Infiniments Petits* del de l'Hôpital si cerca indarno una spiegazione del fatto che in un punto multiplo di una curva la sottotangente presentasi sotto forma indeterminata, epperò non può servire a determinare la tangente corrispondente; con molte parole e numerosi esempi il Saurin illustra quel fenomeno e insegna a sormontare quella difficoltà. Anteriormente (1703) nel *Journal des Sçavants* aveva osservato che una cuspide è caso particolare di un punto doppio: la teoria delle curve piane andava lentamente ma incessantemente perfezionandosi!

Si deve anche al Saurin un procedimento per rettificare un arco di circolo (*Mém. de Paris,* 1720), il quale, se non ha pregi dal punto di vista costruttivo, va rilevato perchè fa apparire la lunghezza di un arco circolare come limite di due classi di grandezze convergenti.

L'altro dei matematici a cui alludemmo è Luigi Carré; egli nacque a Clofontaine il 26 luglio 1663 e fu dal padre destinato allo stato ecclesiastico; ma egli vi si oppose, adducendo a sua giustificazione di non sentirsene degno; si stabilì a Parigi e, subendo l'influenza del P. Malebranche, si orientò verso la filosofia e la matematica e si dedicò all'insegnamento privato. Seppe attrarre sopra di sè la benevolenza del Varignon che lo fece entrare nell'Accademia di Parigi. Nelle *Memorie* di questa compagnia egli pubblicò vari scritti sulla rettificazione o la quadratura di curve speciali (caustiche e foglia di Descartes); ma il più pregevole dei suoi lavori è quello intitolato *Mèthode pour la Mèsure des Surfaces, la Dimension des solides, leurs Centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation* (Paris, 1700; ne esiste una II ed. riveduta), che lo colloca fra i primi francesi che coltivarono il calcolo integrale. Morì a Parigi l'11 aprile 1711.

537 - **Più profonda è l'orma stampata nelle scienze esatte da Antonio Parent** (n. a Parigi il 16 settembre 1666, m. ivi di vajuolo il 26 settembre 1716). Dalla biografia scrittane dal Fontenelle, benchè stilizzata in termini misuratissimi, risulta che il suo carattere fu meno pregevole della sua intelligenza, donde emerge la spiegazione del fatto che Giovanni Bernoulli lo dichiarò « homo ad carpendum natus ». Degli scritti raccolti nei tre volumetti intitolati *Recherches de Mathématiques et de Physique* interessa specialmente quello intitolato *Des Afféctions des Surfaces, de leurs plans tangents,* letto all'Accademia delle Scienze addì 23 agosto 1700, chè è ivi per la prima volta insegnato in generale a rappresentare una superficie mediante un'equazione cartesiana. Ivi, infatti, l'autore, per definire analiticamente una superficie suppone dato un piano $\pi$, in esso una retta $r$ e su questa un punto $O$; preso un punto arbitrario dello spazio, lo projetta ortogonalmente in $N$ su $\pi$ e poi projetta similmente $N$ su $r$ in $M$. Allora i numeri che misurano i tre segmenti $OM$, $MN$, $NP$ sono le coordinate $x$, $y$, $z$ del punto $P$. Di queste egli si serve per ottenere la rappresentazione analitica (« équation superficielle ») di una sfera di dato centro e dato raggio e poi determinarne il piano tangente in un punto arbitrario $P$. Questo piano egli non definisce, ritenendone il concetto intuitivo, ma costruisce mediante le tangenti in $P$ a due linee condotte per questo punto sulla sfera. Aggiungiamo che egli ha considerate e discusse le equazioni

$$y\,(a^2 + x^2) = x^2 z \quad , \quad y\,(x^2 + a\,z) = z^3$$

ricorrendo alle sezioni prodotte nelle relative superficie da piani opportunamente scelti; finalmente, indipendentemente dal Wren (p. 522), ha dimostrata la generazione dell'iperboloide a una falda mediante rotazione di una retta attorno a un asse fisso. Per completare queste notizie sul Parent, noteremo che egli ha pubblicati nelle Memorie di Parigi degli anni 1708 e 1709 un lavoro sopra una *Nouvelle propriété de la cycloïde,* ed uno sul problema di *Trouver les Solides quelconque égaux en surface et en solidité avec une même sphère.*

Un cenno da parte nostra merita pure Enrico Pitot (n. a Aramon il 31 maggio 1695, m. ivi il 27 dicembre 1771), benchè egli abbia dedicata la miglior parte della sua vita all'idraulica pratica, grazie alla memoria intitolata *Quadrature de la moitié d'une Courbe appellée la compagne de la Cycloïde* (Mém. de l'Acad., 1724); scopo di essa è la quadratura della sinusoide, ma per raggiungerlo il Pitot ricorre all'elica tracciata sopra un cilindro circolare retto, la quale è « une courbe à double courbure, ou une des lignes tracées sur les surfaces courbes des solides »; in questa frase si legge per la prima volta il termine tecnico « linea a doppia curvatura » che era destinato a rimanere nella scienza. Con intuito profetico egli aggiunge che si tratta di figure che « seront un jour l'objet des recherches des géomètres »; vedremo tra poco (n. 541) come un suo compatriotta s'incaricò, sette anni dopo, di provare l'esattezza di tale previsione!

## Da Maupertuis a Clairaut

538 - Assai maggiore fu la fama raggiunta da Pietro Luigi Moreau de Maupertuis. Egli nacque a St. Malo il 28 settembre 1698; essendosi appassionato per la matematica, passò un anno (1729) a Basilea onde usufruire degli insegnamenti di Giovanni Bernoulli; ma sino dal 1726 aveva presentato all'Accademia di Parigi alcuni pregevoli lavori su varie specie di curve e sopra le singolarità superiori delle linee piane, ed essa nel 1731 lo chiamò nel proprio seno. Il mondo scientifico francese era allora agitato da discussioni relative alla figura della terra; mentre, secondo Newton, il nostro pianeta aveva la forma di uno sferoide schiacciato ai poli, Gian Domenico Cassini, con grande soddisfazione dei cartesiani anti-newtoniani, sosteneva che è allungato. Siccome la questione presentava anche un interesse pratico, il Governo francese decise d'inviare nell'America meridionale una missione incaricata di misurare un arco di meridiano, e le diede per capo il La Condamine (v. n. seg.). Ma è chiaro che questo provvedimento non era sufficiente per porre un termine alla controversia; per ciò era necessaria un'analoga misura nelle vicinanze del polo, e, nel 1736, di eseguirla fu incaricata una seconda missione, a capo della quale fu posto appunto il Maupertuis. Ora, la misura eseguita in Lapponia avendo dati risultati conformi alla teoria della gravitazione universale, la Francia da quel momento abbracciò i principii della filosofia newtoniana. Maupertuis raggiunse allora i fastigi della celebrità; ne è prova il fatto che Federico II, non appena salito sul trono di Prussia (giugno 1740), per dare lustro all'Accademia di Berlino, lo chiamò a presiederla; questa carica il Maupertuis occupò dal 1745 al 1759; abitò poi per qualche tempo in Francia e morì a Basilea il 27 luglio 1759, mentre stava per rientrare a Berlino.

539 - È estraneo al nostro còmpito il descrivere i suoi lavori di meccanica e di geodesia, ma non possiamo esimerci di ricordare un clamoroso episodio di cui egli fu il protagonista. Il Maupertuis, mentre trovavasi a Berlino, dall'osservazione di alcuni fenomeni fu indotto ad enunciare (*Mém. de Paris*, 1744 e *Mém. de Berlin*, 1746) il seguente « *Principe général*: Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible. La quantité d'action est le produit de la masse des corps, par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent ». Nell'entusiasmo di tale scoperta egli credette (v. l'*Essai de cosmologie*) di dedurne una prova inoppugnabile dell'esistenza di Dio. In conseguenza per alcuni anni il mondo meravigliato cadde una seconda volta ai piedi dell'esploratore della Lapponia; ma nel 1750 si fece udire una voce discordante, quella di un altro svizzero, discepolo di Giovanni Bernoulli e professore in Olanda, Samuele König (n. nel 1712, m. il 21 agosto 1757). Questi, che aveva conosciuto il Maupertuis a Parigi, si recò a Berlino per comunicargli oralmente alcune obbiezioni al principio della minima azione, che intendeva esporre in una memoria destinata all'Accademia di quella città. Il Maupertuis, sentendosi offeso nel suo orgoglio, non

volle nemmeno leggere questo scritto, e allora il König lo fece pubblicare (marzo 1751) negli A. E. In esso è osservato che nell'enunciato surriferito è talvolta necessario mutare la parola « minimo » in « massimo » (in conseguenza cadeva la pretesa dimostrazione dell'esistenza di Dio) e di più è rilevato che lo stesso principio (non senza qualche imprecisione e con quest'ultima alternativa) leggevasi in una lettera scritta da Leibniz al Varignon od al Hermann, il 16 ottobre 1706, di cui il König possedeva una copia. Il Maupertuis, mentre chiese di venire difeso dall'Accademia di cui era a capo, intimò al suo contraddittore di presentare l'originale della lettera di Leibniz. Sgraziatamente questo non esisteva più; esso era già stato in possesso di un capitano bernese, certo Samuele Henzi, il quale sino dal 17 luglio 1749 era stato decapitato sotto l'accusa di cospirazione contro lo Stato, e le cui carte erano state tutte abbruciate. L'Euler, chiamato in causa, si schierò dalla parte del Maupertuis, trovando ragioni intrinseche per negare che quella lettera provenisse da Leibniz, e l'accademia lo seguì, senza però prendere nessun provvedimento contro il König, che ne era socio corrispondente. Il König non fu soddisfatto e, mentre rinviava all'Accademia stessa il diploma relativo, dava alle stampe un *Appel au Public* per ottenere il giudizio di tutti i pensatori spassionati; che questo gli sia stato favorevole è attestato da numerose lettere giunte alla grande corporazione Prussiana. Ma la vertenza prese un'inattesa orientazione per effetto della presenza di Voltaire a Berlino; egli, pubblicando la *Diatribe du Docteur Akakia, médicin du Pape,* colpì nel vivo il Maupertuis con la terribile arma del ridicolo e con tale efficacia che la sua posizione risultò irremissibilmente scossa. Prima di dar termine a queste notizie osserveremo che la legge naturale proposta da Maupertuis fu poi studiata dall'Euler (che ad essa dedicò non meno di tre importanti memorie) e precisata dal Lagrange e trovasi ancora nei trattati di meccanica sotto il nome di « principio della minima azione » con riferimento a colui che per primo l'ha, se non dimostrata, almeno intuita.

Ritorniamo a soggetti di più diretta pertinenza della nostra storia per rilevare che, nei suoi lavori giovanili, il Maupertuis dimostrò la propria conoscenza dei nuovi calcoli; fra tali lavori limitiamoci a citare la memoria *Sur quelques affections des courbes* (Mém. de Paris, 1729) ove egli ha segnalato nelle curve piane la presenza di punti più singolari dei punti d'inflessione; tali sono il *point de serpentement* (punto di ondulazione proveniente da due flessi consecutivi) e il *point double de pointe* (punto di contatto di due rami) nascente da due cuspidi coincidenti; una genesi analoga egli assegnò alla cuspide di seconda specie, già notata dal de l'Hôpital. Secondo il nostro autore tutte queste singolarità sono caratterizzate dall'essere $d^3 y = 0$; rileviamo da ultimo che, mentre egli a ragione afferma che, se tutte le rette di un fascio tagliano una curva d'ordine $n$ in $n - 2$ punti variabili quel punto è doppio, a torto ritenne che, se quelle intersezioni sono in numero di $n - 4$, quel punto è di ondulazione.

540 - Rimaniamo nella teoria delle curve piane notando che Newton, con l'eseguire la metodica classificazione delle cubiche piane, suggerì

tacitamente ai posteri il problema di fare altrettanto per le curve d'ordine più elevato. Il primo, per quanto ci consta, a porsi su questa via fu Cristoforo Bernardo de Bragelogne (n. a Parigi nel 1668, m. ivi il 20 febbraio 1744) il quale, in un lavoro giovanile inserito nel *Journal des Sçavants* (settembre 1708), aveva dimostrati alcuni teoremi enunciati da Newton nella sua *Enumeratio*. Ora il progetto di dare una classificazione delle quartiche piane lo condusse a ricerche di tale ampiezza che l'Accademia delle Scienze di Parigi, la quale accolse nei suoi volumi (1730 e 1731) le prime parti del risultante *Examen des Lignes du quatrième ordre ou Courbes du troisième genre,* decise di dedicare a questo lavoro uno speciale volume, ma poi finì per abbandonare anche questo progetto. Ciò non ostante si sa che il Bragelogne divideva tutte le curve di quarto ordine in quattro grandi classi in base al loro contegno all'infinito; più importante è rilevare che egli ha considerate ed ampiamente investigate le varie specie di singolarità superiori che può presentare una quartica piana, alludendo al concetto di scomporle in altre ordinarie, che ha notato non potere una linea semplice presentare due singolarità le cui molteplicità diano una somma superiore all'ordine della curva; le molte figure illustrative documentano il suo possesso della geometria cartesiana.

La preferenza dei geometri francesi del tempo per lo studio delle linee piane trova una conferma nell'esame degli scritti pubblicati da Francesco Nicole (n. a Parigi il 23 dicembre 1683, m. ivi il 18 gennaio 1758) nelle *Memorie* dell'Accademia di Parigi; ivi sono studiate le curve generate ciascuna dal ruzzolamento di un'altra nel piano e sulla sfera, le trajettorie di un sistema di curve, ecc. Arrestiamoci un istante su quella intitolata *Traitè des Lignes du troisième ordre ou Courbes du second degré* (Mém. de Paris, 1729), la quale, al pari di altri lavori a noi già noti (v. n. 509), ha lo scopo di dimostrare la classificazione newtoniana delle cubiche piane. A tale scopo il Nicole stabilisce 31 forme sotto cui si può scrivere l'equazione di una curva siffatta e dimostra che, cambiando opportunamente gli elementi di riferimento, si possono ridurre a cinque. La prima di dette equazioni è $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e il Nicole ne fa uno studio accurato, che gli permette di delineare la curva così rappresentata, rinviando ad un futuro lavoro l'analogo esame delle altre quattro; ma questo progetto non fu eseguito per un motivo che ora diremo.

Il noto viaggiatore C. M. de la Condamine (n. a Parigi il 28 gennaio 1701, m. ivi il 4 febbraio 1774) presentò il 2 di maggio del 1731 all'Accademia di Parigi una breve memoria *Sur une nouvelle manière de considerer les Sections coniques* (Mém. de Paris, 1731) con le soluzioni di questi due problemi: *a*) determinare l'equazione di un cono circolare retto; *b*) dedurne le equazioni delle sue sezioni piane (problema già risolto da Newton). Ora di questi problemi si è occupato anche il Nicole in una memoria *Sur les Sections coniques* (Ivi), la quale fa sistema con l'altra intitolata *Manière d'engendrer dans un Corps solide toutes les lignes du troisième degré* (ivi), che offre ben maggiore interesse, giacchè in essa l'autore giunge alla generazione newtoniana « per umbras », segando con piani opportunamente scelti il cono proiettante una parabola

divergente (p. 573) e poi determinando le equazioni cartesiane delle curve risultanti.

541 - La lettura di questo scritto del Nicole indusse un giovane diciottenne a trattare diversamente la medesima questione; parliamo di Aléxis Clairaut (n. a Parigi il 13 maggio 1713, m. ivi il 17 maggio 1765) il quale il 12 dicembre 1731 presentò all'Accademia di Parìgi una memoria *Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position* (Mém. de Paris, 1731) nel quale trovasi risolto in generale il problema di determinare la sezione prodotta in un cono col vertice nell'origine da un piano di equazione $x/a + y/b + z/c = 1$ e ne è dedotta la genesi delle cubiche piane « per umbras ». A compiere siffatta ricerca il Clairaut era mirabilmente preparato, chè appunto nel 1731 egli aveva pubblicato le sue *Recherches sur les Courbes à double courbure* che lo fanno a ragione apparire come fondatore della geometria infinitesimale delle curve sghembe.

A scriverle il Clairaut fu indotto dalla lettura della *Géométrie* di Descartes e da una memoria, a noi nota (n. 537), del Pitot; da quella egli apprese il modo di rappresentare algebricamente una curva gobba ricorrendo alle equazioni delle sue proiezioni sopra due piani fra loro perpendicolari [1], da questa trasse il nome con cui designare le figure considerate; devesi poi notare che il Clairaut non stentò ad accorgersi che lo studio di queste non può separarsi da quello delle superficie, onde parecchie delle pagine da lui scritte concernono appunto queste figure, la cui rappresentazione analitica gli era stata insegnata, non dal Parent, ma da Giovanni Bernoulli. Le 119 pagine formanti le citate *Recherches* comprendono, oltre a generalità sulle curve e le superficie e sul modo di generare le prime, l'applicazione alle stesse del calcolo infinitesimale; indichiamo brevemente i più cospicui dei risultati ottenuti. Dimostrazione dell'essere qualunque equazione in $x, y, z$ rappresentazione analitica di una superficie; ricerca delle equazioni di una sfera, di un cono circolare retto, d'un paraboloide, di una superficie di rotazione, di un cono qualunque (come corollario Clairaut dimostra che qualunque equazione omogenea in $x, y, z$ rappresenta un cono); ricerca delle proiezioni sopra i piani coordinati della curva d'intersezione di due superficie; determinazione delle proprietà della curva d'intersezione di due superficie, oppure di una superficie di cui si conosce l'equazione; espressione della sottotangente di una curva sghemba e suo uso nella costruzione della corrispondente tangente; differenziale dell'arco: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; forma assunta da una curva quando svolgasi su un piano uno dei suoi cilindri proiettanti; quadratura dell'area del cilindro proiettante una curva compresa fra essa e la corrispondente proiezione; questioni di cubatura; ricerca delle equazioni delle curve descritte dal rotolamento di altre. I metodi esposti sono illustrati sopra numerosi esempi.

Questo importante lavoro, che aperse al proprio autore le porte

(1) Il Clairaut annunciò uno studio analogo mediante coordinate polari, ma, se anche lo ha eseguito, non l'ha mai dato alle stampe.

dell'Accademia di Parigi prima che egli avesse raggiunta l'età prescritta dai regolamenti allora vigenti, per quanto appaia come documento d'invidiabile precocità, non è il primo scritto che egli abbia sottoposto al giudizio dei dotti del suo tempo; giacchè egli non aveva ancora tredici anni quando compose una memoria sopra quattro speciali curve piane che venne stampata nel Vol. IV dei *Miscellanea Berolinensia*. Nè è a credere che egli abbia deluse le speranze che aveva fatto sorgere con i suoi scritti giovanili; scelto, infatti, come membro della commissione incaricata di misurare un grado di meridiano in Lapponia (v. n. 538), egli si orientò verso le applicazioni delle matematiche e compose una *Théorie de la Forme de la Terre* (Paris, 1743) riguardata tuttora come opera classica sull'argomento. Inoltre pubblicò gran numero di lavori sopra svariati argomenti, su cui però a noi non è concesso arrestarci; ma almeno un cenno va fatto delle ricerche sul calcolo integrale da lui pubblicate nelle *Memorie* dell'Accademia di Parigi (1739 e 1740), perchè nel compierle egli scoperse (indipendentemente dall'Euler) il torema sull'invertibilità delle derivazioni, la condizione affinchè un'espressione differenziale sia un differenziale esatto, le proprietà caratteristiche del fattore integrante di un'equazione differenziale di 1° ordine, ecc. Ricordiamo poi che il suo nome è a ragione dato di consueto alle equazioni differenziali della forma

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

il cui studio condusse al concetto di soluzioni singolari delle equazioni differenziali. Nè va taciuto che tanto i suoi *Elements de Géométrie* (Paris, 1741), tanto quanto gli *Elements d'Algèbre* (Id., 1743) servirono per lungo tempo all'istruzione della gioventù, epperò furono onorati da numerose edizioni. Cosicchè, se non ci inganniamo, non potevano incontrare una personalità più degna per chiudere questi cenni intorno alla matematica francese nella prima metà del secolo XVIII.

## BIBLIOGRAFIA

GUIDO GRANDI, *Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum; addita etiam Appendice de geometrica quadratura infinitorum partium curvae superficiei conicae, variorumque fornicum ex iis compositurum* (Florentiae, 1699).

GUIDO GRANDI, *Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam. seu logarithmicam lineam; addita epistola geometrica ad* P. THOMAS CEVAM S. J. (Florentiae, 1701).

GUIDO GRANDI, *Quadratura circuli, et hyperbolae per infinitas hyperbolae et parabolas quadrabiles geometrice exhibita* (Pisis, 1703. Editio altera, Pisis, 1710).

GUIDO GRANDI, *De infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus. Disquisitio geometrica* (Pisis, 1710).

GUIDO GRANDI, *Prostasis ad exceptiones cl. Varignonii Libro de infinitis infinitorum ordinibus oppositas circa magnitudinum plusquam infinitarum Vallisii Defensionem, & angulis contactus, cum infinité parvo ad centrum osculantis circuli e constituto, comparationem* (Pisis, 1713).

GUIDO GRANDI, *Compendio delle Sezioni coniche di Apollonio, con aggiunte di nuove proprietà delle sezioni medesime* (Firenze, 1722).

GUIDO GRANDI, *Instituzioni delle Sezioni coniche* (Firenze 1724; molte edizioni e versioni in latino).

GUIDO GRANDI, *Florum geometricum manipulus* (Philosophical Transactions, London, 1723).

GUIDO GRANDI, *Flores geometrici ex Rhodonearum, et Cloeliarum curvarum descriptione resultantes* (Florentiae, 1728).

GUIDO GRANDI, *Elementi geometrici piani e solidi di Euclide, posti brevemente in volgare* (Firenze 1731; molte edizioni).

GUIDO GRANDI, *Instituzioni di aritmetica pratica* (Firenze, 1740).

GUIDO GRANDI, *Instituzioni geometriche* (Firenze, 1741).

L. FERRARI, *L'epistolario manoscritto del padre Guido Grandi* (Archivio storico Lombardo, IV Ser., T. VI, 1906).

*Exercitatio geometrica, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvae parabolicae curvaeque superficiei conoidis parabolici etc.; auctore* LAURENTIO LORENZINO *Vincentii Viviani discipulo* (Florentiae, 1721).

*Opere del Conte* JACOPO RICCATI (Lucca). T. I. 1761, contiene il *Saggio sul sistema dell'universo* e il trattato *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*. T. II, 1762, contiene *Dei principî e dei metodi della fisica*. T. III, 1764, contiene *Schediasmi fisico-matematici*. T. IV, 1765, contiene *Discorsi di argomento filosofico, ecclesiastico, retorico, pratico ed erudito e Componimenti poetici.*

V. RICCATI, *Opusculorum ad res physicas & mathematicas pertinentium* (T. I, Bononiae, 1757; T. II, id., 1762).

G. FAGNANO, *Produzioni matematiche* (2 volumi, Pesaro, 1750).

*Opere matematiche del Marchese* G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO, *pubblicate per cura di* V. VOLTERRA, G. LORIA, D. GAMBIOLI (3 vol. Roma, 1911).

*Instituzioni analitiche ad uso della Gioventù Italiana di D.na* MARIA GAETANA AGNESI dell'Accademia delle Scienze di Bologna (Milano, MDCCXLVIII).

M. ROLLE, *Traité d'algèbre* (Paris, 1690).

M. ROLLE, *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrez; suivie de deux autres méthodes, dont la première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalitez par la géométrie, et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas esté resoules* (Paris, 1691).

VARIGNON, *Eclaircissements sur l'Analyse des infiniment petits* (Paris, 1725).

## CAPITOLO XXXIII

# LA TEORIA DELLE PROBABILITÀ NELLA SUA PRIMA FASE DI SVILUPPO

542 - Esponendo, nei due precedenti Capitoli, i progressi compiuti dalle matematiche nei primi decennii del secolo XVIII abbiamo di deliberato proposito escluso un ordine di ricerche che, appunto allora, cominciò ad essere coltivato con grande impegno, grazie ad opere cospicue di Giacomo Bernoulli [1], del Montmort e del de Moivre; così ebbe vita una teoria che, prendendo le mosse da quanto aveva scritto C. Huygens (p. 545) [2], raggiunse allora un primo assetto veramente soddisfacente. Prima di dire qualche cosa intorno a quelle opere, giova osservare che esse furono pubblicate in un periodo di tempo talmente ristretto che, grazie alle edizioni che ebbero, esercitarono le une sulle altre influenze indiscutibili, che diedero luogo a sospetti, a lamenti, a proteste su cui crediamo di non arrestarci (veggasi fra l'altro l'esordio del Lib. VII delle *Miscellanea Analytica* del de Moivre). Ma per dare subito ai lettori un'idea del come ciò abbia potuto accadere lo invitiamo a tenere presenti le seguenti date: Giacomo Bernoulli (m. 1705), *Ars Conjectandi* (Basilea, 1713). P. R. de Montmort, *Essai d'Analyse sur les Jeux d'hazard* (Paris, 1708; II ed., 1714). A. de Moivre, *De Mensura sortis, seu, de Probabilitate eventuum in Ludis a caso fortuito pendentibus* (P. T., 1711); *The Doctrine of Chance: or a Method of calculating the Probabilities of Events in Play* (London, 1718; II ed., 1738; III ed., 1756).

Con la prima di queste opere il capostipite della dinastia dei Bernoulli confermò la sua fama di grande matematico. Nicola I Bernoulli, figlio di un suo fratello (v. p. 629), ne scoperse il manoscritto fra le carte da lui lasciate e non tardò ad accorgersi che l'opera non era finita; si

[1] È importante rilevare che questo celebre matematico sino dal 1685 propose nel *Journal des Sçavants* una questione di probabilità, la quale fu risolta prima dallo stesso proponitore (A. E. 1690) e poi da Leibniz (Id.); su quel problema il Bernoulli ritornò nell'*Ars conj*; nella sua soluzione va rilevata la presenza di serie di potenze i cui esponenti formano una progressione geometrica di second'ordine, cioè di un tipo di serie che s'incontrarono più tardi nella teoria delle funzioni ellittiche.

[2] È nostro obbligo notare che Huygens trovò in patria un non indegno continuatore in Nicola Struyk (n. ad Amsterdam il 19 maggio 1687, m. ivi il 15 maggio 1769), il quale, benchè oggi quasi sconosciuto, godette in vita la stima dei suoi contemporanei (prova ne sia che nel 1749 fu aggregato alla Società Reale di Londra e nel 1755 all'Accademia delle Scienze di Parigi). La sua influenza si esercitò solo in patria avendo egli scritto in olandese; le sue opere furono raccolte e pubblicate in francese (*Les Oeuwres de Nicolas Struyk*, Amsterdam, 1912).

accinse a completarla, ma, benchè della teoria delle probabilità si fosse già occupato, non vi riuscì, e allora decise di darla alle stampe come si trovava.

La I Parte dell'*Ars Conjectandi* è una semplice riproduzione del trattato di Huygens, *De Ratiocinis in Ludo Aleae*, arricchita di commenti pregevolissimi, in quanto contengono dimostrazioni di teoremi semplicemente enunciati dal sommo olandese e risoluzione di problemi da lui proposti.

La II Parte tratta del calcolo combinatorio, materia che, come il Bernoulli riconosce, era già stata trattata da Wallis, Schooten, Leibniz, ecc.; riguardo a quanto è esposto notiamo che lo si ritrova ancora nelle migliori trattazioni dello stesso argomento. Vi si incontrano inoltre le formole che dànno le somme delle potenze $2^e$, $3^e$, ..., $10^e$ dei primi $n$ numeri naturali, nonchè le analoghe relative ai numeri figurati. Notiamo in particolare la formola

$$\Sigma n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A\, n^{c-1} +$$
$$+ \frac{c\,(c-1)\,(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B\, c^{n-3} + \frac{c\,(c-1)\,(c-2)\,(c-3)\,(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C\, c^{n-5} + \ldots,$$

notevole in sè e notevole perchè vi compaiono per la prima volta i coefficienti numerici $A, B, C, \ldots$, che sono rimasti nella scienza col nome di « numeri di Bernoulli e diedero luogo a svariate e importanti ricerche. A dimostrare l'applicabilità delle formole stabilite alla teoria delle probabilità, l'autore se ne serve per risolvere un'importante questione di pertinenza della medesima. Altri problemi congeneri sono risolti nella III Parte, dedicata particolarmente a questioni suggerite dai giuochi di carte allora in uso (cinq et neuf, brélan, trijacques, bockspiel, la bassette). Nell'ultima Parte della sua opera egli abbandona il volgare tavolo di giuoco, per volgersi a questioni di maggiore importanza, come lo dice il titolo che riferiamo: « Pars Quarta, tradens usum et applicationes praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis »; peccato che la morte abbia vietato al Bernoulli di portarla a compimento! Fra i risultati esposti limitiamoci a riferire la parte algebrica di quello che chiamasi a ragione « teorema di Bernoulli ». Suppongasi che $(r + s)^{nt}$ venga sviluppato applicando il teorema del binomio, $t$ essendo $= r + s$, e si chiami $u$ la somma del termine massimo e degli $n$ precedenti e degli $n$ seguenti; assumendo allora $n$ abbastanza grande, il rapporto di $u$ alla somma di tutti gli altri termini dello sviluppo può (così afferma il teorema) rendersi grande a piacere. L'autore aggiunge che volendo che quell'espressione risulti maggiore o eguale a un numero $c$ basterà assumere $n$ eguale alla maggiore delle seguenti espressioni:

$$\frac{\log c + \log (s-1)}{\log (r+1) - \log r} \left(1 + \frac{s}{r+1}\right) - \frac{s}{r+1},$$
$$\frac{\log c + \log (r-1)}{\log (3+1) - \log s} \left(1 + \frac{s}{r+1}\right) - \frac{r}{s+1}.$$

Seguono applicazioni di questo teorema alla teoria delle probabilità, considerazioni sulle serie, che trovansi già nelle sue *Opera omnia* [1], e una *Lettre à un Ami sur les Parties du Jeu du Paume,* ove leggonsi alcune frasi donde emerge la celebre « legge dei grandi numeri », altra scoperta del matematico di cui ragioniamo. Ivi infatti, dopo avere descritta l'esperienza di estrarre delle palle da un'urna che ne contiene di bianche e di nere con lo scopo di determinarne la proporzione, il Bernoulli soggiunge: « étant même une chose démontrée qu'on en peut tant en faire, qu'il sera probable de toute probabilité donnée, et par conséquent qu'il sera moralement certain, que la raison d'entre ces nombres, que l'on aura ainsi trouvée par expérience, difère de la véritable, d'aussi peu que l'on voudra: qui est tout ce qu'on peut souhaiter ». Ora di quella legge leggesi l'esplicita enunciazione in lettere scritte dal Bernoulli a Leibniz nell'aprile 1703 e il 20 aprile 1704, donde, inoltre, si apprende che di essa l'inventore da dodici anni conosceva una dimostrazione che aveva comunicata al fratello Giovanni. E poichè il suo corrispondente sembrava un po' renitente a condividerne le idee, il Bernoulli ritornò alla carica (28 febbraio 1705); la morte, che lo colpì poco dopo, gli vietò di pubblicare egli stesso una scoperta che costituisce uno dei suoi massimi titoli di gloria; quando egli ne scrisse nell'*Ars Conjectandi* fece da taluno ritenere l'anno 1713 come la data di nascita della legge in parola, mentre essa risale a circa un quarto di secolo prima.

543 - Pietro Raimondo de Montmort — il secondo dei matematici che citammo nel n. precedente — nacque a Parigi il 27 ottobre 1687; da giovane visitò l'Inghilterra, l'Olanda e la Germania; rientrato in patria (1699) si pose col Nicole (p. 678) allo studio del calcolo infinitesimale. L'anno seguente fu nuovamente a Londra e venne presentato a Newton. Nel 1703 pubblicò la sua opera sui giuochi d'azzardo e nel 1714 ne diede una nuova edizione, migliorata e arricchita del carteggio da lui tenuto nel frattempo con Nicolò I Bernoulli. In occasione di un suo terzo viaggio in Inghilterra (1715) fu eletto F. R. S.; l'anno seguente entrò nella Accademia di Parigi in qualità di membro libero; il vaiuolo lo uccise addì 7 ottobre 1719.

La sua opera sulle probabilità (noi ragioniamo sopra la II ed. di essa) consta di cinque parti, e vi sono escluse le questioni ove interviene « la liberté de l'homme, cet écueil perpétuel de nos connaissances ». La I Parte è dedicata all'analisi combinatoria con applicazioni alla ricerca di probabilità; inversamente il Montmort pretende di mostrare l'uso della relativa teoria all'algebra esponendo una sua dimostrazione del teorema del binomio per esponenti interi e positivi; ma chi ben

---

[1] È doveroso far qui almeno un cenno del *Tractatus de Seriebus infinitis earumque summa finita, et usu in Quadraturis spatiorum et Rectificationibus curvarum*, dato in luce appunto come Appendice all'*Ars Conjectandi*. Alcune delle considerazioni ivi svolte erano già state pubblicate nelle Dissertazioni sulle serie, grazie a cui alcuni alunni del Bernoulli ottennero a Basilea la laurea dottorale e che (come già dicemmo a pagina 602) furono inserite nelle sue *Opere omnia*. Ma nel *Tractatus* gli sviluppi in serie sono di più applicati alla quadratura dell'iperbole e delle altre coniche, alla rettificazione della parabola, della logaritmica e della curva elastica, e a risolvere una questione pratica in cui entra la curva lossodromica, nonchè ad altri interessanti problemi.

guardi si accorge che le probabilità non entrano che apparentemente nel ragionamento esposto, il quale non differisce nel fondo da uno oggi in uso.

Fra le questioni sui giuochi trattate da lui citiamo ad esempio la seguente: « $n$ dadi, ciascuno di $f$ facce numerate da 1 a $f$, vengono gettati a caso; determinare il numero dei casi in cui la somma dei numeri che si presentano abbia un dato valore $p$ »; il Montmort trova esattamente che il numero cercato altro non è che il coefficiente di $x^{p-n}$ nello sviluppo di $\left(\frac{1-x^f}{1-x}\right)^n$. La II Parte dell'opera in esame si riferisce ai giuochi che si eseguono con carte (pharaon, lansquenet, treize, bassette) e la III a quelli da eseguirsi con i dadi quinquenove, hazard, espérance, trois dez, passe-dix, rafle, jeu des noyaux). Più importanti sono le questioni risolte nella IV Parte; fra esse trovansi quelle proposte da Huygens e quella chiamata d'ordinario « durata del giuoco » e che, nella forma più semplice, risale a Fermat e Pascal (p. 492); ivi più che altrove si notano numerosi punti di contatto con l'*Ars Conjectandi*; seguono altri problemi concernenti alcuni giuochi allora in uso (treize, già ricordato, le her, jeu de la ferme, jeu des tas). L'ultima Parte risulta da lettere scambiate fra l'autore e Nicolò I Bernoulli — nonchè di una di Giovanni, che fu riprodotta nella raccolta delle *Opere* (Tomo I, p. 453) — nelle quali sono rilevati e corretti alcuni errori commessi dal Montmort nella I edizione del suo scritto ed inoltre è studiato un problema proposto da un gentiluomo inglese (Waldgrave). Notiamo che in una delle sue lettere il Montmort rivendica a sè stesso la scoperta del numero dei termini che si ottengono sviluppando la potenza intera e positiva di un polinomio; in altre dà esempi di rettificazione di curve, accrescendo così il numero delle persone che devono interessarsi alla sua opera.

Anche dopo la morte del Montmort, in Francia si ebbero cultori della teoria delle probabilità nelle sue applicazioni ai giuochi d'azzardo; lo prova *l'Histoire de l'Académie*, di cui il volume relativo all'anno 1728 contiene una memoria di J. J. Mairan (n. a Bézières il 26 novembre 1678, m. a Parigi il 20 febbraio 1771). *Sur le jeu du pair et non*, quello del 1730 un'altra del Nicole intitolata *Examen et Résolution de quelques Questions sur les Jeux* e quello dell'anno 1733, una del Buffon, che fu poi ristampata come *Essai d'Arithmétique morale* nel *Supplément à l'Histoire Naturelle* (1777); la fama raggiunta dal celebre naturalista non lo pose al riparo dalle giuste critiche che a questo scritto furono rivolte.

544 - Passiamo la Manica e incontreremo una nuova volta A. de Moivre, a cui devesi il fondamentale teorema della probabilità composta. A volgere la mente a questo soggetto egli fu indotto da una questione propostagli da Francesco Robartes (che fu poi conte di Radnor) il quale l'aveva concepita percorrendo un'opera sopra l'*Analyse des Jeux de Hazard* (certamente quella del Montmort). Avendola il de Moivre risolta in modo soddisfacente, venne consigliato ad esporre metodicamente il metodo da lui usato allo scopo; ne risultò un lavoro che la So-

cietà Reale di Londra decise di inserire nei proprî Atti; lo si trova infatti nelle P. T. del 1711 col titolo ***De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate eventuum in Ludis a casu fortuito pendentibus.*** Esso consta di 26 problemi, preceduti da alcune generalità; fra essi quelli proposti da Huygens e da Walgrave e altri che rientrano nel tipo di quelli designati col nome di « durata del giuoco » (v. sopra); pubblicata che fu l'*Ars Conjectandi,* vi si trovarono fortuite coincidenze colla memoria del de Moivre.

La materia ivi svolta si ritrova nella più estesa opera del de Moivre di cui a pag. 645 riferimmmo il titolo completo ([1]) e la cui I ed. è dedicata a Newton. Nelle edizioni seguenti il piano generale dell'opera si è conservato immutato, ma i problemi risolti andarono continuamente crescendo; nella I erano 53, nella III salirono a 74; come nelle opere congeneri di cui sopra, questi si riferiscono ai giuochi allora in uso (bassette, pharaon, hazard, piquet, whist) nonchè alla « durata del giuoco ». Come matematico il de Moivre si mostra in grado di reggere al paragone con Giacomo Bernoulli; da notarsi le applicazioni da lui fatte delle frazioni continue e delle serie ricorrenti, di cui, come sappiamo (p. 645), egli è l'inventore; volendo citare qualche risultato teorico da lui stabilito, scegliamo le notevoli formole seguenti

$$1 = 2^{n-1} \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \ldots \operatorname{sen}(2n-1)\alpha;$$

$$\cos^n \alpha = 2^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=n} \left[\operatorname{sen}^2 (2k-1)\alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha\right]$$

ove $a = \pi/2n$; nè va taciuto che egli trovò la « formola di Stirling » (p. 644), col solo divario che vi entra una costante che Stirling mostrò essere $= 2\pi$.

Le pagine dell'opera in discorso concernenti le assicurazioni sulla vita, mostrano che il matematico inglese, al pari del vecchio Bernoulli, aveva fiducia nell'applicabilità della teoria delle probabilità a questioni d'interesse sociale ([2]).

In Inghilterra il de Moivre trovò un degno continuatore in un matematico che già conosciamo (v. n. 502), Tommaso Simpson. Si deve infatti a lui un volume intitolato *The Nature and Laws of Chances* (1740), il quale giustifica pienamente il suo sottotitolo ***The Whole after a New, General and Cospicuous Manner and illustrated with a great variety of Examples.*** A quest'opera fa seguito quella dello stesso autore dal titolo *The doctrine of Annuities and Reversions* (1742). Devesi aggiungere che in altro volume pubblicato dal Simpson nel 1757 col titolo *Miscellaneous Tracts* leggesi una memoria intesa a mostrare i vantaggi che ritrae l'astronomia dall'assumere come valore di una quantità incognita la media dei suoi valori tratti da parecchie osservazioni di uno

([1]) Ivi fu inserita la sostanza della memoria intitolata *Approximatio ad summam terminorum binomii $\overline{A + B}^n$ in Seriem expensi*, pubblicata separatamente il 12 dicembre 1733 e riprodotta in fac-simile da R. C. Archibald nel fascicolo N. 28 (Ottobre 1926) della rivista *Isis.*

([2]) Allo stesso tema si riferisce una lettera da lui scritta a Halley e pubblicata da R. C. Archibald in *The Mathematical Gazette,* Dicembre 1929.

stesso fenomeno; scrivendola, egli ha proseguito in una via aperta da R. Côtes nello scritto già citato (v. p. 651) pubblicato dopo la sua morte col titolo: *Opera Miscellanea, sive Aestimatio Errorum in mixta Mathesi* (Cambridge, 1722).

545 - Il nome Bernoulli che leggesi nelle prime pagine del presente Capitolo ricompare nelle ultime grazie a Daniele (v. n. 498), illustre matematico degno continuatore dell'opera dello zio Giacomo; a convincersene basta consultare la raccolta delle pubblicazioni fatte sotto gli auspici dell'Accademia di Pietroburgo. Ivi infatti leggesi quello *Specimen Theoriae novae de Mensura sortis* (Comment. Acad. Petrop., T. V., 1730-31), ove è introdotta la fondamentale distinzione fra « aspettazione matematica » e « aspettazione morale » (quella è espressa dal prodotto della probabilità di riscuotere una certa somma di denaro per la somma stessa, mentre in questa entra la considerazione delle condizioni finanziarie dei contraenti); inoltre egli stabilisce ivi il principio che una persona ha maggior vantaggio di rischiare il proprio denaro in parecchie operazioni che in un affare solo. Nella stessa memoria s'incontra una questione che divenne celebre sotto il nome di « problema di Pietroburgo »; giova riferirne l'enunciato: « $A$ getta una moneta; se si presenta testa egli ne riceverà un'altra dal suo avversario $B$; se ciò accade al secondo colpo ne riceverà 2, se al terzo 3, ecc. Si domanda quale sia l'aspettazione di $A$ ». Il Bernoulli giunse alla conclusione che essa è infinita, risultato paradossale che diede origine a importanti discussioni ed a cui si tentò di ovviare invocando considerazioni extramatematiche.

D. Bernoulli diede altri contributi alla medesima teoria nel rispondere al seguente quesito posto a concorso nel 1732 dall'Accademia di Parigi; « Quale è la causa fisica dell'inclinazione dei piani delle orbite dei pianeti rispetto al piano dell'equatore del sole e donde proviene che le inclinazioni di queste orbite siano fra loro differenti? ». Il premio (come sappiamo, n. 498) fu diviso fra Giovanni I e Daniele Bernoulli; le memorie presentate al concorso furono entrambe pubblicate a Parigi dalla corporazione che le aveva premiate. Pure a Parigi (Histoire de l'Académie, 1760) fu pubblicata una memoria di D. Bernoulli ove è esaminato dal punto di vista della teoria che ci occupa, l'effetto della vaccinazione contro il vajuolo e sono riferite e confutate alcune opinioni sull'argomento del d'Alembert.

La durata media dei matrimoni venne investigata dallo stesso matematico (Novi Comment. Petrop., T. XII, 1766-67), applicando speciali espedienti analitici da lui esposti in un precedente lavoro (vol. cit.). Altri congeneri artifici furono ideati dallo stesso scienziato per applicarli a problemi di eredità e ad altri originati dal civile consorzio (Id., T. XIV, 1769). Quando avremo ricordato un lavoro del medesimo relativo alla combinazione dei risultati di più osservazioni (Acta Acad. Petrop., 1777), avremo offerti al lettore mezzi sufficienti per misurare l'ampiezza del campo da lui coltivato e per mostrare come tutto fa credere che egli sia riuscito a colmare la lacuna che produsse nell'*Ars Conjectandi* la morte del suo autore.

546 - Le questioni di probabilità, a differenza di quelle che di consueto si agitano fra matematici, in causa dalle loro presunte o effettive relazioni con la realtà, e persino con la teologia, destarono interesse anche fra i non specialisti; ciò è dimostrato da un gruppo di pubblicazioni del tempo, di cui ora faremo un sia pure rapido cenno a conclusione del presente Capitolo.

Un certo Barbeyrac, ricordato nel carteggio fra il Montmort e N. Bernoulli, in un *Traité du Jeu* si propose di dimostrare che la religione e la morale non inducono a condannare i giuochi in generale e in particolare quelli di azzardo. Un medico del re d'Inghilterra, John Arbuthnot (n. nel 1658; F. R. S. dal 30 novembre 1704; m. il 17 febbraio 1735), incoraggiato da tale esempio, inserì nel Vol. XXVII (1710-11) delle P. T. una memoria intitolata *An Argument for Divine Providence taken from the constant Regularity observed in the Birth of Both Sexes,* in cui l'autore, dalla costanza del rapporto delle nascite di individui appartenenti ai due sessi, attestata dai registri dello stato civile di Londra per un periodo di 82 anni, credette ricavare una prova del perenne intervento della Divinità nei fatti umani. Questo saggio attrasse l'attenzione d'un illustre olandese, autore di un trattato di *Prospettiva* [1] e che occupa un posto cospicuo nella storia della fisica, s'Gravesande (n. il 27 settembre 1688, m. a Leida il 28 febbraio 1742), il quale scrisse, con lo stesso scopo, una *Démonstration mathématique de la Diréction de la Providence Divine,* che leggesi nel II Vol. delle sue *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques* (Amsterdam, 1774). L'editore vi aggiunge una lettera, mediocremente ortodossa, di N. Bernoulli, il quale (a conferma di quanto egli aveva detto in un colloquio con s'Gravesande) manifestò la poca fede che egli nutriva nella forza probatoria di quella regolarità, la quale risulta conforme a quello che si verificherebbe mediante estrazioni da un'urna contenente lo stesso numero di palle bianche e nere. Così, a quanto riteniamo, la controversia venne definitivamente chiusa e la Divinità non fu più invocata in questioni a cui, a quanto sembra, essa è del tutto estranea.

---

[1] Vedi G. Loria, *Storia della geometria descrittiva* (Milano 1921), p. 35 e segg.

## CAPITOLO XXXIV

# L. EULER

### La vita

547 - La gloriosa tradizione matematica svizzero-tedesca continuò, sia pure sott'altro cielo, per merito del grande che risponde al nome di Leonardo Euler. Egli nacque nelle vicinanze di Basilea il 15 aprile 1707 (nuovo stile) da un modesto parroco, il quale, avendo ascoltate con profitto le lezioni di Giacomo Bernoulli, fu in grado d'impartire al figlio i primi rudimenti dell'aritmetica e della geometria; così lo pose in grado d'inscriversi all'Università di Basilea (9 ottobre 1720), con l'intendimento di dedicarsi alla teologia. Ma il giovane venne in contatto con Giovanni Bernoulli, il quale allora — dopo la morte di Leibniz e il ritiro di Newton dalla scienza militante — passava a ragione per il più grande matematico d'Europa; ed egli, avendo saputo misurare il valore del giovinetto, lo incoraggiò allo studio delle scienze e, per agevolargliene l'apprendimento, si offerse di dargli gratuitamente ogni settimana un'ora di lezione privata. Il 9 giugno 1722 Euler conseguì il grado di baccelliere e due anni dopo (8 giugno 1724) quello di « magister » e in questa occasione recitò un'orazione avente per oggetto un parallelo fra la filosofia di Descartes e quella di Newton. Fu allora che il padre, rinunciando alla prospettiva che egli divenisse un giorno suo successore, acconsentì a che scegliesse definitivamente la carriera scientifica. Non passò molto tempo senza che i fatti mostrassero quanto egli fosse stato ben ispirato nel prendere tale decisione, chè L. Euler, non ancora ventenne, fece pubblicare negli A. E. (1726) una memoria dal titolo *Constructio Linearum isochronarum in medio quocunque resistente,* che riscosse il plauso entusiastico del maestro, il quale da quel momento dimostrò al suo giovane discepolo una benevolenza che gli conservò fino alla morte e che fu ed è oggetto di meraviglia per chi ricorda che egli non seppe vincere l'invidia da cui era dominato, neppure quando trattavasi dei propri figli [1]. Poco dopo (1727) l'Accademia delle Scienze di Parigi concedeva l'« accessit » a una memoria dell'Euler sull'alberatura delle navi, da lui coraggiosamente presentata a un pubblico concorso, quantunque non avesse mai visto alcun bastimento. Nello stesso periodo di tempo si schierò fra gli aspiranti alla

(1) A riprova citiamo l'intestazione di una lettera diretta il 23 settembre 1745 dal maestro al discepolo, che suona così: *Viro incomparabili Leonhardo Euler, Mathematicorum Principi S. P. D. Joh. Bernoulli.*

cattedra di fisica vacante allora nel patrio Ateneo, presentando all'uopo una *Dissertatio Physica de Sono.* La sorte essendogli stata contraria, fece buon viso all'offerta rivoltagli sul finire del 1726 da due suoi antichi e già illustri condiscepoli — Nicolò II e Daniele Bernoulli — di recarsi a Pietroburgo in qualità di membro aggregato di quell'Accademia delle Scienze; in conseguenza il 5 aprile 1727 egli partì da Basilea, ove non doveva più ritornare.

548 - Sfortuna volle che egli giungesse in Russia (17 maggio 1727) nel momento della morte dell'imperatrice Caterina I; siccome Pietro II, che le successe sul trono, non aveva interesse che per quanto concerneva le armi, Euler, per vivere, fu costretto a entrare nella marina russa, col grado di luogotenente; così potè procurarsi quella pratica conoscenza intorno alla struttura ed al funzionamento delle navi che gli permise di assurgere più tardi al livello di autorità indiscussa nella scienza navale. Morto poco dopo (febbraio 1730) quello czar, salì al trono Anna I e le scienze tornarono in giusto favore. A Euler fu conferito il posto di professore di fisica nell'Accademia di Pietroburgo, vacante in seguito al rimpatrio dell'Hermann; così egli poté lasciare il servizio della marina; nel 1733 successe a Daniele Bernoulli in qualità di membro di quell'Accademia; in conseguenza gli fu concesso di dedicarsi completamente alle ricerche scientifiche; fra i lavori da lui compiuti allora limitiamoci a citare i due volumi intitolati *Mechanica, sive Motus Scientia analytice exposita,* pubblicati (1736) sotto gli auspici di detta Accademia, ove, come dice il titolo, la scienza dei moti e delle forze è esposta in forma prettamente analitica.

Con la morte della czarina Anna (28 ottobre 1740) ebbe principio in Russia un periodo politico estremamente agitato, che si chiuse soltanto con l'avvento al trono di Elisabetta I (16 dicembre 1741). Di questo stato di cose pensò di trarre profitto il re di Prussia, Federico II, per rinnovare, con maggiore insistenza, l'invito già precedentemente rivolto all'Euler, di recarsi a Berlino per dirigere la Classe di scienze di quella Società (v. p. 291); giova al proposito notare che questa corporazione, a cui la principessa Sofia Carlotta aveva accordato il proprio fattivo appoggio, durante il regno del secondo re di Prussia, uomo rozzo e ignorante, era stata trascurata, direbbesi appena tollerata da quel sovrano; ma, morto Federico Guglielmo I, il suo successore, che doveva passare alla storia col nome di Federico il Grande, non appena assunto il potere (31 maggio 1740) si dichiarò propenso ad accordare ampia protezione a chi dedicavasi alle arti e alle scienze; ciò spieghi il passo da lui fatto verso l'Euler. Questi, benchè già assunto anche all'alta carica di ispettore del dipartimento geografico dell'Impero Russo, finì per cedere, senza però troncare le sue relazioni col Governo di Pietroburgo, il quale continuò a corrispondergli un'annua pensione, col patto che egli non interrompesse la propria collaborazione alle pubblicazioni dell'Accademia imperiale; dal canto suo il Governo prussiano gli fissò uno stipendio di 1600 talleri all'anno, equivalenti circa a 15 mila marchi dell'anteguerra.

Quando Euler giunse a Berlino (25 luglio 1741) la prima guerra di

Slesia era nel suo pieno sviluppo; essendo il sovrano al campo, la progettata riorganizzazione della Società architettata da Leibniz non potè avere luogo; Euler in conseguenza rimase privo di occupazioni ufficiali e si limitò a impartire lezioni private a membri di famiglie nobili; così furon suoi discepoli i figli del duca del Württemberg (1742) e poi la principessa Filippina von Schwendt della Casa Anhalt-Dessau, nipote del re di Prussia; queste lezioni essendo state interrotte dopo il 1760, Euler pensò di completare per iscritto l'iniziata istruzione. Così ebbero origine le *Lettres à une Principesse Allemande,* che grazie alla varietà e importanza dei temi trattati — fisica e metafisica, cosmologia e morale, nonchè logica [1] — alla profondità delle vedute ed alla vivacità dello stile ottennero uno straordinario successo, documentato dalle numerose edizioni e dalle molte versioni nelle principali lingue. Aggiungiamo che della libertà concessagli Euler profittò per consacrarsi a nuove ricerche, e così, nel biennio 1744-1746, potè scrivere non meno di 35 memorie scientifiche.

549 - Il sonno di morte in cui giaceva la Società creata da Leibniz indusse alcuni pensatori, che abitavano a Berlino nel periodo interposto fra le due guerre di Slesia, a crearne una privata, che tenne regolari adunanze, con l'intervento di Euler, dal 1° agosto 1743 al 16 gennaio 1744 e si spense soltanto quando Federico II decise di tradurre in atto il proprio disegno di dotare il regno di una corporazione scientifica capace di sostenere il paragone con quelle esistenti a Parigi, Londra e Pietroburgo. In conseguenza nacque l'« Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin », della cui Classe matematica Euler occupò subito il posto di direttore; essa tenne la sua prima adunanza il 24 gennaio 1744 e deliberò d'iniziare una pubblicazione annuale intitolata *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, in luogo delle precedenti *Miscellanea Berolinensia* [2]; dal 1745 al 1769 ne furono pubblicati 25 volumi; a partire dal 1772 essa ricominciò col titolo di *Nouveaux Mémoires* ecc.

Allo scopo di porgere una pubblica prova della propria vitalità, la nuova Accademia decise di proporre temi per pubblici concorsi, e nel 1745 scelse come argomento l'esposizione critica della dottrina leibniziana delle monadi. Euler, dimenticando la posizione delicata in cui trovavasi come presunto giudice di quel concorso, pubblicò nel 1746 in tedesco un opuscolo di sapore antileibniziano, contenente alcune sue *Considerazioni sopra gli Elementi dei Corpi,* opuscolo anonimo, ma di cui nessuno ignorava l'autore. Per questa pubblicazione, inopportuna non gli furono risparmiate le critiche, le quali si rinnovarono quando egli si schierò dalla parte del Maupertuis nella sua disputa col König (v. p. 676).

A chiarire le condizioni d'ambiente in cui il nostro matematico tro-

(1) Debito di giustizia impone di rilevare che, nelle lettere concernenti la logica deduttiva, Euler propose e svolse quella rappresentazione geometrica dei sillogismi mediante sistemi di circoli, che fu poi ed è tuttora generalmente adottata per essere estremamente espressiva ed istruttiva.

(2) In questa si trovano 5 lavori di Euler, nella successiva raccolta 124.

vavasi a Berlino è necessario tener conto delle sue relazioni col sovrano del tempo. Il Grande Federico, che lo chiamò presso di sè abbagliato dalla fama di cui godeva Euler, lo consultò più volte (e non senza risultati) sopra questioni monetarie, idrauliche, ecc.; ma non riuscì mai a misurarne l'imponente grandezza, nella conversazione con lui non provando il piacere che gli procuravano Maupertuis e Voltaire; nè trovava in lui persona capace di apprezzare la poesia, che costituiva il suo principale passatempo. Donde la spiegazione del fatto che Euler, deluso nella sua legittima aspirazione di succedere al Maupertuis nella presidenza dell'Accademia di Berlino, prestò ascolto ai lusinghieri inviti, che gli venivano dalla II Caterina di Russia, di assumere il posto di direttore dell'Accademia di Pietroburgo. L'offerta era appoggiata da condizioni tanto favorevoli per Euler e la sua famiglia, che egli decise (17 marzo 1766) di chiedere a Federico II di accordargli il necessario congedo. Il re di Prussia rispose con un reciso rifiuto; il sommo scienziato rinnovò la domanda, facendo valere il fatto che egli era cittadino svizzero; allora Federico (che nel frattempo erasi assicurato il modo di sostituirlo degnamente) in data 3 maggio concesse quanto venivagli chiesto. La seduta del 29 maggio 1766 dell'Accademia di Berlino fu l'ultima presieduta dal nostro; ora se questi avrà allora volto lo sguardo all'opera compiuta durante venticinque anni di soggiorno nella capitale prussiana, non avrà potuto negare che essa fu miracolosamente feconda, chè ebbe per risultati 330 memorie tutte di cospicuo valore, per non parlare di altre sue pubblicazioni ben degne dell'autore.

550 - Dopo un breve soggiorno a Varsavia — durante cui fu ospite del re di Polonia — Euler giunse a Pietroburgo il 17 luglio 1766. Sebbene egli vi fosse accolto con gli onori di cui aveva diritto, questo nuovo trasferimento ebbe luogo sotto i più tristi auspici; egli che, nell'ottobre 1760 aveva avuta a Berlino la propria casa devastata dalla soldataglia russa, ebbe il dolore di subire il naufragio della nave che trasportava in Russia le cose sue (i manoscritti non esclusi); inoltre egli, che sino dal 1735 aveva perduto l'uso dell'occhio destro, probabilmente in causa dell'eccessiva fatica di esaminare carte geografiche, appena giunto nella sua nuova residenza fu assalito da gravissima malattia che lo rese del tutto cieco. Sei anni non erano passati dal suo ritorno a Pietroburgo che la sua casa fu preda alle fiamme ed egli stesso potè miracolosamente salvarsi grazie all'eroico intervento di un fedele domestico. Circondato dall'amore della sua numerosa famiglia e aiutato da amici e devoti discepoli, egli potè proseguire nelle ricerche scientifiche, dando prova di di una fecondità senza esempio, prima o dopo di lui [1], tanto che circa la metà dei suoi scritti fu composta durante l'ultimo periodo della sua vita; la quale ebbe termine all'improvviso, prima che il suo spirito mostrasse alcun sintomo di debolezza senile, il 7 settembre 1783. Non sol-

(1) « Grosso modo » le memorie di Euler, in base ai soggetti trattati si possono classificare come segue (una stessa essendo annoverata in più classi quando tratta soggetti differenti): Filosofia 9; Aritmetica (inclusa la Teoria dei numeri) 145; Algebra (inclusa l'Analisi algebrica) 167; Probabilità 15; Calcolo infinitesimale 191; Geometria 163; Meccanica razionale 200; Meccanica applicata 41; Astronomia 116; Fisica 98; Geografia matematica 26.

tanto la Svizzera, superba di avergli dato i natali, la Prussia, che lo aveva avuto ospite per un quarto di secolo, e la Russia, che gli tributava una venerazione prossima al culto, ma il mondo intero piansero colui che aveva saputo imprimere orme vaste e indelebili in tutti i rami della matematica, pura ed applicata.

## Le opere - Generalità

551 - Malgrado l'imponente numero di lavori pubblicati da Euler (si vegga la *Bibliografia* dell'Eneström citata nella chiusa del presente Capitolo), un'ingente massa di suoi manoscritti esisteva tuttora inedita negli archivi dell'Accademia di Pietroburgo; e questa, conscia della grave responsabilità che le incombeva di fronte al mondo scientifico, ne pubblicò buon numero nei proprii Atti [1] o in volumi a parte, manifestando il proprio rammarico perchè le sue disponibilità non le consentissero la pubblicazione delle *Opere Complete* di quel grande, da tutti desiderata. A renderla possibile si sforzò da par suo il grande matematico Jacobi, ma invano; un gruppo di studiosi belgi si accinse alla magnanima impresa, ma dovette ben presto abbandonarla; la richiesta fu rinnovata con più viva insistenza in occasione del secondo centenario della nascita di Euler e la Società elvetica di Scienze Naturali, durante una storica seduta tenuta a Losanna il 6 settembre 1909, deliberò di assumerne la direzione e il patrocinio. Ad onta delle straordinarie difficoltà sorte durante le recenti conflagrazioni mondiali, essa è riuscita a pubblicare 23 dei 69 progettati volumi; possa essa raggiungere la gloriosa mèta! Soltanto allora sarà dato di pronunziare un giudizio definitivo sull'opera scientifica del più prolifico matematico che ricordi la storia; tuttavia anche oggi è possibile una valutazione complessiva dei servigi da lui prestati alla scienza, come ci accingiamo a dimostrare.

Apparso sulla grande scena del mondo quando erano tuttora nell'infanzia le due discipline (la geometria analitica e il calcolo infinitesimale) determinatrici dell'alba della matematica moderna, Euler s'impadronì rapidamente dei loro metodi, questi in parte trasformò, in molti punti perfezionò e largamente applicò, e poi si propose e riuscì a esporli in forma accessibile a tutti e anche attraente; cosicchè potè diffondere in tutto il mondo una serie completa di trattati sulla scienza del calcolo — dall'aritmetica pratica al calcolo sublime inclusivamente — che fe-

[1] Per il lettore desideroso di prendere notizia diretta della produzione euleriana, diamo qui precise notizie intorno alle cinque serie in cui si ripartiscono le pubblicazioni periodiche della detta Accademia:

*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae;* 7 Vol., 1726-35; 69 memorie di Euler.

*Novi Commentarii* ecc.; 10 Vol., 1747-64; 180 memorie dello stesso.

*Acta Academiae* ecc.; 5 Vol., 1777-1782; 89 sue memorie.

*Nova Acta Academiae* ecc.; 15 Vol. 1783-1802; 100 sue momorie.

*Mémoires de l'Acadeémie Imperiale des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 11 Vol., 1803-1830; 57 sue memorie.

Dovendole citare useremo le seguenti abbreviazioni: C. A. P.; N. C. P.; A. A. P.; N. A. P.; M. A. P., aggiungendo il numero d'ordine e l'anno a cui si riferiscono (in generale, differente da quello di pubblicazione).

cero di lui, che non occupò mai una cattedra universitaria, maestro acclamato d'innumerevoli studiosi. Eguale successo ebbero le sue memorie in cui le scoperte vengono esposte sotto l'aspetto in cui esse presentaronsi alla mente dell'autore (senza nascondere le incertezze e i passi falsi), e, benchè lo stile sia meno stringato di quanto oggi si soglia, i lettori dei suoi scritti sono ancora legione, cosa che (lo ha osservato argutamente Jacobi) non accade a d'Alembert, suo eminente contemporaneo.

Euler fu un calcolatore inarrivabile e in questa invidiabile dote deve ricercarsi la prima radice di alcune sue imperfezioni psicologiche. Per non insistere sopra certi lavori in cui il calcolo viene invocato quando poche linee di ragionamento conducono più rapidamente allo scopo, per non parlare delle prove di debolezza che egli diede trattando questioni generali di principio, va rilevato che l'Euler fu il rappresentante più genuino e schietto di uno stato d'animo, prodotto dalla rapida fioritura che aveva avuta l'analisi matematica nei primi anni del secolo XVIII, il quale può designarsi come fede completa e incrollabile nell'onnipotenza e generalità di essa. I matematici del tempo si cullavano allora nella dolce illusione di conoscere già tutte le funzioni immaginabili, onde ritenevano possibile esprimere mediante funzioni algebriche, logaritmiche, circolari, ecc., la radice di qualunque equazione. l'integrale di qualunque funzione o la somma di qualunque serie; nel loro cieco entusiasmo non ammettevano l'esistenza di limiti per l'applicabilità delle formole stabilite, cosicchè, persino quando, servendosene, s'imbattevano in qualche conseguenza palesemente assurda, passavano oltre senza rendersi conto del fatto che in matematica un paradosso è sintomo dell'esistenza di una questione tuttora irresoluta. Gli spazi più che infiniti del Wallis e una serie incontrata da G. Grandi (v. p. 656) hanno già offerto esempi di siffatti sorprendenti fenomeni. Altri, che incontreremo fra breve nelle opere di Euler, mostrano che quello che faceva difetto a quel grande era lo spirito critico.

Da queste generalità scendendo a enumerare i più cospicui perfezionamenti di cui le matematiche pure gli sono debitrici, consci della gravità del còmpito che assumiamo, chiediamo venia al lettore per le inevitabili imperfezioni che presenterà la nostra esposizione; nè siamo certi di avere applicato a dovere l'ordinamento per materie da noi adottato, uno stesso lavoro potendo essere inserito in più d'una delle rubriche da noi prescelte.

## Algebra

552 - Malgrado i perfezionamenti subiti dall'algebra durante i secoli XVI e XVII la teoria delle equazioni presentava ancora alcune fondamentali questioni che non potevano non attrarre l'attenzione di un matematico quale Euler. Anzitutto presentavasi la questione di ottenere le formole risolutive delle equazioni letterali di grado superiore al IV. Ed Euler, mentre aggiungeva nuovi procedimenti per risolvere quelle dei primi quattro gradi, era indotto a supporre (C. A. P., T. VI, 1732, N. C. P., T. IX, 1762) che le radici di qualunque equazione alge-

brica di grado $n$ fossero esprimibili sotto una delle forme seguenti:

$$\sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{v_2} + \dots + \sqrt[n]{v_{n-1}},$$

$$\alpha + \alpha_1 \sqrt[n]{p} + \alpha_2 \sqrt[n]{p^2} + \dots + \alpha_{n-1} \sqrt[n]{p^{n-1}},$$

le lettere esprimendo funzioni razionali dei coefficienti; accortosi di essersi lasciato trascinare a una generalizzazione troppo affrettata, concentrò i propri sforzi (N. A. P., T. VI, 1788) a cercare nuovi tipi di equazioni risolubili algebricamente, oltre quelli che aveva segnalati il de Moivre (v. p. 645); allo stesso ordine d'idee appartiene il perfezionamento da lui arrecato a una serie scoperta da Lambert (n. 575) per esprimere la radice reale dell'equazione $x^m + p\,x^n = q$ (A. A. P., T. VII, 1779) e ad essa diede una notevole estensione (N. A. P., T. IV, 1786); tali studi si connettono ad altri concernenti la risoluzione delle equazioni per serie (N. A. P., T. IV, 1786 e XII, 1794) e al calcolo approssimato delle radici delle equazioni algebriche (N. A. P., T. VI, 1788) o in genere dei valori assunti da date funzioni (N. C. P., T. XVIII, 1773). Ad Euler appartiene poi il merito di avere per primo date espressioni indipendenti per gli elementi di un determinante ortogonale di 3° ordine (N. C. P., T. XV, 1770). Egli era d'altra parte convinto della possibilità di decomporre qualunque polinomio intero in fattori lineari (v. lettera al Goldbach del 16 dicembre 1742); ma si avvide che ivi celavasi un teorema da stabilire e, tentando di dimostrarlo (Mém. Ac. Berlin, 1749) contribuì alla ricca letteratura sopra il teorema fondamentale dell'algebra, benchè con un'argomentazione non esente da imperfezioni. Si devono poi a lui due pregevoli dimostrazioni delle formole di Girard-Newton (N. C. P., T. XV, 1770) e inoltre (*Introductio* e Mém. de Berlin, 1764) due soluzioni del problema di eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche, problema che Newton aveva trattato soltanto in pochi casi speciali (p. 472); importa rilevare nell'ultimo metodo l'intervento delle funzioni simmetriche delle radici di una equazione, perchè gli è da questo momento che queste rappresentano nell'algebra una parte importante. Sulla decomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici egli è ritornato varie volte (A. A. P., 1780; M. A. P., 1803; *Op. post.*) apportando ai metodi relativi sempre nuovi perfezionamenti.

Almeno un cenno da parte nostra meritano finalmente i lavori dell'Euler sopra l'analisi combinatoria (C. A. P., T. XIII, 1741; M. A. P., T. III, 1809), di cui egli fece notevoli applicazioni a problemi offerti da lotterie, assicurazioni, ecc. (Mém. Ac. Berlin, T. VII, 1751; T. XXI, 1760; T. XX, 1764 e T. XXI, 1765).

## Teoria dei numeri

553 - In questa branca delle matematiche (a cui dedicò non meno di 148 memorie), Euler, pure traendo costante ispirazione dalle opere di Diofanto e Fermat, seppe imprimere un'orma indelebile, dando talora (veggansi gli enunciati in C. A. P., T. XIV, 1744) prova di facoltà divi-

natrici veramente straordinarie, creando nuovi metodi, completando l'opera dei predecessori e persino antecipando di un secolo importanti scoperte. Per primo egli ha segnalata (v. i suoi *Opuscola varii argumenti*) l'opportunità d'introdurre la metodica considerazione della somma dei divisori di un numero, che designò col simbolo particolare $\int n$, e per calcolarla suggerì la seguente formola ricorrente:

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) +$$
$$+ \int (n-12) + \int (n-15) - \int (n-22) - \int (n-26) + \ldots$$

Pure per primo ha considerata (N. C. P., T. VIII, 1760) la funzione, che più tardi Gauss indicò con $\varphi(n)$, la quale insegna quanti sono i numeri inferiori a $n$ e primi con esso, e ha mostrato che, se $n$ scomposto nei suoi fattori primi è espresso da $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, quella funzione vale $a^{\alpha-1}(a-1)\, b^{\beta-1}(b-1) \ldots$ Ha considerati i resti quadratici, compiendo sopra di essi fruttiferi studi (N. C. P., T. I, 1750 e V, 1754) e scoprendo la legge di reciprocità attribuita per solito a Legendre (C. A. P., T. XIV, 1744). Di recente fu anche notato che, ben prima di Riemann, egli ha considerata (Mém. Acad. Berlin, T. XVII, 1761) la funzione $\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^s}$ e ne ha scoperta anche la relativa equazione funzionale, di consueto attribuita a quel matematico. Mirabili sono le applicazioni da lui fatte del prodotto $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, che si ripresentò assai più tardi nella teoria delle funzioni $\theta$; svolgendolo in serie egli osservò che gli esponenti delle successive potenze di $x$ sono numeri pentagonali (A. A. P., T. I, 1753) e ne fece svariate applicazioni, fra cui emergono quelle concernenti la partizione dei numeri (N. C. P., T. II, 1751, e V, 1754). Dotato di una abilità sorprendente nel calcolo aritmetico, se ne giovò per costruire una tabella dei numeri primi della forma $4n + 1$ che cadono nel primo milione (N. C. P., T. XIX, 1744; cfr. una lettera al Goldbach del 9 luglio 1743). Molti suoi lavori sono ispirati alla nobile ambizione di diradare le tenebre che avvolgono la successione dei numeri primi; così insegnò criteri per riconoscere se sono o non primi i numeri delle forme $8n + 1$ e $8n + 3$, applicando i quali riconobbe che è primo il numero 198899 (N. C. P., T. VI, 1756); dimostrò poi che tutti i numeri primi della forma $6n + 1$ sono anche della forma $a^2 + 3b^2$ (Ivi); altre sue indagini concernono i numeri primi delle forme $a^2 + 1$ e $4n + 1$ (N. C. P., T. IX, 1762 e XIII, 1768) e sfociarono in un lavoro (Id., T. XIX, 1774) ove è esposto con ogni particolare il piano di una tavola di tutti i numeri primi che cadono nel primo milione. La scoperta da lui fatta dell'essere primo il numero $2^{31} - 1$ ebbe per conseguenza l'acquisto di un nuovo numero perfetto euclideo, mentre la considerazione della funzione $x^2 - x - 41$ condusse, per $x = 1, 2, \ldots, 40$, alla scoperta di tutto un gruppo di numeri primi (Nouv. Mém. de Berlin, 1772). Lo stesso diede nuove soluzioni (oltre a quella data da Viète; v. p. 349) dell'equazione $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ (N. C. P., T. VI, 1756) e studiò la questione diofantea di determinare tre numeri $x, y, z$ tali che risultassero quadrati le tre espressioni $x + y + z$, $yz + zx + xy$ e $xyz$ (N. C. P., T. VIII, 1760). Un grande numero

di questioni di cui erasi occupato Diofanto furono approfondite dall'Euler (N. C. P., T. XVI, XVII, XIX e XX; A. A. P., T. I e II). Non meno numerosi sono i suoi lavori intesi a dimostrare (od eventualmente rettificare) teoremi enunciati da Fermat. Così a lui devesi (C. A. P., T. VIII, 1736) la prima dimostrazione della relazione $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. $p$) (quella di Leibniz giunse assai più tardi in dominio del pubblico; v. p. 589); della stessa egli diede poi altre due dimostrazioni (N. C. P., T. I, 1750 e VIII, 1768), ma, ciò che è ben più importante, ne scoperse (N. C. P., T. VII, 1758) l'estensione espressa dalla formola $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0$ (mod. $n$). Inoltre dimostrò (Ivi, T. V, 1754) che, come aveva affermato Fermat, ogni numero primo della forma $4n + 1$ è un quadrato o la somma di due quadrati. Stabilì poi l'inesattezza dell'asserzione fermatiana che tutti i numeri della forma $2^{2n} - 1$ sono primi facendo vedere che è $2^{32} - 1 = 641 \times 6700417$ (C. A. P., T. VI, 1732). I suoi vasti e profondi studi sopra i numeri della forma $2^n - 1$ lo guidarono (Nova A. E., 1747 e *Opuscula,* T. II) a portare a 61 le coppie di numeri amici (¹). In una lettera al Goldbach del 4 agosto 1753 egli affermò di essere in grado di dimostrare il grande teorema di Fermat per gli esponenti 3 e 4; le relative dimostrazioni si leggono nella sua *Algebra* e in C. A. P., T. X, 1738. Se lasciò a Lagrange la gloria di dimostrare la scomponibilità di qualunque numero intero nella somma di quattro quadrati, però, prima di quel grande, fece vedere (N. C. P., T. V, 1754) che il prodotto di due numeri, ognuno dei quali sia la somma di quattro quadrati, può esprimersi nello stesso modo; avuta poi notizia della dimostrazione lagrangiana di quel fatto, congegnò (A. A. P., T. II, 1777) altra argomentazione conducente allo stesso risultato. Numerose sono le sue investigazioni sopra le equazioni con due incognite; le più estese sono quelle relative all'equazione da lui a torto (p. 556) chiamata « di Pell » N. C. P., T. XI, 1765) e alle più generali della forma $A x^2 + 2 B x y + C y^2 + + D x + E y + F = 0$ (N. C. P., T. XVIII, 1773). Metodi congeneri gli permisero la determinazione di figure geometriche ad elementi razionali (N. C. P., T. XVIII, 1773; N. A. P., T. XII, 1774; M. A. P., T. V, 1812 e VII, 1815).

A lui devesi anche un metodo per costruire i quadrati magici (Op. *post.*) e una soluzione (*Comm. arith.*) del problema di disporre in un quadrato di 36 caselle, 36 ufficiali appartenenti a sei gradi diversi e a sei differenti reggimenti in modo che ciascuna linea o colonna non contenesse due ufficiali di pari grado e dello stesso reggimento; così ebbe origine una nuova categoria di quadrati aritmetici che portano il nome del matematico di Basilea.

## Analisi infinitesimale

554 - Fra gli algoritmi infiniti che Euler ha usati con la consueta perizia, emergono le « frazioni continue »; ad esse egli ha imposto il nome che portano, ad esse ha dedicate parecchie memorie nelle quali ne è stabilita elegantemente la teoria e ne sono indicate svariate appli-

(¹) Altre 30 si apprendono da una sua memoria postuma (*Comm. arith.*).

cazioni (C. A. P., T. IX, 1737 e T. XI, 1739; N. C. P., T. IX, 1762). Ancora più numerose sono le applicazioni da lui fatte delle serie, che egli maneggiava con una disinvoltura che direbbesi ammirabile ove non si fosse tradotta in una fiducia illimitata e anche immeritata; chè (egli adoperò indifferentemente serie convergenti e serie divergenti [1], non attribuendo il debito peso agli avvertimenti datigli dall'amico Daniele Bernoulli e neppure arrestandosi di fronte a conclusioni evidentemente assurde v. più avanti, p. 706). Ciò non toglie che, con le originali trasformazioni da lui operate sopra certe serie divergenti o semi-convergenti, egli ci si presenti oggi come un precursore di scienziati dei tempi nostri, e che, malgrado tutto, in generale egli abbia ottenuti risultati di valore permanente. Basti infatti ricordare la formola $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ da lui scoperta nella primavera del 1736 per soddisfare un intenso desiderio del suo maestro Giovanni Bernoulli (C. A. P., T. VII, 1734); notiamo a tale proposito che devesi ad una sua memoria, contenente varie soluzioni approssimate del problema della quadratura del circolo (C. A. P., T. IX, 1739), l'uso generale della lettera $\pi$ per indicare il rapporto di una circonferenza al suo diametro e quello della lettera $e$ per designare la base dei logaritmi neperiani.

Di notevole importanza sono le sue ricerche sopra le serie della forma $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \ldots$ da lui chiamate « armoniche » per ragioni evidenti (C. A. P., T. VII. 1734); nel corso di esse egli giunse all'importante relazione

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x} = \log(x+1) + C,$$

ove $C$ è la nota costante (« di Euler », secondo alcuni, « di Mascheroni » secondo altri). Più tardi (N C. P., T. XIV, 1769) trovò

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x} - \log x = C + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \ldots,$$

ove i coefficienti $B_i$ sono (per adottare appunto la nomenclatura adottata dall'autore) i « numeri di Bernoulli ». L'importanza di questi fu stabilita dal nostro in parecchie occasioni; per es. essi presentansi nello sviluppo in serie di cotang $x$, mentre i coefficienti che entrano nell'analogo sviluppo (pure a lui dovuto) $\mathrm{sec}\, x = 1 - E_2 \frac{x^2}{2!} + E^4 \frac{x^4}{4!} - \ldots$ si chiamano « numeri di Euler ». Altre serie da lui per primo considerate (C. A. P., T. V, 1730; N. A. P., T. VII, 1739 e VIII, 1790) hanno

[1] Tipica è la seguente definizione: *Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur* (lettera a Goldbach del 7 agosto 1745). Però EULER aveva dato prima un criterio di convergenza (C. A. P., T. VII, 1734).

la forma

$$(1) \qquad 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)\,b\,(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c\,(c+1)} x^2 + \dots ;$$

egli vi giunse partendo dalla serie ipergeometrica di Wallis $\sum n!$ da lui previamente estesa come segue:

$$\sum_n a\,(a+b)\;(a+2\,b) \dots (a + \overline{u-1}\,b).$$

Vedremo (n. 652) la funzione di $x$ definita dalla serie (1) fece più tardi oggetto di studi profondi da parte di Gauss. Molto altro potremmo aggiungere sull'argomento ove lo spazio lo consentisse.

555 - Euler ha scoperto il teorema fondamentale relativo alle funzioni omogenee che porta di consueto il suo nome; avendo poi riconosciuta la necessità di distinguere « ad oculos » le derivate ordinarie dalle parziali (che Leibniz concepì per primo e di cui Giovanni Bernoulli trasse profitto in parecchie occasioni), adottò la scrittura $\left(\frac{d\,f}{d\,x}\right)$ invece del nostro $\frac{\partial f}{\partial x}$; risale anche a lui (1734) il teorema fondamentale sull'inversione dell'ordine delle derivazioni. Innumerevoli sono poi le migliorie da lui arrecate al calcolo integrale, disciplina allora allo stato nascente e nel coltivare la quale egli ebbe occasione di dar prova di una straordinaria virtuosità analitica. Devonsi a lui l'introduzione e le prime ricerche delle funzioni B e Γ (C. A. P., T. V, 1731) chiamate oggi « integrali euleriani di I e II specie ». Un grande numero di equazioni differenziali ordinarie (fra cui emerge la equazione di Riccati) furono da lui studiate e, quando possibile, integrate; di fronte ad una non integrabile egli ha insegnato come determinare egualmente le proprietà delle curve integrali, schiudendo così una via che doveva venire percorsa più di un secolo dopo; fra gli artifici d'integrazione da lui usati merita una speciale menzione l'uso del cosidetto « fattore integrante ». Una lettera da lui scritta a Giovanni Bernoulli il 15 settembre 1739 prova che egli sino da allora aveva scoperta la integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti (con riduzione alla risoluzione dell'equazione caratteristica), che espose in una speciale memoria (Misc. Ber., T. VII, 1743); delle equazioni analoghe con secondo membro egli trattò più tardi (N. C. P., T. III, 1753); sono questi i primi esempi di integrazione di equazioni differenziali di ordine qualsivoglia. Notevole è anche un lavoro (C. A. P., T. III, 1728) destinato a insegnare artifici che permettono di abbassare al primo ordine alcune classi di equazioni differenziali del secondo. Una memoria del d'Alembert (v. più avanti) sulla teoria delle corde vibranti lo indusse (Mém. Ac. Berlin, T. IV, 1748; N. C. P., T. III, 1750) a occuparsi della relativa equazione a derivate parziali di second'ordine, arrecando notevoli perfezionamenti ai risultati ottenuti dal citato geometra. Ai problemi isoperimetrici Euler (v. una lettera a Giovanni Bernoulli del 30 luglio 1738) dedicò varie memorie (C. A. P., T. VI, 1732 e VIII, 1736) e poi

nel 1744 una celebre opera speciale ([1]), che a ragione si considera come fondamento del calcolo delle variazioni; chè, come vedremo, da essa Lagrange trasse ispirazione (v. n. 591) per gettare le basi di un nuovo algoritmo. Di questo il grande matematico di Basilea misurò subito tutto il pregio e non reputò indegno di lui dedicare due speciali memorie ad esporne i fondamenti (N. C. P., T. X, 1764 e XVI, 1771) (ivi è proposto e usato il nome di *calcolo delle variazioni*) e altra (Id., T. X, 1764) per farne varie applicazioni: il che prova che in lui l'imparzialità nel giudicare non era turbata da meschini sentimenti d'invidia.

**556** - **Euler**, a cui (v. più avanti, p. 704) si può far risalire l'uso generale del concetto bernoulliano (v. p. 608) di funzione, ha diffuso, con l'esempio, l'abitudine di servirsi, per indicare una funzione, della scrittura $f(x)$. Egli ha proposto di rappresentare i numeri complessi con circoli del piano, così, suggerendo almeno, se non risolvendo, un importante problema. Devesi a lui la fondamentale relazione

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

La disputa fra Leibniz e Giovanni Bernoulli, relativa ai logaritmi delle quantità negative, lo portò alla scoperta degli infiniti logaritmi di un numero ([2]) e quindi alle celebri relazioni che passano fra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche

$$\text{sen}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

(Misc. Berol., T. V, 1749), nonchè alla singolare relazione $i \log i = -\pi/2$ (Mém. de Berlin, 5, 1749), che si trova anche in una lettera da lui diretta a Giovanni Bernoulli il 10 dicembre 1728.

Le già ricordate ricerche sopra le corde vibranti lo spinsero ad occuparsi delle serie trigonometriche e a stabilire, ben prima di Fourier, le espressioni dei loro coefficienti sotto la forma d'integrali definiti; e la considerazione delle funzioni $f(x + iy) = M + iN$ gli rivelò (N. A. P., T. VII, 1789; X, 1792; XII, 1794; XIV, 1798), molto avanti Cauchy, le condizioni di monogeneità: $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$ (N. A. P., T. VII, 1789). Egli applicò anche l'integrazione nel campo complesso alla determinazione di integrali definiti; così ad es. egli ottenne

---

([1]) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietates gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (Lausannae et Genevae 1744). Una traduzione tedesca trovasi fra i Classici delle scienze esatte dell'Ostwald. Una migliore inglese, con numerose note critiche e commenti di W. A. Oldfather, C. A. Ellis e D. M. Brown, fu inserita nel T. XX, 1932, di *Isis*.

([2]) Per quale via egli sia stato condotto, dopo molto titubare, a questa fondamentale scoperta, si apprende da un interessante frammento pubblicato fra le sue scritture postume (T. I, p. 269-287), nel quale sono serenamente esaminati e criticati gli argomenti addotti dai due contendenti ed è messo in luce come le contraddizioni in cui essi si erano imbattuti scompaiano quando si tenga conto del fatto che il logaritmo è una funzione ad infiniti valori.

la relazione

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\, d x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

« che — egli dice — si può confermare con un calcolo numerico ». Da alcune importanti memorie del conte di Fagnano (v. n. 544) egli fu indotto a iniziare le ricerche sugli integrali ellittici; integrando. non soltanto l'equazione

$$\frac{m\, d x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\, d y}{\sqrt{1-y^4}} \text{ (N. C. P., T. VI, 1756),}$$

ma eziandio la più generale

$$\frac{m\, d x}{\sqrt{A + 2 B x + C x^2 + D x^3 + E x^4}} =$$
$$= \frac{n\, d y}{\sqrt{A + 2 B y + C y^2 + D y^3 + E y^4}}$$

(N. C. P., T. VIII, 1760; X, 1764; XII, 1766), scoperse il teorema di addizione di detti integrali (v. anche A. A. P., T. II, 1778); e poichè egli suggerì anche una forma normale per gli integrali di detta classe, così è chiaro non poterglisi contendere un posto cospicuo nella nuova branca di matematica a cui vedremo essere legati i nomi di Legendre, Abel e Jacobi (1).

## Trattati di algebra e di calcolo infinitesimale

557 - Un uomo che conosceva tutti i rami della scienza del calcolo con la profondità che viene raggiunta soltanto da coloro che seppero applicarne i vari metodi a nuove questioni, era particolarmente designato per farne un'esposizione generale e completa; quando poi si sentì che Euler era dotato di una meravigliosa facilità di scrivere e di una fervida fantasia nell'immaginare interessanti applicazioni delle varie teorie, non deve stupire se egli potè arricchire il patrimonio dell'umanità di una completa collezione di trattati sulla scienza del calcolo quale essa era ai suoi tempi: lasciando in disparte, come di scarso interesse, un suo manuale di aritmetica elementare, diremo in breve il piano ed il contenuto di ciascuno degli altri.

Per la natura della materia esposta ci si presenta per primo il trattato di *Algebra,* benchè la redazione di esso appartenga a un'epoca di avanzata maturità dell'autore, quando cioè egli aveva perduto l'uso di entrambi gli occhi. Lo dice egli stesso, esordendo, ed aggiunge che per scrivere quell'opera si giovò della mano di un giovane sarto che egli aveva condotto con sè da Berlino in qualità di domestico. Era persona di limitata intelligenza e che non conosceva che la pratica del calcolo

(1) Questi lavori riempiono due interi volumi nella collezione delle sue *Opere complete*.

numerico; ora, resosi padrone di quanto andavagli dettando il sommo analista, potè risolvere tutti i problemi d'algebra che si leggono nell'opera in questione; quale migliore prova d'eccellenza del metodo didattico euleriano?... Ad essa può aggiungersi il fatto che numerosissime sono le edizioni e traduzioni dell'opera in questione, la quale, a quanto crediamo, è l'unica opera matematica che abbia avuto accesso nella ben nota biblioteca Reclam; aggiungasi che essa fu tacitamente assunta come modello per tanti scritti congeneri posteriori, che il lettore stenterà a rendersi conto della sua originalità percorrendola oggi e leggendo le seguenti informazioni sul contenuto di essa.

Il I Vol. tratta delle operazioni aritmetiche, con numeri interi o fratti, razionali e irrazionali, positivi e negativi, fino a raggiungere il calcolo con logaritmi e i più elementari sviluppi in serie; segue la teoria dei rapporti, delle proporzioni e delle progressioni, con applicazioni ai calcoli d'interessi. Il Vol. II è interamente consacrato alla risoluzione delle equazioni sia determinate che indeterminate; di particolare importanza è la sezione relativa all'analisi indeterminata di 1° e 2° grado, giacchè è la prima esposizione metodica di una materia a cui il nostro matematico diede importanti contributi; scrivendola, egli rese tutti edotti della ricchezza di una miniera piena di nobile metallo. Ma ciò che rende l'*Algebra* di Euler di straordinario interesse dal punto di vista didattico è il numero, la varietà e l'eleganza dei problemi trattati.

558 - A differenza dell'*Algebra*, l'*Introductio* in *Analysin Infinitorum* fu scritta in un'epoca nella quale l'Euler era ancora in pieno possesso delle proprie facoltà fisiche; essa valse a diffondere la fama dell'autore anche all'infuori della stretta cerchia dei lettori degli atti accademici. Con quell'opera egli intese di coordinare le scoperte fatte da lui e da altri su quella parte dell'analisi matematica che non dipende dai concetti di derivata e di integrale; in tal modo egli implicitamente compose il programma dei corsi universitari che ebbero nome di « analisi algebrica » presso alcune nazioni, d'« introduzione al calcolo sublime » presso altre. Scendendo a più minuti particolari rileveremo che per l'autore una funzione di una o più variabili è una espressione analitica composta con i segni dell'algebra mediante una o più quantità numeriche variabili e con numeri o quantità costanti; in conseguenza la classificazione delle funzioni va fatta tenendo conto delle operazioni algebriche che v'intervengono; si hanno così funzioni « algebriche » e funzioni « trascendenti », « razionali » e « irrazionali », « intere » e « fratte », « uniformi » e « multiformi », « pari » e « dispari ». Euler dimostra poi che, se una quantità $y$ è funzione di altra $z$, questa, viceversa, sarà funzione di quella, proposizione vera (con qualche limitazione) soltanto se si attribuisce al vocabolo funzione un significato ben più ampio dell'euleriano. Sulle funzioni il nostro insegna ad effettuare varie trasformazioni, sia direttamente, sia ricorrendo ad un cambiamento di variabili. Fra le varie forme sotto cui si può rappresentare una funzione, Euler pregia particolarmente gli sviluppi in serie, con speciale riguardo alle serie ricorrenti; a questo proposito è caratteri-

stico il fatto che alla questione se qualunque funzione possa svilupparsi in serie Euler tranquillamente risponde con le seguenti parole: « si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuiusque functionis tolletur ».

Passando allo studio di speciali funzioni, l'autore considera la funzione esponenziale $z = a^y$ e chiama « logaritmo » la funzione inversa; questo punto di partenza così semplice ed originale gli permise di creare una teoria dei logaritmi capace di entrare come parte della matematica elementare e, facendone applicazione a questioni d'interesse o relative all'incremento della popolazione, ne mise in luce anche l'importanza pratica. Delle funzioni esponenziale e logaritmica, come poi delle funzioni trigonometriche, dirette ed inverse, egli stabilì, con grande eleganza, gli sviluppi in serie, dei quali non mancò di fare notevoli applicazioni.

Oltre alle serie, nell'*Introductio* sono considerati e sfruttati altri due algoritmi infiniti, cioè i prodotti d'infiniti fattori e le frazioni continue; la loro considerazione porse occasione ad Euler per far conoscere nuove metamorfosi di una stessa funzione e calcolare le somme di nuove serie numeriche. Inutile avvertire che egli non mancò di far conoscere e illustrare le relazioni da lui scoperte fra le funzioni esponenziale e circolari; ma importa rilevare che egli si occupò anche dei problemi di moltiplicazione e divisione degli archi e della costruzione di tavole di valori delle funzioni considerate. Altra questione ampiamente trattata nell'*Introductio* è la scomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici, la quale egli esegue ammettendo la decomponibilità in fattori lineari di qualunque polinomio intero, a ciò indotto dal fatto che ciò avviene per quelli dei primi quattro gradi.

Dall'*Introductio* emerge la straordinaria potenza e duttilità del calcolo algebrico, onde sembra ispirata da un concetto opposto a quello che domina attualmente, essendo molte moderne ricerche analitiche informate all'aspirazione di sostituire il ragionamento al calcolo; tuttavia le edizioni e le traduzioni anche di recente fatte dell'*Introductio* stanno a provare che non si giudica essa abbia ancora esaurita la sua missione; e infatti chi ben guardi finisce per riconoscere che molte ricerche sopra funzioni di recente scoperte sono modellate sulle pagine concernenti le funzioni circolari dell'opera di cui ragioniamo.

Di un II Vol. dell'*Introductio* diremo più avanti (n. 563), trattando esso esclusivamente di geometria.

559 - Le *Institutiones calculi differentialis* di Euler, naturale proseguimento dell'*Introductio* testè esaminata, concernono una materia che — lo dichiara l'autore — ha per intento la determinazione dei rapporti degli incrementi evanescenti assunti dalle funzioni quando le variabili da cui esse dipendono subiscono incrementi egualmente evanescenti. Ora va notato che per l'autore (come viene dichiarato nella Prefazione) una quantità è funzione di un'altra quando varia al variare di questa, definizione che rappresenta una notevole estensione del concetto di funzione quale incontrammo nell'*Introductio* (p. 704). Non ci è concesso di descrivere minutamente il contenuto di questa nuova opera

euleriana, ogni pagina della quale documenta la straordinaria abilità analitica dell'autore; specialmente è degna di rilievo la disinvoltura con cui egli maneggia le serie; ma imparzialità storica impone anche di rilevare la sua impassibilità di fronte a risultati evidentemente assurdi quali i seguenti:

$$1 + 2 + 4 + \dots = -1$$

$$1 + 3 + 9 + \dots = -\frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 4 - \dots = \frac{1}{4},$$

ottenuti applicando ciecamente formole valide solo in alcuni casi.

Dal punto di vista metodologico giova notare che Euler comincia la propria esposizione col calcolo delle differenze finite, per indicare le quali egli introduce e applica i simboli $\Delta$, $\Delta^2$,... tuttora in uso, e riguarda in conseguenza il calcolo differenziale come forma limite del calcolo delle differenze finite, sistema ottimo che fu poi adottato da molti trattatisti posteriori. Fra le applicazioni dell'operazione di differenziazione citiamo la ricerca dei massimi e minimi e quella dei veri valori delle espressioni di forma indeterminata, l'una e l'altra illustrata sopra bellissimi esempi. Invece nelle *Institutiones* non si trova alcuna appliplicazione geometrica, cosicchè l'autore si compiace rilevando che non ebbe bisogno di ricorrere ad alcuna figura. Più tardi, quasi assalito da tardivo rimorso, egli pensò di completare la propria opera facendo conoscere le prime applicazioni geometriche del calcolo differenziale, giacchè fra le sue *Opera postuma* s'incontra un lungo squarcio sull'argomento. donde si apprende il modo di costruire le tangenti a curve variamente definite, nonchè la discussione di equazioni rappresentanti linee piane; sgraziatamente quello squarcio è frammentario e nulla autorizza a prevedere che cosa avrebbe contenuto la parte restante.

560 - A completare l'opera testè analizzata, facendo un'analoga esposizione del calcolo integrale, Euler aveva volta la mente non appena licenziato il volume di cui sopra, come risulta da una lettera da lui scritta a Lagrange addì 2 ottobre 1759; da altra da lui indirizzata al Goldbach il 17 dicembre 1763 si apprende che l'opera era allora ormai compiuta; tuttavia altri cinque anni dovevano passare prima che vedesse la luce il I Volume delle *Institutiones Calculi Integralis* [1]; allora egli era ormai completamente cieco, onde ai lettori s'impone la massima indulgenza di fronte a inesattezze ed errori che vi si incontrano, non tutti imputabili al tipografo.

Per lui il calcolo integrale ha per iscopo di dedurre da una relazione fra elementi infinitesimali altra equivalente in termini finiti; perciò l'operazione di integrazione sta rispetto alla differenziazione in una re-

[1] La netta separazione del calcolo differenziale dell'integrale adottata da Euler si ritrova nella generalità dei posteriori espositori della materia; contro di essa — senza però atteggiarsi ad oppositore del grande matematico di Basilea — insorse Vincenzo Riccati, come può vedersi da una lettera inserita nel 1776 nella « Raccolta Calogerà ».

lazione del genere di quella che ha la sottrazione rispetto all'addizione, la divisione rispetto alla moltiplicazione, ecc.; è il modo di vedere che ebbe corso per quasi un secolo, cioè sino al giorno in cui ci si avvide della necessità di mostrare in anticipo la esistenza delle espressioni cercate. Secondo lui il calcolo integrale comprende due grandi sezioni, una relativa all'integrazione delle espressioni differenziali, l'altra a quella delle equazioni differenziali; è appena necessario notare che si tratta di una divisione imposta dalla logica e che fu quindi generalmente seguita dipoi. Come si pratica ancora oggi, si tratta successivamente del l'integrazione delle funzioni razionali e irrazionali, per passare poi successivamente a quelle in cui entrano funzioni esponenziali, logaritmiche e circolari; è dovere rilevare che, riguardo ai differenziali binomi, Euler determina in realtà tutti i casi d'integrabilità — che egli non ne avesse escluso alcuno fu dimostrato (v. n. 752) un secolo dopo — e che dell'integrazione egli fa nuove e importanti applicazioni alle serie; nel corso di queste egli s'imbattè nella nuova trascendente $\int \frac{dx}{\log x}$, detta oggi logaritmo-integrale. Seguono importanti considerazioni sul calcolo d'integrali definiti e sopra gli sviluppi in prodotti infiniti.

Passando nel suo II Volume all'integrazione delle equazioni differenziali, il nostro matematico espone i metodi d'integrazione divenuti classici: separazione delle variabili, con speciale riguardo alle equazioni omogenee, alle equazioni lineari, alle equazioni di Riccati, Bessel, ecc.; fattore integrante; cambiamento di variabili, ecc. A lui non è sfuggita l'esistenza d'integrali singolari in speciali equazioni differenziali, ma in tale scoperta egli fu preceduto da B. Taylor (*Meth. Increm.*, 1715) e A. C. Clairaut (*Mém. de Paris*, 1734). Quando nessuno dei procedimenti succitati conduce all'integrazione, Euler ricorre agli sviluppi in serie e spesso giunge a formole ricorrenti convenientissime per il calcolo dei relativi coefficienti; a suo onore va rilevato che tutte le serie da lui ottenute sono convergenti, esclusi al più certi valori della variabile; di serie sempre divergenti non si ha esempio nell'opera euleriana. Per mostrare come talvolta sia utile evitare la separazione delle variabili, egli riproduce le sue ricerche (p. 702) sopra le equazioni circolare ed ellittica, nè manca di dare esempi di integrazioni approssimate. Che esistano altri procedimenti, i quali guidano all'integrazione di speciali differenziali, viene da lui mostrato sopra buon numero di esempi. Egli passa poi alle equazioni differenziali di ordine o grado superiore al 1°; rileviamo particolarmente i suoi studi sopra le equazioni della forma

$$x^2 (a + b\,x^n)\,d\,y^2 + x\,(c + e\,x^n)\,d\,y \cdot d\,x + (f + g\,x^n)\,y \cdot d\,x^2 = 0$$

che furono stimolo a numerosi lavori posteriori. Tratta lungamente delle equazioni differenziali lineari, omogenee o non, e, con un coraggioso passaggio al limite, giunge al caso in cui sono d'ordine infinito, così antecipando un ordine di ricerche in cui s'illustrarono alcuni analisti dei giorni nostri.

Il III Volume della grande opera euleriana tratta della teoria e dell'integrazione delle equazioni a derivate parziali; comincia con la con-

siderazione delle equazioni della forma $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ nell'ipotesi che siano state ottenute differenziando altre della forma $f(x, y, z) = 0$ e contiene artifici e formole oggi ben note. In alcune pagine relative a equazioni e derivate parziali di second'ordine, egli poi mostra di avere vista chiaramente la fondamentale differenza che corre fra quelle di tipo ellittico e quelle di tipo iperbolico. Il nostro matematico si spinge finalmente nel campo delle equazioni a derivate parziali con tre variabili indipendenti, ma della teoria relativa non fa che tracciare le prime linee. L'opera si chiude (ci esprimiamo così perchè il IV Volume non è che una raccolta di memorie trovate fra le sue carte e pubblicate dopo la sua morte) con il calcolo delle variazioni; cosicchè si può ben dire che nulla vi manchi intorno a quanto costituiva l'analisi infinitesimale verso il tramonto del secolo XVIII.

## Geometria elementare e Trigonometria

561. Dopo di avere misurata la straordinaria abilità analitica di Euler, si poteva essere indotti a supporlo destituito di attitudine alla ricerca puramente geometrica; l'esame delle sue opere mostra che tale eventuale illazione è totalmente priva di base, e noi mostreremo ciò enumerando alcune delle verità di cui egli seppe arricchire la scienza dell'estensione.

Devesi a lui la relazione $BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0$ che sussiste fra quattro punti di una retta e di cui è nota l'applicazione nella teoria dei birapporti di una quaterna di punti collineari (N. C. P., T. I, 1747); inoltre in una lettera a Goldbach del 25 febbraio 1745 trovasi la relazione

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\,m^2$$

che sussiste fra i lati $a, b, c, d$ di un quadrilatero piano, le sue diagonali $e, f$ e la retta $m$ che ne congiunge i punti medi, ed inoltre l'equazione che lega le lunghezze dei sei segmenti congiungenti a coppie quattro punti qualunque di un piano. Per primo egli osservò (N. C. P., T. XI, 1765) che il punto d'incontro delle altezze di un triangolo piano, il baricentro e il centro del cerchio circoscritto appartengono a una retta, detta, quindi, a ragione, « retta di Euler ». Dimostrò (N. A. P., T. IX, 1791) l'esistenza del centro di similitudine di due figure simili, piane e solide. Si devono a lui eleganti costruzioni per i problemi di costruire un triangolo che sia inscritto in un dato cerchio e i cui lati passino per dati punti (A. A. P., T. IV, 1780) e di dividere un triangolo in quattro parti equivalenti mediante due rette fra loro perpendicolari (M. A. P., T. I, 1803), nonchè una notevole costruzione approssimata per la divisione d'un arco in un numero qualunque di parti eguali (*Op. post.*). Egli si occupò anche (lettera a Goldbach del 4 settembre 1751) della questione di determinare il numero dei modi in cui un poligono si può decomporre in triangoli mediante diagonali. Passando alla stereometria, citeremo l'espressione da lui trovata pel volume del tetraedro in funzione dei suoi spigoli e, ciò è ben più importante, la scoperta (lettera

a Goldbach del 14 novembre 1750; N. C. P., T. IV, 1752) della formola $F + V = S + 2$, che lega i numeri delle facce, dei vertici e degli spigoli di un ordinario poliedro; ignorando gli studi congeneri di Descartes (vedi pag. 472), il nostro la constatò sperimentalmente e poi ne diede una dimostrazione soddisfacente.

Finalmente altre considerazioni di natura topologica (non nello spazio, ma nel piano) lo condussero a rispondere affermativamente (C. A. P., T. VIII, 1736) al seguente problema: Il fiume Pregel attraversa la città di Königsberg formando ivi un'isola (v. Fig. 67); questa è congiunta alla terraferma mediante cinque ponti; altri due ponti attraversano semplicemente quel fiume; è possibile passare successivamente

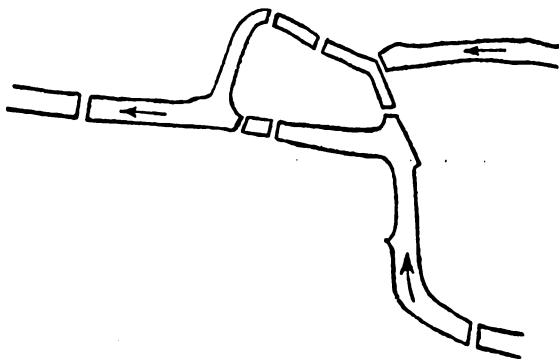



Fig. 67.

per tutti quei ponti, ciascuno una sola volta? Le considerazioni all'uopo istituite sono tanto originali ed importanti che da essa trasse origine un nuovo capitolo della matematica, la topologia. Esse ci dànno occasione di notare che in una lettera al Goldbach del 16 aprile 1757 egli insegnò anche il modo di muovere il cavallo sopra una scacchiera per modo da occupare successivamente e una sol volta ogni casella; il metodo usato fu da lui esposto in un lavoro inserito nel T. XV (1759) delle Mem. dell'Acc. di Berlino e provocò interessanti studi da parte di un geometra francese di cui parleremo nel seguente Capitolo, il Vandermonde (Mém. Acad. Paris, 1771).

562 - Riguardo alla trigonometria l'azione di Euler fu talmente importante che nella teoria delle funzioni circolari egli a ragione passa per un benemerito riformatore; come tale egli appare quando si rifletta che, assunto il raggio del cerchio fondamentale eguale a 1, egli considerò le sei ordinarie linee trigonometriche come funzioni dell'arco e le designò con una simbolica in cui è chiaramente espressa questa dipendenza funzionale. Inoltre egli risolse parecchi problemi relativi e diede importanti sviluppi in serie o in prodotti infiniti per le funzioni circolari dirette ed inverse. Per tal modo egli fu naturalmente condotto a notevoli espressioni di $\pi$ (C. A. P., T. V, 1730; N. C. P., T. XVI, 1771; ecc.), in altre parole a dare qualche importante contributo analitico al problema della quadratura del circolo. Limitiamoci a rilevare che nella memoria

di commento ad alcune pagine postume di Descartes (p. 471) egli giunse alle notevoli relazioni seguenti

$$\frac{4}{\pi} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \dots,$$

$$\frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{cotg} 2\varphi = \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varphi + \dots$$

essendo $\varphi$ un angolo qualunque, nonchè all'altra

$$\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2\varphi} = \cos\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{4} \dots$$

la quale, per $\varphi = \frac{\pi}{4}$ s'identifica ad altra scoperta da Viète (p. 385).

Altrettanto importanti sono i contributi dati da Euler alla trigonometria sferica, disciplina a cui dedicò due fondamentali memorie (C. A. P., T. III, A. A. P., T. I, 1773). Nella prima egli partì dal fatto che, sulla sfera, le geodetiche sono i cerchi massimi e applicò in conseguenza la teoria dei massimi e minimi; trovò così le dieci relazioni che hanno luogo fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo (« regole di Napier », p. 402); le estese poi a triangoli qualunque e così pervenne alle note relazioni

$$\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} c : \operatorname{sen} C$$
$$\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c - \cos A \cos B$$
$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{tg} C - \operatorname{sen} B \operatorname{tg} c = \cos a \cos B \operatorname{tg} c$$

e alle analoghe, le quali vennero da lui abilmente sfruttate per la risoluzione dei triangoli sferici. Più tardi egli si avvide che il fondare l'esposizione di un capitolo della matematica elementare sopra considerazioni di pertinenza del calcolo infinitesimale non era una procedura didatticamente soddisfacente, e, in una seconda memoria, mostrò come si potesse giungere agli stessi risultati ricorrendo al triedro che insiste sopra il triangolo sferico che si considera. Ne risultò un magnifico lavoro, il primo in cui, da tre relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo sferico qualunque, ricavate direttamente dalla figura, viene dedotto tutto l'apparato di formole che trovasi oggi in qualunque trattato di trigonometria; è uno scritto in cui Euler, forse più che in qualunque altro, si è avvicinato al grado di perfezione stilistica, a cui può ragionevolmente aspirare qualunque opera umana.

A lui devesi ancora la seguente elegante espressione del volume del tetraedro di cui tre spigoli concorrenti in un punto hanno le lunghezze $a$, $b$, $c$ e formano fra di loro gli angoli $p$, $q$, $r$:

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{p+q+r}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{-p+q+r}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{p-q+r}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{p+q-r}{2}}$$

nonchè le seguenti che servono a calcolare l'eccesso sferico $S$ di un trian

golo di lati $a, b, c$:

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{1 \cos a + \cos b + \cos c}},$$

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b \cdot \cos c}{4\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}};$$

esse non tardarono a divenire classiche.

## Geometria analitica e Geometria infinitesimale

563 - Col II Volume della sua *Introductio in Analysin Infinitorum* Euler esercitò sopra la diffusione e il perfezionamento del metodo cartesiano un'influenza non meno benefica di quella di cui facemmo cenno parlando della trigonometria. In detto volume egli tenne fede all'impegno preso di non ricorrere a derivate e integrali, il che va rilevato giacchè lo scopo che egli si propose è — per non parlare che della geometria piana — di mostrare come si studino le curve, di regola rappresentate da un'equazione, ma talvolta definite parametricamente; i punti non sono ivi considerati isolatamente, ma in quanto formano serie continue, perciò sono da Euler escluse le questioni aventi per iscopo la determinazione di angoli e distanze, che oggi fanno parte integrante di qualunque trattato di geometria analitica; neppure della distanza di due punti viene insegnata l'espressione in generale, ma viene dedotta caso per caso dal teorema di Pitagora. Per converso vi si trovano esposte con precisione e chiarezza le convenzioni per interpretare i segni delle coordinate cartesiane (ortogonali od oblique); in conseguenza acquistano piena generalità le formole stabilite per eseguire la trasformazione delle coordinate. Da esse egli trae due notevoli corollari: cioè che le due coordinate di un punto sono grandezze della stessa specie (il che non era stato osservato da Descartes e suoi immediati seguaci) e che le rette del piano sono rappresentate da equazioni lineari. Da tal fatto essenziale il nostro matematico deduce il significato geometrico (ordine) del grado dell'equazione cartesiana rappresentatrice di una curva algebrica (1) e

(1) Riguardo a questa importante caratteristica di una curva piana va notato che Euler sembra non essersi reso conto del fatto che essa *non* può mai mutare variando i coefficienti della corrispondente equazione; infatti in un passo delle sue *Opere Postume* (T. I, p. 272) egli considera la curva di equazione

$$y = \sqrt{a\,x} + \sqrt[4]{a^3\,(b + x)},$$

asserendo con ragione che essa è di 8° ordine e simmetrica rispetto all'asse delle $x$; ma aggiunge che, supposto $b = 0$, si ha invece soltanto la curva di 4°

$$y^4 - 2\,a\,x\,y^2 - 4\,a\,x\,y + a^2\,x^2 - a^3\,x = 0$$

esente da quella proprietà di simmetria, mentre in realtà si ha in tal caso il sistema delle due curve $y^4 - 2\,a\,x\,y^2 \pm 4\,a\,x\,y + a^2\,x^2 - a^3\,x = 0$, le quali costituiscono ancora una curva di 8° ordine simmetrica rispetto al detto asse.

l'idea di classificare siffatte linee in base al loro ordine. Per stabilire l'importanza del concetto di ordine, Euler mostra come esso abiliti a scoprire qualche proprietà delle curve algebriche, p. es. a assegnarne il numero dei punti determinatori.

Le linee di 1° ordine essendo note dagli elementi della geometria, è da quelle del 2° che Euler comincia i proprî studi; delle linee rappresentate dall'equazione generale di 2° grado stabilisce anzitutto le proprietà relative a diametri, centri e assi e così giunge alle varie forme canoniche, le quali autorizzano a concludere che gli enti geometrici in questione non differiscono dalle sezioni piane dei coni circolari retti. Assurgendo poi a considerazioni generali, egli insegna il metodo per determinare i rami infiniti e gli asintoti delle curve, facendone subito applicazioni alle coniche. In quanto precede si trovano elementi sufficienti per classificare anche le curve di ordine superiore al 2°, ed infatti egli si arresta a quelle di 3° e 4°, e, pure senza addentrarsi in lunghi sviluppi, mostra chiaramente di avere posti i lettori in grado di compiere uno studio analogo sopra qualsivoglia linea algebrica.

Per approfondire la conoscenza di queste, giova considerare in ogni punto di una curva la tangente, la normale e la curvatura; ed Euler mostra come determinare tutto ciò senza far appello all'algoritmo differenziale. Altro elemento utile per l'indagine delle curve algebriche è rappresentato dai diametri; su di essi Euler si arresta [1] prendendo le mosse dall'*Enumeratio* di Newton. Lo studio di questioni aventi per iscopo la ricerca di curve dotate di proprietà prestabilite dà occasione all'autore di porgere nuove prove della sua fecondità di espedienti, mentre con le considerazioni relative alla similitudine ed affinità delle curve ha offerto preziosi elementi della teoria delle trasformazioni geometriche. Di sapore prettamente cartesiano sono poi due capitoli dell'*Introductio* relativi alle intersezioni di curve e alla risoluzione grafica delle equazioni algebriche. Passando da ultimo alle curve trascendenti, egli trova occasione per dare idea ai lettori della struttura di figure strane, quale quella rappresentata dall'equazione $y = (-1)^x$ [2], e per far conoscere la natura e l'utilità delle coordinate polari.

Esaurita così la geometria analitica piana, Euler dedica a quella dello spazio una ottima *Appendice* ove di detta materia vengono insegnati i fondamenti. Riguardo ad essa notiamo anzitutto che, mentre il Clairaut in un volume a noi noto (p. 679) ha riguardate come analoghe delle linee piane le curve sghembe, Euler ha considerate come corrispondenti le superficie, in quanto ciascuna è rappresentabile mediante una unica equazione fra le tre coordinate di un punto. Queste sono tre grandezze della medesima specie, e riguardo ad esse l'autore stabilisce per primo le formole di trasformazione che non tardarono a divenire classiche. Dimostrato che un piano è l'immagine di un'equazione lineare, Euler passa allo studio delle superficie rappresentate da una equazione

(1) È questo un argomento a cui il nostro ha più tardi dedicato una speciale memoria (*Mém. Acad. de Berlin*, T. I. 1745), nella quale si trovano le prime ricerche sulla distribuzione degli assi di una curva piana dotata di parecchie simmetrie.

(2) Cfr. una lettera scritta da Euler a Giovanni Bernoulli il 5 novembre 1727 e la risposta datata 9 gennaio 1728.

di 2° grado e ne stabilisce rapidamente la riduzione a cinque tipi. Un Capitolo sulle linee gobbe intersezione di due superficie corona degnamente il solido ed elegante edificio.

564 - L'ampiezza e la profondità delle conoscenze di Euler sopra le coordinate gli permisero di estendere i confini della conoscenza delle curve, piane e gobbe, e delle superficie. Egli, infatti, spiegò (Mem. Acc. Berlin., T. IV, 1748) il fatto, di apparenza paradossale, che mentre una curva d'ordine $n$ è in generale determinata da $n(n+3)/2$ dei suoi punti, per $n^2$ (numero in generale superiore al precedente) passano infinite curve di quell'ordine. Di più fece numerose e geniali applicazioni dell'analisi infinitesimale, alla determinazione e allo studio di linee dotate di speciali proprietà [1]: tacendo dei suoi contributi al problema delle traiettorie, ricorderemo anzitutto le sue indagini sopra le curve rettificabili mediante funzioni di data specie; per quelle rettificabili con archi di circolo, in un primo tempo egli aveva ritenuto che non esistesse che il cerchio, ma in una importante memoria postuma corresse il proprio errore, assegnandone infinite dotate di quella prerogativa. Notevoli sono le sue ricerche sulle curve che sono simili alle loro evolute. A lui appartiene la scoperta delle possibilità di generare un'epicicloide come ipocicloide e viceversa. Fra i contributi da lui dati alla teoria delle coniche limitiamoci a citare l'espressione dell'area di un settore parabolico, di consueto attribuita a Lambert (Misc. Berol., T. VII, 1743), e la ricerca dell'ellisse di area minima fra quelle che passano pei vertici di un parallelogramma o sono circoscritte ad un quadrilatero (A. A. P., T. IV, 1780, e N. A. P., T. IX, 1791). Osserviamo finalmente che nelle sue ricerche sopra le curve egli spesso si servì abilmente delle cosidette « coordinate intrinseche » o parzialmente intrinseche, cioè dell'ascissa $x$ e dell'arco $s$, di questo e del raggio di curvatura $\varrho$, o finalmente di $\varrho$ e dell'amplitudine $\varphi$.

Due memorie (A. A. P., T. VI, 1782) sopra le curve gobbe hanno importanza piuttosto per il metodo di esposizione che per la novità dei risultati raggiunti. Altrettanto non può certamente ripetersi riguardo ai suoi lavori sulla superficie; infatti, egli è il fondatore della teoria della loro curvatura, avendo scoperta (Mém. Ac. Berlin, T. XVI, 1760) la relazione

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2}$$

che serve ad esprimere la curvatura di una sezione normale in un punto mediante quelle delle due sezioni principali; inoltre reca la sua firma la prima memoria che si conosca sulle superficie sviluppabili (C. A. P., T. XVI, 1771). Parecchi suoi lavori (C. A. P., T. III, 1728 e VIII, 1736; N. A. P., T. XV, 1799) concernono le linee geodetiche ed altri le linee rettificabili che possono tracciarsi sopra una sfera o uno sferoide (N. C. P., T. XV, 1770; A. A. P., T. V, 1781; N. A. P., T. III, 1785).

[1] Più precisi dati al riguardo si trovano nell'opera dell'autore *Curve piane speciali algebriche e trascendenti* (Milano, 1930), ove il nome dell'Euler s'incontra circa cinquanta volte.

In non meno di tre lavori egli si occupò della rappresentazione su un piano della superficie terrestre (A. A. P., T. I, 1777), in altri (N. C. P., T. I, e N. A. P., T. III, 1785) del calcolo dell'area di un cono circolare obliquo o di un ellissoide di rotazione. Finalmente le formole generali da lui date (N. C. P., T. XX, 1775) per esprimere il movimento di un solido potranno da taluno ritenersi di pertinenza della meccanica, ma le applicazioni che ricevettero anche in questioni geometriche obbligano a farne cenno in una storia della matematica pura.

Se lo spazio lo concedesse, faremmo una rassegna anche delle scritture euleriane relative alla fisica, la meccanica, l'astronomia e la navigazione, certi di raccogliervi calcoli e risultati notevoli anche dal punto di vista della scienza del calcolo. Ma, poichè $\infty + 1 = \infty$, tale ricerca, per quanto ampiamente fruttifera, non modificherebbe l'impressione di sbalordimento che produce la contemplazione dell'opera matematica del più portentoso calcolatore che ricordi la storia.

## I satelliti di un grande astro

565 - Durante il secondo soggiorno di Euler a Pietroburgo, la capitale dell'impero russo fu residenza di alcuni investigatori che, coltivando sotto la sua ispirazione i campi in cui egli erasi illustrato, mostrarono la fecondità dei procedimenti che egli aveva creati o perfezionati.

In questo gruppo ci si presenta anzitutto il figlio Giovanni Alberto Euler. Nacque dal primo matrimonio del grande matematico il 16 novembre 1734; guidato dal padre, scelse la carriera delle scienze, mostrando sempre di preferire le applicazioni alle ricerche di scienza pura. La sua prima memoria contiene un'esposizione e alcune applicazioni della teoria delle turbine ideate dal padre e fu coronata dalla Società delle Scienze di Gottinga addì 9 novembre 1754; pure in dipendenza da scritti paterni sono altre sue memorie premiate a Pietroburgo (1755 e 1760), Monaco (1762) e Parigi (1761 e 1770). Sino dal 6 dicembre 1754 appartenne in qualità di membro ordinario all'Accademia di Berlino: come tale negli anni 1755-56 pubblicò tredici lavori fra le *Memorie* di questa compagnia; altri suoi scritti furono inseriti negli *Atti* dell'Accademia di Monaco, di cui era membro straniero dal 21 ottobre 1762. Quantunque nel 1758 gli fosse stato conferito un posto nell'Osservatorio astronomico di Berlino, in Prussia, non conseguì mai una posizione economicamente soddisfacente; fu questo anzi uno dei motivi che spinsero il padre a far ritorno a Pietroburgo. Ivi suo figlio ottenne subito il posto di professore di fisica sperimentale; il 6 novembre 1766 fu eletto membro ordinario dell'Accademia di Pietroburgo e il 28 febbraio 1769 ne divenne segretario. Questi ed altri uffici, nonchè il dovere di aiutare il padre nel periodo di sua completa cecità, ebbero per conseguenza che la sua produzione scientifica andò gradatamente affievolendosi e cessò completamente a partire dal 1776; ciò non ostante alla morte del padre l'Accademia di Parigi lo chiamò a succedergli. Morì il 6 settembre 1800. Durante tutta la propria vita si mostrò discepolo del padre, dei cui scritti usò con tanta larghezza che fu detto che i sette

premi conferitigli da corporazioni scientifiche spettavano in realtà a questo; cosicchè Leonardo Euler ne avrebbe in totale ottenuti venti, numero non raggiunto da alcuno nè prima nè dopo di lui. Tale dipendenza dei lavori di Giovanni Alberto da quelli di Leonardo spiegano il proposito di inserire i lavori del primo nell'edizione in preparazione delle opere complete del secondo.

Nel carteggio con Euler figura spesso e in modo assai onorevole Cristiano Goldbach. Nato a Königsberg l'8 marzo 1690, viveva a Berlino col titolo di consigliere aulico, quando Hermann, di passaggio per quella città, lo indusse a seguirlo a Pietroburgo, ove giunse l'8 agosto 1725. Benchè di indole modestissima, la sua dottrina e il suo ingegno non tardarono a farlo notare. All'Accademia di Pietroburgo lesse parecchi lavori e funzionò da segretario; nel 1742 fu chiamato dal Governo Russo nel Ministero degli Affari Esteri con l'incarico di decifrare dispacci. Morì il 20 novembre 1764. Il suo nome è legato alla proposizione da lui scoperta empiricamente e non ancora dimostrata: « ogni numero pari è somma di due numeri primi », se ne trova cenno nel suo carteggio appunto con Euler [1].

566 - Nel 1772 Euler, sentendo il bisogno di avere a propria disposizione un segretario, scrisse per aiuto e consiglio a Daniele Bernoulli, e questi gli suggerì Nicola Fuss (n. a Basilea il 10 gennaio 1755); essendo stato gradito, il giovane giunse a Pietroburgo l'8 giugno 1773 e da quel giorno rimase costantemente a fianco del sommo matematico, già completamente cieco; quanto utile sia stata l'opera sua, risulta dal fatto che devesi a lui la redazione della maggior parte delle 335 memorie euleriane appartenenti al periodo 1773-82. Dal 1784 fu membro dell'Accademia di Pietroburgo, della quale divenne segretario alla morte di suo suocero G. A. Euler. Gli *Atti* di quell'Accademia contengono numerosi suoi scritti non privi d'importanza [2], ma ove è visibile l'influenza del sommo a cui è dedicato il presente Capitolo; a prova del suo valore come matematico stanno i premi conferitigli dalle Accademie di Parigi (1778) e Kopenhagen (1798). Morì il 4 gennaio 1826.

Nella carica di segretario dell'Accademia di Pietroburgo egli ebbe per successore il figlio Paolo Enrico (n. il 21 maggio 1798, m. il 10 gennaio 1855), il quale va lodato, oltrechè per alcuni pregevoli lavori di analisi applicata alla geometria, per avere, con l'aiuto del fratello Nicola (1810-1867) pubblicata un'importante collezione di lettere di matematici del secolo XVIII.

Chiuderemo questo elenco degli immediati discepoli di Euler con due nomi.

G. W. Krafft nacque a Tuttlingen (Württemberg) il 15 luglio 1701, conseguì la laurea a Tübingen e poi si trasferì a Pietroburgo, ove oc-

---

(1) Veramente nella lettera del Goldbach del 7 giugno 1742 si parla della somma di *tre* numeri primi; gli è nella risposta di Euler (30 giugno 1742) che il numero è ridotto a *due*.

(2) Limitiamoci a citare quello (N. A. P., T. IX, 1761) sulla scomposizione di un poligono piano in altri, che diede materia a importanti sviluppi da parte di J. Liouville (*Journ. de math.*, T. VIII, 1843).

cupò vari uffici nella pubblica istruzione dell'Impero; quantunque l'Accademia di quella città lo chiamasse nel proprio seno (1730), ritornò in Germania nel 1744 per occupare una cattedra di matematica nell'Università di cui era stato discepolo e a Tübingen morì il 12 giugno 1754. Parecchie memorie di astronomia e di fisica fanno fede del suo valore scientifico.

A. J. Lexell nacque a Abo (Finlandia) il 24 dicembre 1740; dopo di avere insegnato nel patrio Ateneo, si trasferì a Pietroburgo (1768) e non tardò a divenire membro di quell'Accademia (1771). Esordì con lavori di astronomia e a questa scienza tenne fede durante tutta la propria vita; tuttavia pubblicò negli *Atti* di detta Accademia alcuni lavori di meccanica e di analisi applicata alla geometria e gli altri sulle equazioni differenziali che lo fanno apparire come uno dei più distinti discepoli dell'Euler; altri suoi lavori concernono la geometria della sfera [1]. Morì a Pietroburgo il 30 dicembre 1784.

## BIBLIOGRAFIA [2].

*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita.* Auctore L. EULER (Petropoli, T. I e II, 1736).

*Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauche des Gymnasii bey der K. Academie der Wissenschaften in St. Petersburg* (Pietroburgo, 1738; II Teil, Ib., 1740).

*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Auctore L. EULERO (Lausannae & Genevae, 1744).

L. EULERI *Opuscula varii argumenti* (due volumi, Berlino, 1746, 1750).

*Introductio in Analysin infinitorum.* Auctore L. EULERO (Lausannae, due volumi, 1748).

*Dissertatio de principio minimae actionis una cum examine objectionum cl. prof. Koenigi contra hoc principium factarum.* Auctore L. EULERO (Berolini, 1753).

*Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum.* Auctore L. EULERO (Petropoli, 1755).

*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accomodata.* Auctore L. EULERO (Berlino, 1765).

*Institutionum calculi integralis. Volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur.* Auctore L. EULERO (Petropoli, 1768). *Volumen secundum in quo methodus inveniendi functiones unius variabilis ex data relatione differentialium secundi altiorisve gradus pertractatur* (Id., id., 1769). *Volumen tertium in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium, ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur* (Id., 1770). *Volumen quartum continens supplementa partim in-*

(1) Ricordiamo che si dà il nome di *teorema di Lexell* al seguente: I vertici dei triangoli sferici aventi la stessa base e per cui è costante la somma degli angoli, giacciono in un determinato circolo minore della sfera.

(2) Per più minuti ragguagli si ricorra a G. ENESTRÖM, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers* (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung, IV Ergänzungsband*, 1910-1913). Un completo elenco degli scritti del figlio trovasi al termine della memoria: P. STÆCKEL, *Johann Albrecht Euler* (Vierteljahrschrift der Naturf. Gesell. in Zurich, T. LV, 1910).

*ditu partim jam in operibus Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae impressa* (Id.. 1794).

*Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie* (Pietroburgo. T. I, 1768; T. II, ib., id.).

*Vollständige Anleitung zur Algebra von Hrn.* L. EULER, I e II Tl. (St. Petersburg, 1770).

*Eclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts avec la description d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile à l'état, calculés sous la diréction de* M. L. EULER *par* M. N. FUSS (st. Petersburg, 1776).

L. EULER, *Opuscula analytica*, T. I (Petropoli 1783); T. II (Id., 1785).

P. H. FUSS, *Corespondance mathématique et physique de quelques célèbres géométres du XVIII siècle* (due volumi; St. Petersburg 1843).

L. EULER, *Commentationes arithmeticae collectae*, ed. P. H. Fuss et N. Fuss (due vol.; Pietroburgo, 1849).

L. EULER, *Opera postuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta*, ed. P. H. Fuss et N. Fuss (Petropoli, 1862).

L. EULER, *Opera omnia sub auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae* (Leipzig und Berlin).

C. HENRY, *Lettres inédites d'Euler à d'Alembert* (Bull. di bibl. e storia, T. XIX, 1886).

G. ENESTRÖM, *Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli* (Ivi).

G. ENESTRÖM, *Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli* (Bibl. mathem., III Ser., T. IV-V e VI, 1903-1906.

G. ENESTRÖM, *Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli* (Id.. T. VII. 1906).

G. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerische naturforschende Gesellschaft über die Eulersche Manuskripte der Petersburger Akademie* (*Jahresber, der deutschen Math. Ver.*, T. XXII. 1913, II, Tl., p. 191-205).

W. STIEDA, *J. A. Euler in seiner Briefen* 1766 *bis* 1790. Ber. d. Sächs. Akad. der Wiss. Phil.-hist. Kl. Bd. 84, 1932.

W. STIEDA, *Die Uebersiedelung L. Eulers von Berlin nach S. Petersburg*, Id. Ber. 83, 1931.

## CAPITOLO XXXV

# CONTEMPORANEI DI L. EULER

### In Italia

567 - Immensa fu l'influenzza esercitata da Euler su tutte le branche della matematica, grazie alle sue innumerevoli e importanti memorie originali e ancor più mediante i suoi poderosi trattati, che, come vedemmo, abbracciano tutti i rami della scienza del numero. Ma, prima di parlare di coloro che, in un certo senso, possono riguardarsi come discepoli del sommo scienziato di Basilea, fa mestieri dire qualche cosa dei contemporanei che percorsero strade da essi stessi aperte o almeno con veicoli di fattura originale. E prima di ogni altro dobbiamo occuparci di un geometra facente parte del piccolo gruppo milanese che prende nome dai fratelli Ceva (p. 552); l'esaminarne l'opera ci offrirà propizia occasione per aggiungere qualche dato a quanto dicemmo intorno alla storia della geometria.

Il geometra a cui testè alludemmo è Giovanni Gerolamo Saccheri. Egli nacque a San Remo nella notte dal 4 al 5 settembre 1667, e sino da giovinetto manifestò spiccate attitudini per la matematica, con una sorprendente facilità nel risolvere problemi aritmetici. Essendo stato destinato dalla famiglia a vestire l'abito ecclesiastico, fu mandato a Genova, ove, addì 24 marzo 1685, entrò in qualità di novizio nella Compagnia di Gesù. Inviato dai suoi superiori a Milano per proseguire i proprii studi scientifici, divenne alunno di Tommaso Ceva, il quale occupava allora nel Collegio di Brera le cattedre di matematica e retorica. Dei progressi da lui allora compiuti è documento un opuscolo pubblicato a Milano nel 1693, il quale contiene le soluzioni di alcuni problemi geometrici proposti negli anni 1690 e 1692 da un nobile siciliano a noi già noto (p. 540), Ruggiero di Ventimiglia, il quale va ricordato anche per avere risolute le questioni proposte da un matematico nascosto « dietro la tavola » e nelle quali, come sappiamo, si erano provati A. Marchetti. V. Viviani e A. di Monforte (p. 387). Ora dei teoremi enunciati dal gentiluomo palermitano il Saccheri riferì le dimostrazioni datene da Giovanni Ceva col metodo geometrico-meccanico di cui è l'inventore (p. 553) e aggiunse del proprio ragionamenti di tipo classico; ma, per una delle questioni proposte, egli si limita a far conoscere alcuni lemmi, secondo lui, utili alla determinazione del luogo richiesto, lasciando al de l'Hôpital (*Séctions Coniques*, n. 351) di esaurire la questione.

Dopo quella pubblicazione il Saccheri dovette (1694) abbandonare momentaneamente la geometria, essendo stato impegnato, per ordine su-

periore, in dispute teologiche; nello stesso anno venne definitivamente inscritto nella Compagnia di Gesù e fu inviato a Torino a insegnarvi filosofia e teologia nel Collegio che vi teneva la Compagnia stessa. Il successo dell'insegnamento del Saccheri fu tale che Vittorio Amedeo II, il quale allora occupava il trono di Sardegna, voleva conferirgli anche una cattedra in quell'Università; ma, per riguardi verso il Senato di Milano, che lo destinava all'Università di Pavia, questo progetto fu subito abbandonato.

Frutto dell'insegnamento torinese del nostro scienziato è un volume di logica (1697), al quale spetta un posto anche in una storia della matematica, perchè vi si trovano i principi che furono applicati dal Saccheri nella più celebre delle sue opere. In particolare vi si apprende uno speciale tipo di ragionamento che consiste nell'assumere come ipotesi la falsità della proposizione che si vuole dimostrare e nel constatare che, scegliendo tale ipotesi come punto di partenza, si è forzati a concludere che l'anzidetta proposizione è falsa; si tratta di una argomentazione che offre qualche analogia con la riduzione all'assurdo e di cui il Cardano ed il Clavio si erano giovati in qualche caso; ma è merito del Saccheri l'averne posta in luce la portata generale e di averne fatte brillanti applicazioni. Nello stesso anno 1697 egli lasciò Torino per recarsi a Pavia ad insegnare in quel Collegio dei Gesuiti; due anni dopo veniva chiamato a occupare anche una cattedra in quell'Università. Nel 1708 pubblicò una nuova trattazione della *Statica*, e morì a Milano il 25 ottobre 1733, l'anno stesso in cui era stata pubblicata l'opera che lo colloca fra i fondatori della geometria non-euclidea.

568 - E lo colloca suo malgrado, chè col lavoro in questione egli si propose di togliere ogni macchia nella grande opera del sommo Alessandrino, stabilendo cioè la verità del famoso postulato, di cui, egli afferma, nessuno può dubitare. Per conseguire lo scopo il dotto Gesuita parte da una retta $AB$, conduce ad essa, da una stessa parte, due perpendicolari $AC$ e $BD$ fra loro eguali e ne congiunge gli estremi con una retta $CD$. Gli angoli che questa forma con quelle due perpendicolari sono sempre fra loro eguali, ma, sino a prova contraria, possono risultare retti, ottusi e acuti, donde le tre ipotesi fondamentali tenute costantemente presenti dall'autore; in corrispondenza è $CD \lesseqgtr AB$ e viceversa; ed è essenziale notare col Saccheri che, se una di esse si verifica per una speciale figura dell'indicato tipo, sussisterà per qualunque altra. Di più l'autore fa vedere che in corrispondenza la somma degli angoli di un triangolo qualunque è $\gtreqless 180^\circ$ e stabilisce parecchi altri criteri atti a distinguere l'una dall'altra quelle tre ipotesi.

Ora per escludere quella dell'angolo ottuso egli ragiona come segue: la si ammetta; allora in un triangolo rettangolo $ABC$ (Fig. 68) la somma degli angoli acuti $A$ e $C$ sarà superiore a 90°; se, dunque, si conduce per $C$ una retta $CY$ tale che gli angoli $YCA$ e $CAB$ valgano insieme due retti, l'angolo $YCB$ risulterà acuto. In conseguenza la retta $CY$ si trova rispetto alla retta $AB$ prolungata dalla parte di $B$ in una situazione tale che, se si ha riguardo alla trasversale $AC$, non dovrebbe incontrarla. Questo assurdo conduce il dotto Padre a decretare il bando

dell'ipotesi dell'angolo ottuso (vedremo che Legendre fece altrettanto quasi un secolo più tardi).

Prima di iniziare l'incruenta battaglia con lo scopo di espellere anche l'ipotesi dell'angolo acuto, il Saccheri espone alcune sensate critiche intorno alle vie battute dai suoi predecessori per giungere a stabilire il tanto discusso postulato, in particolar modo intorno al concetto di « linee equidistanti » (che vedemmo già usato da vari autori), senza tacere alcune considerazioni intorno ad una eventuale verifica sperimentale del postulato anzidetto. Lo spazio non concedendoci di dilungarci sopra questa ed altre osservazioni, che pur meriterebbero onorevole menzione, segnaliamo lo studio della scambievole posizione che possono avere due rette complanari, il quale condusse il Saccheri al concetto fondamentale che Lobacefsky chiamò « angolo di parallelismo ». Giunto così alla soglia di un nuovo mondo geometrico, il Saccheri, quasi inorridito, retrocede, e in base ad argomentazioni fiacche ed inconcludenti ritiene di essere in diritto di escludere anche la possibilità dell'ipotesi dell'angolo acuto, epperò di proclamare il trionfo del sistema euclideo.

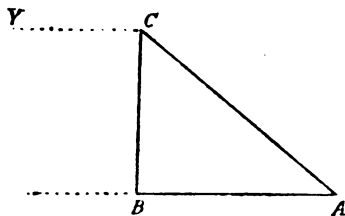



Fig. 68.

Senza arrestarci sulla seconda Parte dell'opera saccheriana — chè ivi non sono esposti che commenti e critiche ai concetti che Euclide pose a fondamento della sua teoria dei rapporti e delle proporzioni — è dovere nostro notare che l'opera stessa nacque sotto maligna stella. A parte la circostanza che la morte dell'autore costituisce sempre un grave pericolo per un'opera, si è verificato il fatto deplorevole che la recensione di cui essa fu oggetto dei Nova A. E. del 1° giugno 1736 la fa apparire come una delle numerose opere esegetiche sopra gli *Elementi* di Euclide, onde era tale da rendere piuttosto raro il pubblico dei lettori. Tuttavia di essa è parola nelle *Storie della Matematica* dell'Heilbronner e del Montucla; inoltre su di essa richiamò l'attenzione dei tedeschi il Klügel in una dissertazione di laurea (v. n. 643) e in un assai diffuso *Mathematisches Wörterbuch*: cosicchè sembra che le idee del nostro geniale connazionale abbiano avuto maggior diffusione in Germania che in Italia; infatti il dotto Gesuita fu fatto conoscere casualmente a E. Beltrami, che nel 1889 lo segnalò all'ammirazione degli immemori connazionali.

569 - Durante il secolo XVIII vissero ed insegnarono in Italia due ecclesiastici francesi i quali, per la somiglianza dei casi della vita e per la comunanza di lavoro, non possono venire considerati disgiunti: sono Tommaso Le Seur e Francesco Jacquier. Il primo nacque a Rethel (Ardenne) il 1° ottobre 1703; a diciotto anni fu inscritto all'Ordine dei Minimi: insegnò lungamente a Roma nel Collegio di Propaganda Fide e alla Sapienza e vi pubblicò un *Mémoire sur le calcul intégral* (1758) nel quale è osservato che, se si cerca di dividere un'equazione di grado $m$ per una di grado $n < m$, i coefficienti di questa dipendono da un'equa-

zione del grado $\binom{m}{n}$; in detta città morì il 26 settembre 1770. il secondo nacque a Vitry-le-Français (Marna) il 7 luglio 1711; a 16 anni entrò nell'Ordine dei Minimi; trasferitosi a Roma nel 1733 fu incaricato dell'insegnamento della Sacra Scrittura nell'Istituto di Propaganda Fide ed ebbe poi altre importanti incombenze ufficiali, le quali attestano l'alta considerazione in cui lo tenevano i suoi superiori. Nel 1745 fu destinato a Torino come insegnante di Fisica, ma non vi rimase a lungo essendo stato richiamato nella capitale del mondo cattolico per insegnarvi la stessa materia nel Collegio Romano. Nel 1763 si trasferì a Parma come istitutore dell'infante Don Ferdinando; si restituì a Roma nel 1775 e fu destinato a occupare la cattedra di matematica nel Collegio Romano che tenne sino alla morte, avvenuta il 3 luglio 1788.

Ai due dotti Padri devesi una sontuosa edizione dei *Principia* di Newton con estesi commenti, di cui i più importanti sono dovuti al Calandrini, (v. p. 739); essa ebbe, a breve distanza di tempo (1739, 1760). due edizioni. L'interesse costante del P. Jacquier per le produzioni di Newton è confermato da una nota apposta a i suoi *Elementi di prospettiva secondo i principî di B. Taylor* (Roma, 1755) e avente lo scopo di dimostrare la genesi newtoniana « per umbras di tutte le cubiche piane; ivi la proiezione centrale è vantata come artificio euristico, non soltanto nel campo geometrico, ma anche nelle questioni di quadratura. cosa che l'autore proponevasi di mostrare in uno speciale trattato, che però non vide mai la luce.

Alla collaborazione dei due citati Minimi devesi anche una vasta esposizione del calcolo integrale, nella quale va rilevato (con lode o biasimo a seconda dei gusti) il carattere esclusivamente analitico che la differenzia da tante altre in cui spiccano le considerazioni geometriche: i casi particolari e gli esempi essendo in un numero strabocchevole e nessuno suggerito dalla geometria e dalla meccanica, tutta l'opera risulta di lettura gravosissima. Dalla Prefazione al II Vol. sembra risultare che alcuni corifei della matematica del tempo siansi doluti che i loro lavori fossero stati largamente sfruttati, senza alcuna chiara dichiarazione al riguardo (una sola eccezione gli autori fecero riguardo a Newton che commentarono in più punti); altro appunto essi meritarono per avere attribuite a Euler scoperte di Lagrange.

Dei due volumi in cui consta l'opera, il I tratta dell'integrazione dei differenziali, il II delle equazioni differenziali; non va taciuto che le *Institutiones Calculi Integrali* di Euler cominciarono a pubblicarsi l'anno stesso in cui vide la luce l'opera di cui ragioniamo, circostanza che. mentre ne documenta l'indipendenza, fu certamente di nocumento al successo della stessa opera.

570 - L'Italia, campo di azione dei PP. Jacquier e le Seur, fu patria di Gian Francesco Salvemini, il quale nacque a Castiglione Fiorentino nel 1709. Ottenuta a Pisa la laurea dottorale esulò in Isvizzera ed ivi, ignoriamo per quale motivo, mutò il proprio cognome in quello di Castillon (derivato dal suo luogo di nascita), sotto il quale è conosciuto nella storia della matematica. A Ginevra e Losanna pubblicò la raccolta degli *Opuscula mathematica, philosophica et philologica* (1744) di New-

ton e poi, in unione al Cramer, il carteggio fra Leibniz e Giovanni Bernoulli (1745). La dottrina che egli manifestò con queste pubblicazioni gli fece conferire nel 1751 la cattedra di matematica nell'Università di Utrecht. In occasione di un suo viaggio a Londra fu nominato F. R. S., ma già prima (1741 e 1742) la Società Reale di Londra aveva accolte nei proprî Atti due sue memorie, una sulla cardioide, l'altra sul teorema polinomiale. Nel 1760 pubblicò un'eccellente edizione commentata dell'*Aritmetica universale di Newton,* nella quale va rilevata la dimostrazione delle formole di Newton-Girard dovuta a G. F. Baermann (n. a Lipsia nel 1717, m. il 6 febbraio 1769 a Wittemberg, nella cui Università insegnava); dell'accresciuta rinomanza raggiunta in conseguenza dal Castillon è prova il fatto che Federico II lo chiamò a Berlino ad insegnare in quell'Accademia di Artiglieria e gli diede un seggio (1763) nell'Accademia delle Scienze; ne divenne anzi uno dei Direttori quando il posto divenne vacante per il trasferimento a Parigi di un suo celebre compatriotta. Morì l'11 ottobre 1791. Gli Atti dell'Accademia di Berlino contengono varie sue pregevoli memorie, alcune concernenti la logica matematica; fra le altre limitiamoci a ricordare quella *Sur un problème de géométrie plane* (1776) relativo a una questione propostagli dal Cramer; essa è conosciuta nella storia della geometria col nome di « problema di Castillon »; eccone l'enunciato: « Inscrivere in un circolo un triangolo i cui lati, eventualmente prolungati, passino per tre punti dati ».

In questa rassegna dei contemporanei di Euler, specialmente in questo paragrafo dedicato all'Italia, manca ancora un nome, quello del più grande, di colui che al famoso scienziato di Basilea può contendere il diritto di dare, come matematico, il proprio nome al secolo in cui vissero entrambi: all'esame della sua grande opera è consacrato il seguente Capitolo.

## In Francia

571 - Il giorno 17 di novembre del 1717 sui gradini della chiesa di Parigi detta di Saint-Jean le Rond veniva deposto un neonato che, appunto in memoria di tale circostanza, venne chiamato Jean Baptiste Lerond. Più tardi si seppe che era il prodotto degli amori illegittimi di una signora de Tencin col generale d'artiglieria Destouches; quella non si occupò mai della propria creatura, mentre questi, dopo avere provveduto al suo sostentamento, venendo a morte nel 1726, le assicurò una rendita vitalizia di 1200 franchi annui e lo raccomandò caldamente alla propria famiglia. E appunto grazie a tale appoggio il bimbo divenuto giovinetto potè essere accolto nel Collegio delle Quattro Nazioni, precluso a chi non vantasse nobili natali. S'inscrisse poi nella Facoltà giuridica dell'Università di Parigi, da cui nel 1735 ottenne il grado di baccelliere. Da alcuni documenti che lo riguardano si desume che tre anni dopo mutò il proprio primitivo cognome in quello di d'Alembert, ma non risultano le ragioni di tale metamorfosi. Già da un anno egli aveva ottenuto la licenza di fungere come avvocato, ma non si valse mai di tale diritto; preferì, invece, dedicarsi alle scienze, senza mai assumere qual-

che ufficio remunerativo, bastando ai suoi limitatissimi bisogni la modesta pensione lasciatagli dal padre. L'Accademia delle Scienze, a cui aveva fatte importanti comunicazioni a partire dal 19 luglio 1739, se lo aggregò nel 1742 e nel 1765 lo elesse titolare pensionato.

Un nuovo orientamento del suo pensiero fu determinato da una persona che aveva tentato invano di farsi un nome pubblicando una mediocre raccolta di *Mémoires Mathématiques* (Paris, 1748) (¹), ma che in altri campi raccolse ben meritati allori. Parliamo di Daniele Didérot (n. a Langres il 5 ottobre 1713, m. a Parigi il 31 luglio 1784). Essendo egli stato ufficiato perchè traducesse dall'inglese in francese la *Cyclopaedia* di E. Chambers, dichiarò all'editore di essere invece pronto a comporne una totalmente nuova con l'aiuto di un gruppo di specialisti, fra cui il d'Alembert. E questi, appunto per desiderio del Diderot, v'inserì il *Discorso preliminare* e grande numero di articoli (²) della oggi celebre *Encyclopédie méthodique;* in tal modo fu « magna pars » dell'opera che, pubblicata nel periodo 1751-1777, determinò quel travolgente movimento del pensiero che, avendo col tempo subito profonde deviazioni, ebbe per sanguinoso epilogo la rivoluzione francese.

Quel *Discorso*, facendo conoscere ed ammirare il d'Alembert fuori della stretta cerchia dei matematici, gli schiuse (1755) le porte dell'Accademia francese, di cui divenne poi segretario perpetuo. Per due volte Federico II, che lo ebbe ospite gradito nel 1763, cercò di attrarlo stabilmente a Berlino in qualità di presidente di quell'Accademia, ma sempre indarno; eguale esito ottenne la congenere proposta fattagli da Caterina II di Russia di recarsi a Pietroburgo come istitutore del principe ereditario; egli non volle mai abbandonare la sua diletta città natale, ove morì il 29 ottobre 1783.

572 - D'Alembert è senza dubbio la più eminente personalità matematica che la Francia abbia prodotto durante la prima metà del secolo XVIII; ma quì (e così nella dichiarazione di d'Alembert « les mathématiques on été pour moi une maîtresse ») bisogna intendere il vocabolo matematica nel senso ampio in cui esso era preso durante il secolo XVIII; chè la parte più cospicua degli scritti scientifici di d'Alembert concerne la meccanica (razionale e celeste), non esclusa l'idrodinamica e la fisica matematica (ottica e acustica); si può anzi affermare che i contributi da lui dati all'analisi pura siano stati ottenuti come prodotti secondari degli sforzi che egli giornalmente compiva per giungere a spiegazioni soddisfacenti di fenomeni naturali.

Contava appena ventisei anni quando pubblicò il *Traité de Dynamique*, che doveva portarlo ai fastigi della gloria; è ivi insegnato quel metodo generale per porre in equazione i problemi della dinamica che reca ed è destinato a portare sempre il nome di « principio di d'Alembert »; e, appunto applicando i principi di cui egli è l'inventore, arrivò per primo a spiegare il fenomeno della precessione degli equinozi, che

---

(¹) Dei lavori ivi raccolti l'unico relativo alla matematica propriamente detta, tratta della sviluppante o evolvente di circolo.

(²) Ivi il d'Alembert riuscì a chiarire importanti punti oscuri della nostra scienza od almeno richiamò su di essi l'attenzione dei competenti in materia.

ha tanta importanza nell'astronomia, e potè arrecare all'idraulica contributi del più alto valore.

Più diretto interesse per noi presenta la memoria dal titolo *Réflexions sur la Cause générale des Vents* che l'Accademia di Berlino premiò il 2 giugno 1746 e pubblicò l'anno seguente nei proprii *Atti*; ivi d'Alembert dalla questione d'integrare le funzioni razionali fu indotto a congegnare il primo ragionamento (sia pure non perfetto) per dimostrare la proposizione fondamentale della teoria delle equazioni algebriche (che egli per primo [1] enunciò esattamente scrivendo: « Soit un multinome quelconque $x^m + a\,x^{m-1} + ... + g$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de $x\,y$ fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de $x$ et qui rend ce multinome égal à zéro »; si spinse poi ad affermare essere qualunque funzione di una variabile complessa $x + i\,y$ esprimibile sotto la forma $\varphi\,(x,y) + i\,\psi\,(x,y)$, « benchè », egli aggiunge, « la determinazione delle funzioni $\varphi$, $\psi$ risulti talora impossibile ».

Di notevole importanza sono i contributi da lui dati all'analisi infinitesimale. Infatti, oltre ad essersi occupato dell'integrazione delle funzioni razionali, egli ha suggerita un'applicazione del calcolo integrale alla dimostrazione della formola di Taylor; quantunque l'argomentazione da lui immaginata non sembri oggi soddisfacente, pure essa indusse Condorcet a designare quella formola come « théorème de d'Alembert » (*Encyclop. méthodique*, art. *Séries*), mentre il d'Alembert stesso nell'articolo *Approssimation* la chiamò col nome attuale.

La rettificazione dell'asteroide regolare lo condusse a conseguenze paradossali che vennero chiarite in Italia (Mascheroni, Gratognini). Agli integrali ellittici o riducibili a tali egli ha dedicato molte investigazioni, incontrandosi in qualche risultato con V. Riccati, riguardo al quale elevò diritti di priorità. Pure vaste e conclusive furono le sue ricerche sopra le equazioni differenziali: egli ha, infatti, dimostrata l'esistenza del fattore integrante per quelle del 1° ordine ed ha insegnata l'integrazione di alcune d'ordine superiore, ad esempio della seguente:

$$y'''\,y' + a\,y''^2 + b\,y''\,y'^2 + c\,y'^4 = 0.$$

Per primo si è occupato di sistemi di equazioni differenziali: inoltre mostrò come si possano integrare certe equazioni funzionali del tipo seguente

$$\varphi\,(t + a\,s) + \psi\,(t + b\,s) = S\,(s) \cdot T\,(t),$$

ove $\varphi$ e $\psi$ sono funzioni incognite, $S(s)$ e $T(t)$ funzioni opportunamente scelte e $a$, $b$ costanti.

573 - Alla teoria delle corde vibranti (di cui eransi occupati con mediocre successo Brook Taylor e Giovanni Bernoulli) egli diede assetto pienamente soddisfacente, erigendola sopra un'equazione a derivate par-

[1] Donde la ragione del nome di *teorema di d'Alembert* con cui è talora designato.

ziali del seguente tipo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

e dimostrando che questa ha per integrale generale

$$(1) \qquad y = f_1(t + \alpha x) + f_2(t - \alpha x),$$

$f_1$ e $f_2$ essendo funzioni arbitrarie; in tal modo non solo egli schiuse ai geometri un'ubertosa provincia (teoria delle equazioni a derivate parziali), ma vi fece scoperte che sono ancora citate con grande onore. Nel corso delle discussioni che egli ebbe riguardo alla generalità dell'integrale [1] con Euler e Nicolò Bernoulli, ebbero parte importante le serie trigonometriche, che tanto occuparono gli analisti del secolo XIX, ansiosi di fare piena luce sopra un argomento di così fondamentale importanza.

Non è questo l'unico soggetto riguardo a cui il d'Alembert si trovò in dissenso con matematici del suo tempo, chè la teoria delle probabilità, quale era allora, fu oggetto da parte sua di critiche non ingiustificate quando egli ne vide le applicazioni fattene al « problema di Pietroburgo » (v. p. 688) e quelle tentate per giudicare dell'efficacia dell'innesto del vajuolo (tema di ardenti dibattiti in Francia durante il secolo XVIII). Mentre in queste discussioni d'Alembert assunse un'attitudine degna di approvazione, altrettanto non può ripetersi riguardo alla questione del significato da attribuirsi al logaritmo dei numeri negativi, chè in tale occasione egli a torto si atteggiò ad avversario di Euler e sostenitore di Giovanni Bernoulli. Va però rilevato a suo onore che, nel confutare il primo, egli fece l'osservazione esattissima che la curva di 8° ordine $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$, considerata dal suo avversario (cfr. p. 711), nel caso $b = 0$ non si abbassa al 4°, ma si scompone in due linee di questo ordine.

Ciò ne conduce ad osservare che anche la geometria è debitrice al d'Alembert di qualche perfezionamento. Infatti alcune considerazioni di carattere filosofico e metodologico sopra vari punti degli elementi di detta scienza, sepolte nei volumi dell'*Encyclopédie méthodique,* meriterebbero di essere riesumati e riposti in circolazione. Inoltre in una memoria *Sur l'Attraction des Sphéroides*, inserita nel T. VII dei suoi *Opuscules,* egli ha estesa all'elissoide la proprietà dei coni quàdrici di avere due serie di sezioni circolari. Finalmente, al dire di N. Fuss (*Nova Acta Petrop.*, T. XIV, 1805), egli avrebbe per primo osservato che i sei centri di similitudine di tre cerchi complanari, considerati a coppie, si trovano tre a tre in quattro determinate rette.

D'Alembert, malgrado la vastità ed importanza delle sue ricerche matematiche, ad onta della ben meritata notorietà che gli diedero le sue pubblicazioni letterarie, non esercitò grande influenza sulle masse, ciò forse per non avere mai occupata una cattedra, ma più specialmente perchè fu un espositore ben poco felice; specialmente nella scelta delle notazioni egli si attenne sempre alle meno perspicue allora in uso, cioè alle peggiori; in conseguenza il valore suo come matematico rifulse in

piena luce soltanto quando le teorie, i metodi, i risultati di cui egli è autore, vennero ritrovati da altri o presentati sotto aspetto più attraente. Tuttavia, notando la frequenza con cui il suo nome s'incontra nelle pubblicazioni analitiche posteriori, si vede che anche per lui è sorto il dì della lode, la posterità avendogli resa piena giustizia.

574 - A continuare in Francia le gloriose tradizioni analitiche sembrava destinato il marchese Giovanni Antonio Nicola Caritat di Condorcet, nato a Ribernout (Picardia) il 17 settembre 1743, il quale, in conseguenza di alcuni lavori di calcolo infinitesimale pubblicati nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, ne fu eletto « associé » (1769) e poi segretario perpetuo (1773). Appunto in tale qualità recitò buon numero di elogi di accademici defunti, che raccolse poi in apprezzatissimi volumi, grazie a cui entrò (1782) nell'Accademia francese. Dalle tranquille occupazioni scientifiche lo strappò nel 1789 il turbine rivoluzionario, nel quale gittossi a capofitto [1]. Cinque dipartimenti lo inviarono quale loro rappresentante alla Convenzione nazionale, ove sedette fra i Girondini. Colpito dal Decreto d'arresto diretto contro il suo partito (8 luglio 1793) e poi rinviato a giudizio, 3 ottobre dello stesso anno, per sfuggire alla inevitabile ghigliottina, visse parecchi mesi celato in una casa amica; la lasciò quando non vi si sentì più sicuro, essendo stato dichiarato contumace e fuori della legge; vagò allora nei dintorni di Parigi sotto falso nome, ma finì per essere arrestato alle porte di Bourg-la-Reine. Per evitare un disonorante pubblico supplizio ingoiò il veleno che portava sempre seco (8 aprile 1794), ma per parecchi giorni il mondo ignorò che l'oscuro suicida Pietro Simon altri non fosse che il brillante segretario dell'Accademia delle scienze.

Durante i mesi che passò nascosto agli occhi dell'autorità, egli scrisse un pregevole *Esquisse d'un Tableau historique des Progrès de l'Esprit humain,* che è forse la meno discussa delle sue opere; la Convenzione nazionale, con uno di quei postumi ravvedimenti così frequenti nelle assemblee agitate da passioni violente, onde dimostrare il proprio rammarico per la scomparsa di un eminente pensatore, decise di patrocinare la stampa di quel lavoro col sottoscrivere per 3000 copie da distribuirsi « dans toute l'étendue de la République de la manière la plus utile à l'instruction ». Che realmente la diffusione di essa fra le masse fosse consigliabile è provato dal suo contenuto, quale risulta dal seguente Indice:

I. Gli uomini riuniti in società. - II. I popoli pastori; trapasso da questo allo stato dei popoli agricoltori. - III. Progressi dei popoli agricoltori sino all'invenzione della scrittura. - IV. Progressi dello spirito umano in Grecia, sino al tempo della divisione delle scienze, verso il secolo d'Alessandro. - V. Progressi delle scienze e della loro divisione sino all'epoca di decadenza. - VI. Decadenza della coltura sino alla loro

[1] Per rendersi conto della somma di energia dedicata da Condorcet alla vita pubblica si consulti l'articolo della sig.na H. Delsaux, *Description des Journaux auxquels Condorcet a collaboré,* pubblicato nel *Bulletin of the International Committee of Historical Sciences* (June 1930). Lo stesso tema è svolto ampiamente nel volume della stessa autrice *Condorcet journaliste* (1790-1794) (Paris 1931).

restaurazione all'epoca delle Crociate. - VII. Primi progressi delle scienze sino all'invenzione della stampa. - VIII. Dall'invenzione della stampa sino al momento in cui le scienze e la filosofia scuotono il giogo dell'autorità. - IX. Da Descartes sino alla costituzione della Repubblica francese. - X. Progressi futuri dello spirito umano.

L'alta posizione sociale ed accademica, la partecipazione alla vita pubblica in una delle epoche più importanti che ricordi la storia e la tragica fine, assicurarono a Condorcet una tale fama che egli venne da molti equiparato ai più eminenti scienziati che onorarono la Francia; ma questo giudizio non tardò a subire una radicale revisione. Mentre sarebbe difficile citare qualche sua scoperta o metodo che sia stata degna di un posto stabile nella scienza [1] e qualche sua scoperta matematica a cui sia attaccato il suo nome [2], gli storici della teoria delle probabilità sono concordi nel ritenere che l'opera in cui egli volle applicare quella teoria a stabilire le leggi governatrici delle decisioni a pluralità di voti ha completamente mancato il suo scopo; l'oscurità dello stile e l'uso di notazioni con significati differenti da quelli già consacrati dall'uso ne resero e ancora ne rendono la lettura assai penosa; ma anche dopochè il tutto venne tradotto in linguaggio generalmente intelligibile si dovette riconoscere che ivi teoria e pratica non si presentavano più soddisfacenti di quanto fossero prima. Nuove applicazioni della medesima disciplina a problemi suggeriti dall'umano consorzio si leggono in posteriori pubblicazioni fatte dal Condorcet (1781-1784) sotto gli auspici dell'Accademia di Parigi; così (ispirandosi all'esempio dato da Newton con le sue ricerche cronologiche) egli si è proposto di determinare il grado di attendibilità che possiedono i numeri generalmente assunti, relativi alla durata totale (257 anni) del governo dei sette re di Roma; ma non riuscì a soddisfare nè matematici nè storici.

575 - Non molto importanti sono i lavori algebrici di un altro membro del patriziato francese, Alessio Fontaine des Bertins. Egli nacque a Claivason (Delfinato) o Bourg-Argental verso il 1705; rimasto orfano di padre quando aveva vent'anni, si trasferì per qualche tempo a Parigi; cadutogli casualmente fra mano un libro di geometria, s'interessò talmente alla materia che per avere qualche guida allo studio di essa si volse a L. B. Castel (1688-1757) che era allora il più noto matematico che contasse in Francia la Compagnia di Gesù. In base alle indicazioni avute si pose da solo al corrente dello stato dell'analisi al suo tempo.

---

[1] Egli si è occupato particolarmente di equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali; ma se il suo nome s'incontra qualche volta in lavori posteriori sull'argomento è come omaggio alla sua memoria e per sostituire a quanto egli scrisse qualche cosa migliore; ad esempio, l'integrazione per serie dell'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1+x}{1+y} = 0$$

fu abbandonata per altro più conveniente procedimento.

[2] Nel 1778 il Condorcet divise col capitano Tempelhoff il premio assegnato dal l'Accademia di Berlino a chi perfezionasse il metodo per calcolare l'orbita di una cometa in base alle osservazioni; ma gli artifici da lui proposti nel suo *Essai sur la théorie des comètes* (1780) non furono approvati dagli astronomi, epperò non entrarono nell'uso.

ma preferì sempre procedere da sè nelle sue ricerche, ricorrendo esclusivamente alle proprie forze; questa repulsione per la lettura lo portò più volte a ritrovare cose già note e così incorrere nell'accusa di plagio; essa lo indusse anche nel 1765 a disfarsi della propria biblioteca, che costituiva per lui un inutile ingombro. All'Accademia di Parigi [1] a cui apparteneva, presentò buon numero di memorie che raccolse poi in un volume. Stanco della vita della capitale, si ritirò a Cuiseax (Borgogna), ove si spense il 21 agosto 1771. Una sua memoria sul problema inverso delle curve isottiche (Mém. de Paris, 1734) offrì il fianco a critiche giustificate da parte del Clairaut, il quale poco prima (stesso volume) si era occupato di questioni analoghe in una memoria dedicata a « plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leur branches, exprimée par une équation donnée ». Non molto più felice fu il Fontaine nelle sue ricerche sulla teoria delle equazioni algebriche (Mém. de Paris, 1747). Egli, atteggiandosi a novello Colombo scopritore di un Nuovo Mondo, propose un metodo per riconoscere la natura delle radici di un'equazione algebrica a coefficienti numerici basato sulla costruzione di apposite tabelle, redatte in base alla seguente considerazione: Il primo membro di una equazione $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ s'immagini scomposto in $n$ fattori lineari $x - a_1, x - a_2, \ldots. x - a_n$, ove i numeri $a_k$ sono numeri reali ($l$) o complessi ($m + n\,i$); si considerino tutti i casi che si possono presentare tenendo conto dei segni (o eventuale nullità) delle quantità $l, m, n$; per ciascuno le costanti $p_i$ presenteranno una certa successione di segni e daranno luogo a determinate relazioni di diseguaglianza. Ora, secondo il Fontaine, data che sia un'equazione numerica, dall'ispezione dei segni dei suoi coefficienti si potrà dedurre a quale elemento della tabella essa sia da ascriversi e quindi quale sia la natura algebrica delle sue radici. Ma è chiaro che la costruzione di quella tabella è un lavoro penoso e lunghissimo, inoltre non esente da difficoltà, come risulta dal fatto che lo stesso Fontaine ha trascurati alcuni dei casi che presentano le equazioni dei primi gradi; finalmente (e ciò è la cosa più importante e fu osservata da Lagrange) una assegnata successione di segni e certe relazioni di diseguaglianze riscontrate fra i coefficienti *non caratterizzano* sempre la natura delle radici, potendo corrispondere a parecchi casi. Basta ciò a concludere che la citata memoria non ha ormai più che un valore storico, come documento dell'interesse che per le equazioni algebriche nutrivano i matematici del secolo XVIII.

Più fortunato fu il Fontaine nelle sue ricerche analitiche, essendo riuscito a dimostrare che l'integrale generale di un'equazione differenziale d'ordine $n$ contiene $n$ costanti arbitrarie. Ma le critiche che egli rivolse al calcolo delle variazioni, gloria di Euler e Lagrange, provano soltanto che non aveva compresa la portata e la natura del nuovo metodo.

---

[1] Sino dal 1742 essa diede un giudizio lusinghiero sopra un suo lavoro rimasto poi inedito.

576 - I due matematici francesi di cui ci resta ancora da parlare nel presente Capitolo contribuirono entrambi, in modo cospicuo, al perfezionamento delle nostre cognizioni intorno alle equazioni algebriche. Il primo è Stefano Bézout, n. a Némours il 31 marzo 1730, m. a S. Gut il 27 aprile 1783. Tormentato lui pure, come tanti matematici del suo tempo, dal desiderio di giungere alla risoluzione delle equazioni letterali di tutti i gradi, egli — ammettendo come dato di fatto la risolubilità algebrica di tutte le equazioni binomie — si propose di ridurre a questo tipo le equazioni generali. Nella memoria *Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique* (Mém. de Paris, 1762), come fecero de Moivre e Euler, indicò intere categorie di equazioni algebriche che possono essere ridotte a binomie, epperò risolute. Incoraggiato da tale parziale successo, nella posteriore memoria *Sur la résolution générale des équations de tous les degrés* (ivi, 1765) tentò un volo verso le equazioni generali; toccò la metà supponendole di IV grado, ma, di fronte a quelle del V, si arrestò spaventato dalla complicazione dei calcoli, senza però manifestare la convinzione che questi conducessero realmente all'agognata mèta. Più importante è la memoria dello stesso matematico intitolata *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations* (Id., 1764), chè trovasi ivi esposto un procedimento che (ora sotto il nome di Bézout, ora con quello di Euler) è rimasto nella scienza. Per mostrare in che cosa consista ragioniamo, come fece il geometra francese, sulle equazioni

$$z^2 + Pz + Q = 0 \quad , \quad z^3 + pz^2 + qz + r = 0;$$

se queste hanno una radice comune si potranno determinare tre costanti $a$, $b$, $A$, tali che risulti identicamente

$$(z^2 + Pz + Q)\,(z^2 + az + b) = (z^3 + pz^2 + qz + r)\,(z + A);$$

devono quindi sussistere le quattro seguenti relazioni

$$P + a = p + A \quad , \quad Q + Pa + b = q + pA \quad ,$$
$$Pb + Qa = qA + r \quad , \quad Qb = rA;$$

essendo esse lineari nelle tre indeterminate $a$, $b$, $A$, si possono eliminare tali quantità e così si giunge al cercato risultante.

Ora per ottenere queste sotto forma definitiva il Bézout fu naturalmente condotto a riprendere, per perfezionarla, la regola che vedremo n. 584) data da G. Cramer per esprimere i valori delle incognite nei sistemi determinati di equazioni lineari; questo è appunto il tema delle *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues* (ivi, 1764); esse fanno occupare a Bézout un posto cospicuo nella preistoria della teoria dei determinanti. Al quale gli danno ancor maggiormente diritto molte pagine della sua grande opera dal titolo *Théorie générale des équations algébriques* (Paris, 1779), nella quale, inoltre, trovasi stabilito il fondamentale teorema che a ragione reca il suo nome e che egli enuncia con le seguenti parole: « Le degré

de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations complètes, et de degrés quelconques, est égal au produit des exposants des degrés de ces équations ». Oltre che per questo importantissimo risultato, l'opera del Bézout va ricordata con onore per essere il primo esteso trattato sopra la teoria delle equazioni algebriche, composto con molti materiali creati dall'autore, ma senza esclusione di quelli provenienti da altra fonte.

Il Bézout, il quale durante tutta la propria vita occupò cattedre di matematica in stabilimenti francesi destinati all'istruzione degli ufficiali di terra e di mare, ha scritto due importanti *Cours de Mathématiques*, uno in sei volumi destinato ai futuri marinai (Paris, 1764-69), l'altro in quattro (Ivi, 1770-72) pei giovani incaricati di guidare le truppe d'artiglieria; grazie alle loro non comuni doti didattiche, essi furono ricercati e studiati anche da persone non destinate a vestire alcuna divisa.

577 - L'altro scienziato a cui facemmo allusione nell'esordio del n. prec. è Alessandro Teofilo Vandermonde, n. a Parigi nel 1735, m. ivi il 1° gennaio 1796. Il suo *Mémoire sur la résolution des équations* fu letto all'Accademia delle Scienze di Parigi nel novembre 1770, ma non fu dato alle stampe che l'anno seguente perchè solo allora l'autore divenne membro di quella corporazione, circostanza che va rilevata per stabilire l'indipendenza delle ricerche del Vandermonde dalle congeneri condotte a termine da Waring e Lagrange. Nel citato lavoro l'autore osserva che, quando si ha un'equazione algebrica letterale, l'espressione delle radici in funzione dei coefficienti dev'essere tale che, sostituendo a questi le loro espressioni in funzione delle radici, si giunga ad un'espressione valida per la prima, come per la seconda, ecc. Partendo da siffatta osservazione il Vandermonde considera varie lettere deputate a rappresentare le radici di un'equazione algebrica e cerca di comporre col loro mezzo un'espressione irrazionale la quale, per l'equivocità dei segni, si riduca indifferentemente ad una o l'altra delle radici. Si affaccia allora la difficile questione di trasformarla in altra contenente i coefficienti dell'equazione considerata o almeno di farla dipendere da altre equazioni che si sappiano risolvere. Per accostarsi alla mètà il Vandermonde presenta delle forme di calcolo, da lui dette « tipi », mediante cui si può prevedere quale sarà il risultato di quelle complicate operazioni. Tale concetto serve egregiamente per le equazioni dei primi quattro gradi, ma per il quinto porta ad un'equazione del sesto. Emerge da ciò che la via tracciata dal geniale matematico francese non guida allo scopo (e sappiamo oggi che non poteva condurvi); ciò non ostante la memoria in discorso è notevole per le idee originali ivi sparse, nelle quali si ravvisa oggi una antecipazione, forse una preparazione, alla teoria delle sostituzioni.

Non meno notevole è il *Mémoire sur l'élimination* dello stesso autore, letto all'Accademia delle Scienze il 12 gennaio 1771 e pubblicato l'anno successivo fra i lavori di essa. Ivi sono studiate a fondo le funzioni dei coefficienti che s'incontrano risolvendo un sistema determinato di equazioni lineari. Senza avere notizia alcuna di quanto aveva pensato sull'argomento Leibniz (p. 590), il Vandermonde ha proposto e

usato un sistema di notazione per i coefficienti che ha una grande rassomiglianza con quello leibniziano e con la nostra notazione a doppio indice, chè mentre Leibniz scriveva ad es. $1_2$ e noi $a_{12}$ il matematico francese adoperò il simbolo $\frac{1^{\cdot}}{2^{\cdot}}$ Servendosi della risultante simbolica egli potè stabilire alcune delle proprietà fondamentali dei determinanti; cosicchè il Muir, che oggi è il più reputato storico dell'argomento, non esitò a dichiarare che il Vandermonde è il matematico a cui con maggiore ragione si può dare la qualifica di fondatore della teoria dei determinanti.

Lo stesso volume degli atti parigini contiene del Vandermonde un *Mémoire sur les irrationelles des différents ordres, avec une application au cercle,* nel quale sono profondamente investigate le espressioni che nascono dal prodotto

$$[p]^{n} = p\,(p-1)\ldots(p-n+1)$$

quando si attribuiscano a $n$ e $p$ valori non interi e positivi. Fra i risultati ottenuti, limitiamoci a citare il seguente perchè giustifica il titolo del lavoro in discorso:

$$\left[\frac{1}{2}\right]^{n}\left[-\frac{1}{2}\right]^{n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\pi}{2n-1}.$$

Verso il termine del suo scritto l'autore ha esteso le proprie considerazioni alle più generali espressioni del seguente tipo

$$[\varphi\,\overline{(p)}]^{n} = \varphi\,(p)\cdot\varphi\,(p-1)\ldots\varphi\,(p-n+1).$$

Basti questo cenno a provare che anche in questo lavoro il Vandermonde ha manifestata quell'indipendenza di pensiero di cui diede luminose prove nei precedenti; ond'è naturale il rammarico che i gravosi uffici affidatigli dal patrio governo (in particolare la direzione del « Conservatoire des arts et métiers ») gli abbiano vietato di continuare a dedicarsi alla ricerca scientifica, per la quale aveva un'invidiabile attitudine.

## In Isvizzera

578 - Giovanni Enrico Lambert nacque (in una famiglia emigrata dalla Francia per la revoca dell'editto di Nantes) a Mühlhausen, città in allora svizzera, il 26 agosto 1728. Suo padre, povero sarto, non intendeva che egli si dedicasse agli studi e soltanto dopo lunga resistenza concesse che egli s'indirizzasse verso la teologia; ma il giovinetto sentivasi attratto verso le scienze positive e da solo fece su di esse studi assidui e profondi. Una prova della precocità del suo interesse per quelle discipline è offerta dall'osservazione da lui fatta della cometa apparsa nel 1744; appunto da quel momento cominciò le ricerche che lo condussero alla scoperta del teorema che reca il suo nome e che pubblicò nel

1761 [1]. Esso afferma che « il tempo durante cui è percorso un arco qualunque di una trajettoria parabolica non dipende che dalla relativa corda e dalla somma dei raggi vettori dei punti estremi » ; aggiungiamo che al termine del suo scritto egli estese questo teorema all'ellisse, giungendo al seguente notevole risultato: « Se, in due ellissi aventi comuni un fuoco, si considerano due archi di cui le corde siano fra loro eguali e di cui siano anche eguali le somme dei raggi vettori uscenti dal fuoco comune e terminanti agli estremi di quegli archi, le aree dei corrispondenti settori staranno fra loro come le radici quadrate dei parametri delle due curve considerate ».

Nel 1744 fu ammesso in qualità di segretario nella casa di G. R. Iselin, professore di diritto nell'Università di Basilea. Nel 1748 si trasferì a Coira come istitutore dei figli del conte P. de Salis, coi quali, nel periodo 1756,58, compì lunghi viaggi in Germania, Olanda ed Italia settentrionale; nel corso di essi ebbe occasione di conoscere e farsi stimare da personalità eminenti, quali d'Alembert e Kästner (v. n. 814) che nel 1736 lo fece nominare corrispondente della Società di Gottinga. Le molte sue opere di matematica, fisica e filosofia lo designarono ai dirigenti dell'Accademia fondata il 28 marzo 1759 a Monaco (Baviera) come persona indicata per divenirne membro attivo, ed egli accettò tale carica (pure continuando a risiedere ad Augusta, ove aveva scelto dimora dal 1760), e la conservò sin verso il 1764. Euler lo propose come membro della Accademia di Pietroburgo, ma egli non accettò di lasciare un paese libero per uno governato autocraticamente; invece nel 1764 si trasferì a Berlino e il 9 gennaio 1765 fu ammesso in quell'Accademia (di cui era corrispondente sino dal 1761): in tale occasione tenne (24 giugno di quell'anno) un'orazione *Sur les liaisons des connaissances qui sont l'objet de chacune des quatre Classes de l'Académie*, informata al concetto che calcolo ed esperienza debbono procedere sempre d'accordo nella ricerca della verità. Il governo prussiano nel 1770 gli conferì anche l'ufficio di consigliere edilizio (Baurat), ma egli potè disimpegnarlo per breve tempo, (poichè la tubercolosi, che lo aveva colpito nel 1775, addì 25 settembre 1777 « le fit passer de la Société des mortels à celle des immortels, où jamais personne n'àpporta plus des titres pour y être admis, ni plus d'avance pour en profiter » (Formey).

Il Lambert tenne attivo carteggio con parecchi eminenti scienziati del suo tempo e le sue lettere, grazie alla loro importanza, vennero da tempo date alle stampe; fu così posta a disposizione degli storici una preziosa raccolta di notizie sull'evoluzione del suo pensiero scientifico, a cui si può aggiungere quanto è registrato in un'Agenda (Tagebuch) da lui diligentemente tenuta e che, essa pure, venne di recente pubblicata.

579 - Della sua moltiforme produzione scientifica deve far oggetto di esame da parte nostra soltanto quanto concerne la matematica pura; perciò dobbiamo escludere i lavori prettamente filosofici, ma osserveremo che è dalle relative elucubrazioni che egli fu condotto a ripren-

---

(1) Il relativo scritto venne riprodotto nella nota *Collezione di classici* dell'Ostwald.

dere un ordine di studi schizzato da Leibniz con la sua « caratteristica geometrica » (p. 580); a tal fine propose e applicò un sistema di notazioni che consente di sostituire un calcolo ad un ragionamento; così diede un prezioso contributo alla logica matematica ([1]).

Nello stesso orientamento mentale devesi ricercare la prima radice delle sue originali e importanti osservazioni sui fondamenti della geometria; pubblicate dopo la morte dell'autore dall'ultimo dei Bernoulli, esse furono valutate come meritano soltanto dopo la creazione dei sistemi geometrici non-euclidei, epperò non diedero i frutti a cui sembravano destinati. La somiglianza del punto di partenza del Lambert con quello dello Saccheri induce a supporre che a lui non siano rimaste ignote l'opera del Gesuita italiano, su cui, come vedemmo (p. 720), il Klügel aveva richiamata l'attenzione dei proprii compatriotti; ma anche se ciò è accaduto, il Lambert aggiunse del suo cose di tale importanza che il suo merito come cultore della geometria non soffre offesa alcuna; ciò risulta da quanto ora diremo.

Egli, da quell'esimio cultore della logica che era, cominciò con lo investigare quale fosse il significato della ricerca di una dimostrazione del postulato d'Euclide; esaurita tale ricerca storico-critica (Parte I), egli fece conoscere (Parte II) alcuni preliminari che si possono scegliere da chi intende giungere alla risoluzione della « vexata quaestio ». In una III Parte — che è indubbiamente la più originale — egli partì dalla considerazione di un quadrilatero avente tre angoli retti ed osservò che, riguardo alla grandezza del quarto, possono farsi tre ipotesi. Ammettendo che sia retto si ricade nella geometria di Euclide; se è ottuso si giunge ad un sistema geometrico del tipo di quello che sussiste sopra la sfera; se finalmente è acuto si arriva a un curioso genere di geometria quale si avrebbe sopra una sfera di raggio immaginario; ed è ammirabile come il Lambert non rifugga da una considerazione che sarebbe apparsa inconcepibile a molti, in un'epoca nelle quali gli immaginari in algebra erano considerati ancora con sospetto e dalla geometria erano totalmente ignorati.

580 - La maggior parte degli altri lavori del Lambert si direbbero ispirati al pensiero di far servire la matematica ai bisogni della pratica. Tale concetto trovasi a base della sua *Freye Perspective*, il cui scopo è di insegnare un metodo per disegnare la prospettiva di un oggetto senza ricorrere alle due projezioni ortogonali dello stesso; è il medesimo intento che erasi dianzi proposto B. Taylor (v. p. 647) in un'opera che sembra sia rimasta ignota al Lambert; devesi però riconoscere che il matematico inglese erasi avvicinato allo scopo assai più di questo; donde la ragione del mediocre successo della *Freye Perspective* presso pittori ed architetti ([2]), i quali, ad es., avranno trovato mediocremente giovevole per loro l'osservazione, indubbiamente originale, che projettare da

---

([1]) Un'esposizione dei concetti fondamentali posti e applicati dal Lambert trovasi in *A Survey of Symbolic Logic* (Berkeley, 1918) di C. J. Lewis.

([2]) Il Lambert era siffattamente convinto della necessità del connubio fra pittura e geometria che voleva fosse *imposto* l'uso della riga nella delineazione dei paesaggi ed esortò i Mecenati a non acquistare quadri disegnati a mano completamente libera.

un punto all'infinito una figura di dimensioni finite val quanto projettare da un centro proprio una figura di dimensioni infinitesime. I cultori della matematica pura troveranno invece nell'opera del Lambert, oltre a questa, buon numero di osservazioni originali (p. es. alcune belle costruzioni eseguibili con la sola riga), mentre quelli che s'interessano di geometria descrittiva saranno impressionati da geniali antecipazioni di teorie moderne (p. es. della fotogrammetria). Né va omessa l'osservazione che il nome del Lambert incontrasi eziandio nella teoria delle ombre, giacchè egli, nella sua *Photometria* (pure riprodotta fra i *Classici* dell'Ostwald) ha proposta la cosidetta « legge del coseno » ; in base ad essa « la quantità di luce che riceve una porzione di superficie opaca illuminata da un punto all'infinito è proporzionale tanto all'area della superficie illuminata, quanto al coseno dell'angolo di incidenza ».

581 - Il Lambert ha adunati, in una serie di volumi intitolati *Beiträge zum Gebrauche der Matematik,* buon numero di lavori ove la matematica trovasi applicata a svariate e importanti questioni ; di tali lavori soltanto alcuni entrano nel nostro quadro, gli altri concernendo varie branche della matematica applicata ; solo dei primi ci occuperemo.

Nel I Volume della II Parte di detta collezione si trovano tre articoli i quali attestano l'abilità, anzi la passione per calcolare che aveva l'eminente scienziato svizzero. Di essi il primo concerne la questione di determinare i divisori dei numeri, questione di cui è superfluo rilevare la difficoltà, quando si tratti di numeri molto grandi, e la pratica utilità ; per risolverla il Lambert suggerisce parecchi espedienti, ma si direbbe che non fosse sicuro di avere conseguito lo scopo perchè nel secondo di detti articoli egli rivolge ai calcolatori l'esortazione di porre a disposizione di tutti una tabella dei divisori dei numeri non superiori a un milione, ricordando alcuni lavori congeneri anteriori di mole minore e suggerendo poi alcuni espedienti intesi a ridurre al minimo le dimensioni della tabella costruenda. Per meglio chiarirli e per documentarne la praticità egli presentò un foglio delle dimensioni di 50 per 33 cm. ove sono registrati i divisori di tutti i numeri compresi fra 1 e 10200. Malgrado i congeneri lavori posteriori di maggior mole, da quanto dice il Lambert i calcolatori possono apprendere ancora qualche cosa ; nè va taciuto che dal suo carteggio scientifico risulta che l'appello di cui sopra non rimase inascoltato [1]. Nel terzo dei citati articoli, dal campo degli interi si passa alle frazioni, aritmetiche e algebriche, specialmente in vista delle trasformazioni che esse possono subire. Vi s'incontrano le frazioni continue, ordinarie ed ascendenti e, fra le une e le altre, una terza categoria, di cui l'autore pone in evidenza l'utilità, malgrado l'irregolarità che si nota nel loro andamento. Delle frazioni continue egli si servì anche per trovare nuove espressioni di funzioni di una variabile ; citiamo, ad es., quelle relative a $\log(1 + x)$ e $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$.

Di tali sviluppi trovansi notevoli applicazioni in altro articolo del

[1] Sull'argomento lo stesso matematico ritornò nei suoi *Zusätze zu den log. trig. Tafeln* per migliorare la disposizione della tavola dei divisori dei numeri data dal Rahn nella sua *Teutsche Algebra* (Vol. II, p. 467), correggere alcuni errori che vi si trovano ed estenderla sino a 102000.

medesimo volume dedicato al calcolo di $\pi$ (parliamo dello scritto intitolato *Vorläufige Kenntnisse für die, die Quadratur und die Rectification des Circuls suchen*) [1]. A scriverlo il Lambert fu indotto dal fatto che parecchi dei suoi contemporanei avevano asserito essere esattamente $\pi = \left(\frac{62}{35}\right)^2$; ora il Lambert fa vedere che, anche quando si voglia esprimere $\pi$ come quoziente di due quadrati, si possono trovare espressioni approssimate ben più convenienti della precedente; fra l'altro egli s'imbattè nel valore $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, usato dagli Egiziani, cosa a lui ignota perchè un secolo doveva ancora passare prima che fosse scoperto e decifrato il Papiro Rhind (v. pp. 12 e 21). Proseguendo nella lettura di quell'importante articolo si vede come il Lambert fosse tormentato dall'aspirazione di dimostrare rigorosamente l'irrazionalità di $\pi$, fatto che i suoi calcoli lo portavano ad ammettere; intanto diede molti valori di $1/\pi$ sempre più approssimati, l'ultimo dei quali è il seguente:

$$324521540032945 : 1019514486099146.$$

Egli nota poi esistere nell'analisi un altro numero importante quanto misterioso, cioè $e$, e dà varie espressioni che vi si riferiscono in frazione continua.

Va ora notato che, fra il momento in cui il citato articolo fu scritto e quello in cui venne stampato, il Lambert giunse per primo a dedurre dallo sviluppo di tg $x$ in frazione continua che, se $x$ è un numero razionale, tg $x$ è irrazionale e viceversa, il che, nell'ipotesi $x = \pi/4$, abilita a concludere l'irrazionalità di $\pi$. Questa scoperta (e l'analoga relativa alla iperbole equilatera) costituisce uno dei maggiori titoli di gloria del Lambert e si legge nel suo *Mémoire sur quelques Propriétés remarquables des Quantités transcendentes circulaires et logarithmiques* (Mém. de Berlin, 1761). Proseguendo e ampliando tali studi, fino a toccare il campo proprio dell'analisi, egli si è occupato della rettificazione approssimata dell'ellisse (*Beyträge*, III Tl.) facendo conoscere varie serie che possono utilmente servire allo scopo; è poi suo merito l'avere seguito V. Riccati (v. n. 521) nel considerare le funzioni iperboliche. Segnaliamo ancora due suoi articoli: uno sulla risoluzione delle equazioni numeriche (*Beyträge*, I Vol. della II Parte), l'altro relativo ai vari metodi d'interpolazione (Ivi, III Parte).

582 - Sopra i molti articoli dei *Beyträge* relativi alla geometria pratica ed all'astronomia non dobbiamo arrestarci. Un cenno elogioso va invece fatto riguardo alle dimostrazioni date dal Lambert, applicando il calcolo integrale, di alcuni teoremi della *Stereometria Doliorum* di Kepler (p. 413) e altro ancora più caldo sopra le sue ricerche intorno alla costruzione delle carte del cielo e della terra, le quali guidarono a nuovi metodi di rappresentazione che portano ancora il suo nome [2], in un

---

(1) Riprodotto nel volume di Rudio, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (Leipzig, 1892).

(2) Anche questi scritti si ritrovano nella *Collezione* dell'Ostwald.

campo, grazie a cui la matematica prestò importanti servigi al consorzio sociale, il Lambert arrecò notevoli contributi; ma i risultati ottenuti, non essendo stati allora apprezzati a dovere, vengono di consueto attribuiti ad altri che vi giunsero molto dopo di lui. Alludiamo all'attuaria, a cui si riferiscono due articoli inseriti nelle Parti I e III dei *Beyträge* (sono quelli intitolati *Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche* e *Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenliste. Geburthen und Ehen*); le vedute veramente profetiche ivi esposte spiegano come un giudice di indiscussa competenza, Emanuele Kant, designasse il Lambert come « das ausserordentliche Genie ».

Notevoli sono pure i suoi studi sulla trigonometria. Delle funzioni circolari egli si è occupato (*Beyträge*, Vol. I della II Parte) assegnando le espressioni con radicali dei seni degli angoli del primo quadrante di tre in tre gradi, non senza osservare che tutte dipendono razionalmente da 15 quantità irrazionali; è una questione già trattata dal Wallis, ma in modo assai meno soddisfacente. In un lungo articolo della stessa opera (P. I) egli ha manifestato l'idea che la trigonometria potesse perfezionarsi con l'uso di tabelle redatte opportunamente e con una più ampia applicazione dell'algebra; così, egli pensava, la trigonometria sarebbe stata posta in grado di arrecare più ampi servigi al calcolo integrale. Nè va taciuto che nelle sue *Observations trigonométriques* (Mém. de Berlin, 1768) egli si è largamente servito del *seno* e del *coseno iperbolici*. Si deve a lui anche la prima dimostrazione delle regole neperiane per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli (p. 402). Finalmente della tetragonometria egli ha gettati i fondamenti (*Beyträge*, I Vol, della II Parte), stabilendo alcune relazioni che intercedono fra i sei segmenti che congiungono quattro punti qualunque del piano; l'invito da lui fatto, finendo, che altri svolgesse ulteriormente l'argomento, fu subito accolto dal matematico danese Stefano Björnsen (1730-1798), come è dimostrato dalla sua voluminosa *Introductio in Tetragonometriam ad mentem V. C. Lambert analytice conscripta* (1780).

583 - Chiuderemo questa rassegna dell'opera matematica del Lambert (che con rammarico dovemmo compiere con eccessiva rapidità) facendo menzione di alcuni suoi lavori prettamente analitici. Due memorie (*Acta helvetica*, T. III, 1758 e *Nouv. Mémoires de Berlin*, 1770) concernono la risoluzione per serie di un'equazione trinomia $x^m + p\,x = q$; egli trovò che una sua radice può esprimersi come segue:

$$x = \frac{p}{q} - \frac{q^m}{p^{m+1}} + m\,\frac{q^{2m-1}}{p^{2m-1}} - m\,\frac{3\,m-1}{2}\,\frac{q^{3m-2}}{q^{3m-1}} + \\ + m\,\frac{4\,m-1}{2}\,\frac{4\,m-2}{3}\,\frac{q^{4m-3}}{p^{4m+1}} - \dots;$$

e poichè ogni equazione della forma $a\,x^\lambda + b\,x^\mu = c$, può ridursi a quella forma, così anche per le sue radici ne trasse un elegante sviluppo in serie. Queste ricerche destarono subito l'interesse dei competenti: infatti Euler ne estese i risultati alle equazioni quadrinomie $x^m + a\,x^n + b\,x^p + c = 0$ (v. n. 552) e Lagrange (v. n. 594) fu da esse indotto alla

scoperta della serie che serve a risolvere tutte le equazioni della forma $a - x + \varphi(x) = 0$; allora Lambert ritornò sull'argomento e mostrò come si potesse rappresentare per serie qualunque potenza intera e positiva di una radice dell'equazione $x = q + x^m$.

Vanno ancora ricordate le sue ricerche sull'integrabilità delle funzioni (*Mém. de Berlin,* 1762). Dobbiamo finalmente ricordare che il nome di Lambert è legato alla serie

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} \dots;$$

svolte le singole frazioni in serie di potenze si arriva alla seguente espressione:

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \dots,$$

la quale gode delle seguenti notevoli proprietà: *a*) un coefficiente qualunque contiene tante unità per quanti sono i divisori del corrispondente esponente di $x$; *b*) il coefficiente 2 compete ad ogni potenza di $x$ il cui esponente è un numero primo, cosicchè fra gli esponenti s'incontrano successivamente tutti i numeri primi; basti ciò a stabilire l'intima connessione delle citate serie con l'aritmetica superiore.

584 - La Svizzera francese, di cui sinora non incontrammo alcun rappresentante, diede i natali nel secolo di cui ci occupiamo a un distinto geometra, Gabriele Cramer. Egli vide la luce a Ginevra il 31 luglio 1704 da una famiglia di dotti; in quell'Accademia conseguì nel 1722 la laurea dottorale; nel 1724 concorse, insieme al suo coetaneo Gian Luigi Calandrini (1703-1758), alla cattedra ivi vacante di matematica e filosofia; essendo riuscito con lui a pari merito, il Governo ginevrino divise le due materie e assegnò quella di matematica alternativamente ai due egregi giovani, sinchè nel 1734, essendo stato il Calandrini destinato totalmente all'insegnamento della filosofia, il Cramer ebbe completamente quella della matematica; a cui aggiunse anche l'insegnamento della filosofia quando il suo antico emulo passò al governo della cosa pubblica. Ottenuto nel 1727 un permesso viaggiò in Svizzera, Inghilterra, Olanda e Francia, facendosi apprezzare dagli scienziati del tempo, con molti dei quali tenne poi regolare carteggio. Nel 1731 l'Accademia di Parigi gli conferì un « accessit » in un pubblico concorso su un tema astronomico, concorso nel quale riuscì vincitore Giovanni Bernoulli. Le edizioni (1732-1741) degli *Elementa Matheseos Universae* di C. Wolf, delle *Opere* di Giacomo e Giovanni Bernoulli e del carteggio fra quest'ultimo e Leibniz sono dovute alle sue cure. Nel 1751 intraprese un viaggio di salute nel mezzogiorno della Francia, nel corso del quale morì a Bagnoles (vicino a Nimes) il 4 gennaio 1752.

Nelle Memorie delle Accademie di Parigi (1732) e di Berlino (1748, 1750 e 1752) pubblicò alcuni scritti storici e geometrici, i quali, per quanto pregevoli, non gli avrebbero fatta acquistare la rinomanza che gli venne dall'*Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, opera scritta per provare che l'algebra è in grado di servire di guida

in uno studio completo delle curve piane; questa tesi non si presenta come nuova, ma nuovo e sommamente pregevole è il modo in cui essa viene stabilita.

585 - Benchè l'*Introduction* del Cramer sia posteriore all'*Introductio* di Euler, essa ne è del tutto indipendente; se anche, come era fatale, si notano delle coincidenze fra le due opere, queste sono del tutto accidentali; anzi il Cramer lamenta di avere conosciuta troppo tardi l'opera del sommo analista di Basilea, chè altrimenti ne avrebbe tratto profitto, come fece riguardo a quella del de Gua (v. n. 529). E poichè quasi due secoli non tolsero valore all'opera del Cramer, ci corre l'obbligo di presentarne qui una analisi particolareggiata.

Nel I Cap. si leggono alcune generalità intorno alla natura delle linee; l'autore esclude le « irregolari » (sono quelle di cui ignorasi la genesi e che sono tracciate a caso dalla mano del disegnatore) e quelle a doppia curvatura; le altre possono rappresentarsi analiticamente mediante coordinate cartesiane e, per procurarsi un terreno solido su cui procedere, l'autore introduce le convenzioni relative ai segni delle coordinate che oggi ancora sono in uso. A complemento di ciò nel II Cap. egli stabilisce le formole per la trasformazione delle coordinate, operazione a cui egli attribuisce decisiva importanza, come emerge dalla seguente dichiarazione: « L'analyse des courbes consiste en partie à déterminer la position des axes de telle manière qu'il en résulte, pour exprimer une courbe, l'équation la plus simple et la plus convenable au but qu'on se propose »; in conformità a tal modo di vedere egli scende in molti particolari sul modo di eseguire la detta operazione.

| etc. | etc. | etc. | etc | etc | etc. |
|---|---|---|---|---|---|
| $y^4$ | $xy^4$ | $x^2y^4$ | $x^3y^4$ | $x^4y^4$ | etc. |
| $y^3$ | $xy^3$ | $x^2y^3$ | $x^3y^3$ | $x^4y^3$ | etc. |
| $y^2$ | $xy^2$ | $x^2y^2$ | $x^3y^2$ | $x^4y^2$ | etc. |
| $y$ | $xy$ | $x^2y$ | $x^3y$ | $x^4y$ | etc. |
| $a$ | $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | etc. |

Fig. 69.

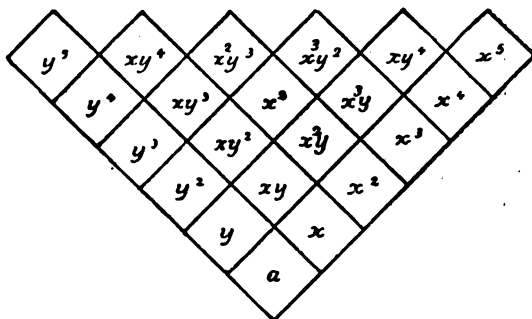



Fig. 70.

Dal Cap. III si apprende la classificazione delle curve algebriche (alle quali si limita l'autore); abbandonando l'infelice divisione in *generi* proposta da Descartes (p. 464), il Cramer adotta l'*ordine* come criterio di classificazione, osservando che è un numero invariante rispetto a una trasformazione delle coordinate. L'equazione di una curva algebrica può sempre ridursi alla forma di un polinomio intero eguagliato a 0, e l'autore istituisce un paragone fra il modo di scriverlo suggerito e Newton (parallelogramma, v. Fig. 69) e quello preferito dal De Gua (triangolo algebrico o analitico, v. Fig. 70) dando la preferenza al se-

condo. Da ciò emerge che la equazione di una curva d'ordine $n$ dipende in generale da un numero di costanti espresso dalla somma dei primi $n$ termini della progressione aritmetica 1, 2, 3,... ; ma l'autore, non badando che l'esponente più alto è $n + 1$ e che quindi detta somma vale $n(n + 3)/2$ la dichiara eguale a $n^2/2 + n/2$ e poco dopo ripete lo stesso errore, tanto più strano in quanto applicando (?) quel risultato generale trova che una curva di 1° ordine è determinata da 2 punti, una del 2° da 5, una di 3° da 9, una di 4° da 14 e una di 5° da 20. Insegna poi come si trovi l'equazione di una curva algebrica determinata da un sufficiente numero dei suoi punti; a tale proposito dà in una Nota finale una regola (che porta ancora il suo nome) per risolvere un sistema determinato di equazioni lineari. Dopo una breve discussione dell'equazione di 1° grado fra $x, y$ s'incontra la determinazione del numero dei punti comuni a due curve di ordini assegnati, risultato che il Cramer stabilisce in altra Nota finale, cosa che Euler fece all'incirca contemporaneamente; l'autore non manca di segnalare i casi di eccezione in cui quel numero viene superato e lo spiega ammettendo che le due curve siano degeneri e abbiano una parte comune; dà anche ragione del fatto (« paradosso di Cramer ») che per gli $n^2$ punti comuni a due curve d'ordine $n$ passino infinite curve del medesimo ordine.

Nel seguente Cap. IV viene trattata con grande ampiezza la risoluzione grafica delle equazioni; sono esposte regole semplici per determinare il grado minimo delle linee da impiegarsi per risolvere un'equazione di grado assegnato, regole che vengono illustrate sopra parecchi esempi. I teoremi generali di Newton sopra le curve algebriche (p. 573) costituiscono il tema dei due Capitoli seguenti, ove essi vengono applicati a molti esempi.

« Il n'y a rien de plus remarquable dans les courbes que les branches infinies et les points singuliers » osserva l'autore nell'esordio del suo Cap. VII. Per determinare tali elementi, egli si serve del parallelogramma di Newton o meglio del triangolo analitico di de Gua, e così giunge agli sviluppi in serie dovuti al primo; grazie alla chiarezza dello stile ed agli esempi numerosi e bene scelti, il citato Cap. costituisce ancor oggi la miglior guida per chi voglia impadronirsi del fondamentale argomento. Come le esposte considerazioni algebriche portino alla determinazione dei rami infiniti delle curve viene esposto nel Cap. VIII, donde si apprende il contegno all'infinito di svariate linee piane. Sulla considerazione dei rami infiniti è fondata l'ordinaria classificazione delle linee di dato ordine, e a quella delle curve dei primi cinque ordini è dedicato il Cap. IX dell'opera in esame. Il successivo contiene una completa enumerazione e descrizione delle varie specie di punti singolari che può presentare una curva algebrica; anche qui le considerazioni generali sono applicate a un cospicuo numero di esempi scelti con ammirabile accortezza. Altro strumento per analizzare l'andamento generale di una curva è fondato sulla considerazione delle tangenti; lo si apprende dal Cap. XI, ove l'autore insegna a determinare i punti di ascissa o ordinata massima o minima. Un ultimo elemento di grande importanza e non minore utilità nella investigazione delle curve, è rappresentato dalla curvatura, allo studio della quale è destinato il penul-

timo Cap. dell'*Introduction,* mentre dall'ultimo si apprende quali specie di punti singolari possono trovarsi nelle curve dei primi sei ordini.

Queste notizie intorno all'opera dell'egregio professore ginevrino presenterebbero una lacuna ove mancasse la menzione dell'Atlante di 33 Tavole ad essa allegate, ove si trovano esattamente riprodotte le più svariate singolarità; dicendo che le figure delineate giungono sino al numero di 225, non si porge un'idea adeguata della massa di forme considerate, perchè, sotto uno stesso numero, sono riunite talvolta sin dodici varietà di una medesima linea.

## In Inghilterra

586 - In una biografia da lui scritta del Condorcet, il Lalande incidentalmente affermò che l'Inghilterra sullo scorcio del secolo XVIII non annoverava alcun analista in grado di continuare degnamente la tradizione newtoniana. A confutare la recisa affermazione dell'astronomo francese sorse « pro domo sua » Edoardo Waring (lettera all'astronomo inglese Maskelyne). Questo distinto scienziato era nato nel 1734 nelle vicinanze di Shrewsbury; addì 24 marzo 1753 entrò nel Magdaleine College di Cambridge e da questa Università ottenne nel 1757 il grado di B. A. con unanime plauso degli esaminatori. Le indiscutibili prove da lui date di attitudini straordinarie alla ricerca scientifica lo fecero nominare professore Lucasiano dell'Università di Cambridge, prima ancora di avere ottenuto il grado di M. A., che il re d'Inghilterra si affrettò a conferirgli « de motu proprio ». La Società reale di Londra lo chiamò nel proprio seno il 2 giugno 1763 e nel 1784 gli conferì la medaglia Copley, ma nel 1795 egli ne uscì, ignoriamo per qual motivo. Di ingegno irrequietò e di carattere sbrigliato non salì mai sulla cattedra di cui fu titolare durante tutta la sua vita; anzi abbandonò Euclide per Ippocrate, e nel 1767 conseguì la laurea in medicina, grazie a cui nel 1770 prestò servigio in un ospedale di Cambridge, ufficio questo che la miopia lo costrinse a lasciare. Morì, non completamente sano di mente, il 15 agosto 1798, lasciando inedita un'opera filosofica intitolata *An Essay on the Principles of human Knowlege.*

Da una comunicazione da lui fatta alla Società Reale di Londra nel 1757 trae origine la sua opera intitolata *Miscellanea analytica,* che sino dal 1760 cominciò a circolare fra gli amici dell'autore, ma che venne pubblicata soltanto due anni dopo, con una nuova sezione dedicata alle curve. Una II edizione ne fu fatta nel 1770 col titolo *Meditationes algebraicae,* senza la parte geometrica che fu ristampata nel 1772, ma con una succinta storia dell'algebra come prefazione. Dieci anni dopo uscì una III ed. delle *Med. alg.*, con importanti aggiunte, la quale pertanto rispecchia la forma definitiva del pensiero waringiano. Prima di indicarne a grandi tratti il contenuto, osserviamo come una caratteristica dell'autore quella di essersi occupato esclusivamente dell'analisi finita; di tutto il vasto movimento prodotto dall'invenzione del calcolo infinitesimale egli sembra non essersi nemmeno avveduto, cosa che almeno in parte giustifica il surriferito giudizio del Lalande; nè va taciuto che

il Waring appare piuttosto un abilissimo calcolatore che un teorico dell'algebra, chè ad es. il cenno da lui fatto sul teorema fondamentale dell'algebra, più che un tentativo di dimostrazione, sembra una dichiarazione di assumerlo quale postulato.

587 - Le *Med. alg.* constano di due parti, una concernente l'algebra, l'altra consacrata alla teoria dei numeri.

La prima comprende quattro Capitoli. Dal I si apprende un metodo (basato sulla applicazione delle funzioni simmetriche delle radici) per dedurre da un'equazione altra le cui radici abbiano assegnate relazioni con le radici della data; vi si leggono sotto forma esplicita le relazioni che dànno le somme delle potenze simili delle radici di un'equazione in funzione dei coefficienti della stessa, nonchè le formole inverse (a ragione chiamate « formole di Waring »), ed il primo cenno dell'equazione ai quadrati delle differenze, che tanto utile si mostrò nelle mani di Lagrange. Nel II Cap. si leggono importanti considerazioni sopra le radici reali e immaginarie delle equazioni intese a illustrare la regola dei segni di Descartes; Gauss seppe recarle a perfezione. Nel Cap. III Waring si occupa dell'abbassamento delle equazioni in vista di giungere alla loro risoluzione; essendo riuscito a risolvere un'equazione di 4° grado col farne scomparire i termini 2° e 4°, affermò a torto la possibilità di trasformare qualsivoglia equazione di grado $n$ in un'equazione binomia risolvendo un'equazione ausiliare del grado $n-1$. Notevoli sono le considerazioni sopra le equazioni reciproche e sulle binomie; riguardo a queste ultime il Waring dimostra che qualunque funzione simmetrica $\Sigma\, \alpha^r \beta^s \gamma^t \ldots$ delle sue radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ è $= 0$, tranne se la somma degli esponenti $r, s, t, \ldots$, sia eguale al grado $n$ dell'equazione. Il IV Cap. concerne la teoria dell'eliminazione e porge la prova che al Waring non rimase ignoto il teorema di Bézout per quantesivogliano equazioni algebriche.

Risultati ancora più impressionanti si leggono nella parte aritmetica delle *Med. alg.* Infatti il Waring, indipendentemente dal Goldbach (v. p. 715), il cui teorema non fu pubblicato che nel 1842, affermò che ogni numero pari è somma di due primi e ogni numero intero, se non è primo, è somma di tre numeri primi. Sotto forma d'ipotesi egli (come generalizzazione del teorema secondo cui qualunque intero può esprimersi come somma di quattro quadrati) affermò che qualunque numero intero si può esprimere come somma di un certo numero di $n$ — me *potenze,* questo numero essendo sempre inferiore ad un limite che dipende esclusivamente da $n$. Ora la verità di questo enunciato essendo stata dimostrata nei primi anni del secolo XIX (Hilbert), si giunse recentemente in possesso di una prova di quanto lungimirante fosse lo sguardo dell'eminente matematico inglese. Nella sua opera apprendesi poi che « se $p$ è un numero primo e soltanto allora la somma $(p-1)! + 1$ è divisibile per $p$ »; teorema di grande importanza dovuto, non al Waring, ma al suo amico Giovanni Wilson [1] e che fu dimostrato da Lagrange

[1] Quest'uomo eminente nacque il 6 agosto 1741 e studiò all'Universita di Cambridge, che nel 1761 gli conferì l'ambita dignità di « senior wrangler ». Nel 1782 fu eletto F. R. S. e il 15 novembre 1786 ottenne un titolo di nobiltà. Difese il WARING, le cui *Med.*

insieme a questi altri dovuti al matematico di cui ci occupiamo: I. Se *tre* numeri primi sono in progressione aritmetica, la loro mutua differenza dev'essere un multiplo di 2. 3., a meno che il primo non valga 3. II. Se *cinque* numeri primi sono in p. a. la loro differenza dev'essere divisibile per 2. 3. 5., a meno che il primo non sia 5. III. Se *sette* numeri primi sono in p. a. la loro differenza sarà divisibile per 2. 3. 5. 7., a meno che il primo non sia 7.

Il concetto di « trasformazione » che campeggia nella parte algebrica dell'opera che stiamo analizzando si ritrova nelle pagine relative alla geometria. Infatti, dalle prime di esse si apprendono le formole per la trasformazione delle coordinate nel piano, stabilite applicando l'espressione della distanza fra un punto e una retta, la quale s'incontra ivi per la prima volta. E con quanto successo egli si serva di quelle formole risulta dalla classificazione che egli (ignorando di essere stato preceduto da Euler e Cramer) espone delle quartiche piane: tali curve egli ripartisce in 12 classi comprendenti in totale 84551 generi, fondandosi sopra l'applicazione della nozione di « diametro » introdotta da Newton (p. 573). Aggiungiamo che il Waring, generalizzando i concetti di cicloide e di epicicloide, ha considerato le curve generate dal ruzzolamento di una linea piana sopra una retta (*Curvoidi*) o sopra un'altra curva (*Epicurvoidi*). Nella stessa opera non mancano poi cenni più o meno chiari di questioni di geometria dello spazio; al riguardo basti notare che il Waring trovò che una superficie d'ordine $n$ generale nel suo ordine è determinata da $(n + 1) .(n + 2) (n + 3)/1 . 2 . 3 - 1$ dei suoi punti. Lo stile estremamente stringato, la mediocre eleganza dei calcoli e soprattutto l'abbondanza delle asserzioni indimostrate, costringendo il lettore a un'assidua collaborazione, impedirono che gli scritti del Waring esercitassero larga influenza; ma il tempo, anche in questo caso, ha fatto giustizia, ponendone in luce la profondità ed originalità.

588 - Conterraneo e all'incirca contemporaneo del Waring è John Landen, nato a Peakirk il 23 gennaio 1719, F. R. S. dal 16 gennaio 1766 e m. a Milton il 15 gennaio 1790. Non occupò alcun posto nel pubblico insegnamento e passò l'intera sua vita nella meditazione. Il grande pubblico cominciò a conoscerlo per la sua collaborazione al *Ladies' Diary* (1744), il mondo scientifico per alcune pregevoli memorie analitiche sulla sommazione e la trasformazione delle serie e sul calcolo d'integrali pubblicate nelle P. T. (1760 e 1775). Parte dei risultati ivi esposti erano stati trovati altrimenti da Euler, all'insaputa del matematico inglese, ma altri relativi alla teoria degli integrali ellittici portano con piena ragione il suo nome: tale è una trasformazione per mutare uno di detti integrali in altro, tale un teorema che serve ad esprimere un arco d'iperbole come somma di due archi d'ellisse e di un segmento rettilineo. Benchè egli siasi servito nelle sue ricerche del metodo flussionale, pure avvertì l'opportunità di bandire dalla scienza il concetto d'infinito; a tale scopo, nell'opera intitolata *Residual Analysis,* propose la metodica con-

---

*alg.* erano state ingiustamente criticate da W. S. Powell. Malgrado i successi ottenuti, egli lasciò la matematica per la giurisprudenza e nella magistratura assurse ai gradi più elevati. Morì il 18 ottobre 1793.

siderazione del valore limite assunto dal quoziente $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ per $x' = x$. « Con questo mezzo », osserva Lagrange nell'esordio della sua *Théorie des Fonctions Analytiques,* « si evitano realmente gli infinitesimi e le quantità evanesccenti; ma le procedure e le applicazioni del calcolo riescono imbarazzanti e poco naturali e forza è riconoscere che questa maniera di rendere più rigoroso il calcolo differenziale nei suoi principi gli fa perdere i suoi principali vantaggi, vale a dire la semplicità teorica e la facilità delle operazioni ». Questo apprezzamento essendo stato generalmente condiviso [1], il metodo del Landen non fu adoperato da altri dopo di lui.

## BIBLIOGRAFIA

*Quaesita geometrica a Comito Rugerio de Vigintimiliis proposita ab* HIERONYMO SACCHERIO *Genuensi Soc. Jesu soluta* (Mediolani, 1693).

*Logica demonstrativa, quam una cum thesibus ex tota philosophia decerptis, defendendam proponit J. F. Casaletto* (senza nome d'autore; Aug. Taurin, 1697; II ed., Ticini Regii. 1701; III ed., Augustae Ubiorum, 1735).

*Neo-statica auctore.* HIERONYMO SACCHERIO (Mediolani, 1708).

*Euclides ab omni naevo vindicatus, sive Conatus geometricus quo stabiliuntur et prima ipsa universae geometriae principia. Auctore* HIERONYMO SACCHERIO (Mediolani, 1733).

GIROLAMO SACCHERI'S, *Euclides vindicatus, edited and translated by* G. B. HALSTED (Chicago-London, 1920; non contiene che la parte relativa alla teoria delle parallele).

A. FAVARO, *Due lettere inedite del P. Gerolamo Saccheri d. C. d. G. a Vincenzo Viviani* (Riv. mat. fis. e scienze nat., T. IV, 1903).

A. AGOSTINI, *Due lettere inedite di Girolamo Saccheri* (Mem. della R. Acc. d'Italia, T. II, 1931).

JACQUIER et LE SEUR, *Elémens de Calcul intégral* (Parme, 1768) [2].

D'ALEMBERT, *Traité de dynamique* (Paris, 1743; nouvelle édition, revue et fort augmentée par l'Auteur, Paris, 1778).

D'ALEMBERT, *Opuscules mathématiques, ou Mémoires sur différents sujets de géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie,* etc. (7 volumi di cui il V diviso in due parti; Paris, 1761-1768).

D'ALEMBERT, *Mélanges de littérature, de philosophie et d'histoire* (2 volumi, Paris, 1753).

DIDEROT, *Mémoires sur différents sujet de mathématiques* (Paris, 1748).

CONDORCET, *Essai d'analyse* (Paris, 1768).

CONDORCET, *Eloges des academiciens* (6 volumi, Paris, 1773 e 1799).

CONDORCET, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (Paris, 1785).

CONDORCET, *Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connait une première valeur approchée. Mém. inédit.* (Bull. di bibl. e storia T. XVI, 1883). Premesso a questo scritto trovasi un elenco completo dei lavori, editi e non, del Condorcet.

FONTAINE, *Mémoires de mathématiques, receuillis et publiés, avec quelques pieces inédites* (Paris, 1764).

---

[1] Per altre critiche veggasi un articolo della *Monthly Review* (Giugno 1759) e la replica del Landen.

[2] L'esemplare di quest'opera posseduta dalla Biblioteca di Parma porta una nota manoscritta, ove è dichiarato che una sedicente « nouvelle édition » recante la data 1799 è una falsificazione non differendo da quella del 1768 che per il frontispizio.

VANDERMONDE, *Abhandlungen aus der reinen Mathematik. In deutscher Sprache herausgegeben von* C. ITZIGSOHN (Berlin, 1887).

J. H. LAMBERT, *Die freye Perspective, oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen* (I Aufl., Zürich, 1759; II Aufl., 1774).

J. H. LAMBERT, *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbra* (Aug. Vind., 1760).

J. H. LAMBERT, *Insigniores orbitae cometarum proprietates* (Aug. Vindob., 1761).

J. H. LAMBERT, *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen* (tre parti in quattro volumi; Berlin, 1765-1772).

J. H. LAMBERT, *Zusätze zu den logarithmisch-trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik verfallenden Berechnungen* (Berlin, 1770).

J. H. LAMBERT, *Deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von* J. BERNOULLI (cinque volumi, Augsburg, 1782-84).

F. ENGEL und P. STÆCKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (p. 152-207; sono ivi riprodotte le ricerche di Lambert sulla teoria delle parallele; Leipzig, 1895).

K. BOPP, *J. H. Lamberts Monatsbuch mit den zugchörigen Kommentaren, sowie einem Vorwort über den Stand der Lambertforschung* (Abh. der K. Bayr. Akad. der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse, T. XXVII, 1916).

K. BOPP, *Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel, aus den Manuskripten herausgegeben* (Abh. der Preuss. Akad. der Wissenscbaften, 1924).

K. BOPP, *J. H. Lamberts und A. G. Kaestners Briefe aus den Gothaer Manuskripten herausgegeben* (Sitzungsber, der Heidelberger Akad. der Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, 1928).

G. CRAMER, *Introductions à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750).

J. LANDEN, *Mathematical Lucubrations* (London, 1755).

J. LANDEN, *The Residual Analysis* (London, 1764).

J. LANDEN, *A Discourse concerning the Residual Analysis* (London, 1758).

J. LANDEN, *Mathematical Memoirs* (due volumi, London, 1780-82).

CAPITOLO XXXVI

# G. L. LAGRANGE

## Primi anni

589 - Se il lettore fa una rapida rassegna delle pagine concernenti l'Italia della presente *Storia,* non mancherà di essere colpito dal fatto che tutte le regioni della Penisola hanno contribuito, sia pure in varia misura, al progresso delle scienze esatte, una e forse una sola esclusa, il Piemonte: tale circostanza è documentata da due fatti che rilevammo a suo tempo: cioè la chiamata a Torino di G. B. Benedetti (p. 324) da parte di Emanuele Filiberto (¹) e il tentativo fatto dal re di Sardegna (v. p. 719) di affidare a G. Saccheri la cattedra di matematica in quell'Università. Ora a luminosamente dimostrare che anche quella nobile parte d'Italia era in grado di arrecare qualche pietra al grandioso edificio che da secoli giornalmente si eleva, sta il sommo a cui è dedicato il presente Capitolo.

Egli nacque da famiglia oriunda francese, ma che da tempo erasi naturalizzata in Italia; infatti suo bisnonno, abbandonato il servizio di Luigi XIV per trasferirsi a Torino, non tardò a conquistare la piena fiducia di Carlo Emanuele II, il quale, avendo riconosciuto che aveva adempiuto nel modo più soddisfacente alcune delicate missioni affidategli, per dargli un'alta attestazione di stima, gli destinò in moglie una parente di Michelangelo Conti, colui che occupò la cattedra di S. Pietro col nome di Innocenzo XIII. Il favore della corte di Sardegna verso la famiglia Lagrange si è poi continuato, chè per il nonno del famoso matematico fu creata la carica di Tesoriere della R. Intendenza delle Fabbriche e Fortificazioni, la quale rimase in detta famiglia sino al momento (1800) in cui fu abolita, avendola occupata anche suo padre. Dal matrimonio di questo con Teresa Gros, unica figlia di un medico di Cambiano, nacquero undici figli, di cui sopravvissero soltanto due, l'ultimo e il primo Giuseppe Luigi, il quale vide la luce a Torino nel quartiere di S. Agnese, vicino alla chiesa della Madonna degli Angeli, addì 25 gennaio 1736 (²). Alcune mal riuscite speculazioni finanziarie avendo di-

(¹) Si noti che viveva allora ai piedi dell'Alpi l'unico scrittore di matematica che, in un'occasione recente, riuscirono a scoprire i benemeriti che cercarono qualche traccia di ricerche matematiche in Piemonte; parliamo di G. B. Peverone (n. a Cuneo nel 1509, m. a Milano il 7 agosto 1559), autore di un volume dal titolo: *Due brevi e facili trattati, il primo d'Aritmetica, l'altro di Geometria* (Lione, 1558).

(²) Nel registro dei nati questo è designato così: Lagrangia Giuseppe Lodovico; ciò giustifica il modo di scriverne il cognome adottato in parecchie occasioni, per documentare l'italianità del soggetto.

strutta tutta la sostanza della famiglia Lagrange, il padre pensò di avviare il suo primogenito verso la lucrosa professione di avvocato; se non che, avendo il giovane intrapreso lo studio della fisica sotto la direzione del ben noto Padre G. B. Beccaria e quello geometrico sotto quella di Filippo Antonio Revelli (n. nel 1716 a Monastero di Lanzo, durante ventisei anni professore nell'Università di Torino, autore di pregevoli *Elementi dell'Aritmetica universale e della Geometria,* Torino, 1778, m. ivi il 16 gennaio 1801), ebbe la chiara visione del proprio destino, e relegò in soffitta le opere di Giustiniano, per consacrarsi completamente alle matematiche. Innamoratosi in principio della geometria, non tardò ad abbandonarla per l'analisi, nella quale ravvisava maggior forza e più vasto campo d'applicabilità; senza ricorrere ad alcun aiuto, a soli diciassette anni, si sentì già in grado di assimilare quanto contengono le opere di Newton e Leibniz, dei Bernoulli e di Euler. Un anno più tardi (23 luglio 1754) egli diede in luce il suo primo scritto scientifico sotto forma di lettera, in italiano, al conte di Fagnano (ne è argomento la relazione di analogia esistente fra potenze e derivate), la quale doveva produrgli un'amara delusione quando venne avvertito che in tale scoperta era stato prevenuto da Leibniz. Il dolore provato non ebbe la virtù di abbatterlo, chè l'anno stesso (30 ottobre) egli poté partecipare al Fagnano alcuni importanti risultati da lui ottenuti studiando le linee tautocrone: è questo un tema che seguitò ad occuparlo, come dimostrano due lettere scritte all'Euler il 12 agosto e il 29 novembre 1755 e che tuttora esistono.

## Pubblicazioni torinesi

**590** - Il primo lavoro a stampa di Lagrange, mentre può sembrare di lieve momento dal punto di vista scientifico, appare di somma importanza biografica avendo avuto per conseguenza che, non ancora ventenne, con R. D. del 26 settembre 1755 egli fu nominato « maestro nelle RR. Scuole matematiche d'Artiglieria » di Torino; e va notato che questo istituto (il progenitore dell'attuale Accademia militare) era ben più indicato dell'Università (ove il livello dell'insegnamento era bassissimo) per dar modo al giovane analista di diffondere le nuove teorie, in cui era ormai provetto. Che l'aspettazione del Governo Sardo non sia andata delusa è provato dal riassunto di un corso da lui tenuto sopra i *Principi di Analisi sublime* che esisteva sino a poco fa nella Biblioteca del Duca di Genova e di cui venne dato alle stampe un fedele riassunto (Vacca). In seguito a una memoria sul principio della minima azione da lui presentata all'Accademia di Berlino, nel momento in cui ferveva la nota controversia fra il Maupertuis e il König (v. n. 538), fu nominato corrispondente di quel sodalizio (2 settembre 1756). Avvenimento di ancor maggiore importanza è la fondazione (1757) a Torino di una società scientifica privata, grazie all'iniziativa del chimico conte G. Saluzzo di Menusiglio (1734-1810), validamente coadiuvato da Lagrange e dal medico Giovanni Cigna (m. 1846), la quale, dopo varie trasformazioni, è divenuta l'attuale Accademia Reale delle Scienze di quella città. A far conoscere favorevolmente la nuova Società contribuirono nel mo-

do più efficace le memorie che il Nostro inserì nei cinque volumi di consueto citati col nome di *Miscellanea taurinensia* (M. T.) [1], delle quali ci corre l'obbligo di indicare, sia pure brevemente, intenti e contenuto, non foss'altro perchè rappresentano la sua produzione durante il primo periodo della sua attività scientifica.

591 - Un brillante gruppo di detti lavori concerne la teoria dei massimi e minimi; mentre il Maclaurin nel suo *Treatise on Functions* aveva esposte le condizioni di massimo o minimo per le funzioni di una sola variabile, Lagrange, nel suo primo contributo alle M. T., stabilì le analoghe per quelle con più variabili; per dichiarazione dell'autore si tratta di un preludio ad altra in cui egli, soddisfacendo ad un voto manifestato dall'Euler in una sua celebre memoria del 1744, gettò le basi di un nuovo calcolo, di quello a cui egli stesso, come sappiamo (p. 702), impose il nome di « calcolo delle variazioni ». In questo lavoro Lagrange, per dimostrare la fecondità dei principii da lui posti, oltre a ritrovare risultati già acquisiti dalla scienza, stabilì l'equazione differenziale delle superficie d'area minima sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

ove al solito $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ , $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Volgendosi poi alla dinamica, estese notevolmente un principio dovuto a Euler e ne fece applicazione a importanti problemi riflettenti il moto dei solidi e dei liquidi. Poichè, come già sappiamo (p. 728), il novello algoritmo fu combattuto dal Fontaine, che non lo aveva compreso e fu attribuito all'Euler da Le Seur et Jacquier (p. 722). Lagrange fu costretto a riporre le cose al loro posto; il nuovo lavoro che all'uopo egli scrisse ha, oltre carattere polemico, valore dottrinale per i nuovi sviluppi che vi si trovano sul detto argomento.

Il calcolo delle variazioni non è l'unico contributo dato dal giovane Lagrange al calcolo integrale; giacchè nel I Vol. dei M. T. leggesi una memoria intesa ad estendere alle equazioni lineari alle differenze finite i metodi d'integrazione in uso per le analoghe equazioni differenziali, estensione notevole in sè ed utile in questioni di probabilità. Questa teoria egli abbandonò momentaneamente, forse perchè era allora oggetto di ricerche da parte di Laplace, ma vi dedicò più tardi (*Mém. Acad. de Berlin*, 1774) una memoria che un giudice competente, il Poisson, non esitò a proclamare « un des plus beaux ouvrages de Lagrange »; e ciò senza esagerazione alcuna, chè ivi la teoria delle serie ricorrenti e quella delle equazioni a differenze finite, ulteriormente perfezionate, permisero la risoluzione di nuove questioni di probabilità; in un punto detta me-

[1] È l'abbreviazione del titolo *Miscellanea Philosophica Mathematica Societatis privatae Taurinensis*, dato al I Vol. Nel II esso fu mutato in *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Societé Royale de Turin*. A partire dal VI divenne *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*.

moria esigeva un complemento; lo rilevò G. F. Malfatti (*Mem. Soc. Ital.,* T. III); ed esso fu dato nel modo più soddisfacente da Lagrange stesso (*Mém. Acad. de Berlin,* 1792).

Nel I Vol. dei M. T. è anche inserita una memoria del Nostro ove s'insegnano a integrare alcune classi di equazioni differenziali che incontransi nello studio del moto dei fluidi e si leggono sagaci osservazioni sulla risoluzione del problema delle corde vibranti mediante serie trigonometriche. Maggiore notorietà conseguì una terza memoria, inserita nel medesimo volume, dedicata all'equazione differenziale ellittica, nella quale Lagrange additò una via piana e luminosissima per giungere a un risultato a cui l'Euler (per usare le sue parole) arrivò « potius divinando », via tanto più pregevole in quanto può guidare all'integrazione di altre equazioni differenziali. Di questioni analitiche derivanti da problemi di fisica trattano altre memorie dei M. T., nelle quali (come scrisse E. Beltrami) « in mezzo a una dovizia infinita di nuovi artifici analitici sono gettate le basi di quei metodi che, ampliati poi e fecondati dal genio di Fourier, divennero uno dei più efficaci stromenti della moderna fisica matematica ». Apprezzatissimo dai competenti in materia fu pure un lavoro di Lagrange sul moto di un punto attratto da due centri fissi, nel quale l'autore seppe emanciparsi dall'ipotesi che il movimento avesse luogo in un piano passante per la congiungente dei centri (cosa che l'Euler aveva pur fatto all'insaputa di Lagrange). Altri suoi scritti giovanili sulla rastremazione delle colonne e sulla media aritmetica non possono venire qui citati che come prova della meravigliosa versatilità del grande di cui ragioniamo.

## Trasferimento a Berlino

592 - L'invio a d'Alembert del I Vol. dei M. T. servì a Lagrange per stabilire relazioni scientifiche col famoso enciclopedista che non tardarono a trasformarsi in una salda amicizia; le parole lusinghiere da lui allora rivoltegli fecero nascere in Lagrange il desiderio di conoscerlo di persona; l'occasione gli fu offerta nel novembre del 1763 dal trasferimento da Torino a Londra del marchese Caraccioli, ambasciatore del re di Napoli presso la corte di Sardegna; appunto con lui si recò a Parigi e vi ricevette le più festose accoglienze da parte dei matematici ivi residenti. Nella stessa epoca l'Accademia delle Scienze di Parigi gli conferì un premio per una sua memoria sopra la librazione della luna, quantunque ivi non fosse ancora data quella completa spiegazione del fenomeno che il Nostro doveva darne sedici anni più tardi. Questa solenne distinzione ebbe il dono di mostrare a Carlo Emanuele III il valore del giovane analista, senza però indurlo a migliorarne la situazione economica. Il miglioramento avvenne quando l'Euler lasciò Berlino per ritornare a Pietroburgo (v. p. 694). Non appena il d'Alembert ebbe sentore della decisione presa dall'analista di Basilea, chiese a Lagrange se fosse disposto a succedergli, e avutane risposta affermativa presentò a Federico II la relativa proposta. Lagrange (a cui nel frattempo l'Accademia di Parigi aveva assegnato il premio dell'anno 1766 sul moto dei

satelliti di Giove) chiese tosto al governo sardo licenza di espatriare e, superate non lievi difficoltà, finì per ottenerlo. In conseguenza addì 21 agosto 1769 egli lasciò la propria città natale, che non doveva mai più rivedere, e per Parigi, Londra e Amburgo, raggiunse Berlino (27 ottobre); di quell'Accademia divenne, non solo membro, ma anche Direttore della Classe di scienze; tale carica egli assunse il 6 novembre di detto anno. Sino a questo momento Lagrange era conosciuto da un esiguo numero di specialisti; da questo momento egli trovasi alla ribalta della storia. Malgrado fossero ben gravosi gli obblighi connessi alle sue cariche ufficiali (¹), benchè nella redazione dei propri lavori egli fosse tanto scrupoloso da meritare l'epiteto d'incontentabile, non passava mese senza che egli leggesse ai colleghi berlinesi almeno una memoria, il che non gl'impedì di partecipare vittoriosamente ai pubblici concorsi banditi dall'Accademia di Parigi per gli anni 1772 e 1774. Ora nel render conto, come è nostro obbligo, dei lavori da lui compiuti a Berlino, uniformandoci al metodo usato in altre occasioni, li ordineremo in base ai temi svolti.

## Lavori relativi alla Teoria dei numeri

593 - In una memoria datata da Berlino 20 settembre 1768 e inserita nel T. IV dei M. T. Lagrange ha data la completa risoluzione in numeri interi dell'equazione $n x^2 + 1 = y^2$, oggetto (p. 485) della seconda sfida di Fermat; ivi egli dimostrò che essa ammette infinite soluzioni ed insegnò una procedura per derivare da una soluzione infinite altre; considerandone in particolare la soluzione minima $x = t$, $y = u$ fece la fondamentale osservazione che il rapporto $t/u$ si trova fra le ridotte della frazione continua che si ottiene da $\sqrt{n}$. Più tardi (*Addizioni* alla versione francese dell'*Algebra* di Euler) egli suggerì alcuni perfezionamenti di dettaglio nel procedimento esposto. In una posteriore memoria, letta all'Accademia di Berlino nell'adunanza del 24 novembre 1768 e subito pubblicata negli *Atti* della medesima, Lagrange affrontò il problema generale dell'analisi indeterminata di 2° grado con due incognite, ponendone in luce il legame con la succitata equazione speciale. Il 21 giugno 1770 egli tornò sull'argomento per mostrare la insussistenza di una proposizione enunciata da Euler, in conseguenza di una generalizzazione affrettata; in tale occasione ampliò la sfera d'applicabilità delle frazioni continue e stabilì un teorema ancor oggi ritenuto fondamentale, che assegna un limite superiore per il numero delle radici di una congruenza di grado qualunque. Un'ammirabile generalità possiedono anche le *Recherches d'Arithmétique* inserite fra le *Memorie* di Berlino per gli anni 1773 e 1775. Ivi Lagrange parte dall'osservazione che, mentre l'equazione $a = b x + c y$ è sempre risolubile in numeri interi pur-

(¹) Il direttore della classe di scienze doveva occuparsi della pubblicazione delle effemeridi astronomiche e del calendario (del quale l'Accademia aveva il monopolio), nonchè di esaminare e dar parere intorno ai lavori presentati da estranei all'Accademia (infatti fra le *Oeuwres de Lagrange* trovasi un suo rapporto sopra una pretesa quadratura del cerchio).

chè $b$ e $c$ siano fra loro primi, ben diversamente accade riguardo alla $a = b\,x^2 + c\,x\,y + d\,y^2$; da ciò egli desunse una spiegazione per certi teoremi relativi alla rappresentabilità di un numero mediante una forma quadratica, scoperti da Fermat ed Euler; tali considerazioni, completate poi nelle citate *Addizioni* all'*Algebra* euleriana, fanno accordare a Lagrange la dignità di fondatore dell'importante teoria dell'equivalenza di due forme quadratiche. A lui si è anche debitori delle prime dimostrazioni di due fondamentali teoremi d'aritmetica. Uno è quello di Bachet-Fermat (p. 483) sulla rappresentabilità di qualunque numero come somma di quattro quadrati (*Mém. de Berlin,* 1770); l'altro porta il nome di G. Wilson (v. p. 742) ed afferma che « se $n$ è un numero primo, $(n - 1)! + 1$ è divisibile per $n$ » (Ivi, 1771). Il metodo di dimostrazione condusse anche Lagrange al « piccolo » teorema di Fermat (p. 482) ed agli eleganti teoremi enunciati del Waring sui gruppi di numeri primi in progressione aritmetica (v. p. 742). Chiuderemo questo paragrafo citando gli studi del Nostro (*Mém. de Berlin,* 1777) sopra alcune equazioni indeterminate di un grado superiore al secondo (p. es. all'equazione $x^4 + y^4 = z^2$) le quali provano che egli mosse qualche passo anche in una regione che oggi ancora presentasi sotto l'aspetto di una terra incognita.

## Scritti di Algebra

594 - Il primo contributo dato da Lagrange all'algebra (*Mém. de Berlin,* 1769) manifesta l'aspirazione di emancipare la scienza del numero da considerazioni geometriche; esso infatti presenta una dimostrazione prettamente algebrica del noto teorema « se due numeri sostituiti nel primo membro di un'equazione gli fanno assumere valori di segni opposti, fra essi cade almeno una radice di quell'equazione ». Lo stesso lavoro ha poi una parte di carattere meno teorico, chè fa conoscere prima l'applicazione dell'equazione ai quadrati delle differenze di un'equazione per la separazione delle radici e poi l'applicazione delle frazioni continue all'approssimazione delle stesse: così Lagrange fece compiere due passi importanti alla teoria delle equazioni numeriche. Proseguendo in quest'ordine di ricerche egli mostrò (*Mém. de Berlin,* 1770) l'applicabilità della stessa equazione ai quadrati delle differenze per stabilire criteri atti a riconoscere se un'equazione di 3° o 4° grado abbia o non radici reali (questione su cui ritornò nelle *Mém. de Berlin* del 1777) e dimostrò rigorosamente la sviluppabilità in frazione continua periodica delle radici di qualunque equazione quadratica a coefficienti interi e viceversa la possibilità di riguardare qualsivoglia frazione di detta specie come radice di un'equazione di secondo grado. Giova notare che il nostro autore ha sempre ammesso il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, solo fece conoscere alcune considerazioni (*Mém. de Berlin,* 1772) intese a migliorare il ragionamento proposto all'uopo da Euler (v. p. 696), senza però riuscire ad un'argomentazione pienamente soddisfacente. All'eliminazione Lagrange diede (*Mém. de Berlin,* 1771) un contributo importante proponendo l'applicazione a questo problema delle funzioni simmetriche; il procedimento da lui

ideato esige calcoli laboriosissimi, ma ha il pregio di dare il risultante senza fattori estranei.

Mentre tutte queste ricerche sono applicabili esclusivamente ad equazioni algebriche, altre, comunicate all'Accademia di Berlino nei primi mesi del 1770 e da essa pubblicate nel medesimo anno fra le sue *Memorie,* abbracciano anche quelle trascendenti; giacchè è ivi fatta conoscere una notevole serie la quale permette di esprimere una funzione qualsivoglia di una radice di un'equazione della forma seguente $a - x + \varphi(x) = 0$; è la celebre « serie di Lagrange », che tante applicazioni ricevette e tanti studi provocò (v. n. 744) per determinare a *quale* radice della data equazione si riferisse; con tale scoperta egli ha conferita la massima generalità a un risultato del Lambert (v. p. 737) e ne ha poi (*Mém. de Berlin,* 1771) fatta applicazione al così detto « problema di Kepler », il quale, come il lettore ricorda ha per iscopo la risoluzione dell'equazione $t = x + u$ sen $x$.

Risulta da molte delle pagine precedenti che i matematici più eminenti della seconda metà del sec. XVII erano tormentati dal desiderio di trovare formole risolutive delle equazioni algebriche letterali: Euler, Fontaine, Bézout, Vandermonde, Waring, per non citare che i più eminenti, si sforzarono di aprire nuove vie che conducessero al risultato agognato. Allo stesso argomento si riferisce la fondamentale memoria di Lagrange modestamente intitolata *Réflexions sur la Résolution algébrique des Equations* (*Mém. de Berlin,* 1770-1771). Ivi egli fece un profondo studio comparativo dei principali metodi sino allora proposti per risolvere le equazioni dei primi quattro gradi, nell'intento di determinare l'intima ragione del loro successo e la spiegazione del fatto che essi non possono servire per equazioni generali di gradi superiori; la ragione consiste in ciò che, mentre per quelle equazioni il problema si può ridurre alla risoluzione di un'equazione di grado inferiore, altrettanto non succede per queste. Perciò il nostro matematico riteneva « qu'il parait fort douteux qu'aucun de ces méthodes donne jamais la résolution complète, seulement du cinquième degré, et à plus forte raison des degrés supérieurs; que cette incertitude jointe à la longueur rebutante des calculs qu'elles exigent, est propre à effrayer d'avance les plus intrépides calculateurs ». Da ciò egli trasse la convinzione che le cercate espressioni delle radici devono dipendere da coefficienti in modo diverso da quelli usati o tentati sino allora; i fatti hanno confermato tale previsione. Inoltre è chiaro che, con quella memoria, Lagrange è arrivato ai confini di una nuova provincia (la teoria delle sostituzioni), che fu costituita nel primo trentennio del secolo successivo alla sua morte.

595 - Il quadro della produzione algebrica di Lagrange deve ancora dare notizie intorno ad alcune importanti applicazioni da lui fatte del calcolo a varie questioni. Fra i lavori di tal fatta merita il primo posto la memoria dal titolo *Solutions analytiques de quelques Problèmes sur les Pyramides triangulaires* (*Mém. de Berlin,* 1773), chè il sommo matematico ha ivi tracciato con mano maestra la via da seguire da chi voglia applicare l'algebra alla ricerca geometrica; mentre, prima di lui, ogni indagine di tal fatta veniva collegata alla considerazione

della relativa figura, partiva dal presupposto di una scelta particolare di assi ed esigeva sempre penose applicazioni della similitudine e del teorema di Pitagora (veggasi infatti il II Vol. dell'*Introductio* euleriana), Lagrange ha fatto vedere come si raggiungesse maggiore sicurezza e speditezza stabilendo in anticipo formole generali applicabili a qualunque disposizione di figura: ora, non è questo il concetto che da circa un secolo fu applicato da tutti i migliori espositori della geometria analitica? Nè va taciuto che per conseguire più elegantemente lo scopo propostosi (che è quello di determinare i principali elementi metrici collegati alla considerazione di un tetraedro) il Nostro ha stabiliti alcuni notevoli Lemmi che esprimono, per determinanti di 3° ordine, parecchie proposizioni generali relative a queste notevoli espressioni algebriche.

Un analogo concetto informa una breve nota (*Mém. de Berlin*, 1776) ove leggesi un'elegante soluzione algebrica del « problema di Castillon » (v. n. 570); essa fu presentata all'Accademia di Berlino il giorno successivo a quello in cui era stato ivi discorso di detta questione.

Le stesse doti di generalità si ritrovano in lavori di altro genere, di cui ci è forza indicare soltanto i soggetti: nuova dimostrazione del teorema di Lambert (v. p. 732) (*Mém. de Berlin,* 1778), attrazione degli sferoidi ellittici (Ivi, 1773 e 1792), proprietà del baricentro di un sistema di punti (Ivi, 1783) e movimento di un solido di forma qualunque (Ivi, 1773). Mentre i risultati ivi esposti non tardarono a divenire classici, molte formole e parecchi dei procedimenti ivi esposti furono giudicati applicabili anche in altre svariate questioni di matematica pura.

## Ricerche sull'Analisi infinitesimale

596 - Le importanti applicazioni fatte da Lagrange delle frazioni continue a questioni di aritmetica ed algebra fecero sorgere in lui l'idea che esse potessero servire a risolvere anche questioni di analisi infinitesimali; e infatti, in una memoria da lui letta all'Accademia di Berlino il 18 luglio 1776 e pubblicata nel medesimo anno fra le *Memorie* della stessa, egli ha mostrato come, mediante frazioni continue i cui termini fossero funzioni di una variabile, si potesse esprimere l'integrale di qualunque equazione differenziale del primo ordine; in particolare stabilì notevoli espressioni per le funzioni $(1 + x)^m$, $\log (1 + x)$, $e^x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{arc\,tg} x$, le quali sgraziatamente, malgrado i loro indiscutibili pregi, non hanno preso posto nelle ordinarie trattazioni dell'analisi infinitesimale. Miglior sorte toccò alle sue ricerche sopra gl'integrali ellittici (*Mém. Acad. Turin,* T. II, 1874), in continuazione di altre (Ivi, T. II, 1766), le quali si propongono e raggiungono lo scopo di ridurre a certe determinate forme tipiche tutti gli integrali della forma

$$\int f(x, \sqrt{a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4})\, d x ,$$

$f$ essendo simbolo di una funzione razionale di $x$ e di quel radicale: Lagrange insegna poi a svolgere in serie uno qualunque di quegli integrali e così, in particolare, stabilisce notevoli sviluppi in serie dell'arco di una conica a centro.

Nel 1772 egli ritornò (*Mém. de Berlin*) sull'analogia fra potenze e differenziali che aveva formato il soggetto della sua prima pubblicazione (v. p. 747) per trarne i fondamenti di un nuovo calcolo. Percorrendo tale via egli giunse alla formola di Taylor per quantesivogliano variabili; la stessa memoria è anche notevole perchè contiene il primo cenno dell'idea di definire le funzioni e le loro derivate mediante i loro sviluppi in serie e così eliminare dall'analisi l'idea d'infinito. Di detta analogia egli si è poi giovato (*Mém. de Berlin,* 1792-93) per perfezionare un metodo d'interpolazione giacente da tempo dimenticato in un'opera pubblicata nel 1670 dall'astronomo G. Mouton (1618-1694).

Una grande influenza sullo sviluppo dell'analisi ebbero le ricerche di Lagrange sopra le equazioni a derivate parziali (*Mém. de Berlin,* 1772 e 1775); i metodi d'integrazione ivi insegnati sono tuttora applicati, benchè lo stesso tema abbia occupato poi eminenti analisti quali Monge e Jacobi. Anche la teoria degli integrali singolari — da lui chiamati « particolari » — delle equazioni differenziali del 1° ordine deve a lui il suo assetto definitivo (*Mém. de Berlin,* 1774); è una teoria di grande importanza di cui egli fece più tardi (Ivi, 1779) svariate applicazioni geometriche; notiamo quelle concernenti le evolute e le evolventi delle curve piane (v. anche p. 629) e le trocoidi; nè va dimenticata quella riferentesi alla teoria generale dei contatti, che divenne classica quando Lagrange la espose in un suo diffusissimo trattato.

Carattere differente dai precedenti hanno i lavori di Lagrange sopra la costruzione delle carte geografiche (*Mém. de Berlin,* 1779); Lambert ed Euler avevano dimostrato che i metodi in uso per la loro delineazione conservano gli angoli (è questa una proprietà della proiezione stereografica di cui si ignora lo scopritore); Lagrange si è proposto di determinare tutti quelli dotati di questa proprietà, tanto supponendo la terra sferica, quanto ammettendola conformata ad ellissoide di rotazione, ed ha raggiunto lo scopo con una geniale applicazione delle variabili complesse. Nella prima Parte del suo lavoro egli espose la soluzione generale del problema, nella seconda applicò i risultati ottenuti ai procedimenti di rappresentazione già noti.

I numerosi lavori di astronomia scritti dal Nostro, nonchè quelli relativi a questioni di fisica, non appartengono al programma che stiamo svolgendo, quantunque sarebbe facile segnalarvi risultati, metodi o almeno applicazioni di pertinenza dell'analisi matematica. Una sola eccezione faremo a favore di una comunicazione da lui fatta all'Accademia di Berlino il giorno 4 marzo 1767 (*Mém. de Berlin,* 1765) perchè contiene una estensione di mirabile ampiezza del problema delle tautocrone; Huygens lo aveva concepito ammettendo che il movimento accadesse nel vuoto; Giovanni Bernoulli ed Euler lo avevano studiato supponendo che esso avvenisse in un mezzo che presentasse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità del punto mobile; il Nostro riuscì a determinare in generale la forza necessaria a produrre il tautocronismo, supponendo la resistenza una funzione arbitraria della velocità e dello spazio percorso; alcune obbiezioni mossegli dal Fontaine gli porsero poi occasione (*Mém. de Berlin,* 1770) di esporre considerazioni teoriche di notevole importanza per l'analisi e per la meccanica, le quali sono sufficienti a dimostrare l'infondatezza di quegli appunti.

## Lagrange a Parigi

597 - La somma di lavoro compiuto e l'importanza dei risultati conseguiti da Lagrange durante il suo soggiorno a Berlino sono veramente sorprendenti [1]; per ciò non furono certo motivi di carattere scientifico quelli che finirono per rendergli ingrato il soggiorno in quella città; le ragioni sono di altro genere. Anzitutto la morte di una cugina che egli aveva eletta a compagna della propria vita; poi quella (17 agosto 1786) di Federico II, il grande sovrano che lo aveva voluto alla sua corte; notisi finalmente che si stava allora stampando a Parigi sotto la sorveglianza dell'abate Marie e con la malleveria del Legendre) la sua *Mécanique analytique.* Tutto ciò ebbe per conseguenza che le pratiche per attirarlo in Francia, da qualche tempo iniziate dal governo di Luigi XVI, sotto la direzione dell'ambasciatore Mirabeau malgrado l'opposizione del nuovo re di Prussia finirono per ottenere il desiderato effetto, chè sino dal 20 febbraio 1787 Lagrange rioccupò il posto di corrispondente dell'Accademia di Berlino e il 18 maggio dello stesso anno partì da questa città; dal canto suo il Governo francese gli conferiva il titolo di « pensionnaire honoraire » dell'Accademia delle Scienze (a cui apparteneva in qualità di membro straniero sino dal 1772) con l'annua pensione di 6000 franchi e l'alloggio al Louvre; una pensione annua di 300 talleri gli fu nello stesso tempo assegnata dal re di Prussia, col patto che egli continuasse la sua preziosa collaborazione ai *Mém. de Berlin.*

Oltremodo festose furono le accoglienze che a Lagrange furono fatte a Parigi, non solo da parte di Luigi XVI e Maria Antonietta, ma anche da tutti gli scienziati colà residenti. Poco dopo il suo arrivo colà (1788) vedeva la luce la *Mécanique analytique,* opera rigorosamente metodica, avente per cardini il principio delle velocità virtuali e quello di d'Alembert; quando si manifestò la richiesta di una nuova edizione, Lagrange la sottopose ad un totale rifacimento, che la morte non gli concesse di condurre a termine; però gli studi a cui egli fu per tal modo condotto guidarono il grande scienziato alla sua ultima grande scoperta, cioè alla teoria delle variazioni delle costanti arbitrarie e alla applicazione di essa alla meccanica celeste (*Mém. de la I Classe de l'Institut de France,* 1808-09).

È forse l'esaurimento prodotto dallo sforzo di comporre la *Mécanique analytique* che condusse Lagrange in uno stato di profonda inerzia intellettuale, che si manifestava con una invincibile ripugnanza per la scienza a cui aveva dedicata l'intera vita. Nè va dimenticato che egli giunse a Parigi in una delle epoche più tragiche che ricordi la storia; per sua fortuna la Francia repubblicana comprese il disdoro che sarebbe ridondato sopra di essa ove si fosse comportata verso il celebre matematico in modo opposto a quello usato dalla monarchia dei Borbo-

[1] Ai dilettanti di statistica dedichiamo la seguente osservazione: Le memorie di Lagrange occupano 4678 pagine delle sue *Oeuvres complètes*; una classificazione, per forza grossolana, di quanto esse contengono, dà il seguente risultato: Analisi 714; Fisica matematica 553; Aritmetica 734; Meccanica 200; Probabilità 171; Astronomia 1650; Algebra 472; Geometria 93; Trigonometria 52.

ni; in conseguenza, per merito di Lavoisier (1743-1794); deliberò fosse fatta a suo favore un'eccezione alla legge che cacciava in bando gli stranieri e gli confermò la pensione assegnatagli dal « ci-devant roi » (¹). In conseguenza egli partecipò attivamente ai lavori della commissione che preparò il nuovo sistema (decimale) dei pesi e delle misure. Anche il Bureau des Longitudes lo volle nel proprio seno; istituita poi l'École centrale des travaux publiques (che ben presto si mutò nell'École polytechnique di fama mondiale) egli fu chiamato a occuparvi la cattedra di meccanica ed analisi; anzi l'assemblea dei professori, nella sua prima adunanza, acclamò Lagrange a proprio presidente; ma ragioni di salute lo costrinsero poco dopo a rinunciare a quel gravoso insegnamento. Fondato l'Istituto di Francia (in luogo dell'antica Accademia delle scienze) Lagrange venne chiamato a far parte della Sezione scientifica, della quale fu anzi il primo presidente. Finalmente, creata che fu l'École normale (1795), egli fu chiamato a insegnarvi e da questo insegnamento traggono origine le ottime (cinque) *Leçons élémentaires sur les Mathématiques* (²), ristampate più volte nell'originale e in varie traduzioni; notiamo che ivi si trova la ben nota formola d'interpolazione che reca il nome del sommo matematico torinese, la quale dianzi giaceva sepolta in una memoria destinata ai soli astronomi (*Mém. de Berlin,* 1792-93) (³); nè va taciuto che a quanto è esposto in quelle *Leçons* serve di prezioso complemento l'elegante *Essai d'Analyse numérique sur la Transformation des Fractions* (pubblicato nel V Cah. del *Journ. de l'Ec. pol.*).

## Ultimi lavori

598 - Senza dubbio per porre a disposizione di tutti i frutti delle sue assidue e feconde ricerche sulle equazioni algebriche, Lagrange raccolse nel 1798 i propri lavori sull'argomento in un volume intitolato *Traité de la Résolution des Equations numériques de tous les degrés*, titolo forse imposto dall'editore, ma certamente non appropriato a una pubblicazione che nulla ha del trattato, risultando da scritti staccati che rappresentano la totalità dei contributi dati dall'autore alla teoria delle equazioni algebriche, senza escludervi però quelli dei predecessori. Quale sia stato il giudizio che fu pronunciato su quest'opera risulta dal fatto che appena dieci anni erano passati dalla sua prima pubblicazione, che una nuova edizione ne fu necessaria (⁴).

Chiamato all'insegnamento dell'analisi infinitesimale, Lagrange pen-

---

(¹) « Une loi de cette époque (1793) obligeait les étrangers de sortir de France; pour que Lagrange pût rester, ou obtint un arrêté du comité de salut publique ou le chargeait de traiter des questions de théorie, propres à éclaircir la pratiques ». Poisson, *Journ. de l'Ec. Polyt.*, XXI Cah., 1832, p. 187.

(²) Gli argomenti svolti sono. I. Sull'aritmetica, ove sono trattate le frazioni e i logaritmi; II. Sulle operazioni dell'aritmetica; III. Sull'algebra, ove si espone la soluzione delle equazioni di 3° e 4° grado; IV. Sulla risoluzione delle equazioni numeriche; V. Sull'uso delle curve alla risoluzione dei problemi.

(³) Da notarsi che il Waring l'aveva data prima nella memoria intitolata *Problems concerning interpolation* (P. T., T. LXIX, 1779).

(⁴) Alla III è premessa una luminosa analisi scritta dal Poinsot ed alla quale rinviamo il lettore desideroso di maggiori informazioni sopra questa celebre opera.

sò a informarlo ai concetti da lui esposti in una memoria che risale al 1772 (v. p. 755). Ebbero così origine le due opere intitolate una *Théorie des Fonctions analytiques,* l'altra *Leçons sur le Calcul des Fonctions,* entrambe pubblicate per la prima volta nei verbali delle sedute dell'*École normale* e poi a parte (la prima nel 1813 e nel 1806 la seconda). Riguardo al loro contenuto notiamo anzitutto che l'autore, adottando il modo di vedere di Giovanni Bernoulli, intende per « fonction d'une ou plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque » e la designa con uno dei simboli $fx$, $Fx$, ecc. Limitandosi anzitutto, come è naturale, alle funzioni di una sola variabile, Lagrange si sforza di dimostrare che per qualunque siffatta funzione $fx$ ha luogo uno sviluppo della forma

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\dots$$

e definisce come derivate di $fx$ i coefficienti delle successive potenze di $i$. Similmente per il caso di più variabili. Le ragioni della scelta di questo punto di partenza, sono esposte in una splendida Introduzione, ove sono fatti conoscere e criticati i vari metodi anteriormente usati per stabilire il calcolo infinitesimale; vedremo (n. 601) che essa non valse a sottrarlo da critiche più o meno giustificate; qui notiamo che egli, servendosi delle riferite definizioni, stabilisce tutte le formole dell'ordinario calcolo infinitesimale sino alla teoria delle equazioni differenziali inclusivamente. Ciò si legge nella I Parte della citata *Théorie,* nonchè, con molti maggiori sviluppi, nelle *Leçons*, mentre le applicazioni geometriche e meccaniche formano soltanto l'oggetto di molte pagine (Parti II e III) della prima; cosicchè si può ritenere che *Théorie* e *Leçons* non siano opere sostanzialmente differenti, e, se un lettore chiedesse un consiglio sul modo di condurne lo studio, gli si potrebbe ragionevolmente suggerire di studiare le *Leçons* per poi passare alle ultime due Parti della *Théorie.* In questa incontrasi per la prima volta il resto della formola di Taylor, anzitutto sotto forma d'integrale e poi sotto quella che porta ancora il nome di Lagrange; nelle *Leçons* il teorema della media manifesta tutta la sua importanza. Grazie a queste opere la serie di Taylor per più variabili, la teoria generale degli inviluppi, ecc., entrarono a far parte di qualunque trattazione dell'analisi infinitesimale, e fu posto nelle mani di tutti un modello di stile matematico, chiaro ed elegante, a cui ragionevolmente s'ispirarono i successivi espositori di quella materia.

599 - Chiarezza ed eleganza, doti comuni a tutti gli scritti del nostro eminente compatriotta, non mancano neppure nell'ultimo di cui ci resta ancora a parlare. Si tratta di una memoria (*Journ. Éc. Pol.,* T. II, 1799) destinata a mostrare che tutte le formole della trigonometria sferica si possono dedurre, mediante semplici trasformazioni algebriche. dal teorema del coseno, ottenuto da una investigazione diretta della figura; è un fatto già intravveduto dal de Gua (*Mém. de Paris,* 1783). ma da lui stabilito in modo talmente farraginoso che avra servito piuttosto a stabilire gli inconvenienti, che a porre in luce i vantaggi di quella derivazione.

Gli è probabilmente nel corso di tali studi che Lagrange ebbe a notare che tutta la geometria della sfera è indipendente dal postulato di Euclide e fu indotto a pensare che, facendo tendere all'infinito il raggio della sfera, si sarebbe giunti a stabilire, finalmente in modo pienamente soddisfacente, la teoria delle parallele, questione che appunto allora il Legendre (v. n. 768) aveva risposto all'ordine del giorno; è indubitato che Lagrange non avrà tardato ad avvedersi che trattavasi di un'illusione; tuttavia il 6 febbraio 1806 egli lesse all'Istituto di Francia una memoria sull'argomento, che trovasi tuttora inedita fra i suoi manoscritti di cui esso è depositario.

Pochi matematici seppero, quanto Lagrange, accoppiare una ammirabile originalità di pensiero a una perfetta conoscenza della letteratura scientifica antica e moderna; percorrendo le sue memorie o gli esordi ai vari capitoli delle sue opere di maggior lena si apprende quanto scrissero i suoi predecessori, grandi e piccoli, valutato a dovere e collocato nel posto che deve occupare nel corpo della scienza. Perciò può ben dirsi che egli non rimase estraneo alle indagini sull'evoluzione del pensiero matematico a cui il secolo XIX si dedicò con tanto fervore; inoltre alcune pagine conservate tuttora nella Biblioteca della massima corporazione scientifica francese provano che egli volse la mente ad una edizione critica di Diofanto [1] e, quando si accorse di non poterla recare a termine, adunò con cura scrupolosa i materiali raccolti affinchè potesse trarne profitto colui che intendesse accingersi alla meritoria fatica.

## Conclusione

600 - A Lagrange furono conferite tutte le distinzioni di cui disponeva il governo napoleonico; ebbe un posto nel Senato conservatore, fu elevato al grado di Grand'Ufficiale della Legion d'Onore e da ultimo fu nominato Conte dell'Impero; la morte che lo colpì il 10 aprile 1813 gli risparmiò il dolore di assistere al crollo dell'edificio eretto da Napoleone I. I suoi funerali furono degni del Grande che, in tutti i campi che coltivò, inaugurò una nuova èra e ne chiuse un'altra. Così (limitandoci a quanto è di stretta pertinenza della presente *Storia*) nella teoria dei numeri egli scrisse la parola « fine » all'epoca inaugurata da Fermat, preparando quella che, come vedremo, porta il nome di Gauss; analoga è la sua azione spiegata riguardo alla teoria delle equazioni, chè illustrando l'opera degli algebristi italiani del secolo XVI, egli ha preparato il terreno in cui s'illustrarono Ruffini e Galois; finalmente, riguardo alla geometria analitica, egli scrisse alcune pagine informate a quei concetti a cui deve la vita l'attuale modo di concepire e trattare quella branca delle matematiche. Se, in generale, riguardo all'analisi egli appare come l'ultimo rappresentante della fiducia illimitata nella generalità delle formole, per alcune speciali teorie (quale il calcolo delle variazioni) viene tuttora salutato come glorioso pioniere. Niuna meraviglia, pertanto, se compiendosi un secolo dalla deplorata sua morte,

(1) Da alcuni appunti lagrangiani esistenti a Parigi fu tratto un teorema che G. Peano ha pubblicato nel suo *Formulaire de Mathématiques* (éd. de l'an 1902-03, p. 324).

scienziati di tutto il mondo furono pronti a rispondere a un invito proveniente dalla sua patria, tributando omaggio all'eminente matematico a cui l'Italia diede i natali, la Germania assicurò le condizioni per un fecondo lavoro e la Francia largì tutti gli onori a cui può ragionevolmente aspirare un uomo di genio.

## Un discepolo di Lagrange: Daviet de Foncenex

601 - Benchè Lagrange fosse mediocremente propenso alla carriera d'insegnante, pure una folla anonima ne ascoltò la parola, tanto all'alba quanto verso il tramonto della sua esistenza; una sola persona nota, un suo compatriotta e quasi coetaneo, passa per suo più che discepolo: Francesco Daviet de Foncenex. Nato nel 1744 a Thonon (Savoja) entrò nel 1778 nell'Accademia delle Scienze di Torino e appunto una memoria da essa pubblicata (vedi qui sotto) attrasse su di lui l'attenzione del Governo sardo che gli affidò la direzione della marina di cui il Governo stesso voleva dotare lo Stato. Tacendo di altre cariche militari che gli furono affidate, rileveremo che egli ebbe la sfortuna di comandare la fortezza di Villafranca nel momento dell'invasione francese e ne fece la consegna al nemico (30 settembre 1792); benchè egli asserisse di essersi deciso a questo atto dietro ordini ricevuti, fu incarcerato a Torino e morì oscuramente a Casale nell'agosto del 1799. Altro infortunio di genere diverso toccò a lui quando il Delambre, tessendo l'elogio di Lagrange, riferì avergli questi narrato che la memoria del Foncenex, *Réflexions sur les Quantitès imaginaires* (M. T., T. I, 1759) era sostanzialmente lavoro di Lagrange medesimo, il quale al Foncenex comunicò le idee fondamentali e il modo di svolgere i relativi calcoli. Vi si legge un tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazione algebriche che una critica di d'Alembert e altra di Gauss salvarono da un completo oblio. Il Delambre aggiunge che quanto sopra appare verosimile perchè il Foncenex, dopo la partenza di Lagrange da Torino, non diede alcun contributo alla scienza; ora ciò non è perfettamente esatto dal momento che esiste di lui una memoria *Sur les Principes fondamentaux de la Mécanique* (M. T., T. II, 1769) ove, per determinare le condizioni d'equilibrio della leva, viene stabilita un'equazione funzionale. Di essa l'autore non dà che una soluzione particolare, mentre ne è nota la soluzione generale per merito di V. Riccati, d'Alembert e Laplace; è molto importante il fatto che (lo ha osservato A. Genocchi), mentre quella riconduce alla geometria classica, questa porta alla geometria non-euclidea.

## Un oppositore di Lagrange: H. Wronski

602 - Fra le voci di entusiastico consenso che salutarono sin dal loro apparire le pubblicazioni di Lagrange, una sola fece udire una nota discordante, quella di Giuseppe Maria Hoëne Wronski.

Nato vicino a Posnan il 24 agosto 1778, fu educato alla Scuola militare dei cadetti di Varsavia, donde uscì nel 1794 ufficiale d'artiglieria.

Nella guerra contro i Russi fu fatto prigioniero insieme al generale Kosciusko; liberato all'entrata del nemico in Varsavia, fu contro voglia incorporato nello stato maggiore dei vincitori e vi raggiunse il grado di tenente-colonnello. Ben presto si dimise con lo scopo di raggiungere le legioni polacche combattenti con Napoleone; invece rimase in Germania negli anni 1798-99 per perfezionarsi nella filosofia e nella giurisprudenza. Nel 1800 si trasferì in Francia e, dopo un breve soggiorno a Parigi, si recò a Marsiglia per unirsi ai suoi compatriotti combattenti. Ben presto lasciò ogni altra occupazione per dedicarsi completamente agli studi. Nel 1810 fece ritorno a Parigi e subito presentò all'Istituto di Francia una memoria dal titolo *Téchnie de l'Algorithmie* che fu giudicata, per bocca di Lagrange e Lacroix, in modo benevolo e incoraggiante (5 ottobre 1810); la Relazione da essi presentata, pubblicata dal *Moniteur,* diede però origine a una replica da parte del Wronski. Seguirono molte pubblicazioni di mole considerevole (v. la *Bibliografia* relativa al presente Capitolo). Il Wronski passò qualche tempo anche in Inghilterra e fece alla Società Reale parecchie comunicazioni su cui, essendo relative a questioni di fisica e di matematica applicata, non dobbiamo arrestarci. Ma poi ritornò ancora una volta a Parigi, ove morì il 9 agosto 1853.

Passando dall'autore alle opere, notiamo che sua *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques* consta di due parti, una critica, l'altra ricostruttiva. Nella prima sono segnalati i punti deboli ed oscuri del ragionamento col quale Lagrange si sforzò invano di dimostrare l'applicabilità della serie di Taylor a qualunque funzione: il lettore il quale conosce le restrizioni che la scienza moderna ha imposte a quella conclusione riconoscerà che il Wronski diede prova, non solo di ammirabile coraggio nel prendere posizione contro un'autorità allora indiscussa, ma anche di acume quasi profetico. Nella seconda parte del suo lavoro l'autore sostenne essere antiscientifico ogni tentativo per bandire dall'analisi matematica il concetto d'infinito, aggiungendo a riprova avere egli mostrato nelle sue opere come essa si potesse in conseguenza stabilire con pieno rigore. Questo lavoro fu presentato nel 1811 all'Istituto di Francia, il quale ne deferì l'esame a una commissione composta di Legendre e Arago; la richiesta Relazione fu presentata in data 11 novembre di quell'anno. Per quanto si possa riconoscere la delicatezza della posizione in cui si trovarono i relatori, è forza dichiarare che essi non si mostrarono all'altezza della missione ad essi affidata; chè essi confessarono di non avere presa esatta cognizione o meglio di non avere compresi i nuovi principi scientifici escogitati dal pensatore polacco e gli attribuirono il meschino proposito di impedire che a Lagrange (e, come vedremo, a Laplace) venissero conferiti ai due primi premi decennali da Napoleone destinati a opere matematiche; onde diedero buon giuoco a Wronski che non mancò di replicare con forza e vivacità.

Al proposito è dovere dello storico segnalare due fatti. Anzitutto che l'imperfezione del ragionamento lagrangiano fu nella stessa epoca avvertita da altri; ciò è provato da un articolo della *Correspondance sur l'Ecole polyt.* (N. 3) dovuto ad un giovane destinato a toccare i fastigi della rinomanza, il Poisson (n. 680). Ora anche il ragionamento che

questi propose (per dimostrare la generalità dello sviluppo di $f(x+i)$ (v. p. 757) in sostituzione di quello di Lagrange, trovasi esaminato, criticato e polverizzato nella citata *Réfutation*. In secondo luogo che, una manifestazione dell'orientamento mentale del Wronski è offerta dalla critica da lui mossa alla teoria delle funzioni generatrici che Laplace espose prima in un *Mémorie sur les Suites* (Mém. de Paris, 1779) e poi nella sua *Théorie des Probabilités*. Il concetto di quei nuovi enti analitici emerge dalla seguente definizione: Se $y_x$ è una funzione qualsivoglia di $x$ e si forma la serie $\sum_0^\infty y_x t^x$, si può sempre concepire una funzione di $t$ che, sviluppata in serie, riproduca la data; è appunto quella che fu detta funzione generatrice di $y_x$. Ora, chi non vede che ivi si nasconde un postulato e come pensare che il Wronski, col suo acuto spirito critico, potesse accogliere quel concetto senza ribellione od almeno senza discussione?

603 - Il completo esame delle numerose e voluminose pubblicazioni del Wronski ci trarrebbe molto lontano; che di esso sarebbero ben degne è dimostrato dal fatto che molti dei concetti e procedimenti da lui ideati entrarono a far parte integrante della scienza, sia pure dietro proposta altrui ([1]). Così nelle sue « somme combinatorie » o funzioni *scin* (lettera ebraica) si riconobbe la stretta parentela con i determinanti, mentre le sue funzioni *aleph* non differiscono dalle funzioni simmetriche complete delle radici di un'equazione. La sua « legge suprema » è uno sviluppo in serie di straordinaria generalità, nel quale alcuni non vollero riconoscere che un valore formale, ma che gode della qualità (e lo riconobbero Lagrange e Lacroix in un Rapporto dianzi citato) di comprendere tutti gli sviluppi in serie anteriormente noti. La stessa dote di somma generalità è posseduta dalle sue ricerche aritmetiche, chè, ad es., egli ha scoperta una formola che abbraccia i teoremi di Fermat e Wilson. Le nuove funzioni da lui presentate come generalizzazioni delle funzioni circolari furono incontrate poi da altri, i quali, al pari del Wronski, ne segnalarono importanti applicazioni. Le formole da lui date per esprimere le derivate successive di una funzione o per eseguire il cambiamento di variabili hanno pregi che tutti riconobbero sino dal loro apparire e non sono negate neppure oggi. Finalmente considerando e risolvendo sistemi di infinite equazioni lineari egli prese posto fra i lontani precursori della teoria delle equazioni integrali. Un unico grave errore egli commise, quello di ritenere di esser giunto a risolvere le equazioni letterali di tutti i gradi; credette di avere conseguito questo grande scopo prendendo le mosse da una considerazione che notammo in Euler (v. p. 696), ma alcuni preconcetti filosofici gli vietarono di accorgersi di essersi posto per un vicolo cieco.

A un vasto consenso per le vedute del Wronski furono di ostacolo le notazioni originali e complicate da lui usate, la forma troppo spesso

([1]) Il lettore desideroso di dati completi al riguardo ricorra ai dotti articoli di S. Dickstein. *Sur les découvertes mathématiques de Wronski* (Bibliotheca mathematica, Nouv. Sér., 1892-1896).

polemica e forse più di tutto lo spesseggiare di considerazioni metafisiche da cui molti matematici rifuggono. Ciò non ostante, se ebbe dei detrattori e degli indifferenti, non gli mancarono gli aderenti entusiastici. Oggi la storia imparziale ha pronunciato su di lui un equo giudizio e l'analisi moderna reca traccia onorevole del suo passaggio su questa terra.

## BIBLIOGRAFIA

*Oeuvres de Lagrange*, 14 Volumi (Paris, 1867-1892).

H. Wronsky, *Introduction à la philosophie des mathématiques et Technie de l'algorithmie* (Paris, 1811) [1].

H. Wronsky, *Résolution générale des équations de tous les degrés* (Paris, 1812).

H. Wronsky, *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (Paris, 1812).

H. Wronsky, *Philosophie de l'infini* (Paris, 1814).

H. Wronsky, *Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace* (Paris, cominciata a stamparsi nel 1812, pubblicata nel 1819).

H. Wronsky, *Philosophie de la technie* (I Parte 1815; II, 1817).

H. Wronsky, *Canons de logarithmes* (Paris, 1827).

H. Wronsky, *Oeuvres mathématiques*, quattro Volumi (Paris, 1925).

A. S. de Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques* (Paris, 1834-40; versione italiana per cura di G. D. Gasparri e G. François, Firenze, 1838-1847).

---

[1] Ivi una particolareggiata classificazione delle matematiche, i cui elementi si ritrovano nel *Dictionnaire* del Montferrier; notiamovi soltanto la distinzione fra la matematica teorica e i procedimenti di calcolo; quella detta dal Nostro « théorie algorithmique », questi riuniti sotto il nome di « technie algoritmique ».

CAPITOLO XXXVII

# LE MATEMATICHE DURANTE LA RIVOLUZIONE FRANCESE IL CONSOLATO E IL PRIMO IMPERO

## In Francia

604 - Gli scienziati di cui stiamo per occuparci (al pari di quelli di cui parla il Capitolo seguente) appartengono ad uno dei periodi più agitati in cui siasi trovata l'Europa; poteva credersi che in un'epoca nella quale la ghigliottina era costantemente in attività di servizio e in cui il cannone non cessava di tuonare minacciosamente, non fossero possibili le tranquille meditazioni da cui la scienza può attendere cospicui progressi; invece il fervore che animava i rinnovatori dell'assetto sociale invase tutte le classi di cittadini, non esclusa quella composta di coloro che avevano costante commercio con cifre e figure: gli è quanto risulterà da ciò che siamo per dire. Qui notiamo subito che furono allora fondate a Parigi le due grandi scuole da cui uscirono tutti gli scienziati che illustrarono la Francia durante il secolo XIX: parliamo dell'« École normale » e dell'« École centrale des travaux publiques » bentosto ribattezzata come « École Polytechnique », di cui professori e studenti trovarono in uno speciale « Journal » veicolo pronto a far conoscere a tutti le loro scoperte. Giova eziandio notare come da questo momento (e non soltanto presso la vicina nazione) la ricerca scientifica divenne il monopolio di professori, che presto o tardi appartennero all'insegnamento superiore; metamorfosi che si manifesta sotto l'aspetto più impressionante in Francia in cui (come ben sa il lettore che ci ha seguìti fin qui) la nostra scienza deve i più decisivi perfezionamenti compiuti durante il secolo XVII a persone che mai occuparono una cattedra; la Convenzione nazionale col chiamare ad insegnare nell'« École normale » i più grandi matematici, i più grandi fisici, i più grandi naturalisti francesi, proiettò sulla funzione di professore uno splendore inatteso, i cui effetti si avvertono tuttora e certamente non scompariranno mai in avvenire.

Premessa questa osservazione, passiamo a dire della vita e delle opere delle più eminenti personalità fiorite negli anni suindicati, nella terra situata ad occidente dell'Italia non senza notare che i vittoriosi soldati di Napoleone contribuirono a fare conoscere ed ammirare le une e le altre in tutta Europa, onde l'influenza da essi esercitata si estese assai oltre i confini della Francia ([1]).

([1]) Essa oltrepassò anche l'Atlantico; infatti, quando gli americani del Nord costituirono gli Stati Uniti, non appena emancipatisi dalla dominazione inglese, per un

605 - Carlo Bossut nacque a Tartaras (dipartimento del Rodano) l'11 agosto 1730; entrò da giovane nella Compagnia di Gesù: ottenne una cattedra nella Scuola del Genio di Mézières e la conservò sinchè ne fu privato dalla raffica rivoluzionaria; instaurato l'impero, ebbe la carica di esaminatore degli alunni della Scuola Politecnica; alcune pregevoli memorie di analisi gli aprirono nel 1786 le porte dell'Accademia delle Scienze, donde poi passò all'Istituto di Francia; morì a Parigi il 14 gennaio 1814. Più che a ricerche originali, egli deve la propria notorietà a un *Corso di matematiche*, che fu anche tradotto in italiano.

Sullo scorcio del secolo XVIII la letteratura matematica si arricchì in Francia di un apprezzato trattato di calcolo infinitesimale, scritto da J. A. Cousin (n. a Parigi il 18 gennaio 1739, m. ivi il 28 gennaio 1800), che fu professore tanto alla Scuola militare di Parigi quanto al Collegio di Francia. Animato dalla lodevole aspirazione di somministrare ai propri lettori idee precise, volle evitare il concetto d'infinito, epperò si servì del metodo dei limiti quale d'Alembert espose nel relativo articolo dell'*Encyclopédie*. Questo metodo egli fece conoscere in una « Introduzione » e ne mostrò subito l'applicazione tanto nella geometria quanto nella meccanica; nelle due « Parti » principali della sua opera egli insegnò poi quanto conoscevasi ai suoi giorni di calcolo infinitesimale, non esclusi alcuni risultati concernenti le equazioni a derivate parziali da lui stabiliti in memorie pubblicate (1776 e 1778) dall'Accademia di Parigi. E poichè in questo trattato egli dovette ricorrere ad alcune teorie algebriche, credette opportuno di esporle in un'opera speciale (scritta mentre l'autore trovavasi in carcere per ragioni politiche), che essa pure raccomandasi per precisione e chiarezza.

606 - Pietro Simone Laplace nacque a Beaumont en Auge (Normandia) il 23 marzo 1749; appena ventenne, essendosi trasferito a Parigi, grazie all'appoggio di d'Alembert, ebbe una cattedra nella Scuola militare di Parigi e la conservò sino al 1776. Le numerose memorie da lui presentate a quell'Accademia delle Scienze lo fecero ammettere successivamente (1773, 1783, 1785) nelle tre categorie in cui erano ripartiti i componenti quella compagnia. Nel 1785 fu scelto come esaminatore degli ufficiali di Artiglieria e Genio Marittimo; partecipò attivamente a lavori della Commissione incaricata di fissare un nuovo sistema di pesi e misure ed ebbe una cattedra nella neonata Scuola normale; entrò poi anche nell'Accademia francese. Dopo il 18 brumajo, Napoleone (di cui era stato maestro) lo incaricò di reggere il ministero dell'interno; ma, dopo qualche settimana, fu dispensato da una carica per la quale non aveva alcuna attitudine; nominato senatore partecipò efficacemente ai lavori della grande assemblea legislativa (ne sono prova parecchie relazioni pubblicate nell'ultimo volume delle sue *Opere*); votò la decadenza

---

fenomeno spiegabilissimo, vollero sottrarsi, anche riguardo all'istruzione, da ogni servaggio britannico: a tale scopo, invece di servirsi delle opere scritte nella lingua stessa in cui parlavano, si affrettarono a tradurre i più reputati trattati francesi (Laplace, Lacroix, Biot, ecc.). Maggiori particolari sull'argomento trovansi nell'articolo di L. G. SIMMONS, *The influence of French mathematics at the end of the eighteenth Century upon the teaching of mathematics in American colleges* (ISIS, Vol. XV, 1931).

di Napoleone e non si presentò a lui durante i Cento giorni; i Borboni, apprezzando questa sua attitudine, lo nominarono pari di Francia e poi gli conferirono il titolo di marchese; morì il 5 marzo 1827.

Laplace — a somiglianza di Galileo e Huygens — non può occupare nella nostra *Storia* una posizione conforme alla sua grandezza, perchè i suoi lavori si riferiscono quasi totalmente ad argomenti estranei al nostro programma. Infatti gran parte della sua vita fu spesa nello studio dei fenomeni celesti, in base alla teoria della gravitazione universale; disponendo di mezzi analitici raffinati e potenti, egli potè così dare all'edificio eretto da Newton complementi della più alta importanza; in tal modo adunò i materiali per il grande *Traité de Mécanique celeste,* ove sono coordinate le sue ricerche astronomiche; di esso può considerarsi un coronamento destinato al grande pubblico l'*Esposition du Système du monde*, ove è sostenuto (indipendentemente, ma d'accordo con Kant) che il nostro sistema planetario proviene dallo sfaldamento di un'immensa nebulosa. Dallo studio di questi poderosi problemi Laplace fu condotto ad occuparsi della teoria delle probabilità, da lui designata come « le bon sens reduit à calcul »; grazie a lui essa ottenne notevoli perfezionamenti, specialmente in conseguenza dei suoi lavori sulle equazioni a derivate parziali e a differenze finite (M. T., T. IV, 1766, e *Mém. Sav. étr.,* T. VII, 1866, ecc.). Ad essa egli dedicò due opere speciali, che non tardarono a divenire celebri: una (la *Théorie analytique des probabilités*) diretta ai matematici di professione, l'altra (l'*Essai philosophique sur les probabilités*) diretta a far conoscere alle persone di media cultura gli scopi e le applicazioni di quella teoria; onde non a torto fu detto che la dottrina delle probabilità per quanto concerne la diffusione nel mondo è debitrice a Laplace più che a qualunque altro.

607 - Nel corso delle ricerche testè accennate, Laplace ebbe occasione di perfezionare alcune teorie matematiche e, grazie all'interesse generale dei risultati ottenuti, giudicò opportuno di diffonderne la conoscenza in un lavoro speciale dal titolo *Mémoire sur divers Points d'Analyse* (Journ. Éc. Pol., XV Cah., 1809); vi si leggono gli elementi essenziale del calcolo con funzioni generatrici (v. p. 762) ed i procedimenti da lui ideati per determinare gli integrali delle equazioni a differenze finite; vi è inoltre posto in luce, mediante opportuni esempi, la possibilità di servirsi di numeri immaginari per calcolare certi integrali definiti; finalmente vengono dati utili ammaestramenti a chi si propone di calcolare tavole dei valori assunti da una funzione.

Osserviamo da ultimo che sopra Laplace insegnante ci resta un solo, ma prezioso documento nelle *Leçons de Mathématiques données à l'École Normale* (Journ. Éc. Pol., Cah., VII e VIII, 1812); per la materia non differiscono sensibilmente dalle analoghe di Lagrange (v. p. 757), e, affinchè il lettore possa istituire il relativo paragone, daremo qui l'indice degli argomenti trattati da Laplace: I. Sopra la numerazione e le operazioni dell'aritmetica. II. Sopra le frazioni, le potenze e l'estrazione delle radici; proporzioni, progressioni e logaritmi. III. Algebra: prime operazioni algebriche; le potenze e gli esponenti. IV. Sulla teoria delle equazioni. V. Sulla risoluzione delle equazioni. Teorema sulla

forma delle radici immaginarie [1]. VI. Sull'eliminazione delle incognite delle equazioni. Risoluzione approssimata delle equazioni. VII. Sulla geometria elementare; nozione di limite; principii di trigonometria rettilinea e sferica. VIII. Applicazione dell'algebra alla geometria. Divisione degli angoli. Teoremi sui lati. Uso delle tavole trigonometriche nella risoluzione delle equazioni. Applicazione dell'algebra alla teoria delle linee e delle superficie curve. IX. Il nuovo sistema metrico di pesi e misure. X. Sulle probabilità.

608 - Adriano Maria Legendre nacque a Parigi il 18 settembre 1752; nel Collegio Mazarino studiò matematica sotto la direzione di un insegnante allora di grande fama, l'abate Marie (n. 1788) da noi già ricordato, e attirò ben presto su di sè l'attenzione dell'Accademia delle Scienze dedicandole, quando non aveva che 17 anni, le tesi presentate, per conseguire la dignità dottorale. L'Accademia gradì l'omaggio e incoraggiò l'autore a proseguire; tale suggerimento egli accolse e sino dal 1773 le presentò una memoria. Grazie all'appoggio di d'Alembert, Legendre ottenne una cattedra di matematica nella Scuola di Guerra di Parigi e l'occupò dal 1775 al 1780; dell'indipendenza economica in tal modo raggiunta egli si giovò per studiare le opere di Euler e degli altri grandi matematici del secolo XVIII. Nel 1783 l'Accademia delle Scienze gli conferì un posto di « aggregato »; nel 1787 fu nominato membro di una commissione incaricata di collegare fra loro gli Osservatori di Parigi e di Greenwich (ciò che lo portò a occuparsi di geodesia e al teorema sul triangolo sferico che porta il suo nome) e nel 1791 di quella incaricata di scegliere un nuovo sistema di pesi e misure. Create le Scuole Politecnica e Normale e il Bureau des Longitudes, il Legendre vi ebbe posto. Morì a Parigi il 19 gennaio 1833.

Analista di solida dottrina più che pensatore originale il Legendre ha arricchita la letteratura analitica di due utilissime opere, in cui trovansi coordinati tutti i risultati anteriormente ottenuti su due importanti branche delle matematiche, teoria dei numeri e funzioni ellittiche: in tal modo, riguardo ad entrambe, chiuse un'epoca e ne preparò efficacemente una nuova.

La prima di queste opere fu pubblicata per due volte a Parigi (1798, 1808) col titolo di *Essai sur la Théorie des Nombres* e poi, dopo avere subìto notevoli aggiunte, con quello di *Théorie des Nombres* (Paris, 1930). Quanto essa fosse opportuna risulta chiaro a chi ricordi i lavori compiuti da Euler, da Lagrange e dallo stesso Legendre per dimostrare e rettificare i teoremi enunciati da Fermat, lavori che trovansi sepolti in numerosi volumi di difficile accesso; e che l'edificio eretto da Legendre sia di robusta ossatura risulta dal fatto che dopo più di un mezzo secolo (1886) fu ritenuto degno di una versione in tedesco [2]. Gli argomenti ivi trattati sono: divisibilità dei numeri, ricerche sui numeri pri-

---

[1] Ivi un tentativo per dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra, che, quantunque ingegnoso, fu criticato a ragione da Gauss.

[2] Va però ivi segnalata la seguente asserzione errata: Chiamando $p_n$ l'$n^{mo}$ numero intero a partire da 2, si possono trovare $2\,p_{n-1} - 1$ interi consecutivi ognuno dei quali abbia almeno un fattore primo della serie $p_1, p_2 \ldots, p_n$, ma non di più.

mi, studio dei resti quadratici (il quale condusse alla « legge di reciprocità » che costituisce il maggior contributo dato da Legendre alla conoscenza dei numeri), considerazioni sopra i resti di potenze superiori, risoluzione di varie categorie di equazioni indeterminate, scomposizione di un numero nella somma di più altri e rappresentazione di un numero mediante forme binarie prestabilite. Una qualità di carattere che va rilevata in Legendre è la pronta benevolenza con cui egli accoglieva le scoperte altrui; se ne ha una prova nell'avere egli accolta nell'ultima delle sue opere la teoria gaussiana delle equazioni binomie; nuove prove incontreremo fra breve.

La seconda delle grandi opere di Legendre dianzi citate riassume e completa le ricerche compiute da lui e da altri sopra varie specie d'integrali; fu pubblicata la prima volta nel 1811 col modesto titolo di *Exercices de Calcul Intégral* e una seconda (1827-1832) con quello più espressivo di *Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrales Eulériennes*. Nel mentre egli curava questa seconda edizione due giovani di genio, dei quali ci occuperemo fra non molto (nn. 668 e 673), collocavano la teoria delle funzioni ellittiche sopra basi del tutto nuove e il glorioso veterano, scambio di risentirne invidia e dolore, si affrettò ad incoraggiarli nelle loro ricerche e a registrare le loro scoperte nelle ultime pagine del suo trattato. Benchè, dunque, l'opera di Legendre appaia come il prodotto di un'èra al tramonto, tutti riconoscono che con la distribuzione in tre specie di tutti gli integrali ellittici, con le estese considerazioni relative alle loro trasformazioni e con le ampie tavole numeriche diligentemente calcolate, il suo autore ha posto nelle mani di tutti un nuovo prezioso ausiliare analitico, anche in tale circostanza esonerando dal fastidio di ricorrere a svariate raccolte accademiche, accessibili soltanto a pochi eletti.

609 - Più che grazie a queste opere, destinate ai cultori dell'alta matematica, Legendre conquistò universale rinomanza grazie ai suoi *Eléments de Géometrie,* i quali, a partire dal 1794, avendo avuto numerose edizioni e versioni in varie lingue, assicurarono all'autore una larga agiatezza [1].

Quest'opera, giustamente celebre, si divide in otto Libri, che trattano i seguenti argomenti: I. Principi. II. Il cerchio e la misura degli angoli. III. Le proporzioni nelle figure. IV. I poligoni regolari e il cerchio. V. Piani e angoli solidi. VI. Poliedri. VII. La sfera. VIII. I tre corpi rotondi. Parecchi punti importanti sono svolti nelle Note. Il Legendre dichiara di esporre la geometria « à peu près dans l'ordre d'Euclide » e di seguire i procedimenti logici di Euclide ed Archimede; però dagli antichi si stacca in parecchie occasioni. Così, mentre Euclide, essendosi imposto di ragionarle esclusivamente sopra figure di costruzione nota, espone promiscuamente problemi e teoremi. Legendre si occupa prima di questi onde procurarsi i mezzi per risolvere quelli; e mentre il geometra greco non ha avvertita la necessità di distinguere le figure

[1] A noi sta sott'occhio la XV ed. datata 1862; alcune posteriori furono rimaneggiate (non sempre migliorate) da altri, circostanza che non fu sempre tenuta presente da coloro che vollero giudicare il lavoro del Legendre.

« eguali » dalle figure « simmetriche », il Nostro ha per primo insistito con piena ragione sulla necessità di separare le une dalle altre. Inoltre sul postulato delle parallele ha compiute ricerche originali (citiamo la dimostrazione del teorema che insegna qual sia la somma degli angoli di un triangolo basata sul principio d'omogeneità), i cui ultimi risultati espose più compiutamente in una memoria speciale intitolata *Réflexions sur différentes Manières de démontrer la Théorie des Parellèles ou le Théorème sur la somme des trois angles d'un triangle* (Mém. de l'Institut de France, T. II, 1833); benchè alcune delle conseguenze a cui giunse il geometra francese rientrino in altre raggiunte prima dal Saccheri (v. n. 567), per stabilirne l'indipendenza basta tener presente che l'opera del Gesuita ligure era allora del tutto ignota in Francia. A Legendre devesi poi (*Géométrie,* Note VI) l'introduzione nella geometria della perpendicolare comune a due rette sghembe, ottenuta cercandone la minima distanza, come debbonsi (Note XIII) a lui alcuni notevoli corollari del teorema di Euler sui poliedri. Notiamo anche che (Note IV), dopo di avere riprodotta la dimostrazione data da Lambert (v. n. 579) nell'irrazionalità di $\pi$, egli, non soltanto aggiunse di suo l'analoga relativa a $\pi^2$, ma, con senso profetico, osservò: « Il est probable que le nombre $\pi$ n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est à dire qu'il ne peut être la racine d'une èquation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coefficients soient rationnels ». Nè questo è tutto quanto di notevole trovasi nel trattato in esame, al successo del quale ha contribuito in larga misura la chiarezza e la precisione dello stile. Doti queste che si ritrovano nel breve ma succoso *Traité de Trigonométrie,* posto come Appendice alla *Géométrie,* nel quale limitiamoci a notare, come segno dei tempi, alcuni calcoli numerici eseguiti in base alla misura centesimale degli archi circolari.

610 - Luigi Francesco Arbogast nacque a Mutzig (Alsazia) il 4 ottobre 1759 e morì a Straburgo l'8 aprile 1803, città che lo aveva scelto come suo rappresentante nella Convenzione nazionale e della cui Università egli fu professore e rettore. il suo *Mémoire sur la nature des Fonctions arbitraires qui entrent dans les Intégrales des équations aux différences partielles* (N. A. P., T. V, 1787) ottenne il premio dall'Accademia di Pietroburgo in un concorso bandito con l'intento di chiarire una questione dibattutasi fra d'Alembert e Euler; a onore dell'autore va rilevato che le limitazioni da lui proposte per le dette funzioni furono generalmente accolte. Più tardi (1789) presentò all'Accademia di Parigi un *Essai sur des nouveaux Principes de Calcul Différentiel et Intégral, indépendants de la Théorie des Infiniment Petits, et de celle des Limites,* il quale. indubbiamente per le gravi perturbazioni avvenute allora in Francia. non fu giudicato nè pubblicato. Tornata la pace, sia pure relativa, l'Arbogast potè dare alle stampe l'opera intitolata *Calcul des Dérivations* (Strassbourg, 1800), nella cui prefazione trovansi riprodotti i principali teoremi esposti in quella memoria. Detta opera, la quale rivela nell'autore un esperto analista, ha lo scopo di stabilire un algoritmo di carattere differenziale grazie a cui si possono svolgere in serie di potenze espressioni della forma $\varphi\ (a + b\,x + c\,x^2 + \ldots)$, oppure $\varphi\ (a + b\,x +$

$+ c x^2 + \ldots) \cdot \psi (A + B x + C x^2 + \ldots)$, ecc.; i risultati ottenuti possono riguardarsi come estensione della formola di Taylor; parecchi dei risultati esposti sono nuovi, ma altri sono dovuti a Euler, Lagrange, Laplace, ecc., ed è merito dell'Arbogast l'averli fatti scaturire con metodo uniforme da un'unica fonte. Poichè, conformemente allo spirito dell'epoca, nessuna considerazione viene istituita dall'Arbogast riguardo alla convergenza delle serie considerate, le formole che s'incontrano di cui parliamo hanno valore formale, in attesa che ne venga delimitato il campo di applicabilità.

A Strasburgo nacque (10 luglio 1760) e morì (14 maggio 1826) Cristiano Kramp. Insegnò in diverse città varie materie; l'essere stato eletto corrispondente dell'Accademia di Parigi, mentre fa fede della stima di cui godeva, giustifica noi che ne parliamo in questo punto della nostra *Storia*. E che egli abbia diritto a un cenno da parte nostra risulta dalla sua memoria *Fractionum Wallisianarum Analysis* (Nova Acta dell'Acc. di Monaco, 1797-99) e dall'opera *Analyse des Réfractions astronomiques et terrestres* (Leipzig, 1798); sono ivi esposte ricerche intorno ai prodotti della forma $a\,(a + r)\,(a + 2\,r) \ldots (a + \overline{n - 1}\,r)$, le quali collocano il Kramp, insieme al Vandermonde (n. 575), fra i creatori della teoria delle « facoltà analitiche », mentre d'altra parte ne stabiliscono la parentela intellettuale coi combinatori di cui parleremo nel Capitolo XXXIX. Aggiungiamo, finendo, che le *Annales* (cfr. n. 639) di Gergonne contengono parecchi suoi articoli; ad es. nel Vol. I se ne trova uno ove è suggerito un metodo (estremamente laborioso) per eliminare una incognita fra due equazioni algebriche.

611 - Chiude degnamente questo valoroso manipolo di analisti Sylvestre François Lacroix (n. a Parigi nel 1765); i Ministeri della Guerra e della Marina gli affidarono l'insegnamento delle matematiche in parecchie scuole in provincia; ma fondate che furono le Scuole Politecnica e Normale egli fu chiamato a Parigi nella qualità di professore; passò poi alla Facoltà di scienze e al Collegio di Francia; morì, membro dell'Istituto, il 25 maggio 1843. Nel 1787 egli cominciò a scrivere una metodica esposizione di tutto l'immenso materiale dovuto ai lavori degli analisti del XVIII secolo. Così ebbero vita i tre poderosi volumi costituenti il *Traité de Calcul Différentiel et Intégral* (Paris, 1797-80; II ed., 1818-1819), mirabile sintesi con la quale l'autore mostrò di avere sentito che per l'analisi matematica si chiudeva un'epoca e un'altra cominciava. L'esposizione abbraccia tutto il calcolo infinitesimale, sino al calcolo delle variazioni inclusivamente, senza esclusione della teoria delle equazioni, e ciò in base ai lavori che l'autore indica accuratamente nell'Indice delle materie; l'ultimo volume è tutto dedicato alle differenze e alle serie.

Lo spazio non consentendoci un esame particolareggiato di questa opera per tanti riguardi pregevole, limitiamoci a segnalare due punti che esercitarono notevole influenza sull'ulteriore sviluppo della scienza. Uno è il passo nel quale il Lacroix ha mostrato di avere esattamente misurata l'importanza dell'innovazione nella geometria analitica prospettata da Lagrange nella sua memoria *Sur les Pyramides triangulaires*.

« En écartant avec soin », egli scrive nella Prefazione alla sua grande opera, « les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur, qu'il existait une manière d'enseigner la Géométrie, qu'on pourrait appeler *Géométrie analytique* » (neologismo che rimase nella scienza) « et qui consisterait à déduire des propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme l'a fait Lagrange à l'égard des propriétés de l'equilibre et du mouvement ». È nei Capitoli IV e V del suo grande *Traité* che Lacroix ha svolto questo concetto; ivi si trovano risolti metodicamente e completamente i problemi relativi a punti, rette e piani che non mancano oggi in alcuna trattazione della geometria analitica ed è applicata la trasformazione delle coordinate alla classificazione delle linee e delle superficie di 2° ordine; è dunque in queste pagine che quella disciplina assume i lineamenti che essa era destinata a conservare ([1]). Altrove il Lacroix, essendo stato condotto a definire una curva piana mediante un'equazione fra elementi intrinseci, scrisse: « Cette manière de présenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'emploie que des quantités absolument inhérents à la courbe proposée »; così egli ha aperta la via che doveva condurre un secolo dopo ad un nuovo ramo della geometria ([2]). Il Lacroix acquistò immensa notorietà fra professori e studenti grazie a una serie completa di ottimi manuali scolastici, a partire da un *Traité d'Arithmétique* per giungere a un *Traité Élémentaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, senza escludere la teoria delle probabilità, la geografia matematica e l'agrimensura. Insegnante al corrente di tutte le astuzie da usarsi sulla cattedra per riuscire efficaci, egli ha riunite ottime norme didattiche nel suo ***Essai sur l'Enseignement en genéral et sur celui des Mathématiques en particulier*** (la cui IV ed. reca la data 1838), il quale ebbe un grande successo, e che sia ben meritato risulta dal fatto che esso contiene preziose informazioni e ottimi consigli che potrebbero ancor oggi tornare utili a chi sceglie la carriera d'insegnante.

---

([1]) Devesi ritenere che questo modo di concepire l'applicazione dell'algebra alla geometria sia stato subito adottato nelle scuole francesi se un giovane destinato ad illustrarsi più come fisico che come matematico, G. B. BIOT (n. a Parigi il 21 aprile 1774, m. ivi il 3 marzo 1862), giudicò opportuno scrivere un *Essai de Géométrie analytique appliquée aux Courbes et aux Surfaces du second ordre* (Parigi, 1803; a noi sta dinnanzi l'VIII ed., 1834) avente per fondamento « i metodi generali introdotti per primi da Lagrange e Monge e che Lacroix ha diffuso nei suoi trattati » ed in cui, inoltre, è notevole il ravvicinamento delle questioni analoghe nel piano e nello spazio, il quale induce a ritenere che la fusione della planimetria e della stereometria sia stata operata qui per la prima volta.

([2]) Le fasi di sviluppo di questo ramo della geometria verranno narrate da chi continuerà la presente *Storia*; noi qui registriamo i nomi di tre matematici che (forse raccogliendo alcuni cenni dell'Euler) si presentano nell'aspetto di preparatori della odierna *Geometria intrinseca*:

K. C. F. KRAUSE, n. a Eisenberg il 6 maggio 1781, libero docente nelle Università di Jena, Berlino e Gottinga, m. a Monaco di Baviera il 27 settembre 1832: *Novae Theoriae linearum Curvarum Originariae et verae scientificae specimina quinque* (Monachii, 1835).

A. PETERS, n. a Amburgo il 9 febbraio 1802, professore di matematica a Meissen, m. ivi il 9 giugno 1876: *Neue Curvenlehre* (Dresden, 1838).

W. WHEWELL, n. a Lancaster il 24 maggio 1794, dal 1841 « master » del Trinity College di Cambridge, F. R. S., m. a Cambridge il 6 marzo 1866: *On the intrinsic equation of a curve and its applications* (Trans. of the phil. Soc., Cambridge, T. VIII e IX, 1849-51).

## In Italia

612 - Nell'accingerci a render conto dei progressi compiuti in Italia dall'analisi matematica durante il periodo napoleonico, è dover nostro rilevare che il numero dei valenti cultori che essa ebbe allora tra noi è talmente cospicuo che noi non potremo farne una completa enumerazione ([1]).

A incoraggiare e dirigere i nostri conterranei verso gli studi matematici influì nel modo più efficace la creazione di una corporazione destinata a riunire « gl'Italiani in un corpo di scienziati nazionali, animati da un solo fiato vivificatore »; è la Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) che esiste tuttora e le cui benemerenze sono documentate dalla splendida collezione delle sue Memorie (che citeremo con l'abbreviazione M. S. I.). Il merito di averla creata è di un antico generale e buon matematico, Antonio Maria Lorgna (n. a Cerea vicino a Verona il 18 ottobre 1735 m. ivi il 28 giugno 1796), il quale ne redasse lo statuto, ne fu primo presidente e vi pubblicò parecchie pregevoli memorie, alcune di analisi, altre di matematica applicata ([2]).

Fra i matematici che vi appartennero il più anziano è Gianfrancesco Malfatti. Egli nacque ad Ala (Trentino) nel 1731; a quarant'anni divenne professore nell'Università di Ferrara ed in questa città morì il 9 ottobre 1807. In un « trattato sintetico » dal titolo *Della Curva Cassiniana e di una Nuova Proprietà meccanica della quale essa è dotata* (Pavia, 1781) egli completò una ricerca iniziata da un suo collega, T. M. Bonati (n. a Bondeno l'8 novembre 1724, morto a Ferrara nel gennaio 1820) ([3]), dimostrando essere una lemniscata la curva godente della proprietà che un punto pesante che la descrive ne percorre un arco nello stesso tempo in cui percorrerebbe la relativa corda. Nel X Vol. delle M. S. I. diede la prima (e ottima) soluzione del problema seguente che porta ancora il suo nome: Inscrivere in un triangolo tre circonferenze fra loro tangenti, ognuna delle quali tocchi due lati del dato triangolo. Nella teoria delle equazioni di 5° grado egli occupa un posto distinto per avere (Mem. dell'Accad. dei Fisiocritici di Siena, 1771) indicata una risolvente di 6° grado della quale sono casi particolari le equazioni del moltiplicatore e altre che s'incontrano nelle trasformazioni di 5° grado delle funzioni ellittiche; essa, quindi, conduce alla risoluzione delle equazioni di 5° grado mediante funzioni di tal fatta. Meno felice fu il

---

([1]) A quelli citati vanno aggiunti coloro di cui parleremo nella I Parte del Capitolo seguente.

Benchè la meccanica non entri nel nostro programma, pure non può qui mancare almeno una fugace menzione del *Discorso Matematico sopra il Rotolamento dei Corpi* (Napoli, 1763) perchè è ivi tentata per la prima volta una dimostrazione geometrica del fondamentale teorema che afferma l'equivalenza di ogni moto istantaneo di un solido con la successione di una rotazione e di una traslazione lungo il medesimo asse. Ne è autore Giulio Giuseppe Mozzi (n. a Firenze il 23 febbraio 1730, m. ivi il 10 aprile 1813) che fu, non solo scienziato, ma anche poeta e uomo di stato.

([2]) Lalande, nel suo ben noto *Voyage d'un françois en Italie fait dans les années 1765 et 1766*, lo dice « connu par plusieurs ouvrages de Physique ».

([3]) Vedine l'articolo *Nuova curva isocrona* nella Raccolta Ferrarese di opuscoli scientifici e letterari (Venezia, 1781).

Malfatti movendo obiezioni alla dimostrazione di Ruffini (v. n. 615) dell'irresolubilità algebrica delle equazioni di un grado maggiore di quattro; però esse valsero a indurre il Ruffini stesso a perfezionare la sua primitiva argomentazione.

L'*Encyclopédie,* che in Francia raggiunse sì grande rinomanza ed esercitò tanta influenza, non tardò a promuovere altrove pubblicazioni congeneri. In Italia d'Alembert e Diderot trovarono un imitatore nell'abate Alessandro Zorzi (1747-1779), ma la morte lo colse agli inizi della sua nobile fatica. Il grandioso progetto fu allora abbandonato, ma ne rimane un saggio nella pubblicazione intitolata *Prodromo della Nuova Enciclopedia,* che citiamo perchè vi si legge un articolo sul « Lotto » dovuto al Malfatti. Ivi, dopo poche generalità su questo giuoco, trovasi la risoluzione del seguente problema: Dato un certo numero di termini della serie naturale, trovare in quanti modi con 2, 3, 4 o $k$ diversi di questi numeri sommati insieme si possa formare qualunque numero che sia una delle dette somme. Questo scritto, insieme ad altro pubblicato nel T. I. delle M. S. I., assicurò un posto al Malfatti nella storia della teoria delle probabilità.

613 - Alle terre solo di recente riunite alla patria appartiene eziandio G. B. Lorenzo Fontana; nato a Nogarola, nei pressi di Rovereto, il 7 dicembre 1735, entrò nell'ordine delle Scuole Pie, assumendo il nome di Gregorio sotto cui è generalmente noto; insegnò in diversi istituti religiosi e poi (1763-1800) nell'Università di Pavia, di cui fu anche bibliotecario; morì a Milano il 24 agosto 1803. Parecchi volumi da lui dati alle stampe e numerose scritture da lui inserite nelle M. S. I. fanno fede della sua perfetta conoscenza dei metodi euleriani e delle questioni attorno a cui si affaticavano allora gli analisti.

Nella storia della trigonometria occupa un posto cospicuo Andrea Cagnoli (n. a Zante il 29 settembre 1743, m. a Verona il 6 agosto 1816): da giovane ebbe un impiego presso il governo veneto; Napoleone lo volle astronomo all'Osservatorio di Brera; da ultimo insegnò nella Scuola militare di Modena. La sua fama riposa principalmente sopra la sua *Trigonometria piana e sferica* (I$^a$ ed., Parigi, 1786; II$^a$ ed., Bologna, 1804), la quale, tradotta in francese, ebbe pure due edizioni. Siffatto successo appare ben giustificato esaminando l'opera del Cagnoli, chè essa contiene perfezionamenti di dettaglio alla trigonometria euleriana e inoltre risultati del tutto nuovi; vi si trova, infatti, una nuova formola di trigonometria sferica, la prima in cui entrino tutti i sei elementi di un triangolo: è la seguente:

$$\text{sen}\, c\, \text{sen}\, a + \cos c \cos a \cos B = \text{sen}\, A\, \text{sen}\, C - \cos A \cos C \cos b.$$

Vi si apprendono poi interessanti trasformazioni del teorema del coseno che guidano a formole calcolabili per logaritmi, e finalmente le relazioni che intercedono fra gli elementi di un triangolo sferico e quelli del triangolo piano avente per lati le corde dei lati di quello. Nè ci è lecito tacere che in un lavoro inserito nel Vol. VIII delle M. S. I. egli portando a termine una ricerca iniziata nel T. IV (1785) delle *Opere* dell'astronomo R. Boscovich (n. a Ragusa il 18 maggio 1711, m. a Milano il 13 febbraio

1787), ha stabilite le relazioni differenziali che intercedono fra gli elementi di un triangolo sferico, riunendole in una comoda tavola che abbraccia 139 proporzioni, ripartite in tre gruppi.

614 - Di vasta conoscenza tanto dell'antica geometria quanto della letteratura analitica del suo tempo, ma non di doti di lucido espositore, diede prova nei suoi scritti Pietro Ferroni (n. a Firenze il 22 febbraio 1744, m. ivi il 1° novembre 1825), che ebbe per qualche tempo cattedra nell'Università di Pisa. Nel volume *Magnitudinum Exponentialum Logarithmorum et Trigonometriae sublimis Theoria nova Methodo pertractata* (Firenze, 1782) ha suggerito qualche perfezionamento alla teoria delle funzioni iperboliche, ma usò con tale disinvoltura del simbolo di $\infty$ che molte delle sue argomentazioni appaiono oggi illegittime; nell'altra farraginosa opera intitolata *De Calculo Integralium Exercitatio mathematica* (Firenze, 1792) espose ricerche metriche su varie figure, condotte tanto con i procedimenti antichi, quanto con i metodi moderni.

Un altro nostro matematico mostrò con i proprii lavori (per usare le parole di Eugenio Beltrami) « forse più che ogni altro geometra italiano del suo tempo, una cognizione profonda, completa e famigliare dell'analisi matematica, condotta al punto in cui trovavasi allora per opera di Euler, di Lagrange, di Laplace, di Monge, ecc. ». E' Pietro Paoli, il quale, nato a Livorno nel 1759, insegnò successivamente a Mantova, a Pavia e finalmente a Pisa; morì a Firenze il 21 febbraio 1839. Dei suoi scritti alcuni leggonsi nei suoi giovanili *Opuscula Analytica* (Livorno, 1780), ove trovasi l'espressione — massimo intero contenuto nella frazione $c/ab$ — per il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $a\,x + b\,y + c = 0$, espressione che si attribuisce all'Hermite che la scoprì ottant'anni più tardi (*Quart. Journ. of Math.*, T. I). Molti altri suoi lavori devono cercarsi fra le M. S. I. Non vanno poi dimenticati i suoi *Elementi d'Algebra* in tre volumi (Pisa, 1794), opera che, sotto modesto titolo, compendia tutta l'analisi matematica del tempo.

Anteriormente (Pavia, 1788) aveva vista la luce il volume intitolato *Principii Fondamentali del Calcolo Differenziale e Integrale appoggiati alla Dottrina dei Limiti*. Ne è autore Angelo Luigi Lotteri, il quale, nato a Milano il 24 novembre 1760 fu prima (1787) ripetitore e poi (1798) professore nell'Università di Pavia; morì a Milano il 23 gennaio 1839; a scrivere quell'opera egli fu indotto quando, messosi a tradurne altra congenere di un ufficiale prussiano (?), la trovò così poco soddisfacente che sentì scrupolo di diffonderla nelle scuole italiane. Vanno di lui ricordate con lode anche una *Memoria sulle Curve Parallele* (Pavia, 1792) e un *Trattato delle Serie e delle Equazioni*, onorato di due edizioni (Pavia, 1809 e 1822).

615 - Mentre i matematici testè ricordati diedero bensì pregevoli contributi di dettaglio a parecchie teorie dell'analisi, ma non legarono il proprio nome ad alcuna questione fondamentale, altrettanto non può per fermo ripetersi riguardo a Paolo Ruffini, il quale ha la gloria di avere sciolto l'enigma che gravava sulla teoria delle equazioni algebriche, di mostrando l'insolubilità algebrica di quelle di un grado superiore al 4°. Egli nacque a Valentano, vicino a Viterbo, il 23 settembre 1765; ancor

giovinetto si trasferì a Modena, dalla cui Università gli fu conferita (9 giugno 1788) la laurea in filosofia e in cui subito occupò la cattedra di Istituzioni analitiche. Con decreto del 30 giugno 1791 fu eletto rappresentante del Dipartimento di Parma nel Consiglio dei Juniori della Repubblica Cisalpina, ciò che lo costrinse a risiedere per qualche tempo a Milano. Rientrato a Modena perdette la cattedra per essersi rifiutato di prestare il civico giuramento, ma dopo qualche tempo (29 ottobre 1799) gli venne restituita. Di questo periodo di forzato riposo egli approfittò per scrivere quella *Teoria generale delle Equazioni* (Bologna, 1798), ove leggesi la prima dimostrazione dell'anzidetta insolubilità: complementi e chiarimenti ad essa trovansi in due memorie inserite nel T. IX (1802) delle M. S. I., la seconda delle quali fu premiata dalla Società stessa. Soppressa l'Università di Modena e surrogata con un Liceo, il Ruffini vi insegnò qualche tempo, ma poi si ritirò, preferendo conservare soltanto la cattedra alla Scuola del Genio ed Artiglieria, che occupò dal 1798 al 1814. Nel frattempo (1802), con la memoria *Sopra la Determinazione delle Radici nelle Equazioni numeriche di qualunque grado* (Modena, 1804) aveva ottenuto il premio proposto dalla Società Italiana « a chi meglio ed interamente esponesse il metodo più breve, cioè non faticoso, per trovare le radici numeriche di un'equazione di qualunque grado »; il metodo proposto allo scopo dal Ruffini coincide in sostanza con quello ideato più tardi (1819) dall'inglese W. G. Horner (1786-1837) (¹) e fu da lui ulteriormente perfezionato in una posteriore memoria (M. S. I., T. XV, 1813). Non mancò poi di rispondere alle obiezioni del Malfatti (v. n. 612) e di dimostrare l'erroneità del metodo (n. 603) proposto dal Wronski per risolvere tutte le equazioni algebriche letterali (M. S. I., T. XVIII, 1820); e tutto ciò senza abbandonare l'esercizio della medicina, in cui era eccellente! Morì fra il generale compianto il 9 maggio 1822, prima di aver avuta la soddisfazione di vedere generalmente riconosciuta l'esattezza del ragionamento in cui egli ha spiegato l'insuccesso di tutti i tentativi fatti per risolvere le equazioni di 5° grado. L'Istituto di Francia, a cui nel 1810 egli aveva inviata una memoria sull'argomento, ne deferì l'esame a una commissione composta di Lagrange. Legendre e Lacroix, ma questa si sciolse senza concludere. Non miglior sorte ebbe un tentativo analogo fatto dal Ruffini nel 1814 presso la Società Reale di Londra. Però il Paoli, in un suo *Supplemento agli Elementi di Algebra* (Pisa, 1804), dichiarò pubblicamente che Ruffini aveva raggiunto lo scopo propostosi; altrettanto fece poi il Cauchy, ma soltanto in una lettera privata (20 settembre 1821). Oggi però il suo merito è universalmente riconosciuto; si ritiene, cioè, che egli per primo abbia iniziata la ricerca sistematica delle permutazioni per le quali una funzione razionale di $n$ elementi non muta di valore, e la compì per $n = 5$; che ha dimostrato non esistere funzioni di 5 elementi a tre o quattro valori; e che finì per congegnare, riguardo al teorema che deve ormai portare il suo nome, una dimostrazione che, malgrado una lieve lacuna, non differisce da quella che il Serret e altri

(¹) Si vegga la memoria inserita nella P. T. del 1819 e riprodotta in *A source Book in Mathematics by* E. D. SMITH (New York, 1929).

dopo di lui attribuiscono al matematico francese P. L. Wantzell (1814-1848). Va di più rilevato che nei suoi ragionamenti si trovarono traccie sicure dei concetti fondamentali della teoria delle sostituzioni, onde, riguardo a questa, egli assurge al grado di precursore.

Va da ultimo rilevato che, malgrado la sua preferenza per l'analisi finita, egli volse la mente anche al calcolo infinitesimale; ne sono prova le sue *Riflessioni intorno alla Rettificazione e alla Quadratura del Circolo* (M. S. I., T. IX, 1802) e le lettere da lui scambiate con altro distinto membro della Società Italiana, Giuseppe Frullani (n. a Livorno nel 1795, m. a Firenze il 5 marzo 1834), ove si leggono alcune considerazioni sulla convergenza delle serie che, essendo state poi esposte da altri, divennero sangue e midollo dell'analisi matematica.

616 - Al medesimo periodo appartengono altri nostri connazionali, i quali, con la parola e con gli scritti, contribuirono efficacemente alla conoscenza ed al perfezionamento di vari rami della matematica, onde hanno diritto di vedere i loro nomi qui ricordati.

Vincenzo Brunacci nacque a Firenze il 3 marzo 1768, insegnò prima alla Scuola di Marina di Livorno, poi (1801) nell'Università di Pisa, città ove morì il 16 giugno 1818. Il suo pregevole *Corso di Matematica sublime* in quattro volumi (Firenze, 1804), che compendia il suo insegnamento universitario, contiene quella trasformazione designata oggi col nome di teorema di Brunacci-Abel [1], mentre il volume intitolato *Analisi Derivata ossia Analisi dedotta da un sol Principio di considerare le quantità* (Pavia, 1802) lo fanno collocare onorevolmente fra i molti che in quell'epoca si sforzarono di assidere l'analisi dell'infinito sopra basi di indiscutibile solidità [2]; un cenno elogioso va anche fatto delle varie memorie con cui egli seppe dare miglioramenti notevoli a varie teorie classiche dell'analisi.

Vicino a Lucca (a Montignoso) nacque, addì 5 giugno 1795, Gaetano Giorgini; in qualità di paggio seguì la principessa Elisa a Parigi ed ivi nel 1812 riportò il primo premio per la matematica nel Concorso generale fra gli studenti liceali e poi entrò, primo della sua promozione, alla Scuola Politecnica; in questa difficile gara egli ebbe a competitore M. Chasles, a cui rimase legato da costante amicizia. Respingendo offerte seducenti del governo francese, ritornò in patria e nel 1818 fu nominato direttore delle acque, strade e macchie del Ducato di Lucca e professore di matematica in quel Liceo. Osteggiato da rivali invidiosi, riparò a Firenze, e nel 1825 fu eletto professore di matematica in quell'Accademia di Belle Arti. Prese parte attiva all'amministrazione ed alla vita politica della Toscana; costituitosi il Regno d'Italia ebbe un posto nella Camera vitalizia; ritiratosi a vita privata morì a Montignoso il 14 settembre 1874. La sua produzione scientifica s'inizia con un articolo sopra alcuni teoremi enunciati da Monge inserito nella *Corréspondence sur l'École Polytéchnique*. Di tre memorie da lui date in luce negli « Atti dell'Accademia Lucchese » va ricordato specialmente quella inti-

(1) L. Tonelli, *Serie trigonometriche* (Bologna, 1929), pag. 37.

(2) Del Brunacci esistono ancora un *Compemdio di calcolo sublime ad uso delle Università del Regno* (due Volumi, Milano, 1811) e delle *Tavole logaritmiche*.

tolata *Teoria Analitica delle Proiezioni* (Vol. III, 1827). perchè caldeggia l'idea (oggi generalmente accettata) di applicare le proiezioni per ottenere le formole della geometria analitica. Maggior importanza possiedono tre lavori pubblicati dalla Società Italiana delle Scienze (T. XX e XXI, 1828-1832) relativi alla statica dei sistemi rigidi, chè essi porgono la prova che l'autore giunse per primo alla nozione di complesso lineare e scoperse le principali proprietà geometriche e meccaniche della corrispondenza da esso determinata. Se la politica non lo avesse distratto, il Giorgini avrebbe certamente dati altri contributi importanti alla nostra scienza.

Giambattista Magistrini nacque nei pressi di Novara il 24 giugno 1777, dal 1804 insegnò nell'Università di Bologna e in quella città morì il 1° novembre 1849. Delle molte sue pubblicazioni ricorderemo la sua eccellente *Poligonometria analitica* (Bologna, 1809) e la memoria postuma contenente un *Confronto del Calcolo delle Funzioni di Lagrange col Calcolo infinitesimale e superiorità del primo* (Mem. dell'Acc. di Bologna, T. I, 1850), opinione questa che egli è forse il solo che abbia pubblicamente sostenuta.

Circa coetaneo del Magistrini è Giuseppe Zecchini Leonelli; egli nacque a Cremona nel 1776; nel 1792 si recò a Roma per studiare architettura; trasferitosi poi a Napoli prese servizio nella marina militare borbonica; poco dopo cominciarono le sue peregrinazioni in Francia, Germania e Austria, le quali finirono quando il governo greco lo nominò suo architetto con residenza a Corfù. Quì morì il 12 ottobre 1846 o 1847. Debbonsi a lui le prime tavole dei logaritmi di addizione e sottrazione, calcolate in base a un concetto che si può far risalire a B. Cavalieri (v. n. 422); la relativa memoria presentata all'Istituto di Francia diede luogo a un rapporto sottoscritto da Delambre e Lalande, di cui l'autore non fu molto soddisfatto; essa fu pubblicata in francese e poi tradotta in tedesco e così attrasse l'attenzione di Gauss, il quale vi riscontrò dei difetti (v. *Gauss Werke*, T. VIII, p. 121), ma ne trasse ispirazione per le tavole analoghe da lui costruite e che lo fecero da molti ingiustamente considerare come inventore di quella nuova specie di logaritmi; oggi però i meriti del nostro modesto connazionale sono generalmente riconosciuti.

Il padre Giovanni Inghirami (n. a Volterra il 26 aprile 1779, m. a Firenze il 5 agosto 1851) ha diritto a un posto nella presente *Storia*, non pei suoi pregiati lavori di astronomia e geodesia, ma per i suoi *Elementi di Matematiche* (onorati di numerose edizioni), al termine dei quali si trovano eccellenti tavole dei numeri primi e di decomposizione dei numeri composti, che una recente ristampa compiuta in Inghilterra fece apprezzare anche fuori d'Italia.

Nella presente enumerazione prende posto, ultimo in base alla cronologia, ma non ultimo per intrinseco valore, Antonio Bordoni. Nacque a Mezzana Corti il 19 luglio 1788, insegnò a Pavia dal 1807 al 1852, prima alla Scuola militare e poi all'Universtà; collocato a riposo, fu eletto direttore della Facoltà di scienze, carica che tenne sino alla sua morte, avvenuta il 26 marzo 1860. Dodici trattati e trentasei memorie gli assicurarono un posto cospicuo nella storia delle matematiche pure

ed applicate. L'esteso trattato *De' Contorni delle Ombre* (Milano, 1816) provano la sua perizia nella geometria descrittiva; le sue *Lezioni di Calcolo sublime* (Pavia, 1831) lo additano come fedele interprete del pensiero lagrangiano; e il volumetto *Sopra gli Esami scolastici* (Id., 1837) appartiene alla teoria delle probabilità. Non va taciuto che la memoria *Sull'equilibrio astratto delle volte*, presentata alla Soc. Ital. delle Scienze addì 25 maggio 1821, attesta che, prima di Gauss, egli concepì ed applicò le coordinate curvilinee. Malgrado queste ottime pubblicazion, chi lo conobbe lo giudicò uomo superiore alle proprie opere, lamentando che il gravame dell'insegnamento e i molti uffici conferitigli dalla fiducia dei governi del tempo gli abbiano impedito di prendere posto fra gli astri di prima grandezza nel cielo matematico europeo.

## In Inghilterra

617 - Nel Regno Unito le discussioni intorno ai fondamenti dell'analisi infinitesimale (v. n. 502) non cessarono al tramonto del secolo XVIII, e per dimostrarlo si potrebbero citare parecchie buone recensioni pubblicate in riviste di carattere generale. Che l'Inghilterra fosse nell'epoca di cui discorriamo profondamente newtoniana [1] è provato dal fatto che quando, nel 1801, potè finalmente vedere la luce la versione inglese eseguita dal Colson delle *Instituzioni analitiche* della Agnesi (cfr. p. 594), i *d* leibniziani furono mutati in *punti* newtoniani. Tuttavia i tempi maturavano per una radicale metamorfosi! Il merito di averla iniziata spetta a Roberto Woodhouse; egli nacque a Norwich il 28 aprile 1774, a Cambridge conseguì il grado di B. A. e del Cajus College della stessa città divenne subito Fellow; nel 1820 gli fu conferita la cattedra Lucasiana; due anni dopo la mutò nella Plumiana, che conservò sino alla morte, avvenuta il 23 dicembre 1827. Il suo volume, che contrassegna l'apertura delle ostilità contro le flussioni, ha per titolo *Principles of Analytical Calculations* (Cambridge, 1803); è un'opera non didattica, piuttosto essenzialmente critica, che esercitò immensa influenza grazie alla forza dialettica di cui disponeva l'autore e allo stile caustico in cui egli scriveva, qualità che designano il Woodhouse come persona indicatissima per dirigere una grande battaglia. L'impressione che fece questo volume sulle rive del Cam è documentata dalla fondazione (1812) nella grande città universitaria di una « Società analitica », per opera di tre giovani i quali hanno diritto (e non solo per l'azione riformatrice da essi esercitata) ad una menzione onorevole in questa nostra storia; consideriamoli successivamente:

Giorgio Peacock; nato a Denton il 9 aprile 1791, a Cambridge compì i propri studi e ottenne i gradi di B. A. e di Fellow. Diede ottimi contributi all'*Encyclopedia Metropolitana* e ai « Reports » della neonata Associazione britannica per il progresso delle Scienze. Nel 1836 ebbe la

[1] Si tenga presente che negli anni 1776-85 era stata pubblicata la prima (e ancor oggi unica) edizione completa delle *Opere* di NEWTON, per cura di S. HORSLEY (n. a Londra nel 1733, m. ivi il 4 ottobre 1806).

cattedra Lowndeaniana, ma la lasciò tre anni dopo avendo accettato il posto di decano di Ely, città ove si spense l'8 novembre 1858.

Carlo Babbage, nato a Totnes il 26 dicembre 1792, conseguì a Cambridge il grado di B. A.; poco dopo si trasferì a Londra e vi si fece conoscere favorevolmente con memorie inserite nelle P. T. Negli anni 1828-39 fu nominalmente professore Lucasiano, ma, con grave scandalo, non insegnò mai a Cambridge; a Londra, ove trascorse tutta la sua vita, spese interi anni ed ingenti somme per costruire macchine calcolatrici ingegnose e complicate, che gli assicurarono vasta e ben meritata rinomanza; e a Londra morì il 18 ottobre 1871.

Giovanni Federico Guglielmo Herschel, figlio del sommo astronomo di questo nome, nacque a Slough il 7 marzo 1792, compì i proprii studi nel Collegio St. John di Cambridge (1809-1813), ma ben presto abbandonò la matematica per consacrarsi ad altre scienze; morì a Collingwood l'11 maggio 1871.

La Società analitica contò altri membri di minore statura; essa pubblicò nel 1813 un volume di memorie non prive di pregio: ma l'influenza da essa esercitata è dovuta specialmente alla pubblicazione (1816) della traduzione inglese del *Traité élémentaire du Calcul différentiel et intégral* del Lacroix (cfr. n. 611). L'influenza stessa fu resa più intensa dalla collezione di *Examples illustrative of the use of Differential calcul* (Cambridge, 1820), composta dal Peacock per quanto riguarda l'ordinario calcolo infinitesimale, dall'Herschel per il calcolo delle differenze finite.

Il movimento nel senso leibniziano, originato nella capitale matematica dell'Inghilterra, non tardò a propagarsi in tutta la Gran Bretagna, onde si può dire che, a partire dal 1820, l'uso dei segni $d$ e $\int$ era ivi ormai generale. A questa vittoria contribuirono W. Whewell, che già citammo (la nota (2) a p. 772) e che è generalmente noto come autore dell'*History of Inductive Sciences*, e l'astronomo G. B. Airy (1801-1892), i quali fecero toccar con mano l'utilità delle notazioni continentali nelle scienze applicate. Da questo momento cessa l'isolamento in cui l'Inghilterra si trovò durante tutto il secolo successivo alla morte di Newton e si può dire che solo allora fu cancellata ogni traccia del dissenso scientifico-politico fra essa e la Germania, inevitabile conseguenza della lunga contesa di priorità relativa all'analisi infinitesimale.

## Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

618 - Durante gli anni a cui è dedicato il presente Capitolo furono compiuti da svariati pensatori assidui studi intorno alla natura degli immaginari e, ricorrendo ad opportune considerazioni geometriche, si giunse a darne una illustrazione concreta (cercata indarno dal Wallis) che parve fugasse ogni dubbio intorno alla legittimità di quegli strani enti aritmetici: l'algebra subì in conseguenza migliorie di carattere permanente; ed è un fatto degno di essere sottolineato che a conclusioni concordanti giunsero parecchi investigatori fra loro indipendenti, quasi

a riprova che i tempi erano maturi per arrivarvi; di essi diremo brevemente, seguendo l'ordine cronologico.

Questo elenco dovrebbe iniziarsi con un certo Enrico Domenico Truel, modesto studioso il quale — a quanto attesta Cauchy — sarebbe giunto alla consueta rappresentazione sino dal 1786 e nel 1810 l'avrebbe comunicata a un costruttore navale di nome A. Normand; ma mancano del tutto i particolari sull'autore e sull'opera. Segue a lui Gaspare Wessel, che nacque a Jonsrud (Norvegia) l'8 giugno 1745; nel 1757 entrò nel Liceo di Christiania e nel 1763 fu immatricolato studente nell'Università di Copenaghen; l'anno seguente fu scelto dall'Accademia danese come assistente per la cartografia e la triangolazione della Danimarca, ufficio che conservò sino al 1805. Continuò poi a disegnare carte geografiche, operazione per la quale era salito in giusta fama. Morì il 5 marzo 1818. Risale al 10 marzo 1797 la presentazione a quell'Accademia dello scritto che c'interessa; subito ne fu deliberata l'inserzione nelle *Memorie* di detta corporazione; malgrado questo incoraggiamento il Wessel non diede poi alla nostra scienza alcun altro contributo.

Lo scopo propostosi dal cartografo norvegese è di dare ai numeri immaginari una rappresentazione geometrica che liberasse l'algebra dal paradosso consistente nel fatto che in essa si arriva al possibile attraversando l'impossibile, e lo raggiunse facendo corrispondere al numero complesso $x + iy$ il punto di coordinate cartesiane ortogonali $x$, $y$. E poichè egli non si limitò a quanto avviene nel piano, ma seppe rappresentare simbolicamente anche le direzioni disposte comunque nello spazio, così egli ha felicemente affrontata la questione donde traggono origine i quaternioni. Quello scopo viene raggiunto mediante precise definizioni delle operazioni da effettuare e regole esatte per eseguirle; l'autore suppone nota la teoria delle funzioni circolari, dimostra semplicemente il celebre teorema di Côtes (v. p. 626) e giunge alle formole fondamentali della trigonometria sferica e alla risoluzione dei poligoni piani e sferici. Alla diffusione di questo importante lavoro fu grave ostacolo l'essere stato scritto in una lingua assai poco nota in Europa; onde esso apparve cosa del tutto nuova quando nel 1897 l'Accademia danese ne pubblicò una traduzione francese.

619 - Miglior sorte toccò ad uno scritto analogo stampato nel 1806, ma non posto in commercio e senza nome dell'autore Giovanni Roberto Argand. Questi era nato a Ginevra il 22 luglio 1768; si stabilì a Parigi avendo ottenuto un impiego di ragioniere, e ivi probabilmente morì dopo il 1813. Durante alcuni anni detto opuscolo rimase generalmente sconosciuto; fu tratto dall'oscurità in cui era immerso quando nel 1813 J. F. Français (antico alunno della Scuola Politecnica, divenuto professore alla Scuola d'artiglieria e genio) inviò da Metz al Gergonne un articolo contenente le linee generali di una teoria che aveva letta in una lettera del Legendre al proprio fratello, il quale Legendre l'aveva appresa da un autore di cui taceva il nome. L'articolo citato essendo stato pubblicato nelle *Annales de Mathématiques*, cadde sotto gli occhi del-

l'Argand, il quale scrisse subito al Gergonne rivelandosi per autore di quella teoria e dandone un lucido riassunto ([1]).

Seguirono osservazoni pro e contro e finalmente una memoria in cui l'Argand espose sotto forma migliore la rappresentazione geometrica dei numeri complessi sui punti del piano e quella dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, basata sul concetto di minimo, che si ritrova ancor oggi in molti trattati della teoria delle equazioni. Molto meno felice del Wessel fu l'Argand nei suoi sforzi di estendere le sue considerazioni allo spazio.

Potevasi credere che questi articoli delle *Annales* facessero raggiungere alla scoperta dell'Argand tutta la desiderabile notorietà; quanto ora diremo mostrerà che ciò non è realmente accaduto.

Nel 1828 fu pubblicato un opuscolo di un francese, C. V. Mourey (di biografia ignota), ove, al pari di quanto si propose il Wessel, si vuol far vedere come « la verité sortira de la région des chimères »; la spiegazione è offerta appunto dalla rappresentazione geometrica dei numeri complessi, grazie a cui il Mourey riuscì a comporre una disciplina, sintesi dell'algebra e della geometria, che permette (al dir dell'autore) di dimostrare finalmente che ogni equazione ha una radice. Egli ebbe la fortuna di trovare nel Lefébure de Fourcy (1787-1869) un caldo ammiratore, che contribuì alla diffusione delle sue idee, citandole nelle sue notissime *Leçons de géométrie analytique* ([2]).

Nel medesimo anno 1828 vedeva la luce *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities* (Cambridge) dovuto a un ecclesiastico inglese, F. R. S., John Warren (n. a Bangor nell'ottobre 1796, m. ivi il 16 agosto 1852); è una rappresentazione che coincide con quella oggi notissima; al suo apparire essa incontrò vive opposizioni, che il Warren si adoperò abilmente a controbattere con due memorie pubblicate nelle P. T. del 1829. Tuttavia non è a lui, come non è all'Argand o al Mourey, che essa è debitrice del suo definitivo trionfo; questo fu celebrato soltanto quando nel 1831 un grande matematico tedesco (v. n. 649) l'espose in una sua importante memoria e la raccomandò con la propria irresistibile autorità.

---

([1]) Gli articoli dell'ARGAND e dei suoi contraddittori trovansi ristampati nel volume citato nella *Bibliografia* che chiude il presente Capitolo.

([2]) Questa citazione ebbe la virtù di richiamare sul MOUREY l'attenzione del LIOUVILLE, il quale espose per proprio conto e perfezionò la dimostrazione da lui data del teorema fondamentale dell'algebra (*Journ. de Mathém.*, T. IV e V, 1839-40).

## BIBLIOGRAFIA

C. BOSSUT, *Cours complet de Mathématiques* (sette Volumi, Paris, 1795-1801).

COUSIN, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* (Paris, 1796).

COUSIN, *Traité élémentaire de l'analyse mathématique* (Paris, 1797).

P. S. LAPLACE, *Oeuvres complètes* (14 Volumi, Paris, 1878-1914).

G. B. BIADEGO, *Intorno alla vita ed agli scritti di Gianfrancesco Malfatti, matematico del secolo XVIII* (Bull. di Bibl. e Storia, T. IX, 1876).

*Opere matematiche di Paolo Ruffini* (1765-1822) *a cura del prof.* E. BORTOLOTTI, T. I (Palermo, 1914).

E. BORTOLOTTI, *Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche.* Discorso (Modena, 1902).

E. BORTOLOTTI, *Sulla risolvente di Malfatti. Carteggio inedito di P. Paoli e P. Ruffini* (Mem. della R. Accademia di Modena, Ser. III, VII, 1906).

E. BORTOLOTTI, *Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, Ser. III, T. XIV, 1906).

G. ZECCHINI-LEONELLI, *Supplément logarithmique, contenant: la décomposition des grandeurs numériques quelconque en facteurs finis, et la théorie des logarithmes additionels et déductifs* (Bordeaux, 1802; II ed., 1874, per cura di J. HOÜEL).

*Tables des nombres premiers et de la décomposition des nombres de* 1 *a* 100000 *par* G. INGHIRAMI; *revue et corrigée par le* Dr. PROMPT *et suivie de la Table des bases des nombres tessaréens de* 1 *a* 20000 (Paris, 1919).

A. CAGNOLI, *Trigonometria piana e sferica* (Parigi, 1786).

GASPARD WESSEL, *Essai sur la représentation analytique de la direction,* traduction publiée avec préfaces de H. VALENTINER et H. T. N. THIELE (Copenaghen, 1897; trad. in inglese da D. E. SMITH in *A source Book in Mathematics*, New York, 1929).

R. ARGAND, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* II éd. précédée d'une Preface par M. HOÜEL et suivie d'une Appendice contenant des Extraits des *Annales de Gergonne* relatifs à la question des imaginaires (Paris, 1874).

C. V. MOUREY, *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédiée aux amis de l'évidence.* II éd. (Paris, 1861).

## CAPITOLO XXXVIII

## LA GEOMETRIA VERSO UNA NUOVA RINASCITA

### PARTE PRIMA: SULLE ORME DEGLI ANTICHI GEOMETRI

### In Inghilterra

620 - L'impronta geometrica data da Newton all'esposizione da lui fatta della più clamorosa fra le sue scoperte destò in Inghilterra fra i contemporanei e i posteri immediati quella ammirazione che è sempre fonte d'imitazione; ond'è che durante il secolo XVII buon numero di pensatori del Regno Unito si volsero ai Greci sia per vedersi spianata la via all'intelligenza dei *Principia*, sia per apportarvi qualche complemento. Esamineremo ora le opere dei più eminenti notando che tutti sono scozzesi, il che forse si spiega ricordando la « forma mentis » di Maclaurin (v. p. 637).

Roberto Simson nacque a Kirton-Hall (Scozia) il 14 ottobre 1687; studiò nell'Università di Glasgow, ove ottenne prima il grado di B. A., poi (1711) una cattedra di matematica. Subendo l'influenza dell'Halley si orientò verso la geometria classica; frutti dei suoi studi sulle antiche opere è un ottimo trattato sulle *Sezioni Coniche* (1735), ove, accanto alla materia apolloniana, si trovano teoremi moderni, fra cui quelli di Desargues e Pascal. Tentò poi con successo la divinazione tanto dei *Luoghi piani*, quanto della *Sezione determinata* di Apollonio (vedi n. 47) e diede contributi della massima importanza alla soluzione dell'enigma dei porismi euclidei (vedi n. 40). Si devono a lui ottime edizioni (1756) degli *Elementi* e dei *Dati* di Euclide in latino ed inglese. Alla generosità di Lord Stanhope, che lo ebbe in alta considerazione, devesi la pubblicazione (1776) di alcuni suoi notevoli scritti inediti, alla sua morte (1° ottobre 1768) rinvenuti fra le sue carte.

Matteo Stewart nacque nel 1717 a Rothsay (Scozia); fu discepolo di Maclaurin e di Simson e insegnò dal 1747 al 1775 nell'Università di Edinburgo e in questa città si spense il 23 gennaio 1785. Nella storia della matematica ha diritto ad un posto cospicuo grazie ai due volumi: *General Theorems of considerable use in the Higher Parts of Mathematics* (Edinburgh, 1746), *Propositiones Geometricae More Veterum Demonstratae* (Id., 1763). Il primo comprende 64 proposizioni fra cui leggesi la relazione

$$\overline{DA}^2 \cdot BC + \overline{DB}^2 \cdot CA + \overline{DC}^2 \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB$$

esistente fra quattro punti della stessa retta, la quale porta il nome

dello Stewart, quantunque non sia rimasta sconosciuta al conte di Fagnano (cfr. n. 526) e nemmeno a R. Simson. Vi si incontrano poi gli enunciati di 50 eleganti relazioni che intercedono fra le perpendicolari calate da un punto di una circonferenza sopra i lati di un poligono regolare inscritto; altre possono compendiarsi nel seguente enunciato: « Dati $m$ punti qualunque e altrettante quantità $a, b, c, \ldots, n$ essendo minore di $m$, si potranno determinare altri $n + 1$ punti tali che la somma delle potenze $2n$-me delle distanze di un punto arbitrario dai punti dati, moltiplicate rispettivamente per le quantità $a, b, c, \ldots$ stia alla somma delle potenze $2n$-me delle distanze dei punti trovati dal medesimo punto nel rapporto $(a + b + c + \ldots)/n$ ». Sussiste una proposizione analoga sostituendo ai punti dati e da determinare altrettante rette e alle potenze $2$-$n$-me potenze $n$-me. Le *Prop. geom.* sono 60 nel I Libro e 52 nel II. In alcune si ravvisano casi speciali della relazione (d'involuzione) in cui una trasversale incontra i lati di un quadrangolo completo; altre insegnano la generazione di un cerchio mediante fasci di raggi con i centri in varie posizioni. Malgrado l'eleganza ed importanza dei teoremi scoperti dallo Stewart, egli non ha trovati seguaci neppure in patria, e il suo merito cominciò ad essere generalmente riconosciuto soltanto nel 1837 grazie all'opera di un celebre geometra francese (M. Chasles).

621 - John Playfair nacque a Benvie (Scozia) il 10 marzo 1748, insegnò nell'Università di Edimburgo, città in cui morì il 19 luglio 1819. In una memoria pubblicata nelle P. T. del 1778 segnalò varie analogie fra il cerchio e l'iperbole equilatera, e in altra (T. R. Soc. of Edinburgh. T. III, 1794) portò qualche luce sopra la questione dei porismi. Assai pregiati ai suoi tempi furono i suoi *Elements of Geometry* (Edinburgh, 1796). La pubblicazione delle sue *Collected Works* (4 vol., Edinburgh, 1822) mostra che la stima di cui godeva in vita continuò oltre tomba, cosa riserbata a pochi eletti.

Iohn Leslie nacque a Largo (Scozia) il 16 aprile 1766; dell'Università di Edinburgo, di cui fu alunno, divenne professore nel 1805 e tale rimase sino alla sua morte, verificatasi il 3 novembre 1832. Trascinato dalla corrente del suo tempo, si occupò egli pure della spinosa questione dei porismi euclidei; scrisse pregiati trattati di geometria e trigonometria; ma la più rinomata fra le sue pubblicazioni è quella intitolata *Geometrical Analysis* (Edinburgh, I ed., 1809; II ed., 1821); essa fu dai contemporanei salutata con un entusiasmo che oggi non si riesce a comprendere e tanto meno a condividere; ne sono documenti le traduzioni ed i commenti di cui venne onorata; ad essa è probabilmente debitore il Leslie della sua aggregazione all'Istituto di Francia. Molto pregevole è una esposizione storica dei progressi della matematica e della fisica durante il sec. XVIII scritta dal Leslie per essere inserita nella VII edizione dell'*Encyclopedia Britannica*.

Prima di chiudere questi cenni, ci corre l'obbligo di richiamare l'attenzione del lettore sulla splendida edizione delle *Opere* di Archimede in greco e in latino, fatta ad Oxford nel 1792 dal professore saviliano A. Robertson (n. a Dunse il 4 novembre 1751, m. ad Oxford il 4 dicembre

1826) mediante materiali completamente dovuti a Giuseppe Torelli (n. a Verona il 3 novembre 1721, m. ivi il 18 agosto 1781) e acquistati presso gli eredi dall'Università di Oxford.

## Nella Svizzera francese

622 - A partire da G. Cramer (v. n. 584) la Svizzera francese ha rappresentanti nella storia della matematica; infatti nel secolo XVIII incontriamo come meritevole di ricordo Luigi Bertrand, autore di due ponderosi volumi di filosofia matematica, recanti il titolo *Développements Nouveaux de la Partie Élémentaire des Mathématiques, prise dans toute son étendue* (Genève, 1778). L'autore nacque a Ginevra il 30 ottobre 1731, nel 1752 si recò a Berlino per studiare sotto la direzione di Euler, nel 1754 fu accolto in quell'Accademia e nel 1761 ottenne una cattedra nel patrio Ateneo. Partecipò poi alla vita politica nel periodo in cui Ginevra si risentiva delle perturbazioni che allora agitavano la Francia; fu collocato a riposo nel 1795 e morì il 15 maggio 1812, poco dopo avere pubblicato a Parigi un volume di *Éléments de géométrie*. La sua opera principale è dedicata parte (Vol. I) alla scienza del numero, parte (Vol. II) alla geometria (tre Cap. sono semplicemente tradotti da Euler); essa prova la vasta coltura dell'autore e contiene qualche osservazione acuta e qualche migliorìa di dettaglio, ma le nocque l'eccessiva prolissità; ridotta ad un terzo essa avrebbe ottenuta più festosa accoglienza ed esercitata più vasta influenza.

623 - Del senso di disagio in cui trovavasi l'analisi per l'oscurità che gravava sopra i suoi concetti fondamentali si trova una prova nel seguente tema (certamente suggerito da Lagrange) posto a concorso nel 1784 dall'Accademia di Berlino: « L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elle, et l'honorable dénomination de Sciences exactes par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes. Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages on demande: Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle *infini* en Mathématiques. On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres, et même les Analystes anciens, ont évité soigneusement ce qui approche de l'infini; et de grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires. L'Academie souhaite donc qu'on explique comment on déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe, sûr, clair, en un mot vraiement mathématique, propre à être substitué à l'infini, sans rendre trop difficiles ou trop longues les recherches qu'on expédie par se moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la rigueur, la clairté et la simplicité possibles » [1].

Da una commissione presieduta da Lagrange il premio fu aggiudi-

[1] *Nouveaux Mémoires de l'Acad. des Sciences et Belles-Lettres*, 1784, Berlin, 1786, p. 12-13.

cato a una memoria intitolata ***Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs*** presentata anonima col motto del Bailly: « L'Infini est le gouffre ou se perdent nos pensées ». Sciolta la riserva del segreto, si seppe che ne era autore un discepolo di L. Bertrand, Simone Antonio Giovanni Lhuiller. Egli era nato a Ginevra il 24 aprile 1750; dopo di avere insegnato privatamente nella propria città natale, nel 1775 si recò a Varsavia nella qualità d'istitutore dei figli del principe Czartorinski: tornò a Ginevra nel 1789, ma ben presto ne ripartì per sfuggire i disordini rivoluzionari di quel tempo; si recò allora a Tübingen presso un suo amico insegnante in quell'Università, il matematico Pfleiderer (1736-1821). Nel 1794 ricevette una chiamata dall'Università di Leida, ma non l'accettò, essendo stato eletto a Ginevra successore del Bertrand. Collocato a riposo nel 1823, continuò a occuparsi dei suoi diletti studi sino alla morte avvenuta il 23 marzo 1840.

La memoria del Lhuillier premiata a Berlino fu pubblicata nel 1786 e quindi in latino nel 1795 con notevoli migliorìe. Scopo di essa è di mostrare che « la méthode des anciens, connue sous le nom de Méthode d'Exhaustion, convenablement étendue, suffit pour ètablir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs ». La conclusione generale a cui egli perviene viene da lui enunciata nei seguenti termini: « Si une quantité variable, susceptible de limite, jouit constamment d'une certaine propriété, la limite jouit de la même propriété. Et si une quantité variable, susceptible de limite, approche d'autant plus de jouir d'une certaine propriété qu'elle approche d'avantage de sa limite, de maniére qu'il n'y ait aucun limité à la capacité qu'elle a de jouir de cette propriété sa limite jouit de cette propriété ». Un punto a cui l'autore attribuisce grande importanza è l'argomentazione con cui egli, senza invocare il concetto d'infinito, stabilisce la formola di Taylor; dato il suo valore, ci duole di non poterla qui riferire; limitiamoci ad aggiungere che dei principi generali esposti l'autore fa applicazione alla ricerca dei massimi e minimi e alla risoluzione dei problemi classici relativi alle curve ed alle superficie. Devesi anche notare che in un Capitolo finale egli esamina le opere dei predecessori; sono particolarmente criticate, sotto forma cortese, ma con argomenti vigorosi, la *Géométrie de l'Infini* del Fontenelle e le *Institutions Calculi Differentialis* di Euler.

624 - Non è questo il primo lavoro dato alle stampe dal Lhuillier: giacchè sino dal 1782 egli aveva pubblicata la I Parte di una teoria geometrica degli isoperimetri migliore di quella dovuta agli antichi e conservata da Pappo (v. n. 60) (l'autore tratta di figure piane alle figure solide doveva essere consacrata una II Parte, che però non fu mai pubblicata). I perfezionamenti furono ottenuti applicando le regole date dal calcolo differenziale per determinare i valori estremi delle funzioni di una variabile; fra essi va notata la correzione dell'errore commesso da Pappo (*Collezione*, Lib. V, Prop. VII) assegnando la condizione di minimo per la somma dei perimetri di due triangoli isosceli costruiti sopra date basi. Prima di scrivere questo lavoro Lhuillier prese notizia della letteratura dell'argomento, il che ci porge occasione di far conoscere ai nostri lettori almeno l'esistenza di due geometri svedesi — P.

Elvins jr. (1710-1749) e S. Klingestierna (1698-1765) — e di un italiano — J. A. Tommasini (1711-1790) — che si occuparono della teoria geometrica dei massimi e minimi.

Tanto la memoria premiata quanto il volume testè considerato rivelano nella mente del Lhuillier un deciso orientamento verso la geometria nel senso in cui fu coltivata dagli antichi. Esso si ritrova in altro suo lavoro intitolato *Polygonométrie*, a cui non toglie pregio qualche casuale coincidenza con lavori del Lexell. Lo scopo principale propostosi dall'autore è di dimostrare che: « Il doppio della superficie d'una figura rettilinea è eguale alla somma dei rettangoli dei suoi lati presi due a due uno escluso, per il seno delle somme degli angoli esterni da essi compresi ». Lhuillier lo dimostra tanto per i poligoni convessi (o di I classe) quanto per gli altri (II classe); a tale scopo lo stabilisce successivamente per poligoni convessi di 4, 5 o 6 lati e poi applica l'induzione completa; il risultato viene poi esteso al caso in cui nel poligono vi siano uno o più angoli rientranti. Ora nell'espressione surriferita si trova evidentemente un numero esuberante di elementi, dal momento che per definire un poligono piano non si possono dare ad arbitrio tutti i lati e tutti gli angoli; perciò l'autore completa il risultato precedente mostrando come si giunga alla totalità degli elementi di un poligono quando se ne conoscano tutti i lati meno uno e tutti gli angoli meno due, oppure tutti i lati meno due e tutti gli angoli, oppure finalmente tutti i lati e tutti gli angoli meno tre.

In un ultimo Cap. egli fa dei suoi metodi alcune applicazioni numeriche e in un'Appendice, oltre a un riassunto del suo volume del 1782, espone vedute sue proprie sulla questione dei porismi, sulla restituzione dei *Luoghi piani*, ecc.

625 - Quest'Appendice è il prodromo dell'altra opera *Analyse Géométrique et Analyse Algébrique* con la quale il Lhuillier chiuse la propria carriera di scrittore. Egli fu indotto a scriverla progettando di tradurre in francese la restituzione del Simson (v. p. 785) dei *Luoghi piani* di Apollonio; ma, approfondendo lo studio di quanto si conosce di quest'opera, finì per convincersi che era suscettibile di miglioramenti; e in realtà la I Parte del I Cap. dell'opera del Lhuillier è una versione libera di molto migliorata della divinazione simsoniana, mentre la II vi porge notevoli aggiunte. Ma accade al Lhuillier un fatto analogo a quello che avvenne a Fermat dopo di avere gettate le basi del metodo delle coordinate; il Lhuillier, cioè, si accorse che il metodo cartesiano abilita a risolvere con meravigliosa facilità i problemi locali trattati dal geometra greco, e a dimostrare ciò è appunto incaricato il II Cap. dell'opera succitata. Esso apresi con l'esposizione delle formole fondamentali della geometria piana cartesiana (nella quale esposizione rileviamo quella che fu poi chiamata « equazione normale » della retta, $x \cos a + y \operatorname{sen} a - p = 0$); di esse sono subito fatte applicazioni alla ricerca delle equazioni dei luoghi considerati da Apollonio. Postosi su questa via, il Lhuillier non tardò ad accorgersi che egli era in grado di risolvere anche le questioni analoghe nello spazio, cioè i problemi locali risoluti da piani e sfere: e per mostrarlo premise le formole fondamentali

della geometria analitica dello spazio qui va rilevata l'«equazione normale» del piano). Un lungo Cap. (il V) è destinato all'applicazione dei luoghi geometrici trovati a molti problemi, ottenuta con l'uso simultaneo di formole e di ragionamenti sintetici; fra essi la costruzione di un quadrilatero inscrittibile di cui conosconsi i lati, il problema di Castillon (v. n. 570), alcune questioni tolte dai *Principia* di Newton, ecc. Certamente, se si tien conto dello stato dell'analisi e della geometria agli inizi del secolo XIX, l'opera del Lhuillier sembra appartenere ad un'epoca tramontata; ma riguardata come complementare rispetto alla geometria elementare e analitica, si raccomanda come collezione di speciali risultati interessanti.

Prima di lasciare l'egregio geometra svizzero noteremo che il Vol. IV dei N. A. P., alcuni volumi delle Memorie di Berlino (1786, 1787, 1796) e le *Annales* di Gergonne, contengono parecchi suoi pregevoli lavori storici e dottrinali.

## In Italia

626 - Presso di noi la geometria trovò un geniale cultore in Lorenzo Mascheroni, favorevolmente noto sia come matematico originale che come gentile poeta. Egli nacque a Castagneta, sobborgo di Bergamo, il 13 maggio 1750; nel 1758 entrò nel Seminario di Bergamo e nel 1767 vestì l'abito talare. In data 5 agosto 1773 fu ammesso nel Collegio Mariano di quella città in qualità di maestro di rettorica; passò poi (1778) alla cattedra di filosofia, che comprendeva la logica, la fisica e la metafisica, materie a cui egli aggiunse la matematica elementare e sublime. Essendosi palesato oppositore di Aristotele e seguace di Galileo, diede buon giuoco agli invidiosi che volevano renderlo inviso all'autorità ecclesiastica; il soggiorno a Bergamo essendosi in conseguenza reso a lui intollerabile, nel 1786 si trasferì a Pavia, nel cui Ateneo ebbe la cattedra già illustrata dal Paoli. Per l'entrata delle truppe francesi in Italia (6 maggio 1796) l'Università ticinese venne momentaneamente chiusa; ma, non appena riaperta, Mascheroni vi rioccupò l'antica cattedra. Napoleone, che ebbe occasione di misurarne il valore, gli affidò delicati uffici e poi lo fece nominare membro della Commissione destinata a proporre un nuovo sistema di pesi e misure; in conseguenza nell'agosto 1798 il Mascheroni si recò a Parigi, donde non doveva ritornare, chè la tisi lo spense il 14 luglio 1800.

Come matematico il Mascheroni esordì con una lettera diretta a A. Alessandri in data 19 settembre 1782, nella quale è studiata la curva isocrona nell'ipotesi che il centro della terra si trovi a distanza finita. Tacendo delle sue *Nuove Ricerche sull'Equilibrio delle Volte*, perchè trattano un tema estraneo al nostro programma, ricorderemo le ottime note apposte, a partire dalla II ed. (Pavia, 1787), della versione italiana del *Corso* del Bossut (cfr. p. 766), fra le quali si legge un *Metodo per misurare i Poligoni piani* (pubblicato anche a parte) il quale non esige la scomposizione in triangoli; problemi e soluzioni furono inseriti dal Lhuillier nella sua *Polygonométrie* (v. p. 789) senza citarne la fonte. Questo piccolo furto fu rilevato dal Mascheroni nei suoi *Problemi per gli Agrimensori* (Pavia, 1793), pregevole contributo alla geometria della

riga, di cui tutto il valore rifulse quando ne apparve una nuova edizione (Milano, 1802) arricchita dalle dimostrazioni di un certo capitano Sacchi ([1]).

Mentre con siffatti lavori il Mascheroni si affermò geniale geometra, del proprio valore come analista diede prova con le sue *Adnotationes ad Calculum Integralem Euleri* (Ticini, 1792), del cui pregio è documento la recente ristampa fra le *Opere* complete del grande matematico di Basilea; esso è ampiamente confermato dall'esame delle belle ricerche ivi esposte sullo strano numero oggi chiamato « costante di Mascheroni » ([2]).

627 - Per quanto importanti siano questi scritti, è forza riconoscere che la grande notorietà del Mascheroni non è basata su di essi, ma sull'opera *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797) dedicata a « Napoleone l'Italico », a cui essa fu presentata a Mombello il 17 maggio 1797; il celebre condottiero se ne entusiasmò talmente che, al suo ritorno a Parigi, ne parlò a Lagrange e Laplace i quali ne patrocinarono la versione francese compiuta dal Carette. In detta opera il nostro geniale compatriotta si è proposta la medesima questione che diede origine all'*Euclides Danicus* del Mohr (vedi n. 421), ma la trattò con ampiezza e profondità ben maggiori; ivi la ricerca di costruzioni eseguibili senza ricorrere alla riga ha rivelato la esistenza nelle figure considerate di alcuni « punti memorabili » (per usare la nomenclatura mascheroniana) la cui scoperta costituisce un cospicuo perfezionamento della geometria elementare.

Dei circoli considerati Mascheroni suppone generalmente noto il centro, ma ha anche insegnato a trovarlo quando non sia dato; giova riferire l'ingegnosa procedura all'uopo da lui immaginata (Lib. X, n. 143) ([3]): Fatto centro (Fig. 71) in un punto qualunque $A$ della data circonferenza e con raggio arbitrario si descriva la circonferenza $B\ C\ D\ E$, su cui si portino $B\ C$, $C\ D$, $D\ E$ eguali ad $A\ B$. Sia $M$ il punto dove questa taglia la periferia del dato circolo. Col raggio $E\ M$ e coi centri $E$, $A$ si segnino due archi che s'incontrino in $L$. Con lo stesso raggio $L\ A$ e col centro in $L$ si tagli $B\ M\ E$ in $Q$. Col raggio $B\ Q$ e coi centri $B$ ed $A$ si segnino due archi; la loro intersezione $O$ sarà il centro cercato.

Fra le costruzioni ideate dal geniale bergamasco citiamo quella (Lib. II, n. 60) che serve a bisecare un dato arco circolare $B\ C$ (Fig. 72). Col raggio $A\ B$ con cui fu descritto il dato arco e con centri $B$, $C$ che ne sono gli estremi si descrivano gli archi $A\ D$ $A\ E$ e si faccia $A\ D = A\ E = B\ C$. Poi coi centri $D, E$ e col raggio $D\ C = B\ E$ si descrivano due archi che si taglino in $F$; finalmente col raggio $A\ F$ e con gli stessi cen-

([1]) Questo volume fu tradotto in francese, ma anche prima fu debitamente apprezzato in Francia. Ne è prova il fatto che anche prima vi attinse a lunga mano F. J. Servois (n. a Mont de Leval il 19 luglio 1767, ufficiale d'artiglieria e insegnante in scuole militari, m. nel suo paese natale il 17 aprile 1847) nel comporre il volume *Solutions peu connues de divers Problèmes de géométrie pratique pour servir de supplément aux traités de cette science* (Paris, 1804).

([2]) Di questa il Nostro calcolò il valore con ventidue decimali, di cui le prime diciannove furono trovate esatte.

([3]) Nelle figure 71-73 si trovano, per maggior chiarezza, tracciate alcune rette, benchè esse non intervengano in alcun modo nelle costruzioni.

tri $D$, $E$ si descrivano due archi; essi si incontreranno nel cercato punto medio.

Dote importante delle costruzioni mascheroniane è di essere il più possibile le une dalle altre indipendenti e ciò per fare assumere ad esse

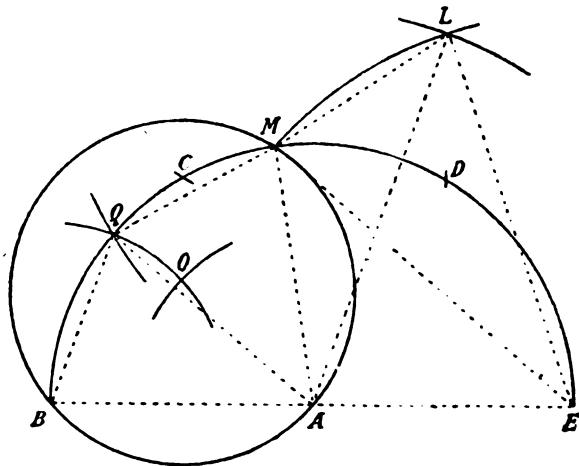



Fig. 71.

la massima semplicità; così egli giunge alla divisione di una circonferenza sino a quella in 120 parti senza ricorrere alla bisezione di un arco: ci basti far conoscere quella in quattro parti (Lib. II, n. 27): Nella data circonferenza di centro $A$ (Fig. 73) si

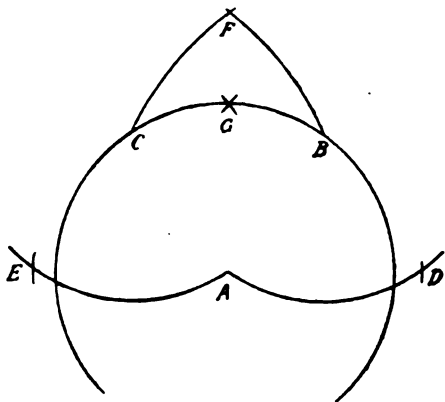
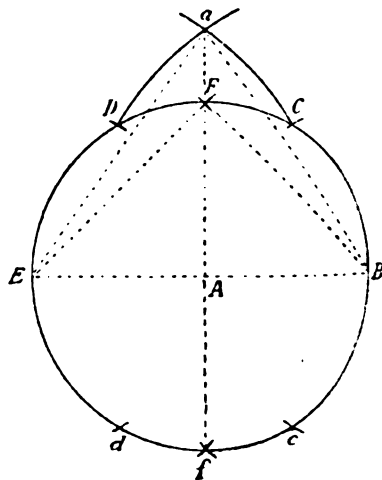



Fig. 72. Fig. 73.

portino $Bc = BC = CD = DE = Ed$ ed eguali al raggio $AB$ del dato cerchio. Si descrivano due archi di centri $B$, $E$ e con raggi $BD =$ $= EC$; ne sia $a$ l'intersezione; se con gli stessi centri si descrivano altri due cerchi di raggio $Aa$, le loro intersezioni $F$, $f$ insieme a $B$, $E$ divideranno la data circonferenza in quattro parti eguali.

Osserviamo finalmente che l'opera matematica del Mascheroni non sarà nota nella sua interezza che quando saranno state esaminate le carte da lui relitte e oggi conservate nella Biblioteca Civica di Bergamo: quanto se ne conosce induce a ritenere che tale esame condurrà a conseguenze interessanti.

628 - Nel culto pei sommi geometri della Grecia l'Inghilterra sta a pari dell'Italia, come è dimostrato, a tacer d'altro, dal fatto che in entrambi i paesi gli *Elementi* di Euclide (più o meno rimodernati) servono ancora all'istruzione della gioventù; qual meraviglia, dunque, se anche presso di noi siasi costituita una falange di studiosi animati da sentimenti non dissimili da quelli che riscontrammo dei geometri ricordati nelle prime pagine del presente Capitolo?

Ne fu duce Nicola Fergola; egli nacque il 29 ottobre 1753; vestì l'abito ecclesiastico e non appena diciottenne aperse una di quelle scuole private che fiorirono nel Napoletano sino alla costituzione del regno d'Italia, e che non tardò a divenire fertile vivaio di geometri. Nel 1789 passò all'Università, ove rimase circa un quarto di secolo; ritiratosi dall'insegnamento pubblico, riprese quello privato sino alla sua morte avvenuta il 21 giugno 1824. Uomo di vedute non ristrette, benchè caldo ammiratore ed efficace fautore dei metodi antichi, non negò il valore di quelli moderni; avendone anzi misurata con precisione la generalità e la potenza, si sforzò di accrescere le risorse della geometria ideando nuovi procedimenti logici e costruttivi dotati di considerevole estensione, per risolvere le questioni da lui indicate come « problemi di sito e di posizione » [1], dando prova di avere avvertito (al pari di altri di cui parleremo fra breve) che la geometria, se non voleva perire per mano dell'analisi, doveva rinnovarsi *ab imis*.

Dei molti discepoli che egli ebbe ricorderemo soltanto i due che conseguirono maggior fama.

Annibale Giuseppe Nicolò Giordano nacque ad Astalonga, frazione di S. Giuseppe d'Ottajano, il 20 novembre 1769, e appunto da uno scambio del nome del luogo natìo col nome di famiglia proviene l'essere egli spesso chiamato Ottajano [2]. Nel 1783 entrò nella scuola del Fergola; invitato dal maestro ad occuparsi del problema proposto dal Cramer al Castillon (v. n. 595), immaginò una soluzione della questione più generale d'inscrivere in una conica un poligono i cui lati passino per altrettanti punti dati, soluzione tanto notevole da venire accolta nel T. IV delle M. S. I. Nel 1789 il Fergola gli fece avere una cattedra nell'Accademia militare di Napoli e l'anno seguente egli aprì, con C. Lanberg, una scuola privata di matematiche; con lo stesso pubblicò un'opera intitolata *Principi analitici delle Matematiche*. Quando nel dicembre 1792 approdò nelle acque di Napoli la flotta francese, il Giordano apprese i principii dell'89 e li abbracciò con giovanile entusiasmo; fondò allora una società segreta

---

(1) Notisi che essi nulla hanno di comune con quelli di cui si occupa la « geometria situs », come a torto ritenne P. STACKEL (*Gauss Werke*, X Vol., II Abt., Abh. IV, p. 47, nota).

(2) Veggasi ad esempio, la memoria di J. M. BRÜCKNER, *Das Ottajanosche Problem* (Programm, Zwickau, 1892).

allo scopo di diffonderli nelle masse e si fece anche iniziatore di una congiura per abbattere la monarchia; scoperto, fu arrestato e, riuscito vano un tentativo di fuga, fu condannato a vent'anni di reclusione da scontarsi nel castello di Aquila. Le truppe francesi lo liberarono nel 1798 e così egli potè contribuire alla proclamazione della Repubblica Partenopea. Abbattuta questa dalle armi inglesi capitanate da Nelson, il Giordano fu nuovamente incarcerato e condannato a morte, pena immediatamente commutata nella detenzione « ab libitum ». In conseguenza della vittoria ottenuta da Napoleone a Marengo conseguì nuovamente la libertà; esulò allora in Francia, ove trovò occupazione come ingegnere nel catasto; con la scienza fece allora definitivo divorzio e morì a Troyes nel febbraio 1859.

Vincenzo Flauti nacque a Napoli il 4 aprile 1782; fu indotto dal Fergola a inscriversi nella sua scuola e approfittò talmente del suo insegnamento che sino dal 1798 poté dare lezioni di matematica. Nel 1803 fu nominato professore di matematica sintetica nell'Università napoletana e in questa rimase con vari uffici sino al suo collocamento a riposo (1849). Oltre ad un trattato di geometria descrittiva (1807), il primo che abbia visto la luce in Italia, si devono a lui numerose pubblicazioni scolastiche, grazie alle quali e alle svariate cariche ufficiali che gli furono conferite, potè esercitare un potere quasi dispotico nella pubblica istruzione delle provincie meridionali; i nemici, che egli si procurò esercitandolo, si vendicarono nel momento della ricostruzione dell'Accademia delle Scienze, facendovelo escludere, lui che ne era già stato segretario influentissimo.

629 - A differenza del suo maestro, il Flauti era di carattere intransigente, nulla volendo vedere ed udire che non fosse redatto secondo i modelli lasciati dagli immortali geometri dell'antica Grecia. Da ciò ebbe origine un clamoroso episodio, l'ultima matematica disfida che dovremo registrare in queste pagine. Occasione a lanciarla fu un volume intitolato *Raccolta di Problemi di Geometria risoluti con l'Analisi algebrica* dovuto a Fortunato Padula (n. a Napoli il 23 dicembre 1816, m. ivi il 29 giugno 1881), campione di una scuola analitica rivale di quella del Fergola, *Raccolta* intesa a mostrare che si possono ottenere per via algebrica risultati geometrici non meno notevoli di quelli a cui giungesi calcando le orme di Apollonio. Ora, nel segreto intento di stabilire la superiorità dei metodi geometrici, ma con lo scopo dichiarato di « promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica », il Flauti, nella primavera del 1839, promise pubblicamente la somma di 60 ducati al matematico delle Due Sicilie che risolvesse uno di tre problemi da lui enunciati. Di questi il I consisteva nel dedurre dalla soluzione data da Lagrange per il problema proposto dal Cramer al Castillon (v. n. 595) una conveniente costruzione: il II era il problema di Malfatti, e il III l'analogo nello spazio. Ora riguardo a quest'ultimo si noti che la ricerca di quattro sfere ognuna delle quali tocchi le altre tre, nonchè tre faccie di un tetraedro, era già stata proposta nelle *Annales* di Gergonne, e Steiner aveva notato che si tratta di una questione più che determinata, epperò generalmente irresolubile. La stessa cosa essendo stata subito rilevata anche da un giornale di Napoli, grave scredito ridondò sul Flauti; tuttavia, anche prima che sca-

desse il termine del concorso da lui bandito, vide la luce una *Risposta* di Fortunato Padula *al Programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'Invenzione geometrica presentato ai matematici delle Due Sicilie* (Napoli, 1839), la quale si apre con una lunga prefazione intesa a combattere l'attitudine anti-lagrangiana assunta dal Flauti; seguono le soluzioni dei due primi problemi proposti e la dimostrazione della necessità di una relazione fra gli spigoli della data piramide affinchè il terzo sia risolubile. Scaduto il concorso, avendo l'Accademia di Napoli rinviato a termine indeterminato il giudizio che era stato ad essa demandato, il Flauti assunse di pronunciarlo egli stesso e decretò vincitore un suo discepolo, Nicola Trudi (n. a Campobasso il 21 luglio 1811, m. a Napoli il 3 ottobre 1884), destinato a divenire lustro e decoro dell'Università Partenopea, e ne pubblicò le soluzioni in un volume contenente acri commenti sopra le varie fasi del concorso.

La ferrea concatenazione degli avvenimenti ci ha trascinati ad una epoca più vicina a noi di quanto sia quella a cui si riferisce il presente Cap. Prima di riprendere l'ordine cronologico dei fatti, osserviamo che con l'indicato concorso si chiude la storia della scuola fondata da Nicola Fergola. Le benemerenze di questo risultano palesi quando si rifletta che egli è dalla sua comparsa che le Provincie meridionali cominciano a dare contributi regolari costanti alla nostra scienza, uniformandosi alle vedute larghe del Fergola e rifuggendo dall'attitudine settaria assunta dal Flauti; ma la fine della scuola fondata dal Fergola, più che all'azione deplorevole esercitata dal discepolo, deve forse ricercarsi nel fatto che essa aveva ormai compiuta la sua nobile missione, di destare e ravvivare lo spirito di ricerca nel Regno delle due Sicilie [1].

---

Parte Seconda:

## PRODROMI DI UNA METAMORFOSI DELLA GEOMETRIA

### A. F. Frézier

630 - Le idee originali di Desargues (v. n. 367) sull'indirizzo da imprimersi alla ricerca geometrica apparvero in un'epoca nella quale i matematici erano « in tutt'altre faccende affaccendati »; cosicchè si può dre che, fra i geometri teorici, egli ebbe un unico discepolo diretto, B. Pascal, e un discepolo che a svolgere le idee del maestro dedicò soltanto alcune ore dei primi anni della sua vita. Maggior successo egli ebbe, come sappiamo (v. n. 373), nei suoi sforzi per assicurare basi scientifiche alle pratiche in uso presso pittori e architetti; e che la sua influenza non

---

(1) Non potendo entrare qui in minuti ragguagli sull'argomento, siaci lecito rinviare il lettore desideroso di conoscere tutte le pubblicazioni del tempo, alla monografia dell'autore intitolata *Nicola Fergola e la Scuola di matematici che lo ebbe a Duce* (Atti della Univ. di Genova, 1892) e alle numerose memorie di F. Amodeo riunite poi nei due volumi intitolati *Vita matematica napoletana* (Parte I, Napoli, 1904; Parte II, Napoli, 1924).

si sia spenta con lui è attestato da un egregio ingegnere che in Francia riprese la tradizione desarguiana: Amedeo Francesco Frézier. Egli nacque a Chambery nel 1682; la famiglia voleva destinarlo alla carriera di magistrato, ma egli preferì invece arruolarsi nella fanteria francese e vi diede tali e tante prove d'intelligenza che, dopo sette anni di servizio, fu trasferito nel corpo degli ingegneri militari (arma del genio). Anche nella sua nuova situazione fece ottima prova, sicchè il Governo gli conferì varie missioni di fiducia e nel 1740 lo nominò governatore della Bretagna; sei anni dopo fu collocato a riposo, e morì il 26 ottobre 1773. Nella storia gli spetta un posto per l'opera in tre volumi intitolata *La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois, pour la Construction des Voutes et autres Parties des Bâtiments civils et militaires, ou Traité de Stéréotomie à l'usage de l'Architecture* (Strassbourg, 1737-39). Si tratta di un'opera a scopo pratico, ma di tendenze schiettamente scientifiche, come risulta dalla frase di Vitruvio scelta come motto: « Geometria plura praesidia praestat architecturae », anzi più precisamente di carattere prettamente geometrico, essendovi bandita qualunque considerazione meccanica. Conformemente a siffatto concetto egli ritiene la stereotomia (termine tecnico da lui inventato) come costituita da quattro Parti, cioè: I. *Tomomorfia*: Investigazione delle curve ottenute segando i solidi mediante superficie piane e curve. II. *Tomografia*: Descrizione delle curve situate sopra superficie date. III. *Stereografia*: Metodi per rappresentare su di un piano i solidi e le loro sezioni, cioè: *a*) Iconografia e Ortografia; *b*) Epipedografia o sviluppo delle superficie su di un piano; *c*) Goniografia (v. n. 530). IV. *Tomotecnica*, o applicazione di quanto precede alla determinazione delle sezioni dei corpi che riescono giovevoli nel taglio delle pietre. Richiamiamo l'attenzione del lettore sopra la nuova terminologia introdotta dal Frézier, la quale avrebbe meritato di prendere posto stabile nella scienza; nella disinvoltura di introdurre neologismi egli si è mostrato un vero seguace di Desargues; ma non soltanto in questo, sibbene anche nel costante uso di ragionamenti e metodi rigorosamente matematici, alcuni dei quali, anzi, s'incontrano tuttora nella geometria descrittiva. Il Frézier ben conoscendo lo spirito del suo tempo, malinconicamente osservò: « qu'aujourd'hui la géométrie linéaire n'est plus guère à la mode, et que pour se donner un air de science, il faut faire parade de l'analyse ». Era riserbato al grande a cui ora ci volgiamo di dare un nuovo orientamento alle opinioni dominanti.

## G. Monge

631 - Giacomo Monge, povero negoziante girovago di Beaune (Borgogna) coltivava la nobile ambizione di assicurare ai proprii figli un'educazione sufficiente per conseguire un'alta posizione sociale; tutti corrisposero al desiderio paterno, ma è il maggiore, Gaspare (n. il 10 maggio 1746), che assicurò alla sua famiglia perenne rinomanza. Le prove di eccezionale intelligenza da lui date in età ancor tenera attirarono su di lui l'attenzione dei Padri dell'Oratorio, suoi maestri, i quali gli affidarono l'insegnamento della fisica nel loro Collegio di Lione e fecero del

loro meglio per farlo ammettere nel loro ordine; ma il padre lo consigliò di non accettare, e di preferire l'invito rivoltogli da un ufficiale superiore del genio di assumere un ufficio nella Scuola militare di Mézières. Gli umili natali di Monge non gli permisero che di entrare (1763) nella sezione pratica di quella Scuola, ove sua principale occupazione era quella di « défiler un fort » secondo norme tradizionali laboriosissime; a queste egli propose alcune ragionevoli modificazioni, le quali furono dapprima combattutte da superiori misoneisti, ma finirono col trionfare e procurare a Monge la promozione a ripetitore. Risalgono a quest'epoca le sue prime ricerche sopra le applicazioni dell'analisi alla ricerca delle proprietà infinitesimali delle curve e delle superficie: esse, mentre fecero conoscere favorevolmente l'autore agli scienziati parigini, portarono al conferimento a lui, prima della cattedra di matematica (1768) e poi di quella di fisica (1771) nella Scuola di Mézières. Nel 1780 fu nominato professore di idraulica al Louvre con l'obbligo di risiedere a Parigi per metà dell'anno, in pari tempo l'Accademia delle Scienze lo chiamava nel proprio seno; finalmente nel 1783 veniva destinato a sostituire il Bézout come esaminatore degli allievi di marina. Monge, nato dal popolo e che si era vista intralciata la carriera da antiquati pregiudizi di casta, abbracciò con ardore i principî dell'89. Dopo il 10 agosto 1792 gli fu conferito il portafoglio della Marina nel secondo ministero Roland, ma non lo tenne che sino al 9 aprile 1793; continuò egualmente a servire la propria patria, occupandosi di preferenza di questioni scolastiche; ebbe, infatti, parte preponderante nella creazione delle Scuole Politecnica e Normale, ove insegnò con plauso; dette anche opera efficace a che fosse ricostituita (1795) l'Accademia delle Scienze distrutta dal furore egalitario. Durante una missione ufficiale in Italia avvicinò il generale Bonaparte, che lo volle seco durante la spedizione d'Egitto e poi lo nominò senatore e conte di Pélouze. I Borboni, che non gli perdonarono il suo attaccamento per Napoleone, lo espulsero (21 marzo 1816) dall'Accademia che egli illustrava; più di tale sgarbo lo condussero alla tomba (28 luglio 1818) la caduta e l'esilio del suo venerato protettore.

632 - I lavori matematici di Monge si ripartiscono in due classi distinte, intitolate rispettivamente Geometria descrittiva e Geometria infinitesimale. Le scaturigini degli scritti della prima si devono cercare nei miglioramenti da lui introdotti nelle pratiche di fortificazione allora in uso. Tali miglioramenti, come tutti gli sviluppi che ricevettero in seguito, furono tenuti celati, come gelosi segreti di stato, sino al giorno in cui a Monge fu concesso (1795) di farli conoscere agli alunni della novella Scuola Normale; allora si diffusero in forma litografica per tutta la Francia e poi in tutto il mondo grazie al volume intitolato, con felice neologismo, *Géométrie Descriptive*. Benchè nel Programma con cui si apre l'autore affermi che questa nuova scienza era destinata a « tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère », tutta l'esposizione riveste un carattere prettamente scientifico, essendo informata al concetto che la geometria descrittiva è in grado di fare all'analisi una concorrenza vittoriosa: però, per agevolare il conseguimento di tale risultato, Monge consiglia lo studio simultaneo delle due discipline.

Entrando nel vivo dell'argomento egli riferisce dapprima tutte le figure considerate a tre piani a due a due perpendicolari, ma subito fa vedere che di uno si può fare a meno quando si ricorra a proiezioni ortogonali. Dalla conseguente rappresentazione del punto egli deduce quella delle linee rette o curve, mentre per le superficie è necessario segnare prima su di esse almeno un sistema di linee assunte come generatrici; però, per il piano, bastano a determinarlo le due rette in cui esso incontra i piani di proiezione (*tracce,* nome introdotto da Monge e rimasto nella scienza). Sopra nove problemi elementari Monge mostra come i principi esposti abilitino a trattare le questioni geometriche; essi chiudono la I Sez. dell'opera in discorso. La II concerne i piani tangenti e le normali alle superficie; il piano tangente in un punto di una superficie è individuato dalle tangenti ivi alle due corrispondenti generatrici della superficie stessa; Monge considera anzitutto il caso in cui il punto di contatto è dato, occupandosi in particolare delle superficie coniche, cilindriche, di rivoluzione e (in un'Appendice) rigate. Se invece si conosce un punto od una retta per cui deve passare il cercato piano tangente, nascono nuove questioni di cui Monge ha fatto risaltare l'importanza pratica. Delle intersezioni delle superficie tratta la III Sez.; l'artificio usato da lui onde costruirle per punti consiste nell'uso di una serie di superficie ausiliari; è quello in uso ancora oggi, sia in generale sia nei casi considerati dal grande geometra francese. L'ultima Sez. ha lo scopo di mostrare come i principî esposti abilitino a risolvere sul piano del disegno qualunque problema stereometrico; gli esempi scelti sono sei, tre hanno carattere pratico e indubbiamente risalgono all'epoca in cui il grande geometra insegnava a Mézières. Nelle ultime pagine dell'opera in esame si legge un lucido compendio delle proprietà infinitesimali delle curve sghembe, delle sviluppabili e delle superficie in generale, tratto in gran parte dai lavori di cui parleremo fra poco. Se ivi non si trova alcun cenno delle quadriche, ciò non significa che egli non se ne sia occupato; infatti risale a lui la scoperta della generabilità di qualunque superficie di 2° ordine mediante il movimento di un cerchio; inoltre nel T. I. del *Journ. Éc. Pol.* egli ha determinate le linee di curvatura di un ellissoide [1] e ne ha data una accuratissima rappresentazione in doppia proiezione ortogonale.

Contemplando nel suo insieme la geometria descrittiva quale si presenta nella prima delle opere che la concernono, si riconosce che essa rappresenta l'ultimo anello di una catena, di cui il primo si perde nella notte dei tempi, mentre gli altri debbono cercarsi nelle opere a noi già note (per non citare che le più cospicue) di Vitruvio, Dürer, del Monte, Frézier; merito imperituro, indiscutibile e grande del sommo francese è di avere trasformato il materiale bruto posto a disposizione e utilizzato da pittori ed architetti, in una disciplina veramente scientifica che non tardò ad essere riguardata come elemento indispensabile della coltura matematica della gioventù. Aggiungiamo che il volume *Géométrie De-*

[1] Queste linee furono ottenute con l'integrazione della equazione differenziale di una loro proiezione ortogonale effettuata applicando una differenziazione, artificio che MONGE aveva fatto conoscere in generale nel *Mémoire sur une Méthode d'intégre les Equations différentielles ordinaires* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1783).

*scriptive* non esaurisce i contributi da lui dati alla scienza a cui egli ha dato definitivo assetto scientifico; chè nel T. I del succitato *Journ.*, sotto il titolo *Stéréotomie*, si leggono gli enunciati di numerose questioni da lui proposte ai propri alunni, fra cui i problemi elementari di risoluzione dell'angolo triedro « ce qui comporte toute la trigonométrie ». Inoltre i metodi da lui ideati per la costruzione delle prospettive e delle ombre furono resi di generale dominio da un suo discepolo, B. Brisson (n. a Lione nell'ottobre 1777, m. a Nevers il 23 settembre 1828). Applicando i procedimenti da lui indicati per la degradazione delle tinte, alcuni alunni della Scuola Politecnica determinarono le linee isofote e il punto brillante di una sfera con tale successo che l'illusione prodotta dalla figura risultante risultò così perfetta che, avendo quegli alunni collocato il risultante disegno sul tavolo del maestro nell'ora in cui soleva recarsi alla Scuola Politecnica, ne riscossero dal maestro la più commovente approvazione.

Questi cenni sull'opera geometrica di Monge vanno completati con l'osservazione che gli è a partire da lui che ricomincia l'interesse generale dei matematici per la geometria pura; e ciò non soltanto in conseguenza delle sue pubblicazioni, ma anche per effetto del suo vivace insegnamento orale, il quale aveva la virtù di elettrizzare i suoi migliori ascoltatori, dando frutti di cui ben presto misureremo il valore.

633 - Passando ora nel campo analitico, rileveremo come i contributi dati da Monge alla teoria delle equazioni a derivate parziali di 1° e 2° ordine (inclusa quella delle corde vibranti) furono ottenuti mediante originali considerazioni geometriche. La via da lui battuta consiste nel partire da speciali superficie, nel determinarne le equazioni in termini finiti, poi (eliminando le funzioni arbitrarie) le equazioni differenziali e finalmente nell'invertire questo procedimento; i risultati ottenuti (benchè non esenti da qualche lieve menda) sono talmente importanti che provocarono da parte di Lagrange l'arguta esclamazione: « Avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel! ». A noi non è dato descrivere tali contributi, chè ciò esigerebbe formole complicate e lunghe considerazioni teoriche. Meno arduo ci riesce indicare i perfezionamenti che deve a lui la geometria infinitesimale; è quanto ci apprestiamo a fare.

L'11 gennaio 1771 egli lesse all'Accademia delle Scienze di Parigi un *Mémoire sur les Développées, les Rayons de courbure et les Différents genres d'infléxions des Courbes à double courbure,* che fu pubblicato soltanto nel 1785 (Vol. XV della raccolta dei *Sav. Etr.*). Esso è di grande importanza tanto per la geometria analitica, quanto per la teoria delle curve sghembe; vi si trovano, infatti, risolte per la prima volta con generalità ed eleganza alcune questioni elementari che vanno qui enumerate: equazione del piano che passa per un punto ed è perpendicolare all'intersezione di due dati piani, espressione della distanza di due punti determinati dalle loro coordinate cartesiane ortogonali, formole per la trasformazione delle coordinate ortogonali nello spazio, espressione del raggio di curvatura di una linea gobba. In quella memoria è poi dimostrato che una tale curva ammette infinite evolventi le quali formano la

« superficie polare » (inviluppo dei piani normali), e ne sono geodetiche. Nelle successive considerazioni relative alle superficie sviluppabili si incontrano i concetti di « caratteristiche » e di « spigolo di regresso », nonchè la caratterizzazione delle due specie di punti d'inflessione che può presentare una curva gobba. Nè manca la nozione di superficie rettificante, nome giustificato dal fatto (non sfuggito a Monge) che svolgendola su di un piano la data curva si trasforma in una retta. Dalla stessa memoria si apprende anche il concetto di « contorno apparente » (¹) di una superficie e la generazione di una rigata mediante tre direttrici.

Giova qui rilevare che fra coloro che lo seguirono subito in questo ordine d'indagini trovansi due egregi matematici, di cui è opportuno far cenno in questo momento. Il primo è C. M. T. L. Tinseau d'Amondas (n. a Besançon nel 1740, m. a Montpellier nel 1822), autore di due memorie intitolate *Solutions de quelques Problèmes relatifs à la Théorie des Surfaces courbes et des Courbes à double courbure* e *Sur quelques Propriétés des Solides renfermés par des Surfaces composées de Lignes droites* (*Sav. Etr.*, T. X, 1780) ispirate, come dichiara l'autore, dagli scritti d'« un grande Géomètre que ses ouvrages louent bien mieux » che egli « ne pourrait le faire ». Vi si legge l'equazione del piano tangente in un punto qualunque di una superficie inoltre alcune formole utili alla complanazione di una superficie e finalmente l'importante teorema : « la proiezione ortogonale di una curva gobba presenta inflessioni in ogni punto in cui il corrispondente piano osculatore è perpendicolare al piano di proiezione ».

Più grande notorietà raggiunse G. M. B. M. C. Meusnier de Laplace ; egli nacque a Tours il 19 giugno 1754 ; avendo deciso di dedicarsi alla carriera delle armi dotte, ebbe la fortuna di avere alla Scuola del Genio di Mézières (ove passò gli anni 1774-75) come maestro Monge, il quale, avendone misurate le non comuni doti intellettuali, lo avviò verso le ricerche sulle superficie ; e il giovane ufficiale fece allora le sue prime scoperte, determinando due superficie d'area minima particolari (il catenoide e la superficie della vite a filetto quadrato). Nei giorni 14 e 21 febbraio 1776 lesse all'Accademia di Parigi un *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (stampato poi nel T. X, 1785, della raccolta dei *Sav. Etr.*) il quale ottenne un tale successo che l'autore fu poco dopo (12 giugno) nominato corrispondente di detta Accademia (ne divenne poi membro il 28 gennaio 1784) ; di tal successo è facile rendersi ragione notando che quel lavoro contiene il « teorema di Meusnier » che insegna la relazione che esiste fra le curvature in un punto di due sezioni di una superficie condotta per quel punto, una normale e l'altra obliqua. Non è nostro compito esporre perchè il Meusnier sia oggi considerato come uno dei precursori della navigazione aerea, nè di seguirlo nella sua brillante carriera militare ; solo diremo che, arrivato al grado di generale, nel 1793 diresse le operazioni dell'esercito francese durante l'assedio di Magonza e ivi trovò la morte degli eroi, addì 13 giugno.

(¹) Questo termine tecnico s'incontra per la prima volta nel posteriore *Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1781).

634 - Riprendendo l'enumerazione dei contributi dati da Monge alla conoscenza delle proprietà infinitesimali delle superficie, dobbiamo ricordare la memoria *Sur les Propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces Développables* (posteriore ma pubblicata prima della precedente nel T. IX, 1780, dei *Sav. Etr.*). Ivi il grande geometra ha perfezionata la teoria euleriana della curvatura delle superficie, collegandola alla considerazione delle normali e introducendo le nozioni di linee di curvatura e di ombelichi; si è poi proposto di porre in luce la differenza che corre fra superficie rigata e superficie sviluppabile; delle sviluppabili, non solo ha scoperto l'equazione differenziale di 2° ordine $rt - s^2 = 0$, ma anche l'altra $p = \varphi(q)$, $\varphi$ essendo simbolo di una funzione arbitraria; anche delle rigate trovò l'equazione generale, e delle considerazioni teoriche esposte ha mostrata l'applicazione alla teoria dell'illuminazione delle superficie. Più tardi (*Journ. Ec. Pol.*, T. XI, XIII e XV) egli ha inaugurate le ricerche delle superficie definite da una proprietà delle loro normali, determinando quelle le cui normali toccano un cono, una sfera od una sviluppabile; altrettanto fece riguardo alle superficie inviluppate da una sfera di raggio variabile col centro su una determinata curva.

I risultati esposti in queste memorie si ritrovano coordinati e completati in una grande opera intitolata nella sua I ed. *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* e nella IV (1809) — ultima riveduta dall'autore — *Analyse appliquée à la Géométrie;* riguardo ad essa, per non ripetere quanto già dicemmo altrove, ci limiteremo a pochi cenni indispensabili. Le varie classi di superficie vengono considerate per stabilirne le equazioni differenziali e queste integrare; sono le superficie cilindriche, coniche, di rotazione, rigate con due direttrici rettilinee una all'infinito, poi le superficie-canali o più generalmente quelle inviluppate da una sfera mobile, ancora quelle di cui sono rette le linee d'inclinazione costante su un piano e finalmente le rigate in generale. Nè mancano le superficie già citate, le cui normali toccano una superficie assegnata; inoltre quelle, non ancora incontrate prima, avente prestabilite proprietà di curvatura: superficie le cui linee di curvatura stanno in piani fra loro paralleli, o per cui è costante uno dei raggi di curvatura, o di cui i due raggi di curvatura sono eguali ed opposti [1]. Tutte le relative ricerche sono esposte con somma chiarezza e con una semplicità che nasconde le grandi difficoltà superate. Se in questo campo egli non trovò subito, come in altri, imitatori e seguaci, gli è che le procedure da lui usate sembrano essere monopolio di quei pochi eletti che sono in grado ad un tempo di ragionare sopra le più complicate figure geometriche e di eseguire calcoli elevatissimi.

---

[1] Sono le superficie d'area minima, di cui MONGE insegnò la prima rappresentazione analitica generale, che fu poi perfezionata da WEIERSTRASS, liberandola da ogni segno d'integrazione.

## Collaboratori e discepoli diretti di Monge

635 - Prima ancora che Monge diffondesse per mezzo della stampa i fondamenti della nuova branca delle matematiche da lui creata, veniva pubblicato un volumetto intitolato *Essai de Géométrie sur les Plans et les Surfaces* (¹) il cui contenuto offre sorprendenti analogie con la *Géométrie Descriptive*. Ne è autore un matematico che già conosciamo (v. p. 771), S. F. Lacroix, il quale spiega quelle coincidenze osservando essere naturale che, trattando gli stessi argomenti, si adoperino i medesimi procedimenti; altri ne dà ragioni differenti, cioè con l'avere il Lacroix avuta notizia, sia pure imperfetta, di quanto Monge insegnava a Mézières (²). Senza discutere quanto di vero si trovi in queste varie affermazioni, limitiamoci a dire che il trattatello del Lacroix occupa sole 120 paginette ed è diviso in due parti; nella I sono poste le basi del metodo della doppia proiezione ortogonale, mentre nella II sono risolte le principali questioni relative a piani tangenti e intersezioni di superficie, con speciale riguardo alle superficie coniche, cilindriche e di rivoluzione, come chiusa sono esposte le norme per delineare le prospettive e le meridiane; perciò nulla di essenziale aggiunge a quanto Monge aveva già insegnato.

Ben più giovevole alla scienza nostra riuscì J. P. N. Hachette. Egli nacque a Mézières il 6 maggio 1760 e occupò in quella Scuola del Genio il modesto ufficio di disegnatore; mutati i tempi, fu chiamato a Parigi per insegnarvi nelle due grandi Scuole di recente creazione; partecipò alla spedizione d'Egitto, fu poi professore alla Facoltà di Scienze di Parigi e morì, membro dell'Istituto, il 16 gennaio 1834. È suo merito di avere creato e diretto il periodico intitolato *Correspondence sur l'Ecole Polytechnique*, ove pubblicò buon numero di brevi ma interessanti articoli, molti contrassegnati con la sigla H. C.; notiamo fra essi quello che insegna la risoluzione dell'angolo triedro nei sei casi elementari classici, seguita dalla deduzione delle formole fondamentali della trigonometria sferica (cfr. una questione proposta da Monge, p. 798); inoltre le note sulla vite a filetto triangolare e sulla superficie generata dalla rotazione attorno ad un asse di una retta qualunque e sulla teoria dell'illuminazione. Senza dilungarci sopra questi lavori, dobbiamo arrestarci su altri di maggior mole del medesimo autore, il primo dei quali, in ordine cronologico, è il *Supplément à la Géométrie Descriptive de Monge* (Paris, 1811). La materia trattata corrisponde perfettamente a questo titolo; infatti il § I contiene nuove considerazioni sopra la generazione delle superficie e in particolare sopra le quàdriche; dal § II si apprendono le soluzioni, coi metodi di Monge, di alcune questioni elementari che egli non aveva trattate; nel III si trovano la costruzione della sfera tangente a quattro date e quella dei piani tangenti a una rigata definita da tre generatrici; seguono (§ IV) la costruzione delle sezioni piane di

(¹) A noi sta sott'occhio la II ed. (Paris, 1802).

(²) Per più minuti particolari sopra questo fatto, il lettore può ricorrere alla mia *Storia della geometria descrittiva* (Milano, 1921), p. 130.

una quàdrica e dell'intersezione di due superficie di 2° ordine, poi (§ V) lo studio dell'elica cilindrica e delle epicicloidi sferiche, finalmente (§ VI) la risoluzione dell'angolo triedro e di altre questioni elementari.

Sette anni dopo l'Hachette pubblicò, non soltanto una collezione di tavole di geometria descrittiva ad uso degli studenti politecnici, ma anche un *Second Supplément à la Géométrie Descriptive de Monge,* con lo scopo di ampliare il primitivo programma della nuova disciplina, con l'includervi anche le proiezioni obliqua e centrale; siccome l'Hachette con ragione riteneva opportuno premettere all'insegnamento della geometria descrittiva un corso di geometria costruttiva piana, così pose, al termine del suo volume, la versione francese della *Geometrical Analysis* del Leslie (v. p. 786). Cronologicamente interposto fra queste due pubblicazioni dell'Hachette è il volume intitolato *Eléments de Géométrie à trois Dimensions* (Paris, 1817), mentre lo segue l'esteso *Traité de Géométrie Descriptive* (Paris, 1822; II ed., 1828); entrambe queste opere riassumono l'opera geometrica di Monge e dei suoi primi discepoli e si distinguono per la chiarezza dello stile e l'accuratezza delle figure che illustrano il testo.

636 - Mentre l'Hachette ci si presenta sotto l'aspetto di coscienzioso aiutante di un prode generale, un altro devoto discepolo di Monge offre tutte le caratteristiche del pensatore originale: è Carlo Dupin. Egli nacque a Varzy l'8 ottobre 1784; a 18 anni fu congedato dalla Scuola politecnica col grado d'ingegnere navale e a lavori d'ingegneria dedicò gran parte della propria attività; ciò non gli impedì di scrivere un ottimo *Essai sur les Services et les Travaux scientifiques de Gaspard Monge* (Paris, 1819), per porre in luce le alte benemerenze di colui sul quale erasi allora scatenato l'odio dei Borboni; ne diffuse poi le idee in lezioni popolari che furono raccolte sotto il titolo di *Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts* (Bruxelles, 1826); nel 1818 entrò nell'Accademia delle Scienze e nel 1842 in quella delle Scienze morali e politiche; morì a Parigi il 18 gennaio 1873. Della sua indiscutibile attitudine alla ricerca geometrica egli diede prova sino da quando era studente, chè si trovava ancora alla Scuola Politecnica quando scoperse la « ciclide » che reca ancora il suo nome. Il suo valore come investigatore originale risultò palese a tutti quando nel 1813 furono pubblicati i suoi *Développements de Géométrie pour faire suite à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Analytique de M. Monge.* Le cinque memorie di cui consta, presentate all'Istituto di Francia, furono oggetto (28 dicembre 1812) di un Rapporto estremamente elogioso da parte di Mònge, Carnot e Poisson, e ben a ragione, chè, ivi, con l'applicazione simultanea dell'analisi e della geometria, è stabilita una nuova teoria della curvatura delle superficie. Nelle prime tre memorie questa viene studiata nell'intorno di un punto mediante le « tangenti conjugate » e l'« indicatrice », nuovi elementi introdotti dall'autore nella scienza e che nella scienza rimasero e resteranno. Nelle due ultime la ricerca viene estesa a tutti i punti di una superficie e conduce all'importantissima proposizione che lega i sistemi tripli ortogonali alle linee di curvatura delle superficie componenti. Le considerazioni generali vengono poi applicate alle quàdriche con risultati che valsero ad accrescere l'importanza di queste notevoli super-

ficie. Benchè le occupazioni ufficiali di Dupin siano andate continuamente aggravandosi in conseguenza della stima di cui egli godeva presso i suoi superiori, pure, appunto dalle questioni d'ingegneria che giornalmente gli si affacciavano, egli trasse occasione per fare nuove applicazioni dei metodi matematici. Ne è testimonio l'altro volume intitolato *Applications de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées,* etc. (Paris, 1822), ove problemi concernenti la stabilità dei galleggianti, la costruzione di strade, il trasporto di terra, l'ottica geometrica e l'architettura navale sono lumeggiate mediante ingegnose considerazioni teoriche e portano a conclusioni a cui i pratici non poterono negare il loro assenso. Trattandosi di temi estranei al nostro programma, limitiamoci a notare che, occupandosi dei fenomeni di propagazione della luce, Dupin fu indotto a rioccuparsi della sua ciclide e a dimostrare (a complemento di un risultato di Malus) che « quando un pennello di raggi è costituito di normali a una superficie, per riflessione e rifrazione conserva la medesima struttura »; altro importante risultato che prese posto stabile nella scienza.

637 - Alla scuola di Monge appartiene anche un geometra che ebbe la singolare fortuna di legare il proprio nome a un teorema fondamentale della teoria delle coniche, C. G. Brianchon. Ben poco si conosce della sua vita; nacque a Sèvres nel 1785, fu durante un quadriennio alunno della Scuola Politecnica donde uscì nel 1808 col grado di tenente d'artiglieria; dieci anni dopo fu nominato professore alla Scuola d'artiglieria di Parigi e morì nel 1864. Il teorema che lo rese famoso trovasi enunciato in un lavoro *Sur les Surfaces du second Degré* (Journ. Ec. Pol., XIII Cah., 1806) e dimostrato nella posteriore memoria intitolata *Solution de plusieurs Problèmes de Géométrie* (Id., X Cah., 1810) (1), ove esso è applicato alla costruzione di una conica determinata da $n$ punti e $5$-$n$ tangenti, memoria che ebbe un complemento nell'opuscolo appunto intitolato *Mémoire sur les Lignes du Second ordre faisant suite aux Recherches publiées dans les Journaux de l'Ec. Pol.* Dei nuovi metodi geometrici posti in circolazione da Monge e dai suoi discepoli, Brianchon immaginò nuove applicazioni in un corso tenuto nel 1818 alla Scuola d'Artiglieria, come è provato dall'opuscolo *Applications de la Théorie des Transversales, Cours d'opérations géométrique sur le terrein* (I Cah., unico pubblicato, Paris, 1818), nel quale dalle due proposizioni fondamentali di detta teoria sono dedotte costruzioni semplici ed eleganti di questioni che s'incontrano in pratica. Finalmente, col concorso di altro celebre alunno di Monge (Poncelet) egli scrisse alcune *Recherches sur la Détermination de l'Hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions* (Ann. de Math., T. XI, 1820-1821) che condussero a interessanti proprietà di questa conica particolare; limitiamoci a citare fra esse quella espressa dal teorema: qualunque iperbole equilatera circoscritta a un triangolo passa sempre per il punto d'incontro delle altezze.

(1) Noti il lettore che effettivamente (ma per ragioni a noi ignote) il Cah. X fu pubblicato quattro anni dopo del XIII.

È il caso di notare qui che due questioni le quali furono studiate con passione nella Scuola Politecnica sono la costruzione di un cerchio tangente a tre altri e di una sfera tangente a quattro altre. La migliore delle soluzioni che allora vennero congegnate appartiene a un ex-alunno di quella Scuola, che fu poi professore al *Conservatoire des Arts et Métiers*, Gaultier de Tours: la si legge in un'estesa memoria presentata all'Istituto di Francia nell'1812, da esso approvata per l'inserzione delle memorie dei *Sav. Étr.*, ma che fu invece pubblicata nel XVI Cah. del *Journ. de l'Éc. Pol.*

## Carnot, Gergonne, Poncelet

638 - All'epoca durante cui si manifestò in tutta la sua intensità l'influenza di Monge appartiene l'azione, pure altamente benefica, di un'altra alta personalità politico-militare del tempo: Lazzaro N. M. Carnot. Egli nacque a Nelay (Côte d'Or) il 13 maggio 1753; nel 1771 entrò nella Scuola di Mézières (vi insegnava ancora Monge) e due anni dopo ne uscì sottotenente; tutte le storie della Francia durante la rivoluzione descrivono con lodi entusiastiche l'opera da lui spiegata per assicurare alla sua patria il trionfo sugli alleati che si affollavano alle sue frontiere; Napoleone, che meglio d'ogni altro era in grado di misurare il valore dell'« organizzatore della vittoria », gli conferì importanti uffici e le più alte onorificenze; Carnot corrispose con una devozione che durò oltre l'esilio dell'imperatore; i Borboni per vendicarsi di tale attitudine lo cacciarono dalla Francia, sicchè egli finì la vita a Magdeburgo (2 agosto 1823).

Quantunque le sue occupazioni ufficiali lo orientassero verso le applicazioni, Carnot si interessò costantemente alla scienza pura, anzi a ciò che può ben dirsi filosofia delle matematiche. E poichè, come vedemmo, sullo scorcio del secolo XVIII era sempre dibattuta la questione di collocare l'analisi infinitesimale sopra basi esenti da oscurità, il Carnot si propose di apportare un proprio contributo alla desiderata soluzione, con le *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitesimal* (Paris, 1797). Questo scritto si apre con una esposizione critica dei metodi infinitesimali in uso (esaustione, indivisibili, prime e ultime ragioni, flussioni) e conclude che se essi, malgrado la loro imperfezione, guidano a conclusioni esatte, gli è perchè gli errori commessi si compensano ed eliminano. Benchè sia stato osservato che una semplice constatazione di un fatto non è sufficiente a rivelarne le origini, benchè, quindi, non si possa ritenere cospicuo il contributo dato da Carnot alla soluzione della « vexata quaestio », pure le *Réflexions* riscossero estesa approvazione e — grazie a numerose edizioni e traduzioni — si diffusero largamente nel mondo, senza però dissipare le nubi che allora addensavansi sull'analisi matematica.

Il tramonto della repubblica e l'esaltazione di Napoleone concessero a Carnot di ritornare con tutto agio ai suoi diletti studi. Primo frutto di essi l'opuscolo *De la Corrélation des Figures en Géométrie* (Paris, 1801), il quale presentasi agli occhi nostri come un vero segno dei tempi.

come manifestazione dell'irrequieta aspirazione della geometria ad emulare la sua eterna rivale nei portentosi risultati da questa conseguiti durante il sec. XVIII. Ora uno dei più gravi inconvenienti che offre la geometria degli antichi sta nella necessità di dover considerare i vari (e spesso numerosi) casi che può presentare una stessa figura; la geometria analitica superò tale difficoltà attribuendo alle figure convenienti segni; il Carnot ritenne che altrettanto potevasi fare nella geometria pura rappresentando in appositi quadri i vari aspetti di una stessa figura (figure correlative). Questo concetto è da lui largamente (e anche verbosamente) svolto e illustrato; se non riteniamo opportuno entrare in particolari al riguardo, gli è che esso ebbe vita effimera nella scienza; però, a suo onore va rilevato che condusse a qualche nuovo risultato: tale è la proposizione che afferma essere nulla la somma dei prodotti dei lati di un poligono piano pei coseni degli angoli formati dai lati stessi con una retta qualunque del suo piano; tale l'analoga concernente un poliedro.

L'edizione dell'opera citata essendosi rapidamente esaurita, Carnot pensò di dare un maggiore sviluppo alle sue idee: nacque così la voluminosa *Géométrie de Position*. La Dissertazione con cui essa si apre contiene una critica serrata delle anteriori teorie delle quantità negative: di più è ivi sostenuto che i concetti di quantità « dirette » e « inverse » permettono di costruirne una pienamente soddisfacente. La parte principale della stessa opera (il cui titolo venne tolto da Leibniz, ma con mutamento di significato) è destinata a mostrare come gli stessi concetti abilitino a costruire dei quadri, in ognuno dei quali sono da registrare le varie figure « correlative » rispetto a una data. Neppure con questi nuovi sforzi egli è riuscito ad assicurare l'esistenza ad una creatura vitale; però nel suo volume si trovano cose che rimasero nella geometria. Tale è il concetto di « quadrilatero completo » e la relazione che passa fra i segmenti che uniscono quattro punti qualunque del piano o gli archi che congiungono quattro punti qualunque della sfera; inoltre le soluzioni del problema di Castillon (v. n. 570) e del problema di Apollonio sulla sfera. L'applicazione dei medesimi concetti alla geometria analitica guidò Carnot alla relazione che intercede fra i segmenti determinati sopra i lati di un poligono da un piano arbitrario e all'analoga relativa ad una curva o superficie algebrica qualunque (essa a ragione porta ancora il nome di « teorema di Carnot »).

Dal teorema che esprime che quattro punti appartengono allo stesso piano o cinque alla stessa sfera, il distinto matematico fu indotto alla ricerca di una equazione congenere relativa a cinque punti arbitrari dello spazio; la formola da lui ottenuta fu resa di pubblica ragione nel *Mémoire sur la Relation qui existe entre les Distances respectives de cinq Points quelconques pris dans l'espace* (Paris, 1806); noi non la riferiamo perchè è data da un polinomio di 130 termini eguagliato a 0 [1], e piuttosto notiamo che essa fu ottenuta applicando le espressioni dei principali elementi di una piramide triangolare in funzione dei suoi spigoli: in tal modo Carnot ritrovò incidentalmente risultati dovuti a Euler e

[1] Oggi si preferisce scriverla sotto forma di determinante.

Lagrange, nonchè altri che leggonsi in un'operetta del Servois allora assai stimata, oggi dimenticata. Nello stesso opuscolo di Carnot si trovano le formole generali per la trasformazione delle coordinate oblique (sia pure sotto forma non espressiva) e nuovi argomenti in appoggio della surriferita teoria delle quantità negative.

Notiamo finendo che lo stile di Carnot è talmente pesante che le sue opere trovano oggi scarsi lettori, tanto più che, mentre le nuove verità da lui scoperte si possono apprendere altrove, i procedimenti da lui ideati e caldeggiati ebbero vita transitoria.

639 - Completamente estraneo alla scuola di Monge è G. D. Gergonne: egli nacque a Nancy il 19 giugno 1771: abbracciò la carriera delle armi e non lasciò la spada che quando gli venne conferita una cattedra nella Scuola Centrale di Nîmes; nel 1816 passò all'Università di Montpellier e vi rimàse sino al suo collocamento a riposo (1831); morì il 4 aprile 1859. È suo merito l'avere fondate nel 1810 le *Annales de Mathématiques* e di averne pubblicati 21 volumi [1], offrendo così ai matematici un prezioso veicolo di pubblicità: però, esagerando i poteri concessi al direttore di una rivista scientifica, egli si arbitrò in molte occasioni a modificare gli articoli inviatigli e così fece nascere deplorevoli polemiche.

Il 2 maggio 1814 presentò all'Accademia delle scienze di Torino un *Mémoire sur le Cercle tangent à trois Cercles donnés et sur la Sphère tangente à quatre Sphères données* che fu pubblicato nel 1816 negli atti di quella compagnia (T. XXII); ivi l'autore con una sagace applicazione delle coordinate giunge ad eleganti costruzioni delle figure incognite. Degli altri contributi da lui dati alla geometria ci restringeremo a segnalare i più cospicui.

Dei teoremi di Pascal e Brianchon egli ha indicate (*Ann. de Math.*, T. XIV, 1813-14) dimostrazioni basate sul concetto di proiettare in un cerchio la conica considerata; conviene riconoscere che i suoi ragionamenti sussistono soltanto per certe posizioni della retta di Pascal e del punto di Brianchon; ma Gergonne coraggiosamente ne estese la portata facendo notare che i corrispondenti sviluppi analitici godono di piena generalità; così adombrando e per la prima volta applicando il « principio di continuità » che ben presto divenne di uso generale fra i geometri. Ad un altro principio fondamentale egli ha legato il proprio nome, cioè alla « dualità » nel piano e nello spazio. Esso era già stato notato in base alla polarità rispetto a una curva o una superficie di 2° ordine e Gergonne medesimo ne aveva fatte alcune applicazioni (*Ann. de Math.*, T. III, 1912-13); ma, come una legge generale di natura, fu da lui rilevato successivamente nei poliedri (Id., T. XV, 1824-25), in altre figure limitate da rette e piani (Id., T. XVI, 1825-26), e finalmente (Id., T. XVII, 1826-27) in curve e superficie; non senza notare anche che esso governa anche le formole della trigonometria sferica. Oltre al termine « dualità » è sua invenzione il sistema di scrivere in doppia colonna due proposizioni fra loro correlative; da lui derivano anche i concetti di « fascio » e « rete »: ma, essendogli sfuggita la necessità di considerare

[1] Segue ad essi un fascicolo del Vol. XXII (1831-32).

una curva tanto come luogo dei suoi punti quanto come inviluppo delle sue tangenti, ritenne che il concetto di ordine fosse auto-duale; tuttavia egli stesso riconobbe poi il proprio torto e indicò le correzioni da apportarsi ai suoi primitivi enunciati (Id., T. XIX, 1828-29). Questi lavori provocarono una polemica con Poncelet (v. più avanti), la quale riuscì utile alla scienza, avendo indotto a chiarir meglio il concetto di trasformazione geometrica. Altro capitolo della geometria a cui il Gergonne arrecò notevoli migliorìe è quello che tratta dei punti (o delle curve) d'intersezione di due curve (o superficie); così egli ha scoperto il teorema: Se $p(p+q)$ dei $(p+q)^2$ punti d'intersezione di due curve dell'ordine $p+q$ stanno sopra una curva dell'ordine $p$, i rimanenti $q(p+q)$ apparterranno a una curva d'ordine $q$; ne dedusse, in particolare, che se un $n$-gono è inscritto in una conica, gli altri $n(n-2)$ punti di intersezione dei suoi lati appartengono a una curva dell'ordine $n-2$, non senza notare che per $n=3$ si ritrova il teorema di Pascal. Gergonne ha anche scoperto il teorema stereometrico analogo a quello generale testè riferito, ed inoltre ha dimostrato le seguenti proposizioni di cui gli erano stati comunicati gli enunciati: I. Tutte le quàdriche passanti per sette vertici di un esaedro contengono anche il rimanente. II. In qualunque modo si riduca a due il sistema di più forze nello spazio, il tetraedro costruito sopra i due segmenti che le rappresentano ha un volume costante.

Va osservato finalmente che il Gergonne, col proporre nel suo giornale questioni da risolvere o teoremi da dimostrare, in più occasioni ha dato lo spunto a nuove ricerche fruttifere per la nostra scienza. Citiamo fra i teoremi da lui enunciati quello secondo cui è un piano il luogo dei centri delle quàdriche tangenti a sette piani dati; esso fu dimostrato (*Ann. de Math.*, T. XVII, 1926-27) da un geometra, il Bobillier, che, benchè morto a soli trentacinque anni (nel 1832), diede alla geometria contributi di carattere permanente. A lui infatti si deve far risalire il « metodo della notazione abbreviata », di cui tutti conoscono l'utilità in geometria analitica (Ivi, T. XVIII, 1827-28); fra le applicazioni fattene notiamo il bel teorema: « Se una quàdrica è circoscritta a un tetraedro, i piani che la toccano nei vertici incontrano le facce rispettivamente opposte in quattro generatrici di un iperboloide a una falda ». Allo stesso matematico risale il merito di avere generalizzata la polarità rispetto ad una curva o superficie di 2° ordine (Id. id.) e di avere così fondata la teoria delle curve e superficie polari. Al Bobillier si deve anche un *Cours de Géométrie*, pieno di vedute originali, che ebbe numerosissime edizioni (chi scrive ne ha sott'occhio la XIII del 1865 e non può asserire che sia l'ultima).

640 - G. V. Poncelet nacque a Metz il 1° luglio 1788; benchè, al pari d'Alembert, abbia avuto nascita civilmente irregolare, suo padre ebbe cura della sua educazione, tanto che egli nel 1807 poté essere ammesso alla Scuola Politecnica; uscitone nel 1810 passò alla Scuola d'applicazione del genio di Metz, che nel 1812 gli rilasciò il brevetto di tenente. Destinato quasi subito a raggiungere a Vitebsk la Grande Armata, il 18 novembre dello stesso anno cadde prigioniero dei Russi nelle vicinanze di Smolensk; fu costretto allora a intraprendere un viaggio a piedi per

recarsi alla impostagli residenza, viaggio di 1200 chilometri, durato quattro mesi, avente per mèta la città di Saratov sul Volga. Ivi rimase due anni, durante i quali egli, non disponendo di alcun mezzo di studio, si occupò a ricostruire il corredo delle sue cognizioni matematiche, e poi gettò i fondamenti delle teorie geometriche destinate ad immortalarlo. Ritornato in Francia, approfittando dell'èra di pace che seguì la caduta di Napoleone, potè continuare le intraprese ricerche e nel 1817 iniziò la propria collaborazione delle *Annales* di Gergonne (ivi appunto leggesi la sua osservazione che « una curva d'ordine $n$ è in generale della classe $n(n-1)$ »). Tre anni dopo presentò all'Istituto di Francia una memoria intitolata *Essai sur les Propriétés Projectives des Sections coniques*. Nel Rapporto relativo, scritto da Cauchy a nome anche degli altri due commissari Poisson e Arago, si trovano espressi alcuni dubbi intorno al principio di continuità applicato dall'autore. « Ce principe », vi si legge, « n'est à proprement parler qu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas ou ces mêmes restrictions n'existent plus. Etant appliqué aux courbes du second degré, il a conduit l'auteur à des resultats exacts. Néamoins, nous pensons qu'il ne saurait être admis généralement et appliqué indistictement à toute sorte de questions en Géométrie, ni même en Analyse. En lui accordant trop de confiance, on pourrait tomber quelquefois dans des erreurs manifestes ». Tuttavia i commissari si affrettarono a riconoscere nell'« auteur un esprit familiarisé avec les conceptions de la Géométrie et fécond en ressources dans la recherche des propriétés des courbes, ainsi que dans la solution des problèmes qui s'y rapportent », e dichiararono che non avrebbero esitato a proporre l'accoglimento della memoria in discorso nella collezione dei *Sav. Etr.* ove non avessero saputo che l'autore aveva provveduto già diversamente alla sua pubblicazione. Questo Rapporto fu pubblicato nelle *Ann. de Math.* con note più o meno opportune del Gergonne, le quali probabilmente non furono estranee al malcontento che esso produsse nel Poncelet, e alla decisione da lui presa di non pubblicare in Francia le memorie che seguirono il *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (1822) [1]. Nella stessa epoca le incombenze provenienti dalla divisa che vestiva orientarono il Poncelet verso la meccanica applicata, materia in cui divenne ben presto un'autorità e del cui insegnamento fu incaricato (1825) nella Scuola d'applicazione di Metz. Nel 1834 succedette all'Hachette come membro dell'Istituto e dal 1838 al 1848 insegnò alla Sorbona meccanica fisica e sperimentale. Salito al grado di maggior generale (25 aprile 1848), fu destinato a dirigere la Scuola Politecnica. Continuò ad occuparsi delle applicazioni della meccanica con tanto successo da meritare il nome di « padre della meccanica industriale »; alla geometria ritornò per ristampare, con commenti arguti e talora amari, lavori precedenti; morì a Parigi il 22 dicembre 1867.

641 - Passando dall'autore alle opere, osserveremo che il citato *Traité* si apre con un'*Introduzione* storica ove sono enumerati e carat-

(1) Furono poi ristampate nel II Vol. della II ed. del citato *Traité*.

terizzati gli scritti di geometri precedenti e sono esposti gli argomenti che possono addursi in appoggio del principio di continuità. Poncelet passa poi a stabilire le relazioni che intercedono fra due figure piane di cui una sia la projezione dell'altra; facendo ruotare uno dei piani delle figure considerate attorno alla sua intersezione con l'altro finchè vengano a sovrapporsi, nasce fra le due figure la relazione che l'autore ha chiamata « omologia » e di cui ha considerato il centro e l'asse. Questa importante corrispondenza lo ha condotto a rilevare nuove proprietà delle coniche e a dimostrare che i fuochi di una curva di 2° ordine sono le intersezioni delle tangenti condotte ad essa dai punti ciclici del piano (altro concetto di cui gli va attribuita la paternità). Fra i vari teoremi da lui scoperti citiamo il seguente: « Se i vertici di un poligono semplice di un dato numero di lati percorrono una conica e tutti meno uno dei suoi lati ne toccano un'altra, il lato libero inviluppa una terza conica appartenente al fascio determinato dalle due date, e lo stesso accade per le diagonali ». Quando questa nuova conica coincide con la precedente le due date si trovano in una situazione speciale notevole; resta in tal modo stabilita l'esistenza di poligoni (detti appunto « di Poncelet ») ognuno dei quali è inscritto in una conica e circoscritto ad un'altra: quella situazione è tanto più notevole in quanto che, se due coniche ammettono un poligono di Poncelet, ne ammetteranno infiniti. Nello stesso *Traité* si trova ampiamente svolta e applicata la polarità rispetto a una conica o una quàdrica; ma va notato che a questa importante corrispondenza il Poncelet dedicò una memoria speciale, che intitolò appunto *Théorie Générale des Polaires Réciproques*, presentò all'Accademia di Parigi il 12 aprile 1824 e pubblicò poi nel vol. IV (1829) del *G. di Crelle*; ivi è particolarmente studiato il caso in cui la superficie direttrice è una sfera. Altra trasformazione il cui studio è suo merito è quella (quadratica) che nasce considerando le coppie di punti che sono coniugati rispetto a tutte le coniche di un fascio. In un *Supplément* posto al termine del celebre *Traité*, Poncelet ha esteso allo spazio il concetto di omologia, ottenendo così la corrispondenza da lui chiamata « Perspective-rélief »; inoltre ha dimostrata l'esistenza di quattro coni in un fascio generale di quàdriche.

L'8 marzo 1824 il nostro matematico lesse all'Accademia di Parigi un *Mémoire sur le Centre des Moyennes Harmoniques* (che pubblicò nel T. III, 1828, del *G. di Crelle*) dedicato allo studio e alle applicazioni dei punti che nascono per projezione dai centri delle medie distanze; ivi si incontra per la prima volta il concetto di « involuzione di grado superiore », a cui egli dedicò poi uno speciale articolo (*C. R.*, T. XVI, 1843). Pure alla stessa Accademia egli lesse il 30 settembre 1831 la sua *Analyse des Transversales appliquée à la recherche des propriétés des Lignes et Surfaces géométriques* (G. di Crelle, T. VIII, 1832), ove la teoria delle trasversali, opportunamente combinata alla polarità, guida alla scoperta di nuove proprietà delle curve algebriche, in particolare di quelle del terzo ordine.

Chi aspira a conoscere nella sua interezza il Poncelet, l'uomo e il matematico, il geometra e il polemista, deve ricorrere alle pubblicazioni da lui fatte alla vigilia dell'estremo viaggio (v. *Bibliografia* a questo ca-

pitolo. Infatti, non soltanto nella nuova edizione da lui curata del suo « opus magnum », ma anche nei due volumi intitolati *Applications d'Analyse et de Géométrie* (che a ragione egli dice avrebbero potuto portare come titolo « Mémoires d'outre-tombe »), egli ha fatto conoscere buona parte delle pagine da lui scritte a Saratov, inoltre alcuni lavori che risalgono all'epoca in cui era alunno della Scuola Politecnica o ai primi anni del suo rimpatrio. Fra i primi citiamo lo studio da lui fatto della linea d'ombra sulla vite a filetto triangolare, il quale diede risultati che si trovano tuttora nei più estesi trattati di geometria descrittiva; fra i secondi i documenti che illustrano l'accoglienza ricevuta al loro apparire dalle idee di Poncelet, i quali completano le pagine polemiche inserite nella II ed. del grande *Traité*. Tutti si riferiscono a battaglie in cui Poncelet finì per essere salutato come trionfatore; essi manifestano in lui una sensibilità quasi morbosa, mostrando che egli risentivasi ancora di ferite che dovevano ritenersi da lungo tempo completamente rimarginate, chè nel periodo 1820-1860 la geometria aveva subìto (lo vedremo nel Cap. XLII) una profonda e salutare metamorfosi, specialmente per opera del concetto di trasformazione geometrica, di cui appunto il Poncelet aveva mostrata, su molteplici esempi, la straordinaria potenza del suo immortale *Traité*.

## BIBLIOGRAFIA

R. Simson, *Treatise on conic Sections* (Glasgow, 1735).

R. Simson, *The loci plani of Apollonius restored* (Id. 1749).

R. Simson, *Euclid's Elementi* (Id. 1756; molte edizioni).

R. Simson, *Two general Propositions of Pappers in wich many of Euclid's Parisens are included* (P. T. 1723).

S. Lhuillier, *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata, seu de Maximis et Minimis. Pars Prima, elementaris* (Vratislaviae, 1782).

S. Lhuillier, *Exposition élémentaire des Principes des Calculs superieurs, pour servir de reponse à la demande d'une Théorie claire et précise de l'Infini mahématique* (Berlin, 1786).

S. Lhuillier, *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris* (Tübingen, 1795).

S. Lhuillier, *Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilignes et Abrégé de isopérimétrie élémentaire ou de la dépendance mutuelle des figures* (Genève, 1789).

S. Lhuillier, *Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géométriques* (Paris, 1809).

L. Mascheroni, *La Geometria del Compasso* (Pavia, 1797; nuova edizione, Palermo, 1901).

*Contributi alla Biografia di Lorenzo Mascheroni*. Notizie, documenti e lettere per cura del prof. A. Fiammazzo, con l'aggiunta di tre articoli scientifici dei proff. G. Loria, S. Lussana e dell'ing. E. Fornoni (Bergamo, 1904).

G. Vivanti, *Spigolature mascheroniane* (Contributi alla storia dell'Università di Pavia; Pavia, 1926).

L. Morand, *Généalogie de la famille de Gaspard Monge* (Dijon-Paris, 1904).

J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures. Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain* (II ed., due Volumi, Paris, 1865-66).

J. V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures* (due Vol., Paris, 1862-64).

## CAPITOLO XXXIX

# LA GERMANIA ALLA RISCOSSA

### PARTE PRIMA: TRATTATISTI E COMBINATORI

642 - Se si esaminano nel loro insieme le pagine precedenti, si troverà più di una volta cenno di matematici di lingua tedesca; ma al dedicare ad essi un Capitolo speciale si opposero le difficoltà di determinare senza ambiguità la nazionalità di alcuni; il criterio linguistico non può servire allo scopo nell'epoca in cui il Latino era veicolo generale per la trasmissione del pensiero scientifico e, d'altra parte esso avrebbe portato a togliere alla Svizzera la gloria di avere dati i natali a personalità di primo ordine quali i Bernoulli, Euler, Lambert; nè potevasi con sicurezza ricorrere a considerazioni politiche, data la frequenza con cui vennero mutati i confini della Germania, sia a Oriente che ad Occidente. E per dimostrare quanto spinose sarebbero state le questioni che si sarebbero incontrate basta ricordare la controversia, non ancora definitivamente chiusa, intorno alla nazionalità di Copernico. Tuttavia, se il lettore ha presenti i nomi di Nicolò Cusano, Regiomontano, Peuerbach, Kepler, Tschirnhausen, Leibniz, vedrà che, ove si prescinda affatto dal tempo, è possibile comporre una brillante galleria di matematici tedeschi. Sembra però che durante il sec. XVIII, mentre i cultori di studi letterari correvano ai ripari per porre un argine all'invasione della lingua francese per opera precipua di Federico II, gli scienziati, impressionati e dolenti del fatto che erasi dovuto ricorrere all'estero per stabilire a Berlino un nucleo di studi scientifici, abbiano pensato intanto di provvedere la gioventù studiosa di libri di testo col marchio nazionale: di coloro che si distinsero in quest'opera d'indiscutibile utilità dobbiamo ora tenere parola.

643 - La serie comincia con Cristiano Wolf; nato a Breslau il 24 gennaio 1679, insegnò successivamente a Lipsia (1703-04) e Halle (1707-23), ma fu destituito sotto l'imputazione di ateismo: Federico II, salendo al trono (1740), lo richiamò in servizio, destinandolo ad insegnare matematica nell'Università di Halle; ivi morì addì 9 aprile 1754. Egli è autore di un *Dizionario matematico* che contiene quanto è elencato nel suo lungo titolo, e nel quale va rilevata la parzialità per Leibniz con cui è narrata la storia della scoperta del calcolo infinitesimale. I suoi *Anfangsgründe aller mathem. Wissen.* grazie a numerose edizioni si diffusero largamente in Germania; all'estero conseguirono maggiore notorietà e i suoi *Elementa Matheseos Universae*; i giudiziosi consigli che

l'autore dirige agli studenti di matematica mostrano quanto gli stesse a cuore l'avvenire scientifico della sua patria.

La netta distinzione fra matematica pura e matematica applicata, che cercasi indarno nei trattati wolfiani, comincia delinearsi in un'opera elementare pubblicata circa nel medesimo tempo; ne è autore G. A. Segner; nato a Presburgo (Ungheria) il 9 ottobre 1704, egli insegnò a Gottinga nel biennio 1733-35 e poi a Halle, sino alla morte, avvenuta il 5 ottobre 1779. A mostrare che egli non era un semplice espositore di dottrine già costituite, sta la scoperta degli assi permanenti di rotazione di un corpo; sta inoltre la dimostrazione per la regola dei segni di Descartes, da lui data sotto una prima forma nella sua Dissertazione di laurea (Jena, 1725) e migliorata nelle *Memorie* dell'Accademia di Berlino (1756). Più tardi (N. C. P., T. VII, 1761) ha risolto il problema, proposto da Euler nel 1751, che consiste nel determinare il numero dei modi in cui un poligono semplice si può decomporre in triangoli mediante le diagonali. Finalmente col suo *Specimen logicae universaliter demonstratae* (Jena, 1740) si è assicurato un posto distinto fra i creatori della logica matematica concepita da Leibniz.

A succedere al Segner nella Cattedra di Gottinga fu scelto A. G. Kästner. Questi nacque a Lipsia il 27 settembre 1719; dal padre — divenuto poi professore di giurisprudenza in quell'Università — venne avviato verso la carriera legale e nel 1733 conseguì il titolo di notaio; ma continuò egualmente a coltivare studi di varia specie, dimostrando una spiccata attitudine per le lingue (era in grado di esprimersi correntemente in italiano, francese, spagnuolo, inglese, olandese e svedese); prestò anche una preziosa collaborazione agli A. E. A Gottinga fu chiamato il 21 maggio 1755 come professore di matematica, ed entrò in carica al principio dell'anno seguente; questa occupò sino alla morte, verificatasi il 20 giugno 1800. Con la nomina a professore universitario si può dire che il treno della sua vita siasi posto nel binario che non doveva più abbandonare. Scrittore fecondissimo, ma mediocre matematico, salì ad una fama indubbiamente esagerata; però esercitò un'influenza benefica grazie ad ottimi *Anfangsgründe* relativi alle varie branche della matematica pura ed applicata, tanto che fu proclamato « maestro di matematica dell'intera Germania »; di essi non è difficile riconoscere la superiorità sopra le opere congeneri del tempo, se non altro perchè comincia ivi ad affiorare il sentimento del rigore nei ragionamenti analitici.

Della sua vasta coltura e del sano spirito critico egli diede prova nelle numerose recensioni da lui inserite nelle *Göttinger gelehrte Anzeigen* e nelle notizie storiche intercalate nei suoi libri di testo. Bibliofilo illuminato adunò, fra l'altro, una ricchissima raccolta di scritti concernenti la teoria delle parallele, fra cui figurano le opere di Vitale Giordano e Girolamo Saccheri; egli la pose a disposizione di un suo discepolo, divenuto poi ben noto per un *Dizionario matematico*, G. S. Klügel (n. ad Amburgo il 19 agosto 1739, m. professore universitario a Halle il 4 agosto 1812); giovandosene, egli potè scrivere (1763) la dissertazione di laurea intitolata *Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio*, grazie a cui i tedeschi appresero l'esistenza e il contenuto dei più rari fra quegli scritti.

644 - Va qui notato che, poco dopo il Kästner, occupò una cattedra di matematica a Gottinga B. F. Thibaut (n. a Harburg il 22 dicembre 1775, m. a Gottinga il 4 novembre 1832); egli viene ricordato come professore di inusitata eloquenza e che per fare sfoggio delle sue doti oratorie nelle sue lezioni evitava tutti quegli sviluppi matematici che non consentono un'esposizione brillante. Come scrittore si citano di lui due mediocri trattati elementari; ma gli si deve anche una memoria intitolata *De Integratione Formulae differentialis* $(1 + n \cos \varphi)^r d\varphi$, che, essendo stata erroneamente attribuita a Gauss, vide la luce nella collezione delle opere di questo grande (v. Vol. VII, p. 36 e X, p. 137).

Una fisonomia analoga al Kästner ha V. G. G. Karsten; egli nacque a Neu-Brandeburg il 15 dicembre 1732; insegnò successivamente nelle Università di Rostock, Bützow e Halle, città nella quale si spense il 17 aprile 1787. La notorietà di cui egli gode riposa sopra parecchi volumi a scopo pedagogico, il più esteso dei quali non perdette il favore del pubblico nemmeno con la morte dell'autore.

Fra i molti discepoli che egli ebbe, emerge G. F. Pfaff, nato a Stuttgart il 22 dicembre 1765, a soli ventitrè anni fu chiamato a insegnare nell'Università di Helmstädt e vi rimase sino al 1810, quando essa fu soppressa; passò allora in quella di Halle, ove professò con plauso generale sino alla morte, avvenuta il 20 aprile 1825. Il Pfaff coltivò con successo l'analisi da lui appresa nelle opere di Euler, Lagrange e Monge, facendo compiere ad essa notevoli progressi; così perfezionò quanto Euler aveva scritto (N. C. P., T. IX, 1764) intorno alle serie i cui termini sono funzioni trigonometriche e insegnò (*Mem. Acc. Berlino*, 1814-15) un metodo per ridurre l'integrazione di un sistema di $2n$ equazioni a derivate parziali di 1° ordine con altrettante variabili all'analogo con sole $n$, metodo il quale rimase nella scienza col suo nome; nel corso di tali ricerche egli incontrò e studiò la funzione che nasce estraendo la radice quadrata da un determinante simmetrico gobbo d'ordine pari, la quale è in suo onore chiamata oggi « pfaffiano ».

645 - Il Pfaff non fu estraneo alla « scuola dei combinatori » il cui duce fu C. F. Hindeburg. Questi nacque a Dresda il 13 luglio 1741; dal 1781 insegnò filosofia e fisica nell'Università di Lipsia, città in cui morì il 17 marzo 1808. È suo non piccolo merito l'avere introdotto in Germania il giornalismo matematico, fondando e dirigendo in unione ad altri scienziati, successivamente i seguenti periodici: *Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Oekonomie* (5 vol., 1781-85); *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (4 fasc., 1786-1788); *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* (11 fasc., 1795-800).

Per fissare il posto che gli compete nella storia delle matematiche è necessario tenere presente che egli distinse due classi di polinomi (anche se hanno infiniti termini): gli uni sono del tipo $a + b + c + \dots$, gli altri della forma $a + bx + cx^2 + \dots$; il problema dell'elevazione a potenza dei primi ha evidentemente aspetto ben diverso dall'analogo per i secondi; di entrambi si occuparono Leibniz, Giovanni Bernoulli, de Moivre ed altri; ma i loro risultati, raggiunti per induzione, mancavano di solide dimostrazioni ed appunto di colmare tale lacuna si è

proposto l'Hindeburg nei suoi primi lavori. Incoraggiato dal successo ottenuto, egli esagerò l'importanza di quelle questioni, facendo consistere nella loro risoluzione il còmpito dell'analisi matematica: e in questo unilaterale concetto non tardò a trovare numerosi seguaci. Fra essi vanno particolarmente ricordati G. C. G. Eschenbach (n. a Lipsia il 30 marzo 1764, m. a Madras il 7 marzo 1797) e E. A. Rothe (n. a Dresda il 3 settembre 1773, dal 1804 professore a Erlangen, m. ivi nel 1842): i risultati ottenuti da questo furono completati dal Pfaff, il quale ne accrebbe il valore dimostrandone il legame con la serie di Lagrange. Il favore con cui vennero allora accolti siffatti studi fu tale che per qualche tempo le cattedre di matematica nelle Università tedesche furono il monopolio dei seguaci dell'Hindeburg; ma fu un fenomeno di breve durata; chè ben presto si riconobbe che molte delle formole stabilite dai combinatori avevano un valore soltanto formale (ciò riuscì evidente quando essi s'illusero di avere scoperte formole risolutrici delle equazioni letterali di tutti i gradi); a dissipare tale illusione contribuirono potentemente i lavori del sommo a cui ora ci volgiamo [1].

---

PARTE SECONDA: **C. F. GAUSS**

## Biografia

646 - Giovanni Carlo Federico Gauss nacque a Braunschweig da modestissima famiglia, il 30 aprile 1777; sino dalla più tenera età diede prova di intelligenza vivacissima, distinguendosi particolarmente nel calcolo numerico. Durante i primi anni di scuola ebbe la fortuna di legarsi a un condiscepolo più anziano (G. M. C. Bartels, n. a Braunschweig il 12 agosto 1769, dal 1808 professore all'Università di Kasan e, dal 1821 in quella di Dorpat, città in cui morì il 7-19 dicembre 1836; questi, entusiasmatosi per le doti intellettuali del giovane Gauss, ne parlò con ammirazione ai suoi conoscenti; fu così attratta su di lui l'attenzione di Carlo Guglielmo Federico, duca dell'Hannover, il quale, proteggendolo e sovvenendolo, gli rese possibile di proseguire i propri studi e poi di pubblicare i suoi primi lavori. Esaurito il corso secondario (durante cui aveva iniziate ricerche sulla distribuzione dei numeri primi) l'11 ottobre 1795 partì per Gottinga, ancora tentennante fra il dedicarsi alla matematica o alla filologia. Non furono le lezioni del Kästner (da cui non trasse alcun vantaggio) che lo fecero decidere per la prima; piuttosto lo studio delle opere di Euler e Lagrange che destò in lui una tal folla di idee proprie che (fu egli stesso a dichiararlo) non riusciva a prendere nota di tutte; un condiscepolo che ci occuperà più avanti (n. 718), Wolfango Bolyai, assistette estatico alla mirabile fioritura. Appunto nel 1795 con-

---

[1] Una critica della scuola di combinatori fu scritta nel 1850 da L. OETTINGER (1797-1869) (v. il T. XV dell'*Archiv. f. Math. u. Phys.*); ma in quel tempo si trattava ormai di sfondare una porta aperta; ciò non ostante la citata memoria conserva intatto il proprio valore.

cepì il « metodo dei minimi quadrati », che, non essendo stato pubblicato da lui che nel 1809, diede luogo a sospetti e a penose discussioni di priorità con Legendre, che lo espose e denominò tre anni prima (*Nouv. Méthode pour déterminer l'Orbe des Comètes*, 1806). Compiuto, col semestre estivo 1798, il corso universitario, egli ritornò nella casa paterna, occupandosi di presentare sotto forma definitiva le sue ricerche aritmetiche; essendosi poco dopo recato a Helmstädt per qualche ricerca bibliografica, venne a contatto col Pfaff, il quale, avendone misurato tutto il valore, gli fece conferire (1799) la laurea dottorale « in absentia » con la presentazione di una memoria, di cui diremo poi (n. 651), sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.

647 - Grazie al concorso finanziario del duca di Hannover (a cui l'opera è dedicata) nell'aprile 1798 cominciò la stampa delle sue *Disquisitiones Aritmeticae*, che uscirono nell'estate 1801 (notisi essere di poco anteriore l'*Essai sur la Théorie des Nombres* di Legendre); esse però non contengono la totalità delle scoperte già fatte in quel campo da Gauss, forse per non ingrossare eccessivamente quel volume, ma più probabilmente perchè le ultime non avevano peranco conseguita una piena maturità. Era da credersi che il successo ottenuto subito da questa grande opera (il quale è documentato dall'elezione di Gauss a corrispondente dell'Accademia di Pietroburgo) inducesse l'autore a continuare a occuparsi di un campo di cui egli aveva dimostrata la straordinaria fecondità. Se non che accadde che l'astronomo Giuseppe Piazzi (1746-1826) addì 1° gennaio 1801 scoprì a Palermo un nuovo pianeta, da lui denominato Cerere Ferdinandea in onore del re di Napoli; segnalandolo ai Colleghi, li eccitò a determinarne la trajettoria. Gauss non rimase sordo a tale invito e, escogitando nuovi procedimenti di calcolo, potè risolvere pienamente la questione; di essi poco dopo confermò l'eccellenza occupandosi di Pallade e li rese di pubblica ragione nel 1809 con l'opera *Theoria Motus Corporum coelestium in Sectionibus conicis Solem ambientium*, a cui nel 1810 l'Accademia di Parigi conferì il premio Lalande. Gli è da questo periodo dell'esistenza di Gauss che ha origine il vasto suo carteggio con gli astronomi del tempo, il quale, grazie alla sua non comune importanza, fu in gran parte dato alle stampe; i suoi corrispondenti (fra questi va ricordato F. W. Bessel, n. a Minden il 22 luglio 1784, m. a Königsberg il 17 marzo 1846, per i suoi contributi dati all'analisi e che furono generalmente riconosciuti quando fu dato il suo nome a un'importante classe di funzioni), divenuti ben presto amici ed ammiratori, lo distolsero dall'accettare l'invito di recarsi a Pietroburgo in qualità di direttore di quell'Osservatorio astronomico, e lo fecero nominare nel 1807 professore di astronomia all'Università di Gottinga e direttore dell'istituendo osservatorio astronomico: così ebbe principio quel periodo fecondo durante il quale egli potè dedicarsi completamente agli studi sotto la protezione di un principe illuminato. Nella sua nuova sede egli proseguì le ricerche astronomiche sin verso il 1817; negli anni 1821-25 partecipò a vasti lavori geodetici [1], con un'intensità lamentata da coloro che avreb-

[1] Per dare un'idea della loro importanza citiamo il calcolo degli elementi del triangolo avente per vertici Brocken, Hoher-Hagen, Inselberg, i cui angoli diedero una

bero preferito che egli dedicasse il suo genio a portare a termine le ricerche di matematica pura che giacevano in abbozzo fra le sue carte, conformemente alla norma da lui espressa con le parole « pauca sed matura »: e certamente la geometria e l'analisi avrebbero così visto accelerato il loro cammino in avanti. Esauriti quei lavori, Gauss ritornò ad occuparsi di pura teoria, sinchè, con l'andata a Gottinga di Guglielmo Weber (1831), egli non fu portato a occuparsi del magnetismo terrestre, argomento a cui si consacrò con ottimi frutti durante il decennio 1831-41.

648 - Però alle indagini che prime gli diedero rinomanza egli ritornava sempre con piacere, opinando che « la matematica è la regina delle scienze, l'aritmetica è la regina delle matematiche ». Ispirandosi agli esempi dati da Archimede e Newton egli non licenziava che lavori di forma perfetta, adottando metodi di esposizione differenti da quelli che lo avevano condotto alle più significanti scoperte. I doveri d'insegnante adempiva senza alcun entusiasmo e sempre dinnanzi a un uditorio ristretto, ritenendo che l'insegnamento assorbisse un tempo che egli poteva dedicare meglio a vantaggio della scienza. Conservò sino al termine della sua vita una invidiabile freschezza ed energia di mente e si spense il 23 febbraio 1855, oggetto da parte dei conterranei di una venerazione che non si attenuò col tempo, come attesta l'amorosa cura con cui viene ancora raccolto, conservato, pubblicato e commentato quanto uscì dalla sua penna. Fra i numerosi documenti scoperti fra le carte da lui relitte limitiamoci a segnalare un *Diario* che va dal 1796 al 1814 (1), ove sono, sia pure rapidamente, registrate, con le relative date, le più importanti delle scoperte da lui fatte in quel periodo.

La vita regolare e tranquilla di Gauss presenta un episodio che va qui registrato. A partire dal 1806 egli cominciò a ricevere da Parigi delle lettere firmate le Blanc, contenenti osservazioni e sviluppi ispirati dalle *Disq. Arith.*, ma esse in realtà provenivano da una signorina francese, Sofia Germain (n. a Parigi il 1° aprile 1776, m. ivi il 27 giugno 1831). Il segreto fu svelato quando essa scrisse al generale Pernetty, capo delle truppe francesi che assediavano Braunschweig, per raccomandargli caldamente di rispettare la persona e gli averi del grande matematico. Quel carteggio (2) durò poco tempo, presumibilmente perchè, mentre Gauss aveva sin d'allora lasciato l'aritmetica per l'astronomia, S. Germain si era volta allo studio delle superficie elastiche in seguito a un concorso bandito dall'Accademia di Parigi; però una dimostrazione da essa data per l'impossibilità in molti casi dell'equazione $x^n + y^n = z^n$ (*Mém. de l'Acad. de Paris*, 1823) prova che non abbandonò del tutto la scienza dei numeri.

---

somma assai prossima a 180°. Sembra che a torto siasi da alcuni ritenuto che GAUSS avesse eseguito questo calcolo per verificare l'esattezza della teoria euclidea delle parallele.

(1) Esso è riprodotto, anche in fac-simile, nel T. X delle *Opere* di GAUSS.

(2) La più importante delle lettere di Gauss a S. Germain leggesi a pag. 70 della I Parte del T. X di *Gauss' Werke* (Leipzig, 1917); per le altre vedi il volume di H. STUPUY citato nella *Bibliografia* relativa al presente Capitolo.

## Lavori aritmetici

649 - Nella rapida rassegna che ora imprendiamo dei lavori di Gauss, escluderemo quanto non è di pertinenza della matematica pura e ordineremo il resto considerando la materia trattata, non il momento di pubblicazione, cominciando da quelli che per primi lo fecero conoscere nel mondo scientifico.

Delle sette Sezioni di cui constano le *Disq. Arith.* le quattro prime abbracciano gli elementi di quella parte della teoria dei numeri detta oggi « aritmetica moltiplicativa » perchè ha quale suo fondamento la scomposizione di un numero nei suoi fattori primi: per scriverle Gauss trovò importanti materiali negli scritti dei suoi predecessori, ma molto vi aggiunse del suo. Appartiene a lui la metodica introduzione del concetto di « numeri congrui » rispetto a un dato modulo e la relativa notazione $a \equiv b \pmod{m}$, con la quale egli volle esprimere che la differenza $a - b$ è un multiplo di $m$; quel concetto ha permesso di riunire in una medesima classe infiniti numeri dotati di analoghe proprietà e di introdurre nella scienza accanto alle equazioni ad una o più incognite analoghe congruenze. Fra le proposizioni da lui stabilite merita di venire citata la seguente, grazie alle innumerevoli e importanti conseguenze che ha date: « se un polinomio in $x$ con coefficienti interi si decompone in due altri analoghi, questi sono pure a coefficienti interi ». Superfluo rilevare che nelle *D. A.* si leggono i noti teoremi di Fermat e Wilson, con dimostrazioni originali; va anche rilevato che ivi appare in piena luce la funzione $\varphi(n)$, già considerata da Euler (p. 698), che indica il numero dei numeri primi inferiori a $n$ e primi con esso: è da questo momento che essa funge da costante strumento nelle ricerche aritmetiche. Più lungo discorso meriterebbe la IV Sez. dedicata ai resti quadratici, chè per la novità ed importanza di quanto contiene costituisce uno dei più solidi titoli di gloria per Gauss; a stabilirne il valore basti ricordare quello che l'autore chiama « teorema fondamentale » e che oggi chiamasi « legge di reciprocità » — nel 1885 se ne conoscevano non meno di 25 dimostrazioni [1] —. Per scrivere le Sez. V e VI (che trattano delle forme quadratiche) Gauss utilizzò i lavori di Fermat, Euler, Lagrange e Legendre, ma, al pari dell'orafo che fonde parecchi nobili metalli per trarne un prezioso monile, li coordinò sapientemente e così ne trasse una teoria di cui egli può ben dirsi creatore. A lui appartiene la metodica considerazione del discriminante (da lui chiamato « determinante ») di una forma binaria quadratica, a lui l'uso sistematico delle trasformazioni lineari e il conseguente concetto di equivalenza di due forme quadratiche, a lui l'estensione di siffatte considerazioni alle forme con un numero maggiore di variabili. Appoggiandosi a tali nozioni Gauss ha date dimostrazioni originali di teoremi già noti e altri ne scoperse, di più ha insegnati nuovi metodi per risolvere questioni importanti, quale la scomposizione di un numero nei suoi fattori primi.

L'ultima Sez. delle *D. A.* si riferisce a un argomento di sommo e generale interesse, cioè la risoluzione delle equazioni binomie o, se si

(1) Vedi un articolo storico di O. Baumgart nel T. XXX della *Zeit. f. Math. u. Phys.*

preferisce, la divisione di una circonferenza in parti uguali. È noto che Euclide insegnò a costruire tutti i poligoni regolari il cui numero di lati è espresso in una delle seguenti forme: $2^n$, $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 5$, $2^n \cdot 15$. Gauss mostrò che essa è possibile anche per tutti quelli di un numero di lati espresso da un numero primo della forma $2^{2^n} + 1$, in particolare per quello di 17 lati. È questa una scoperta che risale al 30 marzo 1796 e che Gauss fece conoscere in una lettera del seguente 18 aprile, la quale fu inserita nell'*Intelligenzblatt der allg. Literarurzeitung* del 1° luglio seguente. Se i poligoni di detta specie siano infiniti (oltre quelli di 257 e 65537 lati) è questione ancora « sub judice »; ma l'importanza del complemento dato, dopo due millenni di arresto alla geometria di Euclide è tale che W. Bolyai, quando ne ebbe notizia, non esitò a dirla degna di venire scolpita a titolo di gloria sulla tomba di Gauss; apprezzamento tanto più conforme a verità quando si tenga presente che Gauss non tardò ad estenderne la portata alla lemniscata bernoulliana.

650 - Benchè, come dicemmo, Gauss non abbia proseguito subito nei suoi studi aritmetici, pure ad essi ritornò più volte, ottenendo sempre risultati degni di lui; fra l'altro non perdè mai di vista la teoria dei resti quadratici (basti dire che della legge di reciprocità diede in totale non meno di otto dimostrazioni) e la estese, creando l'analoga teoria dei resti biquadratici alla quale dedicò (1828, 1832) due fondamentali memorie. Gli è nella seconda (e più chiaramente nel riassunto datone nelle *Gött. gel. Anz.* del 1831) che, introducendo la considerazione dei « numeri complessi interi », egli fece noto il suo modo di vedere intorno ai numeri complessi in generale e, con l'esporne la consueta rappresentazione geometrica, la diffuse e la fece accogliere dagli scienziati di tutta Europa. A questo tema egli dedicò una sola pagina (impegnandosi di ritornare poi sull'argomento, il che non ha poi fatto) [1], scritta però con tale luminosa concisione che quanto fu detto poi sull'argomento può dirsi un semplice commento delle parole di Gauss. Rileviamo ivi i termini « numero complesso » e « unità immaginaria » destinati a prendere posto stabile nella scienza; quanto alla lettera $i$ per $\sqrt{-1}$, fu usata prima incidentalmente da Euler, ma è debitrice del suo uso generale al nostro matematico, che se ne servì sino dal 1801. Riguardo alla via che lo condusse all'usare francamente di enti aritmetici dianzi sospetti, non esistono sue esaurienti dichiarazioni al riguardo [2]; però una lettera a Bessel (1784-1846) del 18 dicembre 1811 [3] e una all'altro astronomo Hansen (1795-1874) dell'11 dicembre 1825 provano che essi furono oggetto di costanti sue meditazioni. Con l'andare del tempo egli

---

(1) Qualche ulteriore notizia sull'argomento si potrebbe trarre dal riassunto inedito di un corso di lezioni sopra i numeri immaginari tenuto da Gauss nei primi mesi del 1840 scritto da E. Heine (v. n. 747) ed esistente a Gottinga.

(2) Gauss non cita alcun lavoro anteriore sopra detta teoria; gli è rimasto ignoto anche (v. n. 619) quanto fu scritto nelle *Annales* di Gergonne a proposito dell'opuscolo dell'Argand? O il suo silenzio equivale a un'affermazione d'indipendenza? Altri risponda.

(3) Questa possiede un'importanza straordinaria giacchè mostra che Gauss molto prima di Cauchy aveva considerati gli integrali della forma $\int \varphi(x)\, dx$ per $x$ complesso e aveva determinate le condizioni per la loro indipendenza dal cammino d'integrazione: vedi un articolo di R. Baltzer nel T. XCIV (1883) del *Journ. f. r. und a. Mathematik*.

sempre più si convinse della loro legittimità e intuì (se non dimostrò) che i numeri reali e complessi sono gli unici concepibili enti aritmetici che conservano alla scienza del numero la consueta fisonomia, cioè lasciano alle relative operazioni le consuete leggi formali.

Nelle sue ricerche di aritmetica Gauss trasse profitto anche di considerazioni molto elevate, in particolare introducendo e mostrando l'uso di nuove funzioni. Limitiamoci a citare la cosidetta « serie di Gauss » $\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)q^{i^2}$; aggiungiamo che per $n$ dispari egli, in un primo tempo, giunse a calcolarne la somma a meno del segno; ma questo riuscì a determinare in seguito a reiterati sforzi, dopo di avere trasformata quella somma in un prodotto. In dette ricerche gli giovò grandemente la sua straordinaria perizia nel calcolo numerico, la quale si manifestò con tanta precocità che egli poteva dire di avere imparato prima a contare che a parlare; essa gli permise di constatare sperimentalmente la verità di proposizioni che soltanto dopo gli riuscì di dimostrare in generale (esempio: la legge di reciprocità dei resti quadratici). Da notarsi che malgrado la facilità di eseguire operazioni aritmetiche complicate [1], egli si mostrò anche fecondissimo nell'immaginare geniali espedienti per abbreviarle. Detta prerogativa gli riuscì pure utilissima nelle calcolazioni in grande stile da lui eseguite occupandosi di ricerche astronomiche e geodetiche, nonchè nei suoi classici lavori (1821, 1823, 1826) sulla combinazione dei risultati delle osservazioni. Citiamo finalmente la *Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind,* pubblicata nel T. XXVI, 1812, della *Monath. Correspond.* del barone von Zach (1754-1832), grazie a cui il suo nome viene spesso dato ai logaritmi di addizione e sottrazione.

## Lavori algebrici

651 - I principali contributi dati da Gauss all'algebra traggono origine dal desiderio di assicurare alla teoria delle equazioni un fondamento pienamente soddisfacente. Infatti la prima sua pubblicazione concernente quella materia è la sua *Dissertazione di laurea,* la quale porta un lungo titolo che riferiamo per intero perchè esso indica chiaramente l'intenzione dell'autore di evitare ogni contatto con i numeri immaginari: *Demonstratio nova Theorematis omnem Functionem algebraicam rationalem integram unius Variabilis in Factores reales primi vel secundi Gradus resolvi posse.* Per conseguire lo scopo l'autore considera due polinomi $T$, $U$ interi in $r$ sen $\varphi$ e $r\cos\varphi$, i cui primi membri altro non sono che la parte reale e il coefficiente di $i$ nella espressione che nasce dall'equazione data $f(x) = 0$ ponendo $x = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$, e dimostra che in ogni punto nel quale sia $T = 0$, $U = 0$ è pure $f(x) = 0$; ora che un tale punto esista viene provato rigorosamente da Gauss, il quale in conseguenza raggiunge lo scopo a cui mirava. Questo ragiona-

[1] È certamente alla sorprendente rapidità con cui operava che devono imputarsi alcuni errori da lui commessi e che i posteri non poterono non rilevare.

mento, quantunque presentato dall'autore sotto forma geometrica, è suscettibile di essere esposto sotto forma prettamente algebrica, onde può soddisfare le esigenze del più austero analista. Ritornandovi sopra in occasione del suo giubileo (*Abh. der Ges. der Wiss. zu Göttingen*, T. IV, 1850) estese la portata di quel teorema alle equazioni algebriche a coefficienti complessi, osservando, per calmare le apprensioni di coloro che agli immaginari facevano ancora il viso dell'armi, che « in fondo il contenuto effettivo di tutta l'argomentazione appartiene ad un campo più elevato, indipendente dalle figure dello spazio, ad una teoria astratta delle grandezze, gli oggetti della quale sono gli aggruppamenti di qualità succedentisi con continuità ». A una dimostrazione puramente algebrica della stessa proposizione Gauss era pervenuto prima (*Comm. rec. Gott.*, T. III, 1816) meditando sopra i ragionamenti proposti allo stesso scopo da Euler, de Foncenex, Lagrange e Laplace, da lui acutamente criticati nell'esordio della sua *Dissertazione inaugurale;* per renderli perfetti egli estese a due polinomi il noto procedimento euclideo per trovare il M. C. D. di due numeri e perfezionò la teoria delle funzioni simmetriche; l'argomentazione risultante è troppo lunga per venire qui riferita; ma va notato che, dopo qualche ritocco che non la snaturò, raggiunse poi quella semplicità che le concesse l'ingresso in trattati scolastici. Lo stesso volume dei *Comm. rec.* contiene una quarta dimostrazione dello stesso teorema, notevole non soltanto per la sua brevità, ma anche perchè offre una geniale applicazione dell'analisi a una questione elementare; essa, infatti, poggia sopra la considerazione dell'integrale $\int_0^R dr \int_0^{2\pi} y\, d\varphi$, ove $y$ è la parte reale dell'espressione $x \dfrac{d \log X}{dx}$, essendo $X = 0$ l'equazione algebrica considerata; ora esso assume valori differenti secondo l'ordine in cui si effettuano le due integrazioni; ciò prova che la quantità integranda diviene infinita nel campo d'integrazione e poichè essa ha per denominatore la norma di $X$, così si è autorizzati a concludere secondo l'enunciato.

Di due altri perfezionamenti l'algebra è debitrice a Gauss: cioè di una dimostrazione della regola dei segni di Descartes (*G. di Crelle*, T. III, 1828) e di estese e fruttifere ricerche sopra la risoluzione numerica delle equazioni trinomie (v. la seconda parte della succitata pubblicazione giubilare).

## Lavori analitici

652 - Profondi ed importanti sono gli studi compiuti da Gauss sopra varie specie di funzioni; iniziati nel 1791 con alcuni calcoli concernenti la media aritmetico-geometrica, essi si protrassero, sia pure con lunghe lacune, durante mezzo secolo e condussero a notevoli risultati sopra le funzioni lemniscatiche e le più generali ellittiche; se non che, essendo rimasti a lungo sepolti nella scrivania dell'illustre scienziato, se ne ebbe notizia solo quando a quei risultati si era giunti da altri e per altre vie. Vide invece la luce almeno la I Parte delle sue indagini sopra un'altra vasta categoria di funzioni; il relativo lavoro fu presentato alla Società di Gottinga nel novembre 1811 col titolo *Disquisitiones Gene-*

*rales circa Seriem Infinitam*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \dots$$

La funzione così definita si indica, appunto a partire da Gauss, col simbolo $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ e comprende, come casi speciali, non meno di 23 funzioni già note, fra cui $(1 + x)^m$, $\log(1 + x)$, $\log \frac{1 + x}{1 - x}$, ecc. nonchè i coefficienti dello sviluppo di $(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^n$.

Egli ha scoperto le relazioni (lineari) che intercedono fra:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \ F(\alpha + \lambda, \beta + \mu, \gamma + \nu, x)$$

e

$$F(\alpha + \lambda', \beta + \mu', \gamma + \nu', x)$$

ove le costanti $\lambda, \mu, \dots, \nu'$ hanno i valori 0 e $\pm$ 1. Inoltre ha svolto in frazione continua i quozienti di:

$$F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)$$

per

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \ F(\alpha, \beta + 1, \gamma, x)$$

e

$$F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, x);$$

istituendo poi profonde ricerche sulla convergenza di quella serie, anche per $x$ complesso, diede i primi modelli di ricerche che, per la loro importanza, occuparono a lungo gli analisti posteriori. Seguono speciali considerazioni relative al caso $x = 1$; Gauss dimostra essere

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \pi(\gamma - 1) \cdot \pi(\gamma - \alpha - \beta - 1) / \pi(\gamma - \alpha - 1) \cdot \pi(\gamma - \beta - 1),$$

ove con $\pi(z)$ viene indicata la funzione $z!$, che Gauss propose di introdurre metodicamente nell'analisi per tutti i valori di $z$. La funzione $F$ interviene anche nell'integrazione di speciali equazioni differenziali di 2° ordine; ciò diede luogo a nuove ricerche da parte di Gauss, che però videro la luce soltanto dopo la sua morte.

Alla citata memoria si connette un'altra presentata alla Società di Gottinga il 16 settembre 1814 col titolo *Methodus Nova Integralium Valores per Approximationem inveniendi*; ivi è esposto e applicato un metodo d'interpolazione più raffinato di quello inventato da Newton e perfezionato da Côtes; come esempio l'autore calcola il valore di $\int \frac{dx}{\log x}$ fra i limiti 100000 e 200000, dando una nuova prova della sua straordinaria abilità nei calcoli numerici.

Anche del calcolo delle variazioni Gauss si è occupato, sia pure incidentalmente, studiando problemi di geometria e di fisica matematica; della sua famigliarità con le relative procedure porgono conferme alcuni frammenti postumi sopra la curva elastica e sul solido di massima attrazione. Quest'ultimo studio fa certamente parte dei lavori del sommo matematico sopra la teoria del potenziale, a cui nel 1839 dedicò una me-

moria riguardata ancor oggi per classica. L'esperto analista si ritrova eziandio nella memoria (di cui pure non possiamo fare che un semplice cenno) presentata nel 1828 alla Società di Gottinga col titolo *Principia Generalia Theoriae Figurae Fluidorum in Statu aequilibri.*

## Principi della geometria

653 - Vi è un altro campo in cui Gauss avrebbe potuto passare alla storia come risolutore di un fondamentale problema attorno a cui i pensatori si affaticavano da non meno di duemila anni, mentre ne lasciò la gloria ad altri: è la teoria delle parallele, su cui matematici e filosofi avevano richiamata l'attenzione degli studiosi sul finire del sec. XVIII. Dal suo *Diario* (v. p. 818) risulta che egli se ne occupò con frutto sino da giovane, chè ivi, in data settembre 1799, si leggono le seguenti parole: « in principiis geometriae egregios progressus fecimus ». Sino da allora egli riconobbe che a quella teoria poteva darsi una base sicura ammettendo l'esistenza di un triangolo la cui area fosse maggiore di qualunque grandezza assegnata; da cenni da lui fatti in recensioni risulta poi che sino dal 1817 egli aveva stabilite le formole fondamentali della trigonometria non-euclidea; ma, essendo sensibilissimo alla critica, per non esporsi al « Geschrei der Boeoter », non pubblicò nulla sull'argomento. Quando poi videro la luce gli scritti sull'argomento di G. Bolyai e Lobacevskij (cfr. nn. 718-720), egli accordò la propria approvazione ai concetti ivi esposti e, riconoscendoli concordanti con le proprie vedute, si ritenne definitivamente esonerato da pubblicazioni sull'argomento.

La teoria delle parallele non è l'unica questione di geometria elementare a cui Gauss abbia rivolta la propria attenzione; infatti egli si è occupato pure del modo di definire il piano o l'area di un poligono, anche a perimetro intrecciato, e del modo di fare distinzione fra destrorso e sinistrorso; finalmente ha, se non altro, posta la questione se per determinare l'espressione del volume di un tetraedro fosse indispensabile ricorrere a considerazioni infinitesimali. Anche sulle questioni di forma Gauss ha meditato a lungo e non senza frutti, attribuendo grande importanza alla disciplina da lui detta « Geometria situs », di cui aveva trovato qualche cenno in Leibniz e qualche applicazione in Euler e Vandermonde; ma nulla egli lasciò scritto sull'argomento che permetta d'indovinare la direzione e l'ampiezza delle sue ricerche e di accertare quanto alla sua influenza debbano coloro (Möbius, Listing, Riemann) che per primi diedero corpo ai vaghi accenni fatti da quel grande silenzioso.

654 - A queste indagini che — per usare una terminologia preferita da Gauss — possono dirsi di spettanza della « metafisica della geometria », fanno riscontro alcuni risultati speciali che sembrano stati ottenuti da lui servendosi della rappresentazione geometrica dei numeri complessi, ma che egli ha esposti sotto forma euclidea o si è limitato ad enunciare. Parecchi furono inseriti dall'astronomo Schumacher (1780-1850) nella sua versione tedesca della *Géométrie de position* di Carnot, altri si leggono nel suo carteggio ed altri infine vennero scoperti fra le sue carte. Appartiene a lui la consueta dimostrazione del fatto che le

tre altezze di un triangolo concorrono in un punto. Da poco è invece nota una dimostrazione del teorema di Pitagora che merita di essere qui riferita: Sia (Fig. 74) il triangolo considerato $ABC$ rettangolo in $A$. Si chiamino $D$, $F$ le intersezioni del cateto $AB$ con la circonferenza avente il centro in $B$ e il raggio eguale all'ipotenusa $BC$. Risultando isosceli i triangoli $CBD$, $CBF$ sarà ang. $BDC$ = ang. $BCD$ . ang. $BCF$ = = ang. $BFC$. Siccome poi ang. $BDC$ + ang. $DCB$ + ang. $BCF$ + + ang. $BFC$ = 180° e ang. $DCB$ + ang. $BCF$ = 90°, sarà ang. $BDC$ = 90° — ang. $BFC$ = ang. $ACF$ . Emerge da ciò che i triangoli $ACD$ , $ACF$ sono simili e che si ha $AC:AD = AF:AC$, ossia $AC:BC - AB = BC + AB:AC$, ossia $AC^2 = BC^2 - AB^2$ c. d. d.

Si devono a Gauss alcune formole eleganti per determinare le coordinate dei punti notevoli di un triangolo e la prima determinazione dell'ellisse massima fra quelle inscritte in un dato quadrilatero (nel cercarla Gauss ha scoperto essere una retta il luogo dei centri di dette ellissi). In un corso di lezioni da noi già citato (v. p. 820) egli fece vedere che, se $u$, $v$, $w$ sono i numeri complessi che rappresentano le proiezioni degli estremi di tre segmenti unitari uscenti dall'origine e appartenenti agli assi di un sistema cartesiano ortogonale, sussiste la relazione $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. I numeri complessi intervengono pure in una figura trovata fra le sue carte e a cui egli diede il nome « pentagramma mirificum » per segnalarne l'importanza in trigonometria sferica. Le sue ricerche geodetiche lo condussero a occuparsi del problema (detto di Pothénot; v. p. 336) che consiste nella determinazione della posizione di un punto mediante gli angoli formati due a due dalle visuali che vanno da esso a tre punti dati sul terreno. Dalle sue ricerche astronomiche fu indotto a occuparsi di trigonometria sferica, e uno dei suoi ultimi lavori consiste in una nuova dimostrazione della nota formola di Legendre. Egli ha data l'espressione dell'area di un poligono in frazione delle coordinate dei suoi vertici, arrestandosi su quella di un pentagono $ABCDE$ in funzione delle aree dei triangoli $EAB$, $ABC$, $BCD$, $CDE$, $DEA$. Si deve ancora a lui una soluzione elegantissima del problema di Apollonio; finalmente anche alle coniche volse la propria mente per applicarvi i più recenti metodi di geometria analitica, ma vi rinunciò quando vide che ciò era stato fatto da Möbius (vedi n. 689).

Fig. 74.

## Geometria infinitesimale

**655** - Svariate ricerche portarono Gauss allo studio delle proprietà infinitesimali delle superficie e così a stabilire concetti e formole che determinarono una totale metamorfosi in una branca coltivata con

grande successo da Monge. A deciderlo a mettere il pubblico a parte almeno di alcuni dei risultati ottenuti fu spinta provvidenziale un concorso proposto più volte indarno e da ultimo nel 1822 dall'Accademia di Copenaghen; la questione da risolvere consisteva nel rappresentare in generale una superficie su di un'altra in modo che sussistesse similitudine fra le loro parti infinitesime. Il vincolo « in generale » si spiega ricordando che per alcune superficie (di cui le più generali sono quelle di rotazione) la soluzione era stata data da Lagrange e perfezionata da Euler e Lambert. Ora Gauss soddisfece i desideri di quell'Accademia con una memoria (pubblicata nelle *Astron. Abhandl.* di Schumacher) ove è dimostrata la possibilità di ridurre l'elemento lineare di qualunque superficie alla forma $\lambda\ (u, v)\ (du^2 + dv^2)$; con essa le coordinate curvilinee su una superficie fanno il loro ingresso nella scienza.

Quella memoria fu presentata anonima col motto « Ab his via sternitur ad majora », parole appropriate perchè essa fu l'araldo di altra (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) presentata alla Società di Gottinga il 28 ottobre 1827 e pubblicata nel seguente anno nel Vol. II dei suoi *Atti*. Grazie ad essa orizzonti del tutto nuovi furono schiusi all'applicazione dell'analisi allo studio dell'estensione figurata.

Infatti, sino dalle sue prime pagine troviamo un concetto originale ed importante, quello di « rappresentazione sferica » di una superficie, grazie a cui si fanno corrispondere due punti a normali parallele. Poco dopo incontriamo le coordinate curvilinee $u, v$ sopra una superficie qualunque, l'espressione $(E\ du^2 + 2\ F\ du\ dv + G\ dv^2)$ dell'elemento lineare e la soluzione del problema « che cosa deve assumersi per misura della curvatura di una superficie in un suo punto? ». Gauss la risolse assumendo come tale il prodotto delle curvature delle due corrispondenti sezioni principali; di questa « curvatura integra » egli trovò l'espressione, tanto supponendo la superficie rappresentata in coordinate cartesiane, quanto se di essa si conosce la rappresentazione mediante le coordinate curvilinee; in questo secondo caso si possono far comparire nella sua espressione soltanto i coefficienti dell'elemento lineare della superficie e le derivate prime e seconde delle quantità $E, F, G$. Ciò aperse l'adito a concepire il problema dell'applicabilità di una superficie su di un'altra; Gauss trovò una condizione necessaria per la sua risolubilità: appunto dallo studio di tale fondamentale questione Gauss fu indotto a introdurre il fecondo concetto di considerare una superficie, non come limite di un corpo, ma come un velo flessibile ed inestendibile. Nella stessa memoria egli ha stabilita l'equazione generale delle linee geodetiche, tanto in coordinate cartesiane quanto in coordinate curvilinee qualunque; da ciò fu portato a introdurre sopra una superficie qualunque il sistema di coordinate polari geodetiche e i concetti di circoli geodetici e di curve geodeticamente parallele, cose tutte le quali finirono col porre in piena luce l'analogia esistente fra le rette di un piano e le geodetiche di una superficie qualunque. Determinate la curvatura integra di un triangolo a lati geodetici, col far cenno di trasformazioni che può subire l'elemento lineare di una superficie ha iniziato ricerche di sommo valore. Le applicazioni pratiche con cui si chiude la memoria in discorso provano che, appunto durante le sue ricerche di geodesia, fio-

rirono le idee testè rapidamente riassunte. E che a tali applicazioni Gauss desse un grande peso è dimostrato dal fatto che, scambio di proseguire una via di tanta importanza teorica, egli preferì dedicare due estese memorie ad esporre nuove *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* (1843, 1846).

656 - Immensa, benefica e permanente fu l'influenza esercitata da Gauss sopra gli studiosi tedeschi [1] (solo col tempo essa si fece sentire anche oltre il Reno e le Alpi), tanto con le pubblicazioni che quanto con le lezioni e l'ampio carteggio, sicchè è proprio a partire da lui che si può parlare di una matematica tedesca, con continuità nel tempo e negli scopi. È però giustizia riconoscere che tanto risultato fu grandemente agevolato dalla creazione di un organo proprio, il quale, abbracciando nel suo programma tanto la matematica pura quanto le applicazioni e col suo carattere d'internazionalità, impedì si verificassero fenomeni di isolamento che, per il progresso della scienza, sono un vero flagello. Alludiamo al *Journal für reine und angewandte Mathematik,* fondato a Berlino nel 1826 da un alto funzionario, A. L. Crelle (n. l'11 marzo 1780, m. il 6 ottobre 1855); di esso nel 1887 uscì il C volume e nel 1926 il CLVII a solennizzare il primo secolo di sua vita: gettando uno sguardo d'insieme a quanto contiene questa raccolta si riconosce che ad essa contribuirono tutti i più eminenti matematici dei tempi moderni e che ben poche sono le teorie matematiche di cui non vi si trovino importanti contributi. Aggiungiamo che, la produzione matematica essendo in continuo aumento, un dotto professore tedesco, J. A. Grunert (n. a Halle il 7 febbraio 1797, m. a Greifswald il 7 giugno 1872) fondava a Greifswald nel 1841 un altro più modesto periodico, l'*Archiv für Mathematik und Physik,* che, sotto vari direttori, continuò sino al 1917, con notevole vantaggio per la coltura matematica.

[1] Forse come prova di tale influenza si può citare il *Lehrbegriff der höheren Mathematik* (Erlangen, 1818) di Giovanni Tobia Mayer junior (n. a Gottinga il 5 maggio 1782, m. ivi il 30 novembre 1830), opera informata a vedute moderne e degne di encomio.

## BIBLIOGRAFIA

J. P. Pfaff, *Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes* (Helm, 1797).

*Sammlung von Briefen gewechselt zwischen* J. F. Pfaff *und Herzog* Carl von Württemberg *und Andere, herausgegeben von Dr.* C. Pfaff (Leipzig, 1853).

C. F. Hindeburg, *Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae* (Gotting, 1779).

C. F. Hindeburg, *Novi systematis permutationum, combinationum ac variationum primae lineae et logisticae serierum formulis analyticos-combinatoriis per tabulas exhibendae conspectus et specimina* (Lips., 1781).

Eschebanch, *Disseratatio de serierum reversione formulis analyticos-combinatoriis exhibita* (Lips., 1789).

E. A. Rothe, *Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita* (Lips., 1793).

Chr. Wolf, *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (quattro Volumi, I ed., Halle, 1710).

Chr. Wolf, *Elementa matheseos universae* (cinque Volumi, Halle, 1713-41).

CHR. WOLF, *Mathematisches Lexicon, darinnen die in allen Teilen der Mathematik üblichen Künstwörter erklärt und zur Historie der Mathematik-Wissenschaften dienen tichen Nachrichten ertheilt, auch die Schriften, wo jene Materie ausgeführet zu finden, angeführt werden* (Halle, 1716).

SEGNER, *Sperimen theoriae turbinum* (Halle, 1755).

J. A. SEGNER, *Elementa arithmeticae et geometriae* (Jena, 1739).

J. A. SEGNER, *Elementa arithmeticae, geometriae et calculi geometrici* (Halle, 1756).

A. G. KAESTNER, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie* (Göttingen, 1758).

A. C. KAESTNER, *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen* (Göttingen, 1760).

A. C. KAESTNER, *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (Göttingen, 1760).

A. G. KAESTNER, *Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten* (Göttingen, 1759).

B. F. THIBAUT, *Grundriss der reinen Mathematik* (Göttingen, 1801).

B. F. THIBAUT, *Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis* (Göttingen, 1809).

W. J. G. KARSTEN, *Lehrbegriff der gesammten Mathematik* (Otto Vol., Greifswald, 1767-1777, II ed., 1782-1791).

C. F. GAUSS, *Werke, herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften* (dieci Volumi, Leipzig, 1870-1930) (¹).

*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel herausgegeben auf Veranlassung der Berliner Akademie* (Berlin, 1880).

*Briefe von C. F. Gauss an B. Nicolai, herausgegeben von* W. VALENTINER (Karlsruhe, 1877).

*Briefe zwischen A. von Humboldt und Gauss herausgegeben von* K. BRUHNS (Leipzig, 1877).

*Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. L. Gerling herausgegeben von* C. SCHAEFER (Berlin, 1927).

*Briefwechsel von Gauss mit Schumacher herausgegeben von* PETERS (1861-65, sei Volumi).

*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss herausgegeben von* C. SCHILLING *und* I. KRAMER (due Volumi, Berlin, 1900-1909).

H. MACH, *C. F. Gauss und die seinen* (Berlin, 1927).

F. KLEIN und M. BRENDEL, *Materialien für wissenschaftliche Biographie von Gauss:* I. P. BACHMANN, *Ueber Gauss, zahlentheoretische Arbeiten.* II. *L.* SCHLESINGER, *C. F. Gauss, Fragmente zur Theorie der arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren* 1797-1799. III. L. SCLHESINGER, *Ueber Gauss, Arbeiten zur Funktionen-theorie.* IV. C. F. A. GALLE, *C. F. Gauss als Zahlrechner*, V. P. STAECKEL, *C. F. Gauss als Geometer.* VI. P. MAENNCHEN, *Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss.* VII. M. BRENDEL, *Ueber die astronomischen Arbeiten von Gauss.* VIII. A. FRAENKEL, *Zahlbegriff und Algebra bei Gauss.* VIII. Anhang. A. OSTROWSKI, *Ueber den ersten und vierten Gausschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* (Göttingen, 1911-1920) (²).

F. SCHMIDT und P. STEACKEL, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai* (Leipzig, 1899).

P. RIEBESELL, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und J. C. Repsold* (Mitt. math. Ges., Hamburg, T. VI, 1928).

*Oeuvres philosophiques de* SOPHIE GERMAIN, *suivies de Pensées et de Lettres inédites et précédé d'une Notice sur sa vie et ses Oeuvres par* H. STUPUY (Paris, 1879).

B. BONCOMPAGNI, *Cinq lettres inédites de Sophie Germain à C. F. Gauss* (Berlin, 1880).

C. HENRY, *Les manuscrits de Sophie Germain et leur récent éditeur. Documents nouveaux* (Revue philosophique, dicembre 1879).

---

(¹) Tutti gli scritti aritmetici di Gauss si leggono tradotti in tedesco nel volume di H. MASER, C. F. GAUSS, *Untersuchungen über höhere Arithmetik* (Berlin, 1889). Fra i *Klassiker der exakten Wissenschaften* si trovano i lavori sulle forze agenti secondo la legge newtoniana (trad. A. WANGERIN), quelli sulla teoria delle superficie (pure trad. WANGERIN), le varie dimostrazioni sul teorema fondamentale dell'algebra (trad. NETTO) e gli scritti sull'attrazione degli ellissoidi (trad. GEPPERT).

(²) Questi importanti lavori di commento furono o verranno riprodotti, debitamente aggiornati, nei TT. X e XI delle *Opere* di GAUSS.

CAPITOLO XL

## ORIENTAMENTO DELL'ANALISI VERSO PROCEDIMENTI RIGOROSI

657 - Le agevolazioni offerte alle ricerche analitiche dall'algoritmo leibniziano indussero molti studiosi a ritenere di essere giunti in possesso di un veicolo non meno comodo che perfetto, capace di trasportare con assoluta sicurezza a qualunque altezza e qualunque distanza: nella conseguente corsa verso l'ignoto nessuno mostrò maggiore audacia dell'Euler. Ma, mentre migliaia di voci plaudivano agli splendidi risultati ottenuti, non ne mancò qualcuna (e noi abbiamo avuto cura di farne cenno) — non dissimile da quella dello schiavo ammonitore che seguiva il carro del trionfatore romano — la quale faceva osservare che il magnifico edificio eretto con i materiali in tal maniera conquistati e raccolti poggiava sopra basi di assai discutibile solidità, ond'era urgente provvedere al loro rafforzamento e impedire si continuasse a procedere in una via così pericolosa. A riporre nel debito onore il rigore logico tanto ammirato nei lavori dei geometri dell'antica Grecia avrebbe potuto provvedere Gauss, come dimostra l'intera sua opera matematica, la quale, a un secolo di distanza, non manifesta la più lieve screpolatura; ma egli preferì all'ammaestramento l'esempio, lasciando quel nobile cómpito ai matematici di cui intendiamo occuparci ora.

### PARTE PRIMA: B. BOLZANO

658 - Da un negoziante di oggetti antichi trasferitosi a Praga dall'Italia settentrionale, nacque in questa città Bernardo Bolzano il 5 ottobre 1791; aderendo al desiderio paterno si volse verso la carriera ecclesiastica e nel 1805 fu ordinato prete; nello stesso tempo conseguì nel patrio Ateneo la dignità di dottore in filosofia e la cattedra di professore di scienza delle religioni. Il modo in cui Bolzano svolse questo insegnamento di carattere politico non fu giudicato conforme alle strette vedute del Governo austriaco; in conseguenza l'imperatore lo dispensò dal proseguire, assegnandogli una meschina pensione. Egli allora si trasferì a Techbuz e vi rimase sino al 1841; ritornò allora nella città natia, ove si spense il 18 dicembre 1848.

Non entra nel nostro programma l'esaminare i suoi scritti di logica, di filosofia e di teologia, i quali, mentre gli assicurarono una legione di ammiratori entusiasti, destarono le ire dell'autorità ecclesiastica; dob-

biamo limitarci a mostrare come per primo egli abbia insegnato il modo di rendere rigorosi i concetti e sicuro il procedere dell'analisi matematica; sfortuna volle che i suoi scritti, apparsi in località lontane dai maggiori centri scientifici, abbiano raggiunta limitatissima notorietà e che a lui sia stato negato di diffondere le sue idee da una cattedra universitaria; la sua influenza fu, quindi, pressochè nulla e il valore delle sue idee venne riconosciuto soltanto dopo che altri raggiunse le vette che egli aveva per primo scalate.

Le opere del Kästner, mentre gli appresero gli elementi delle scienze esatte, gli rivelarono che i fondamenti di queste presentavano profonde imperfezioni; allora, seguendo l'indirizzo essenzialmente filosofico del suo spirito, pensò di rimediarvi egli stesso, avendo osservato (sono parole da lui scritte in una memoria pubblicata nel 1843 dalla società Reale Boema delle Scienze) che: « Di uomini egregi benemeriti nell'ampliare il *campo* di questa scienza » (la matematica) « o nell'applicarla ai più svariati *oggetti*, ne esistono attualmente per fermo molti; ma estremamente rari sono coloro che lavorano a rendere più salde le basi del sistema matematico ».

659 - Che egli siasi posto su questa via sino da giovane è dimostrato da un volume geometrico pubblicato nel 1804, ove leggesi un tentativo per rendere del tutto soddisfacente la teoria euclidea delle parallele. Più felici furono i suoi sforzi per perfezionare l'analisi: infatti, i suoi scritti mostrano che egli precorse G. Cantor nell'ammettere nell'analisi il numero attualmente infinito, e che, prima di Cauchy e Weierstrass, stabilì concetti e applicò procedimenti che si attribuiscono a questi grandi matematici. Così egli per primo ebbe un chiaro concetto di funzione continua, diede un criterio sicuro per giudicare della convergenza di una serie, trattò della differenziazione di una serie di potenze e giunse al concetto di « limite superiore » (o « inferiore ») , ben diverso da quello di « massimo » (o « minimo »), che da secoli dominava la nostra scienza.

Convinto della necessità di trattare l'analisi senza ricorrere all'intuizione geometrica, dedicò un lavoro (ed è uno di quelli su cui riposa la sua rinomanza) a dimostrare senza ricorrere alla geometria che, se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni contrari, fra $a$ e $b$ cade una radice dell'equazione $f(x) = 0$. Un esame profondo ma spassionato degli scritti di Euclide ed Archimede lo guidò a un nuovo modo per trattare i problemi fondamentali metrici della teoria delle curve e delle superficie (rettificazione, complanazione e cubatura). Anche la teoria dei numeri attrasse la sua attenzione, come prova una notevole aggiunta da lui fatta a quanto Lagrange scrisse intorno alla decomponibilità di qualunque numero in quattro quadrati. Ma il risultato che pone nella più chiara luce la forza del suo genio e l'indipendenza del suo spirito è la scoperta di una funzione continua priva di derivata in un suo punto qualunque [1]. Ove la sua

(1) La prima notizia relativa venne data da M. Jasek nella nota *Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernhard Bolzanos* (Mém. de la Soc. Royale des Sciences de Bohéme, 1921-22) e il primo studio di quella funzione leggesi nella memoria di K. Rychlik, *Ueber eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlass* (Ivi). Quanto ne scrisse il Bolzano è ormai di generale dominio essendo stata pubblicata la sua *Funktionentheorie* (v. *Bibliografia*).

*Teoria delle Funzioni* non fosse rimasta sepolta in manoscritto durante lunghi decenni in una biblioteca di Vienna, l'analisi avrebbe raggiunto assai prima lo stato di perfezione a cui la portò la scuola analitica di Berlino (v. più avanti n. 744). Senza dilungarci in commenti sopra questo fatto, constatiamo come per l'eminente pensatore il dì della lode sia sorto tardivo ma luminoso, con la pubblicazione di tutte le sue opere edite e inedite.

## Parte Seconda: A. L. CAUCHY

660 - Agostino Luigi Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789; suo padre, uomo di alta coltura e di elevato carattere, si occupò con somma diligenza dell'istruzione dei proprii figli, in anni in cui, per ben noti motivi politici, le scuole francesi erano chiuse o funzionavano irregolarmente; appunto per sottrarsi alle conseguenze di un'epoca agitatissima egli si trasportò con la famiglia ad Arcueil, ove si erano già rifugiati Laplace ed il chimico Berthollet e avevano fondata una società scientifica privata, modesto surrogato della soppressa Accademia delle Scienze. Senza indugiarci a narrare i clamorosi successi scolastici del giovane Cauchy, ricorderemo che egli nel 1805 entrò alla Scuola Politecnica, come secondo della relativa promozione; mentre vi si trovava ideò una nuova soluzione analitica del problema di Apollonio, che, essendo stata data alle stampe (*Corr. sur l'École polyt.*, T. I), fu riprodotta poi in molte opere francesi. Due anni passò all'« École des Ponts et Chaussées », donde uscì col grado d'ingegnere. I suoi superiori, avendo subito concepita per lui la più alta stima, lo inviarono poco dopo a Cherbourg, porto in cui il governo di Napoleone aveva deliberato di eseguire importanti lavori. Ivi rimase dal 1810 al 1813, alternando lo scrupoloso adempimento degli obblighi ufficiali con ricerche puramente scientifiche; questo eccesso di lavoro avendo minacciata la sua salute (la quale era stata scossa dalla carestia sofferta durante l'infanzia), la famiglia lo richiamò nel proprio seno, dandogli agio di dedicarsi pienamente alla scienza pura, con risultati di cui presto diremo; notiamo soltanto che nel 1816 ottenne dall'Istituto di Francia il premio sul tema: « Una massa fluida pesante, originariamente in riposo, fu posta in movimento da una causa conosciuta; determinare la forma sotto cui essa si presenta a un dato istante e la velocità di ogni molecola della superficie della data massa ». Per due volte fu candidato ad un posto nell'Accademia delle scienze; ma rimase soccombente di fronte a concorrenti più anziani; vi entrò per volere di Luigi XVIII, che, appena salito al trono, ne aveva arbitrariamente esclusi Monge e Carnot (decreto del 21 marzo 1816); in conseguenza ebbe cattedre alla Scuola Politecnica, al Collegio di Francia ed alla Sorbona, il che gli diede occasione per scrivere ottimi trattati di analisi, algebrica e infinitesimale, e sulle applicazioni geometriche di quest'ultima (cfr. *Bibliografia*) [1].

[1] Gran parte della materia di questi trattati venne fusa in un tutto organico da F. Moigno (n. il 20 aprile 1804, m. il 13 luglio 1884) in alcuni volumi (v. *Bibliografia*) ove si leggono anche alcune pagine inedite dello stesso Cauchy.

La rivoluzione del luglio 1830 gli tolse il pubblico insegnamento, avendo egli rifiutato di prestare alla dinastia degli Orléans un giuramento di fedeltà identico a quello da lui dato ai Borboni. Prese allora la via di un volontario esilio e riparò a Friburgo (Svizzera); accettò poi la cattedra di Fisica sublime nell'Università di Torino creata apposta per lui ed offertagli da Carlo Alberto; ivi rimase due anni e lasciò l'Italia quando lo spodestato Carlo X, rifugiatosi a Praga, lo volle presso di sè (1833) in qualità di istitutore del duca di Bordeaux: tale ufficio diede a Cauchy l'occasione per scrivere dei trattati elementari di aritmetica e geometria [1]. Rientrato in Francia nel 1838, potè riprendere il suo posto all'Istituto di Francia, ma gli fu vietato ogni ufficio nel pubblico insegnamento; fu la rivoluzione del 1848 che gli restituì la cattedra alla Sorbona, la quale, per concessione speciale del III Napoleone, egli potè conservare anche dopo il 1852. Morì a Sceau il 22 maggio 1857, amaramente rimpianto, non solo da tutti coloro che erano in grado di ammirare il suo genio, ma anche dai molti che fruivano delle opere di carità a cui erasi efficacemente dedicato durante tutta la vita.

Per fecondità e varietà di produzione Cauchy può essere equiparato soltanto a Euler, giacchè i suoi scritti, pubblicati durante quarantasette anni di continuo lavoro, in volumi a sè o in raccolte scientifiche (fra cui naturalmente i celebri *Exercices*), sommano a 789: distribuendole per materie (alcune avendo dovute essere computate in due diverse categorie) si giunge a questo prospetto: Aritmetica e Teoria dei numeri 69: Geometria 39; Analisi 72; Integrali definiti 81; Funzioni simmetriche 40; Serie 73; Teoria delle equazioni 48; Funzioni periodiche inverse 39; Equazioni differenziali 84; Meccanica 113; Ottica 102; Astronomia 73. Diremo ora di alcuni dei principali risultati ivi esposti.

661 - L'uomo destinato ad assurgere alla più alta fama come analista esordì come autore sotto la veste di risolutore di questioni geometriche poste allora all'ordine del giorno. Una fu enunciata da Luigi Poinsot (n. a Parigi il 3 gennaio 1777, m. ivi il 5 dicembre 1859), ben noto come introduttore nella meccanica del concetto di « coppia ».. In un importante *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, letto all'Istituto di Francia il 24 luglio 1809 e pubblicato nel *Journ. de l'Ec. Pol.* (X Cah., 1810), dopo di avere dimostrata (senza conoscere Kepler; v. p. 415) l'esistenza di quattro poliedri regolari stellati (tre dodecaedri e un icosaedro), egli propose la questione: possono esistere poliedri regolari aventi un numero di facce differente da 4, 6, 8, 12 e 20? Cauchy vi rispose negativamente nella I Parte delle sue *Recherches sur les polyèdres* (Ivi, XVI Cah.), la quale l'Istituto di Francia, a cui fu presentata nel febbraio 1811, approvò pienamente per bocca di Legendre e Malus: va ivi notata l'estensione alle superficie poliedriche aperte del teorema di Euler sopra i poliedri ($F + V = S + 2$). Incoraggiato da questo successo egli si propose di risolvere l'altra questione di determinare le condizioni di

[1] Contatti personali fra Cauchy e Bolzano sono difficilmente ammissibili, perchè durante il soggiorno di quello a Praga questi si trovava a Techbuz (v. p. 829): d'altronde l'epoca (1833-1838) che Cauchy passò a Praga è assai posteriore a quella in cui egli esplетò sull'analisi la sua azione riformatrice.

eguaglianza o similitudine di due poliedri e quindi di vedere se un poliedro sia individuato dalle sue facce, e vi rispose pienamente con altra memoria (v. lo stesso Cah. del *Journ. de l'Éc. Pol.*), la quale, presentata essa pure all'Istituto di Francia, fu giudicata nel modo più autorevole da una commissione composta di Biot, Carnot e Legendre. Le conclusioni a cui giunse Cauchy in questo lavoro conseguirono ben presto grande notorietà essendo state inserite da Legendre nelle più recenti edizioni della sua *Géométrie*.

Un esame minuzioso delle opere di Cauchy porta a segnalarvi molti passi che insegnano nuove proposizioni geometriche e migliorie ad alcune applicazioni dell'algebra alla geometria [1]; campione del rigore egli fu riluttante ad accogliere il principio di continuità e (v. p. 809) insegnò come evitarlo in due Rapporti sopra memorie di Poncelet, che il Gergonne si affrettò a pubblicare nelle sue *Annales* (T. XI e XVI). Non minore valore hanno le note da lui allegate a un Rapporto sopra una memoria di B. Amiot presentata all'Istituto di Francia (si veggano i C. R. del I Sem. 1843) relativa alla teoria focale delle quàdriche.

662 - Allo studio delle proprietà dei numeri Cauchy si dedicò sino dai suoi anni giovanili ottenendo un risultato che lo pose al livello di Lagrange ed Euler; infatti questi avevano dimostrata la scomponibilità di qualunque numero intero nella somma di quattro quadrati; il Nostro stabilì la verità dell'analoga proposizione enunciata da Fermat (vedi p. 482) per numeri poligonali qualisivogliano, nella memoria appunto intitolata *Demonstration générale du théorème de Fermat sur les nombres polygones* (inserita nei *Mém. de l'Institut de France*, 1813-15). In età più matura egli si occupò ancora di questioni di aritmetica superiore, svolgendo, applicando e completando concetti, metodi e risultati dovuti a sè stesso ed a Gauss; limitiamoci a richiamare l'attenzione dei lettori sopra l'esteso *Mémoires sur la Théorie des Nombres* che riempe il Vol. XVII (1840) dei *Mém. de l'Inst. de France*.

663 - Uno dei maggiori meriti di Cauchy è di avere presentati i principii dell'analisi infinitesimale sotto forma pienamente rigorosa ricorrendo al metodo dei limiti. « J'ai cherché », egli scrisse nella prefazione della sua *Analyse algébrique*, « à donner aux méthodes toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communement admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux quantités imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois l'exactitude, la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même faire observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité, la plus part de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles ren-

[1] Ad es. per primo egli mostrò l'utilità di scrivere le equazioni di una retta nello spazio sotto la forma $(x - a) / l = (y - b) / m = (z - c) / n$.

ferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaitre toute incertitude ». Queste saggie parole costituiscono tutto un programma al quale l'autore si è fedelmente attenuto durante tutta la sua vita; se nell'imporre grande circospezione nell'uso delle formole egli ebbe parecchi precursori (ben lo sanno i lettori che ci hanno seguìto sin qui), totalmente originale ed assai importante è l'idea che le formole algebriche hanno una portata limitata, da determinare caso per caso; ed estremamente impressionante è l'illustrazione da lui datane osservando che, poichè la funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ha nell'origine nulle tutte le sue derivate si ottiene lo stesso risultato applicando la serie di Maclaurin a una funzione qualunque $f(x)$ e alla somma $f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$. A lui si devono poi le condizioni di convergenza di una serie di potenze e della serie di Lagrange (v. p. 753) inoltre un'espressione divenuta classica per il resto della formola di Taylor.

Risultati ancora più brillanti ottenne Cauchy quando estese le esposte vedute al campo complesso. Applicazioni sparse del passaggio da valori reali a valori complessi delle variabili, anche nel calcolo di integrali erano già state fatte da Leibniz, Giovanni Bernoulli, Euler, d'Alembert e Laplace. Con ancor maggiore disinvoltura si servì dello stesso artificio un geometra di cui ci occuperemo nel seguente Cap., il Poisson; ciò diede origine a critiche da parte di Cauchy (v. il *Résumé,* 1823, citato nella *Bibliografia*) e fu forse lo stimolo alle ricerche che culminàrono nella famosa memoria *Sur les Intégrales Définies prises entre des limites imaginaires* (Paris, 1825).

664 - Prima di descriverne il contenuto e per meglio chiarirne la genesi, osserviamo che Cauchy, non ancora venticinquenne, lesse (22 agosto 1814) all'Istituto di Francia un esteso *Mémoire sur les Intégrales définies*, che nel 1825 fu inserito nella raccolta dei *Sav. Étr.* e la cui eccezionale importanza non sfuggì a Legendre, il quale, nel Rapporto fattone a quella corporazione, segnalò come meritevoli di speciale rilievo i seguenti risultati: I. Le formole per trasformare con procedimento uniforme gli integrali definiti, allo scopo di determinarne i valori. II. L'osservazione che un integrale definito doppio può assumere valori differenti a seconda dell'ordine in cui si effettuano le integrazioni (è un'osservazione che vedemmo, p. 822, già fatta da Gauss, ma in una memoria pubblicata dopo la presentazione di quella di Cauchy). III. Determinazione della causa di siffatta singolarità, con l'introduzione nell'analisi degli « integrali singolari », importante scoperta che nessuno può disputargli. IV. Dimostrazione di un cospicuo numero di nuove formole integrali.

Proseguendo in siffatte ricerche egli, nella succitata memoria del 1825, gettò i fondamenti della nuova teoria delle funzioni di una variabile complessa e dei loro integrali. Si trova ivi la celebre formola

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(x)}{x-z}\,dx\,,$$

la quale esprime il valore di una funzione $f(z)$ in un punto qualunque di un campo nel quale essa sia continua e finita, mediante i valori che essa assume in tutti i punti del contorno $C$ del campo stesso: se si può essere titubanti nel dichiarare che essa è la più importante formola di tutta l'analisi, si può con piena sicurezza affermare che nessuna la supera in fecondità. Essa mostrò essere una funzione di variabile complessa un ente analitico di natura diversa dalle funzioni di variabili reali, in quanto non se ne possono assegnare ad arbitrio i valori in tutti i punti di un campo in cui essa è continua e finita. Essa condusse subito alla formola di Taylor nel campo complesso, poi all'analogo sviluppo nell'intorno di un polo della funzione considerata e finalmente a quello relativo ad una funzione dotata di una singolarità essenziale isolata (per servirci della nomenclatura moderna). Benchè quest'ultimo risultato non porti il nome di Cauchy, ma quello di un suo discepolo, P. A. Laurent (n. a Parigi il 18 luglio 1813, m. ivi il 2 settembre 1854), grazie ad una nota da lui presentata all'Accademia di Parigi (C. R., T. XVII, 1843), non v'ha dubbio che si tratta di un corollario di quella magica formola. Il grande geometra asserì poi che le considerazioni da lui svolte si potevano estendere alle funzioni di due variabili complesse ed agli integrali doppi; ma in realtà l'estensione è ben lungi dall'essere immediata ed agevole, onde non deve stupire se richiese il concorso di un matematico della forza del Poincaré.

665 - Gli è nel corso di tali ricerche che Cauchy fu indotto a introdurre (1826) il concetto di « residuo » di una funzione $f(z)$ relativo ad un suo punto $a$ d'infinito, che Euler aveva semplicemente adombrato in una memoria inserita nel 1780 negli A.A.P.; se $n$ ne è l'ordine, la funzione è rappresentabile sotto la forma

$$\frac{A_n}{(z-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + \\ + A_0 + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \dots ;$$

ne segue $A_n = \lim_{z=a} [(z-a)^n f(z)]$; ora appunto questo limite è, secondo Cauchy, il residuo di $f(z)$ relativo al punto $a$. Ne abbiamo riferita la definizione perchè, malgrado le numerose applicazioni fattene dal suo inventore, non ha preso posto stabile nell'analisi [1].

La stessa teoria delle funzioni di una variabile complessa trovasi metodicamente svolta in una serie di comunicazioni fatte da Cauchy all'Accademia di Parigi a partire dal 1846, col precipuo scopo di fare piena luce sopra i fenomeni offerti dalle funzioni biperiodiche. All'infuori delle equazioni differenziali (di 1° e 2° ordine) a cui soddisfano la parte reale e il coefficiente di $i$ di qualunque funzione di una variabile completamente libera (e che vedemmo già incontrate prima di lui), vi si trovano alcuni nomi che vanno qui ricordati; oltre all'epiteto di *continua,* a una funzione $f(z)$ viene dato quello di *monodroma* se assume in un punto qualunque un valore indipendente dal cammino per il quale

[1] Oggi il nome di residuo è dato esclusivamente al coefficiente $A_1$.

vi si giunge, *monogena* se ammette in ogni suo punto una derivata determinata; quando è meritevole di tutti tre questi aggettivi la si chiama *sinettica*.

Numerosi sono anche i lavori che egli dedicò alle equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali; ivi egli, non soltanto ha perfezionati alcuni metodi d'integrazione, ma ha dato i primi esempi di ricerca delle condizioni per l'esistenza degli integrali, iniziando così una serie di studi che tuttora continuano; giova avvertire che questo orientamento del suo pensiero deve in parte la sua origine alle ricerche di fisica matematica, delle quali diremo nel Capitolo seguente.

666 - Fra i molti suoi lavori aventi un carattere prettamente algebrico emerge il giovanile *Mémoire sur les Fonctions qui ne peuvent obtenir que deux Valeurs égales et de signes contraires par suite de Transpositions opérées entre les Variables qu'elles renferment* (Journ. Éc. Pol., XVII Cah., 1812). L'importanza di esso dipende anzitutto da ciò che ivi l'autore, proseguendo ricerche iniziate da Lagrange e Ruffini, ha stabiliti alcuni dei concetti che stanno a base dell'odierna teoria delle sostituzioni e ne ha scoperti alcuni teoremi fondamentali. Vi si trovano poi numerosi elementi essenziali della teoria dei determinanti, a cui egli giunse partendo dal prodotto delle mutue differenze $a_i - a_k$ $(i>k)$ di $n$ quantità. Va notato che questo scritto, nella parte dedicata ai determinanti, presenta impressionanti ma casuali punti di contatto col *Mémoire sur un Système de Formules analytiques,* pubblicato durante lo stesso anno nel XVI Cah. del Journ. Éc. Pol., da un altro distinto ex-alunno della Scuola Politecnica, J. P. M. Binet (n. a Rennes il 2 febbraio 1786, m. a Parigi il 12 maggio 1856), alle cui opere con rammarico non possiamo dedicare più di questo cenno fugace, per il grande numero di autori che ci si affollano dinnanzi.

Ai determinanti Cauchy è ritornato (C. R., T. XII, 1841) dopo di avere riscontrato che i metodi ideati da Euler e Bézout per eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche guidano ad espressioni di quella forma, onde era utile perfezionarne i metodi di calcolo. Egli ne avvertì poi l'intervento nell'integrazione delle equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti; finalmente si occupò dei determinanti funzionali quando Jacobi li introdusse nell'analisi (v. p. 845). Altri contributi dati dal sommo matematico all'algebra debbono venir da noi passati sotto silenzio; ma ciò non ci è concesso di fare riguardo ad un'importantissima proposizione che insegna ad approssimare le radici di un'equazione a coefficienti complessi $f(z) = 0$; eccone l'enunciato: « Posto $f(x + iy) = P + iQ$, s'immagini descritto un contorno chiuso $S$ nel piano rappresentativo della variabile $z$ e si considerino i valori assunti nei punti dello stesso dal rapporto $P/Q$; detto $n$ il numero delle volte che esso si annulla passando dal positivo al negativo e $n'$ il numero delle volte in cui si verifica il fatto opposto, sarà $n \geq n'$ e la differenza $n - n'$ esprimerà il numero delle radici della data equazione che cadono entro il contorno $S$ ». Questa bella proposizione fu presentata nel 1831 all'Accademia delle Scienze di Torino, ma la relativa memoria non venne mai pubblicata integralmente; l'originaria dimostrazione datane da Cauchy

è una applicazione del calcolo dei residui; egli la sostituì poi con altra elementare (Journ. Ec. Pol., XXV Cah.). J. A. Serret, inserendo questo teorema nel suo *Cours d'Algèbre supérieure* (IV ed., Paris 1877, T. I, p. 118) con la dimostrazione datane da C. Sturm e Liouville, ne ha diffusa la conoscenza negli ambienti scolastici e ne ha poi aumentato il valore mostrando come ne sia corollario il teorema fondamentale dell'algebra.

Qui ci arrestiamo, non già nella convinzione di avere descritta per intero la grande opera di Cauchy, ma perchè non sapremmo dare più splendida stazione di arrivo a questa rapida corsa compiuta attraverso i suoi scritti.

667 - La benefica influenza da lui esercitata mediante l'insegnamento orale e le numerosissime pubblicazioni è tale che, volendo indicare quali furono i suoi discepoli, non si avrebbe che a redigere un elenco di tutti gli analisti (e non soltanto francesi) che vissero dopo di lui. Limitiamoci in questo momento a segnalarne tre che, al pari del Laurent (cfr. p. 835), proseguirono e completarono la sua opera, prendendo le mosse precisamente dal punto in cui egli era giunto. Primo ci si presenta V. A. Puiseux grazie alle sue fondamentali *Recherches sur les Fonctions algébriques* (Journ. de Math., T. XV e XVI, 1850-51). Egli nacque a Argenteuil il 1 aprile 1820; dopo vari uffici occupati in provincia, dal 1857 insegnò astronomia alla Sorbona e in conseguenza all'astronomia dedicò tutte le sue forze; a Parigi morì il 9 settembre 1883. Mentre Cauchy non aveva considerate che per incidenza le funzioni a più valori, Puiseux studiò metodicamente e profondamente le funzioni $u$ di una variabile complessa $z$ definite da un'equazione algebrica della forma $f(u, z) = 0$; insegnò a separarne i vari rami e stabilì i corrispondenti sviluppi in serie, non senza volgere la sua attenzione agli integrali della forma $\int u \,.\, dz$. I concetti da lui introdotti ed i metodi di cui egli si è servito s'incontrano ancora nell'analisi, il che ne costituisce l'elogio più significante.

Indissolubilmente collegati fra loro s'incontrano nella storia delle matematiche C. A. A. Briot (n. a St. Hippolyte il 19 luglio 1817, dal 1855 professore di astronomia alla Sorbona, m. all'Havre il 20 settembre 1882) e J. C. Bouquet (n. a Monteau il 9 luglio 1817, dal 1873 prof. alla Sorbona, m. a Parigi il 9 settembre 1885). Molti pregiati trattati elementari portano il nome di entrambi; ma la loro opera più originale è quella in cui essi esposero ed applicarono la teoria delle funzioni di variabile complessa e dei loro integrali; è la *Théorie des Fonctions doublement périodiques* (Paris, 1859), che, in una seconda edizione totalmente rifatta assunse il titolo *Théorie des Fonctions Elliptiques* (Paris, 1875); l'importanza di essa proviene dal fatto che fa conoscere la nuova luce che la variabilità complessa ha gittato sopra l'intima struttura degli enti analitici a cui Legendre aveva consacrato tanto tempo e tante fatiche.

Chiuderemo questi cenni intorno ai discepoli diretti del sommo analista francese con alcune notizie sopra un italiano che ne seguì le lezioni durante gli anni 1851-56 e lo scelse come modello anche nelle opere di carità che tramanderanno il suo nome benedetto alla più lontana poste-

rità: Francesco Faà di Bruno. Nato ad Alessandria addì 7 marzo 1825, insegnò analisi superiore nell'Università di Torino dal 1871 sino alla sua morte (26 marzo 1888). Chi scrive ricorda il fervore con cui nelle sue lezioni esponeva le scoperte di Cauchy ed il calore con cui esortava i suoi alunni a studiarne i lavori di ottica, nei quali egli ravvisava una miniera non ancora sfruttata. Oltre a buon numero di memorie, scrisse un'apprezzata *Théorie des formes binaires* (Turin, 1876) che venne tradotta in tedesco; nei suoi ultimi anni attendeva a una *Teoria delle funzioni ellittiche*, di cui era già stata iniziata la stampa nel momento della sua scomparsa e che in conseguenza rimase inedita.

### Parte Terza: N. H. ABEL

668 - « Le serie divergenti sono in complesso una invenzione diabolica, ed è una vergogna che si voglia basare sopra di esse una qualsiasi dimostrazione. Col loro mezzo si può dimostrare ciò che si vuole; esse sono la fonte di delusioni ed errori... Se si eccettuano i casi più semplici, come le serie geometriche, non esiste in tutta la matematica alcuna serie infinita la cui somma sia determinata rigorosamente; in altri termini, quello che vi è di più importante in materia non poggia sopra alcun fondamento ».

« Nell'alta analisi non vi sono che poche proposizioni che siano dimostrate in modo incontestabilmente rigoroso. Ovunque si trova la deplorevole abitudine di concludere dal particolare al generale, ed è estremamente notevole che con un tal modo di procedere non si giunga che ben di rado a quello che chiamasi paradosso ».

Chi scriveva queste rudi parole manifestava con Cauchy una così profonda affinità mentale, che può ben dirsi condivida col grande matematico francese la gloria di avere ricondotta l'analisi sul retto cammino del ben ragionare. È Niels Henrik Abel. Egli nacque a Findö (Norvegia), il 5 agosto 1802 donde, ancora bambino, passò a Gjerrenstadt, ove suo padre era stato chiamato in qualità di pastore. Nel 1815 si trasferì a Christiania per continuarvi gli studi nella locale scuola cattedrale ed ivi, nel 1818, ebbe la fortuna di trovare in B. Holmboe (1795-1850) un maestro che seppe scoprirne la straordinaria attitudine alla ricerca matematica; egli lo incoraggiò durante tutta la sua vita e ne pubblicò poi molte opere postume. La morte del padre (1820) pose la famiglia Abel in gravi ristrettezze finanziarie, sicchè si può dire che da quel momento cominciò per Abel la penosa lotta contro i debiti, dai quali non riuscì mai a liberarsi completamente. Nel 1821 entrò nell'Università di Christiania, ove l'anno dopo subì l'« examen philosophicum ». Appunto in quest'epoca egli s'illuse di essere giunto ad un metodo per risolvere le equazioni letterali di 5° grado, ma si accorse del proprio errore quando fu invitato ad applicarlo ad un'equazione numerica. Volse allora la mente a questioni di più vasto respiro, e due lavori pubblicati nel 1823 in una rivista norvegese contengono in germe alcune delle principali idee che dovevano portarlo all'immortalità. Si occupò anche del « grande teorema di Fermat »; non riuscì a dimostrarlo, ma scoperse

alcuni notevoli teoremi che vi si riferiscono. Nello stesso anno fece un viaggio a Copenaghen per conoscere personalmente il matematico C. F. Degen (n. a Braunschweig il 1° novembre 1766, m. professore in quella Università l'8 maggio 1825) da cui aveva ricevuto il saggio consiglio di dedicarsi allo studio delle trascendenti ellittiche. Nel gennaio 1824 presentò al patrio Governo un'istanza per ottenere un sussidio, alla quale era allegata una memoria di calcolo integrale; nel marzo successivo, essendo il suo desiderio stato esaudito, egli potè attendere con tranquillità ai proprii studi, pubblicare una dimostrazione non ancora pienamente soddisfacente, dell'irresolubilità delle equazioni di 5° grado, e redigere altri lavori di alta analisi che videro la luce soltanto dopo la sua morte. Una seconda istanza per ottenere una borsa per studi all'estero raggiunse (27 agosto 1825) esito favorevole; così egli potè nel successivo settembre toccare successivamente Copenaghen, Amburgo, Altona e finalmente Berlino. In questa città egli giunse nel momento in cui il Crelle maturava il disegno di un grande giornale matematico, ed è certo che egli troncò ogni indugio quando riconobbe di avere in Abel e Steiner v. n. 693) due collaboratori di genio. Va rilevato che in principio del 1826 la cattedra di matematica nell'Università di Christiania, allora vacante, fu conferita all'Holmboe; ma quel Consiglo accademico, nel presentare al Governo la relativa proposta, non mancò di segnalare Abel come persona già matura per impartire un insegnamento superiore.

669 - Non seguiremo Abel nel suo viaggio in Germania, evitando Gottinga perchè egli non riuscì a superare la sua ripugnanza ad avvicinare il « princeps mathematicorum » del suo tempo. Breve fu il suo soggiorno a Praga (ove forse avrà avuto notizia di Bolzano e dei suoi lavori) e nell'Italia settentrionale, chè gli tardava di raggiungere Parigi, ove infatti arrivò il 10 luglio 1826; ivi lavorò con sì felice intensità, che già il 30 ottobre poteva presentare a quell'Accademia delle scienze il grande *Mémoire sur une Propriété générale d'une Classe très-étendue de Fonctions transcendantes.* Legendre e Cauchy furono deputati ad esaminarlo; sfortuna volle che il secondo, incaricato di riferire, lo smarrisse fra le proprie carte, adducendo poi a scusa della propria incuria che era scritto in modo inintelligibile. Abel, avendo esaurite tutte le sue risorse finanziarie, fu costretto, verso il Natale 1826, a riprendere la via del ritorno. A Berlino giunse il 10 gennaio successivo; Crelle, che ne aveva inserite sette memorie nel I volume del suo *Giornale*, fece sforzi generosi ma infruttuosi per trattenerlo presso di sè; il giovane matematico addì 20 maggio 1827 rientrava a Christiania. Per vivere si dedicò all'insegnamento privato; il Governo norvegese gli affidò incarichi didattici provvisori e scarsamente retribuiti; qualche mese dopo il Crelle, grazie all'appoggio di A. von Humboldt, ottenne che il Governo prussiano istituisse a Berlino un seminario matematico e vi chiamasse come insegnanti Abel e Jacobi. Troppo tardi! Abel alla metà di dicembre del 1828 si recò a Froland, ospite della famiglia ove trovavasi la sua fidanzata in qualità d'istitutrice; ma gli stenti lungamente durati lo avevano talmente stremato di forze che non potè resistere agli insulti di un clima rigidissimo; una violenta infiammazione polmonare che lo colpì, lo spense

addì 6 aprile 1829, pochi giorni dopo che egli aveva scritta una breve nota per il *Giornale di Crelle*, destinata a far conoscere un caso particolare del teorema generale su cui attendeva il giudizio dell'Istituto di Francia. Questo consesso, con tardiva resipiscenza, nel 1830 divideva fra lui e Jacobi il Gran Premio delle scienze matematiche. I suoi amici si diedero attorno per fare pubblicare il lavoro da lui scritto a Parigi e più di un decennio dopo la sua morte vi riuscirono (*Mém. Sav. Étr.*, 1841). Già prima (1839) era stata pubblicata per cura dell'Holmboe la raccolta completa dei suoi scritti editi ed inediti; una seconda edizione più completa seguì nel 1881, mentre tutte le sue lettere superstiti e un grande numero di documenti che lo concernono vennero pubblicati ricorrendo il primo centenario della sua nascita, e un monumento gli fu eretto nel primo centenario della sua morte. Così la Norvegia riconobbe in tutti i modi quanta riconoscenza nutrisse per il primo dei suoi figli che fosse giunto ad assicurare un posto eminente nella storia delle matematiche.

670 - Delle sue idee intorno all'imperfezione dell'analisi e alla necessità di irrobustirne le basi, di cui Abel fece menzione in lettere private di cui riferimmo (p. 838) qualche frase, egli diede pubblica notizia, sia pure sotto forma attenuata, nella memoria intitolata *Recherches sur la série*

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

pubblicata nel T. I. (1826) del *G. di Crelle*. Precipuo scopo di essa è di determinare la somma della serie binomiale nei casi in cui converge, applicando alcuni teoremi generali a lui inspirati dal *Cours d'Analyse* di Cauchy « ouvrage qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques ». Citiamo fra essi la proposizione secondo cui, « se una serie di potenze converge per un certo valore della variabile, convergerà anche per ogni valore minore e la somma sarà una funzione continua »: notisi che balena ivi il concetto di « cerchio di convergenza », a cui giunse Cauchy ricorrendo alla rappresentazione geometrica che Abel evitò costantemente. Fra le applicazioni dei risultati ottenuti notiamo il calcolo delle somme

$$\Sigma (-1)^r \frac{\alpha^r}{r} \cos r \varphi \quad , \quad \Sigma (-1)^r \frac{\alpha^r}{r} \operatorname{sen} r \varphi$$

e gli sviluppi in serie procedenti secondo sen $rx$ e cos $rx$ delle funzioni $\cos^m x$, $\operatorname{sen}^m x$.

Altra osservazione importante fu suggerita ad Abel da una memoria di L. Olivier; questi aveva asserito che la serie $\sum_n u_n$ è sempre convergente quando $\lim_{n=\infty} (n\, u_n) = 0$; ora il nostro matematico ne dimostrò l'inesattezza (*G. di Crelle*, T. III, 1828) sull'esempio $u_n = 1/(n+1) \log(n+1)$ che si ritrova ancora in pregevoli trattazioni della materia.

671 - Un altro argomento su cui Abel, dopo reiterati sforzi, riuscì a dire l'ultima parola, è la irresolubilità della equazioni generali di un grado maggiore di quattro (veggasi infatti una elaborata memoria sull'argomento inserita nel T. I del *G. di Crelle*); benchè nella corsa verso questo memorabile risultato egli ci si presenti soltanto come buon secondo rispetto a Ruffini, la novità dell'argomentazione da lui usata ne accerta l'indipendenza da quella del nostro geniale connazionale (¹). Questa scoperta, che chiudeva finalmente la serie di secolari conati, mentre afferma che un'equazione « generale » di grado superiore al quarto non è suscettibile di risoluzione algebrica, non esclude la possibilità di equazioni « speciali » ricche di questa bella prerogativa; a provarne l'esistenza erano sufficienti le equazioni binomie; da ciò la questione di caratterizzare le equazioni letterali che possono risolversi mediante formole algebriche. Ad essa Abel dedicò una memoria (*G. di Crelle*, T. IV, 1829) nella quale è dimostrato il seguente fondamentale teorema: « Se le radici di un'equazione di grado qualunque sono fra loro legate in modo che tutte le radici si possono esprimere razionalmente in funzione di una $x$ di esse, e se di più, dettene $\theta x$ e $\theta_1 x$ due, si abbia $\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x$, l'equazione sarà risolubile algebricamente. Se inoltre l'equazione è irriducibile e il suo grado, scomposto in fattori primi, è $\alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2}\ldots$ la risoluzione di essa potrà ridursi a quella di $\nu_1$ equazione di grado $\alpha_1$, di $\nu_2$ del grado $\alpha_2$, ecc. ». L'importanza di questo risultato non ha bisogno di dimostrazione; tuttavia Abel si è arrestato a illustrarla sopra l'esempio delle equazioni binomie, promettendone altre applicazioni offerte dalla teoria delle funzioni ellittiche; ma queste ultime vanno ricercate nei lavori dedicati a tale importante soggetto. Detta importanza fu riconosciuta dai contemporanei e dai posteri, che diedero il nome di « abeliane » alle equazioni dotate dell'indicata proprietà; che Abel stesso ne abbia misurato il valore è attestato da fogli postumi i quali provano che egli continuò sino alla morte a meditare sopra le equazioni suscettibili di risoluzione algebrica (²).

Le ricerche di Abel sopra le funzioni ellittiche rappresentano un episodio delle sue vaste ricerche sopra la possibilità di esprimere un dato integrale mediante funzioni note. Questo vasto problema lo condusse al memorabile risultato contenuto nella grande memoria parigina, nella quale ha una parte fondamentale il concetto di « genere » di una funzione a due variabili; essa culmina nella seguente proposizione, mirabile generalizzazione del teorema d'addizione delle funzioni ellittiche: « Se si hanno parecchie funzioni le derivate delle quali siano radici di *una stessa equazione algebrica*, i cui coefficienti siano funzioni *razionali* di una stessa variabile, si può sempre esprimere la somma di un numero qualunque di tali funzioni mediante una funzione *algebrica* e *logaritmica*, purchè si stabilisca fra le variabili di dette funzioni un certo nu-

---

(¹) Abel stesso pubblicò nel *Bulletin* del FERUSSAC (T. VI, 1826) un riassunto di questo suo lavoro.

(²) Un complemento desideratissimo a questo teorema sarebbe dato da chi scoprisse dei criteri, per riconoscere se un'equazione algebrica è abeliana, basati sopra l'ispezione dei coefficienti; è una questione che l'Accademia di Copenaghen propose indarno alcuni anni or sono.

mero di relazioni *algebriche* ». È il teorema detto da Legendre « monumentum aere perennius » e che Abel stesso illustrò sopra l' $\int f(x, y)\, dx$ nell'ipotesi $f(x, y) = y^n + p$, $p$ essendo una funzione razionale di $x$.

672 - Abel ebbe (contemporaneamente a Jacobi) l'idea di considerare la funzione inversa di

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

certamente avendo presente l'essere

$$\text{arc sen } u = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Alle nuove funzioni egli ha dedicato, oltre l'esteso lavoro intitolato *Recherches sur les Fonctions elliptiques* (*G. di Crelle*, T. II e III), il *Précis d'une Théorie des Fonctions elliptiques* (Id., T. IV) ed altri di minor mole. Ivi se ne trova stabilita la doppia periodicità, inoltre le formole di addizione e moltiplicazione e risolto il conseguente problema della divisione, poi la trasformazione delle funzioni ellittiche, in particolare la divisione della lemniscata.

Molte pagine sarebbero necessarie per dar notizia dell'immensa messe di risultati raccolta da Abel nel campo da lui scoperto e dissodato: limitiamoci a riferire che in un articolo inserito nel T. VI (1828) delle *Astronomische Nachrichten* egli, eccitato dalle analoghe ricerche di Jacobi, risolse il problema di determinare tutti i casi in cui l'equazione

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - e_1^2 y^2)(1 - c_1^2 y^3)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 - c^2 x^2)}}$$

può essere soddisfatta ponendo $y$ = funzione razionale o irrazionale di $x$, e così fece raggiungere alla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche un tal grado di perfezione che ai posteri non rimase da aggiungervi nulla di veramente essenziale.

Se le ricerche generali sopra le funzioni trascendenti, il perfezionamento dato alla teoria delle equazioni algebriche e la creazione della teoria delle funzioni ellittiche costituiscono i più eminenti titoli di gloria per il matematico norvegese, non è a credere che esauriscano i frutti che diedero le sue incessanti meditazioni, durante il troppo breve periodo della sua esistenza. Infatti egli, algebrista per eccellenza, insegnò (*Ann. de Math.*, T. XVII, 1827) come si calcoli una funzione arbitraria di una radice comune a due date equazioni algebriche. Diede anche (*Giorn. di Crelle*, T. I, 1826) una nuova espressione per la potenza $n$ — ma di binomio, la quale possiede la strana caratteristica di contenere una quantità arbitraria; sarebbe interessante conoscere per qual via egli vi sia giunto: ma egli l'ha celata perchè, dopo avere osservato che quella formola sussiste evidentemente per $n = 0$, ne dimostrò la generalità servendosi dell'induzione completa. Alle equazioni funzionali diede un contributo im-

portante occupandosi (*G. di Crelle*, T. II, 1827) della risoluzione dell'equazione

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi[x f(y) + y f(x)],$$

nella quale sono comprese, come casi speciali, le due notissime seguenti:

$$\log x + \log y = \log x y \ , \ \text{arc sen}\, x + \text{arc sen}\, y =$$
$$= \text{arc sen}\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

Nè va taciuto che la soluzione da lui data (Id., T. I. 1826) per un problema di meccanica lo segnala come un remoto precursore della teoria delle equazioni integrali.

Caratteristiche della produzione abeliana sono lo sforzo verso il rigore, la grande ricchezza di idee e la massima generalità; ammirabile è la semplicità dei mezzi con cui giunge ai suoi grandi risultati, e veramente stupefacente è la somma di lavoro da lui compiuta, per misurare la quale è necessario avere presenti non soltanto gli scritti da lui dati alle stampe, ma anche quanto si legge fra le carte da lui vergate e che mani pietose hanno posto in dominio generale. Quali e quanti progressi avrebbe compiuta l'analisi se fosse stato possibile deviare la falce crudele della morte che si abbattè sul suo capo!

## Parte Quarta: C. G. J. JACOBI

673 - La scoperta delle funzioni ellittiche, che è uno dei maggiori titoli di gloria per Abel, fu compiuta, circa nello stesso tempo, da un altro grande matematico, di cui è opportuno di tener qui parola, quantunque egli non abbia partecipato alla lotta per il rigore (¹) che ebbe per più valorosi campioni i matematici di cui ci siamo testè occupati, pure applicando le norme da essi caldeggiate (veggansi, infatti, le memorie sulla formola di Maclaurin e sullo sviluppo in frazione continua dell' $\int_0^x e^{-xx}\,dx$ inserite nel T. XII del *G. di Crelle*). Parliamo di C. G. J. Jacobi. Egli nacque a Potsdam il 10 dicembre 1804; sino da giovinetto mostrò intelligenza così straordinaria che a soli dodici anni si trovò nell'ultimo stadio del corso secondario e dovette rimanervi per quattro anni onde raggiungere l'età prescritta per essere ammesso all'Università. Durante questo periodo studiò le opere dei più grandi matematici (specialmente di Euler e Lagrange) e, provandosi ad emularli, s'illuse, egli pure, di avere risolte le equazioni di 5° grado; in pari tempo egli mostrò tanta attitudine anche per gli studi storici e filosofici (²) che il rettore dell'istituto in cui si trovava non esitò a proclamarlo « una mente universale ». Conseguita (11 aprile 1821) la licenza liceale, s'inscrisse (maggio 1821) all'Università di Berlino e durante parecchio tem-

(¹) Si narra che egli ebbe a dichiarare che gli mancava il tempo per pensare al rigore.

(²) Sono documenti di questa attitudine i suoi studi sulla matematica greca, sgraziatamente per la maggior parte rimasti inediti e ormai dispersi.

po oscillò fra la filologia e la matematica; finalmente decise per questa, e il 13 agosto 1825 ottenne la laurea dottorale, dietro presentazione di una dissertazione sopra un tema chiaramente indicato dal suo titolo: *Disquisitiones analiticae de Fractionibus simplicibus* (v. anche una memoria nel T. V del *G. di Crelle*); ivi alcune formole di Lagrange sono dimostrate, altre vengono completate. Subito gli venne conferita anche la libera docenza; la esercitò a Berlino per circa un anno, poi a Königsberg, ove era stato trasferito per decreto ministeriale (26 aprile 1826); in data 28 dicembre 1827 fu nominato professore straordinario dell'Università di Königsberg. Qui venne a contatto col grande astronomo Bessel (cfr. p. 817), che esercitò su di lui la più felice influenza, proponendogli incessantemente nuove questioni. Gli è nell'inverno 1826-27 che — ignorando quanto Abel aveva già fatto, non ancora pubblicato — scrisse le prime sue pagine relative alle funzioni ellittiche; diresse allora alcune lettere allo Schumacher, che questi si affrettò a pubblicare nel periodico da lui diretto, ed iniziò quella corrispodenza con Legendre, che durò sino a pochi mesi innanzi la scomparsa del glorioso veterano. La pubblicazione delle *Recherches sur les Fonctions elliptiques* di Abel lo spinse ad intensificare i proprii studi sullo stesso tema e dei risultati ottenuti diede alcuni saggi nel *G. di Crelle*, di cui fu fedele collaboratore. Limitiamoci a ricordare due inattese applicazioni delle nuove funzioni: una (Id., T. III) avente per scopo di stabilire la relazione che intercede fra i raggi di due cerchi e la distanza dei loro centri quando in uno si può inscrivere un $n$-gono circoscritto all'altro; la seconda relativa alla scomposizione di un numero in quattro quadrati (Id., id.). I risultati che andava ottenendo assunsero in breve tale estensione che egli (pur continuando a darne rapida notizia nel *G. di Crelle*) nell'estate 1828 deliberò di esporli metodicamente in un'opera speciale; è quella che fu pubblicata nell'aprile 1829 col titolo *Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum* e che diffuse nel mondo la conoscenza delle funzioni sen am, cos am, $\Delta$ am, $\Theta$ $(u)$, H $(u)$. Nel frattempo Jacobi era stato promosso ordinario (28 febbraio 1829); nell'autunno dello stesso anno trascorse alcuni mesi a Parigi; nel 1842 si recò in Inghilterra, per incarico del Governo prussiano, il quale volle essere rappresentato al congresso dell'Associazione britannica per il progresso della scienza. In seguito (luglio 1843) per ragioni di salute intraprese un viaggio in Italia, che durò circa un anno, e nel quale ebbe per compagni il Borchardt e Lejeune-Dirichlet e s'incontrò con Steiner, a cui era già legato da cordiale amicizia. Rimpatriato, facendo presente al suo Governo la necessità di vivere in un clima più dolce di quello di Königsberg, fu (autunno 1844) trasferito a Berlino in qualità di accademico, ciò che lo esonerava dall'obbligo dell'insegnamento, pur concedendogli il diritto d'insegnare in quell'Università. Durante le agitazioni da cui nel 1848 neppur Berlino rimase immune, si lasciò per breve tempo attrarre dalla vita pubblica: ma ben presto se ne ritrasse; tuttavia il Governo prussiano giudicò opportuno che egli ritornasse a Königsberg, ove era sempre considerato per professore; a stento stornò questo pericolo, ma l'autorità regia come punizione gli tolse alcuni assegni di cui godeva; una chiamata a Vienna ebbe per risultato il ripristino di quei favori; ma dei conseguenti agi

Jacobi potè usufruire per breve tempo, chè il 18 febbraio 1851 si spense fra l'universale cordoglio.

674 - Contemplando nel suo insieme l'opera scientifica di Jacobi non si stenta a riconoscere che egli appartenne alla classe di pensatori avente per prototipi Euler e Cauchy, avendo egli arrecato contributi importanti a tutti i rami della matematica, sia pura (algebra, teoria dei numeri, analisi, geometria) che applicata (meccanica, astronomia); se i suoi lavori non riempiono tanti volumi quanti gli scritti di quei due infaticabili investigatori, gli è che fu colpito a morte mentre era nel pieno esercizio delle sue funzioni di scopritore. Una completa enumerazione delle sue scoperte riempirebbe un grande numero di pagine; forza ci è dunque di limitarci alle più cospicue.

Già si è detto del suo volume sopra le funzioni ellittiche; ora aggiungiamo che esso comprende soltanto la parte elementare della nuova disciplina; ne sono naturale complemento le molte memorie (*G. di Crelle*, TT. II, III, IV, VI, VII, XV, XXVI e XXXVI) aventi lo scopo di perfezionare la conoscenza o applicare una classe di funzioni che Jacobi riteneva potessero servire, come le funzioni circolari, in tutte le branche delle matematiche. Proseguendo nello stesso ordine d'idee (Ivi, TT. IX, XIII, XXIV, XXVI e XXX) egli mostrò che l'inversione degli integrali della forma $\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ non può farsi quando $f(x)$ sia un polinomio di un grado superiore a 4, perchè così ci s'imbatterebbe in funzioni con più di due periodi, delle quali egli dimostrò l'inesistenza; per giungere alle funzioni che furono poi dette « abeliane », egli, dopo lunghi sforzi, ispirandosi al grande teorema di Abel, di cui per primo seppe misurare la somma importanza, introdusse la considerazione di quelle funzioni di più variabili la cui investigazione egli lasciò ai suoi successori, primi dei quali sono G. G. Rosenhain (n. a Königsberg nel 1816, m. ivi nel 1887) e A Göpel (n. a Rostock nel 1812, m. a Berlino nel 1847), del secondo dei quali egli scrisse una bella necrologia.

Nell'impossibilità di arrestarci a descrivere il contenuto dei molti lavori di Jacobi sopra la trasformazione di integrali (Id., TT. II, VIII e X), richiamiamo l'attenzione dei lettori sopra i contributi da lui dati alla teoria delle equazioni differenziali (a partire dal T. II del *G. di Crelle*), sia ordinarie che a derivate parziali (non è forse a lui che devesi l'« ultimo moltiplicatore »?), i quali si collegano naturalmente alle sue fondamentali ricerche sul calcolo delle variazioni (Id., T. XVII), sulla dinamica dei solidi e sulla meccanica celeste (problema dei tre corpi e perturbazioni planetarie).

L'algebra deve a lui importanti ricerche sopra le forme quadratiche (Id., T. XII) e una classica esposizione della teoria dei determinanti (Id., T. XXII), preludio a quella (Ivi) memoria sopra i determinanti funzionali che lo fanno riguardare per creatore della teoria delle funzioni dette oggi Jacobiani. Altri suoi lavori perfezionarono la teoria dell'eliminazione (Id., T. XV) ed altri insegnarono a rappresentare le radici di un'equazione algebrica mediante integrali definiti (Id., T. II e XIV) o per serie (T. VI). Fra i lavori di carattere algebrico notiamo quelli che

proiettarono luce sulle figure costituite dai punti comuni a curve o superficie algebriche d'ordine qualsivoglia (Id., T. XV), senza dimenticare un articolo in cui il grande analista ottenne direttamente (Id., T. XL) la espressione del numero delle tangenti doppie di una curva piana scoperta da Plücker (n. 702) basandosi sulla legge di dualità. È qui giunto il momento per citare con sommo onore i suoi lavori sulle quàdriche (TT. II e XIX) i quali concernono la determinazione delle linee geodetiche, la quadratura di quelle di rivoluzione e la rappresentazione sul piano di un ellissoide, problemi da lui in parte risoluti applicando le nuove trascendenti di cui è uno dei creatori. Altri risultati da lui stabiliti appaiono quali prodotti secondari delle sue ricerche sull'attrazione degli ellissoidi le quali lo portarono, fra l'altro, alla scoperta di una nuova forma d'equilibrio di una massa fluida, da aggiungersi alla già nota (ellissoide rotonda); si tratta di un'ellissoide non di rotazione caratterizzata da una relazione e fra i suoi tre assi.

Un volume basterebbe a mala pena per enumerare tutti i contributi da lui dati alla teoria dei numeri (Id., TT. II, III, XII, XIX, XXX, XXXII), vuoi ispirandosi a Gauss, vuoi applicando le funzioni ellittiche, senza sdegnare il lavoro di compilazione di una notevole tavola numerica. Anche la geometria infinitesimale fu da lui coltivata con successo: infatti per primo egli diede (Id., T. XIV) le formole atte alla determinazione della sfera osculatrice di una curva sghemba e scoperse una bella generalizzazione del teorema di Gauss sull'area di un triangolo limitato da archi di geodetica (Id., T. XVI).

A scrivere buon numero di questi lavori egli fu indotto dai corsi di lezioni che egli tenne specialmente a Königsberg [1], ove per sua iniziativa fu nel 1834 creato un Seminario matematico [2]; tali lezioni erano informate al concetto di usare il ragionamento di preferenza al calcolo e riuscivano estremamente interessanti ed istruttive perchè presentavano le scoperte che andava compiendo il professore; delle principali furono fatte accurate redazioni da parte di discepoli che conseguirono poi posizioni eminenti nella scienza, copie delle quali si trovano in parecchie biblioteche tedesche: alla morte di Jacobi si era pensato di darle alle stampe, ma poi ci si limitò di pubblicarne l'elenco nelle *Ges. Werke*. Fanno eccezione le *Vorlesungen über Dynamik* di cui un distinto matematico A. Clebsch (v. n. 712) da giovane fece una relazione che pubblicata che fu, non tardò ad assurgere al livello di opera classica per sostanza e per forma. Nè va taciuto che gli è da questo momento che in Germania i corsi universitari, scambio di essere semplici riproduzioni di trattati elementari, ebbero per oggetto le teorie più elevate in istato di formazione.

Va da ultimo notato che il fattivo entusiasmo per la scienza, da cui Jacobi fu costantemente animato, lo indusse ad interessarsi alle opere degli scienziati defunti; ne è prova il favore con cui egli accolse il pro-

---

(1) Informazioni al riguardo trovansi in fine al T. VII delle sue *Werke*. Di notevole importanza sono quelle ove la teoria delle funzioni ellittiche è dedotta dalle serie Θ.

(2) La « Scuola di Königsberg » fondata da Jacobi continuò gloriosamente, specialmente per merito di un suo eminente discepolo, F. J. Richelot (n. a Königsberg il 6 novembre 1808, m. ivi il 31 marzo 1875).

getto di una edizione completa delle *Opere* di Euler e il disinteressato aiuto da lui prestato al Fuss (v. p. 695), quando oltre ad avere formulato quel progetto, egli si adoperava a tradurlo in atto.

## BIBLIOGRAFIA

B. Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* (Prag, 1804).

B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeten reinen Darstellung der Mathematik* (Prag, 1810).

B. Bolzano, *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher beweisen* (Prag, 1816).

B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes: dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Prag, 1817; ristampato fra gli *Ostwalds Klassiker*).

B. Bolzano, *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung der unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematiker zur Prüfung vorgelegt* (Leipzig, 1817).

Bernhard Bolzano's, *Schriften herausgegeben von der K. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.* Bd. I, *Functionenlehre* (Prag. 1930); Bd. II, *Zahlentheorie* (Id., 1931).

Dr. Bernhard Bolzano's, *Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von* F. Prihonsky (Leipzig, 1851; II ed., Berlin, 1899; III. ed., 1920).

A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* (Paris, 1821).

A. L. Cauchy, *Resumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul différentiel* (Paris, 1823).

A. L. Cauchy, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie* (due Volumi, Paris, 1826-28).

A. L. Cauchy, *Leçons sur le Calcul différentiel* (Paris, 1829).

A. L. Cauchy, *Exercices de Mathématique* (51 puntate, 1826-1830).

A. L. Cauchy, *Résumé analytiques* (5 puntate, Torino, 1833).

A. L. Cauchy, *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (4 Volumi, 1840-47).

*Oeuvres complètes* d'Augustin Cauchy (sinora 24 Volumi in 4°, Paris, 1882-1932).

F. Moigno, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral rédigées principalement d'après les travaux de M. A. L. Cauchy*, T. I (Paris, 1840); T. II (Paris, 1844).

*Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État norvégien par* L. Sylow *et* S. Lie (T. I, contenant les mémoires publiés par Abel; T. II, contenant les mémoires posthumes d'Abel. Christiania, 1881).

N. H. Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance* (Christiania, 1902).

N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques. Second Mémoire* (Acta Mathem., T. XXVI, 1902).

Jacobi, *Canon arithmeticus, sive Tabulae quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra* 1000 *numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes* (Berlini, 1839).

Jacobi, *Opuscula mathematica* (due Volumi, Berolini, 1846 e 1851).

C. G. J. Jacobi's, *Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der K. Preuss. Akad. der Wissenschaften* (sette Volumi, Berlin, 1881-1891).

C. G. J. JACOBI'S, *Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von* A. CLEBSCH (II Aufl., Berlin, 1884).

L. KOENIGSBERGER, *Carl Gustav Jacob Jacobi* (Leipzig, 1904; contiene molte lettere e pagine inedite del grande matematico).

W. AHRENS, *Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobi's* (Bibl. mathem., III Ser., T. VII, 1906-7).

W. AHRENS, *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi* (Abh. zur Gesch. der Mathem., XXII Heft, 1907).

P. STAECKEL und W. AHRENS, *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Euler's* (Bibl. mathem., III, Ser., T. VIII, 1907-8).

W. v. DYCK, *Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumann's vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi* (Math. Ann. T. LVI, 1903).

## CAPITOLO XLI

# COSTITUZIONE DELLA FISICA MATEMATICA

675 - La *Mécanique analytique* di Lagrange offrì l'esempio ed il modello della trattazione matematica della più semplice delle branche della fisica. Era naturale il pensiero di proseguire nella medesima via, sforzandosi di piegare al ferreo impero del ragionamento matematico l'investigazione di altri fatti naturali: uno, grazie alla semplicità di alcuni fra i relativi fenomeni, presentava diritti di precedenza, l'ottica, di cui già i Greci avevano cominciato ad occuparsi (v. p. 50) e di cui erano da tempo stabiliti tre principii fondamentali (rettilineità dei raggi luminosi e legge di riflessione). I primi anni del secolo XIX assistettero ad ulteriori notevoli progressi nella conoscenza dei fenomeni luminosi (Malus, Fresnel); con le conseguenti ricerche di carattere matematico inizieremo la narrazione del primo stadio di sviluppo della fisica matematica, traendo in tal modo occasione per completare in qualche punto il quadro delle scoperte di un grande di cui ci occupammo nel Capitolo precedente.

## In Francia

676 - All'applicazione dell'analisi allo studio dei fenomeni naturali Cauchy volse la mente sino da giovare, cosa che non stupirà chi ricorda gli uffici da lui occupati non appena compiuto il suo tirocinio scolastico con un successo di cui è primo documento l'essere egli riuscito vincitore nel 1816 in un importante concorso accademico (p. 831), relativo al movimento dei fluidi.

In quell'epoca i lavori di Fresnel (1788-1827) sui fenomeni luminosi e le discussioni provocate da essi avevano fatto divenire l'ottica la scienza di moda. Cauchy vi si dedicò sin d'allora e si può dire che non l'abbandonò durante tutta la propria vita, riuscendo non soltanto a giustificare pienamente le premesse del fisico succitato, ma rendendo più chiaro il meccanismo dei fenomeni di propagazione della luce, di riflessione e rifrazione, di polarizzazione, di dispersione e diffrazione.

Altro campo in cui Cauchy era naturalmente destinato a recare essenziali migliorie è l'astronomia. Se l'analisi, quale era al tramonto del sec. XVIII, esigeva la bonifica integrale che è merito del sommo matematico francese di avere validamente iniziata, che cosa dire della meccanica celeste, ove si incontravano formole non rigorosamente dimostrate e serie di cui non era stata peranco accertata la convergenza? Gli è nel 1831, quando Cauchy trovavasi a Torino, che alcune parole scambiate col noto

astronomo Giovanni Plana (v. n. 748) lo fecero intraprendere studi dell'indicata specie; creò allora quel « calcolo dei limiti » che si mostrò tanto utile negli studi sul moto degli astri. Quando poi nel 1839 entrò nel Bureau des Longitudes, riprese quest'ordine di ricerche e, giovandosi anche della sua « teoria dei residui », giunse a procedimenti di calcolo il cui valore fu solennemente accertato quando essi gli permisero di controllare rapidamente risultati faticosamente conseguiti dall'astronomo J. Leverrier (1811-1877), per poi condurre a una nuova teoria dei movimenti planetari.

677 - Circa contemporaneo di Cauchy è Giuseppe Fourier. Egli nacque a Auxerre il 21 marzo 1768; gli ecclesiastici di cui fu alunno gli affidarono ben presto un insegnamento nella Scuola militare da essi diretta in quella città. Sino dai suoi anni giovanili si occupò della risoluzione delle equazioni numeriche e, appunto per far conoscere i suoi metodi, si recò a Parigi ove il 9 dicembre 1789 lesse una memoria dinnanzi ai membri di quell'Accademia delle Scienze (1). A Parigi ritornò come uno dei 1500 alunni della Scuola Normale fondata dal Governo repubblicano e ben presto ne divenne uno dei « maîtres de conférences ». Passò poi ad insegnare nella Scuola Politecnica, ove non mancò di far conoscere il procedimento da lui ideato per risolvere le equazioni numeriche (2). Nel 1798 andò in Egitto al seguito di Napoleone ed ebbe la carica di segretario generale dell'Istituto creato sulle rive del Nilo: in Egitto, ad onta dei molti incarichi che gli affidò la fiducia del Governo del tempo, non abbandonò le ricerche scientifiche, come provano le memorie scritte allora e poi lette dinnanzi a detto Istituto. Evacuato l'Egitto, rientrò in Francia e Napoleone, con decreto del 2 gennaio 1802, lo nominò prefetto dell'Isère. Malgrado le cure dell'amministrazione di un intero dipartimento, riprese gli antichi studi e nel 1804 compose una memoria riassumente le sue ricerche sopra le equazioni numeriche; gettò inoltre le basi della sua *Théorie analytique de la Chaleur;* una memoria da lui presentata su questo argomento all'Accademia di Parigi indusse l'Istituto di Francia a scegliere questa teoria come soggetto di concorso a premio, per l'anno 1812. Fourier concorse e venne premiato, benchè i commissari Laplace, Lagrange e Legendre facessero delle riserve intorno al rigore di certi ragionamenti (riserve contro cui Fourier protestò sempre). Luigi XVIII lo conservò al suo posto di prefetto e Napoleone, reduce dall'Elba, lo destinò a Lione. Ritornati i Borboni, riuscì ad ottenere la direzione dell'Ufficio di statistica alla prefettura della Senna: nel 1817 entrò all'Accademia delle Scienze e nel 1822 ne divenne segretario perpetuo; nello stesso anno pubblicò la sua opera sul calore; morì il 16 maggio 1830 mentre si stava pubblicando il suo volume sulle equazioni numeriche, frutto di quarant'anni di studi.

678 - Nella storia delle matematiche la *Théorie analytique de la Chaleur* occupa un posto cospicuo perchè, grazie ad essa, le serie trigo-

(1) Un riassunto di questo lavoro leggesi nell'*Avvertimento* premesso dal Navier (1785-1836; noto per lavori di fisica matematica) all'*Anal. des Équat.* (vedi *Bibliografia*).
(2) Cfr. il succitato *Avvertimento.*

nometriche prendono posto stabile nell'analisi (donde il nome di « serie di Fourier » con cui sono spesso designate); mentre prima erano state incontrate ed usate incidentalmente, a partire da questo momento furono metodicamente studiate dal punto di vista della convergenza e continuamente applicate; così vennero in parte giustificati, in parte dissipati alcuni dubbi affacciati nel 1812 dai geometri dell'Istituto di Francia. Rileviamo che Fourier ha ridotta la ricerca della rappresentabilità di una funzione $\varphi(x)$ mediante una serie trigonometrica alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari con infinite incognite ed ha poi trovato esserne l'$n$-mo coefficiente espresso come segue: $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} n x \cdot d x$; aggiungiamo che, dopo di avere stabilita la relazione

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5 x + \ldots$$

(la quale per $x = \frac{\pi}{2}$ rientra in una scoperta da Leibniz, v. p. 579), egli ha rilevato che essa sussiste soltanto quando $x$ cade entro determinati limiti.

Dell'*Analyse des Eq. déterm.* uscì soltanto la I Parte per cura di un illustre cultore della meccanica applicata, il Navier (n. a Digione il 15 febbraio 1785, m. a Parigi il 23 agosto 1836). È un'opera che viene tuttora citata specialmente perchè contiene il seguente teorema: « Se $f(x) = 0$ è una equazione di grado $m$, a coefficienti reali, si consideri la serie formata da essa e dalle sue derivate $f'(x)$, $f''(x)$, ... , $f^m(x)$, si sostituiscano ivi a $x$ due valori reali qualunque $a$, $b$ e si noti il numero delle variazioni di segno che si presentano in ciascuna serie; la differenza di questi due numeri esprime il numero delle radici della data equazione che cadono fra $a$ e $b$, oppure ne differisce per un numero pari ». Da esso possono dedursi la regola dei segni di Descartes ed altre proposizioni congeneri dovute al de Gua; riguardo al modo di applicarlo Fourier entrò in molti particolari, convinto come era che la risoluzione delle equazioni numeriche costituisse un capitolo della pratica aritmetica non dissimile dalla estrazione delle radici; nè mancò di notare che alcuni dei principii da lui posti sono applicabili anche ad equazioni trascendenti.

Si ricordi ora essere:

$$f(x + a) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots ;$$

si vedrà allora che la prima successione di segni considerata da Fourier non differisce da quella che si ottiene facendo la trasformata in $x + a$ dell'equazione proposta. È questo il punto di vista prescelto da un oscuro medico francese, il Budan, il quale in una memoria che riscosse (31 ottobre 1803) l'approvazione dell'Istituto di Francia, e quattro anni dopo in un lavoro dedicato a Napoleone, espose idee e metodi nel fondo concordanti con quelli di Fourier. Questi si affrettò a correre ai ripari facendo apporre date alle sue varie comunicazioni sull'argomento (v. il

più volte citato *Avvertimento* del Navier); ma chi venne poi, senza menomare il valore di tali documenti, inclinò a ritenere che il Budan abbia seguito di proprio impulso il corso dei suoi pensieri, senza nulla conoscere di quanto aveva fatto il prefetto dell'Isère; donde la ragione per cui al surriferito teorema viene spesso dato il nome di Budan-Fourier. Ma se questo, toccato a Fourier, non è che uno degli incidenti a cui trovansi esposti tutti coloro che, nelle loro pubblicazioni, sacrificano spesso e volentieri alla Dea Procrastinazione, di ben più grave infortunio egli fu vittima perchè, prima ancora che venisse pubblicato il suo volume algebrico, un giovane alle sue prime armi scopriva (v. n. 729) una proposizione assai più perfetta di quella di Fourier, in quanto insegna, senza incertezza, quante radici reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali cadano in un dato intervallo.

679 - È ora il caso di far menzione di uno scienziato il quale, benchè abbia dato alla matematica contributi d'indiscutibile valore, deve la fama di cui meritatamente gode alle sue scoperte nel campo dell'elettricità: A. M. Ampère. Egli nacque a Lione il 22 gennaio 1775; suo padre, travolto dal turbine rivoluzionario, venne decapitato nel 1793. avvenimento terribile che gettò il giovinetto in un lungo periodo di depressione. Vinto questo, per campare la vita, diede lezioni private sinchè (dicembre 1801) ottenne un posto di professore di fisica nella Scuola dipartimentale di Bourg. A trent'anni, grazie all'appoggio di Lalande e Delambre, conseguì un posto di ripetitore nella Scuola Politecnica; alla morte di Lagrange (1813) ne occupò il seggio all'Accademia delle Scienze; morì il 10 giugno 1836 a Marsiglia, ove aveva cercato indarno sollievo ad una malattia che non perdona. Sono le sue *Considérations sur la Théorie mathématique du Jeu* (Lyon, 1802), importante contributo alla teoria delle probabilità, che lo fecero conoscere come giovane da cui la scienza poteva attendere molto. Fra i lavori da lui pubblicati nei periodici editi dalla Scuola ove insegnava, notiamo quello dal titolo *Démonstration de l'Egalité des Volumes de deux Polyèdres symétriques* (Corr. Ec. Pol., I, 1808) e la memoria *Sur les avantages qu'on peut tirer dans la Théorie des courbes de la Considération des paraboles osculatrices* (Journ. Ec. Pol., VII Cah., 1808), efficace preparazione alle ricerche che condussero molto più tardi alla geometria intrinseca. Altri suoi scritti concernenti l'applicazione del calcolo delle variazioni a questioni di meccanica, i fondamenti del calcolo infinitesimale e le equazioni differenziali (specialmente quelle a derivate parziali di 2° ordine), tutti, per varie ragioni notevoli, anche se un concetto di « funzione » più ristretto di quello oggi in uso lo abbia condotto a pretese dimostrazioni dell'esistenza di derivata in ogni funzione continua e della formola di Taylor (Journ. Ec. Pol., XIII Cah., 1806) [1]. Mente di svariate attitudini, egli ha proposto una geniale classificazione delle scienze come applicazione delle vedute esposte nell'*Essai sur la Philosophie des Sciences* (Paris, 1834).

---

[1] Ampère era evidentemente animato dall'aspirazione di perfezionare la trattazione lagrangiana (vedi n. 598) del calcolo infinitesimale.

680 - S. D. Poisson nacque a Pithiviers il 21 giugno 1781; nel 1798 entrò nella Scuola Politecnica alla testa dei proprii condiscepoli; nell'anno successivo era ivi nominato ripetitore, poi (1801) supplente e finalmente (1806) professore; tre anni dopo gli veniva conferita la cattedra di meccanica razionale alla Sorbona e nel 1822 entrava nell'Istituto di Francia: degli altri uffici affidatigli dal Governo francese non giova fare qui l'enumerazione. Pensatore vigoroso potè dare alla scienza contributi numerosi ed importanti essendosi tenuto sempre al corrente di quanto si andava pubblicando; così evitò il pericolo di perdere tempo e fatica nello scoprire ciò che già sapevasi. Da giovane s'interessò a questioni di matematica pura, molte delle quali gli furono suggerite dall'esercizio dell'insegnamento, al quale si consacrò durante tutta la vita con fervore quasi ascetico; così fu indotto a congegnare (*Journ. Éc. Pol.,* XI Cah., 1800) una dimostrazione del teorema di Bézout preferibile a quella complicatissima data dall'inventore ed a proporre (*Bull. de la Soc. Philomathique,* 1812) una sua soluzione analitica del problema della sfera tangente a quattro altre; importante è poi l'osservazione da lui fatta (*Journ. f. r. u. a. Mathem.,* T. VIII, 1832) che il teorema di Euler sulla curvatura delle superficie (v. p. 713) ammette eccezioni. Sin dall'8 dicembre 1800 presentò all'Accademia delle Scienze una memoria sul numero degli integrali completi delle equazioni a differenze finite, che fu giudicata degna di prendere posto nella raccolta dei *Sav. Etr.* (ma che fu pubblicata nell'XI Cah. del *Journ. Éc. Pol.*). Pure importante è una sua memoria sul calcolo delle variazioni, letta il 10 novembre 1831 ed inserita nel T. XII (1833) delle *Memorie dell'Istituto di Francia.*

Sia subendo l'influenza del proprio insegnamento, sia per proprio impulso, Poisson con l'andare degli anni si orientò verso le applicazioni della matematica. Sino dal 1811 pubblicò quel *Traité de Mécanique* che godette di larga diffusione e di cui nel 1833 vide la luce una II edizione migliorata. Alla teoria delle probabilità dedicò (1837) l'*Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilité des Décisions rendues a la pluralité des voix,* che destò largo interesse in isvariate classi sociali. Numerosissimi sono gli scritti che egli dedicò alle calcolazioni astronomiche; ancor più lo sono quelli relativi allo studio matematico di fenomeni naturali (elettricità, magnetismo, capillarità, calore, elasticità, acustica), vagheggiando il pensiero di arricchire la sua patria di un completo trattato di fisica matematica; ma la morte che lo colpì il 25 aprile 1840, gli tolse di eseguire questo grandioso progetto [1].

681 - Gabriele Lamé nacque a Tours il 22 luglio 1795; attratto irresistibilmente verso le matematiche, entrò nel 1816 nella Scuola Politecnica; per motivi politici la classe a cui apparteneva fu sciolta, ma ai componenti di essa fu concesso di subire l'esame di licenza alla fine dell'anno successivo. Così egli potè passare alla Scuola delle Miniere; e, mentre vi si trovava, dava alle stampe quell'*Examen des differentes Méthodes employées pour resoudre les Problèmes de Géométrie* (Paris, 1818), che lo rivelò come uomo destinato ad occupare i primi posti nella

[1] Il lettore troverà l'elenco completo delle (354) pubblicazioni del Poisson in calce all'*Éloge* pronunciatone dall'Arago all'Accademia delle Scienze di Parigi.

scienza. Per provare che questo *Essai* possiede valore permanente rileviamo che vi si trova quel *principio*, detto appunto *di Lamé*, che insegna a dedurre dalle equazioni di due curve piane dello stesso ordine quelle di infinite altre che ne contengano tutti i punti ad esse comuni e ad eseguire l'analoga deduzione nello spazio; ivi debbonsi poi cercare le definizioni e il primo studio delle cosidette *curve* e *superficie di Lamé*, rappresentate da equazioni della forma

$$\frac{x^a}{a^a} + \frac{y^a}{b^a} = 1 \ , \quad \frac{y^a}{a^a} + \frac{y^a}{b^a} + \frac{z^a}{c^a} = 1; \ (^1)$$

finalmente (per non segnalare altri risultati più speciali) vi si legge la prima (se non erriamo) costruzione della quàdrica individuata da nove de' suoi punti.

Prima ancora di avere ultimato il corso intrapreso nella Scuola delle miniere, il Governo francese, in seguito a richiesta avuta da quello russo, lo inviava a Pietroburgo, insieme al fisico Clapeyron (1799-1864): importa notare che, benchè in quella città fosse assorbito da lavori d'ingegneria mineraria, il Lamé potè inviare all'Accademia di Parigi una pregevole memoria sopra la propagazione del calore nei poliedri.

Per circa un decennio Lamé visse tranquillamente in Russia; ma la rivoluzione di luglio (1830) avendo allarmato il sospettoso Governo degli czar, egli (e così il Clapeyron) ritenne giunto il momento di rimpatriare; a Parigi trovò, con l'amico, occupazione nella libera professione d'ingegnere, sino a che non fu chiamato a insegnare prima fisica alla Scuola Politecnica e poi fisica matematica alla Sorbona: da questo insegnamento ebbero origine quattro importanti volumi di Lezioni (v. *Bibliografia*). Lamé morì, membro dell'Istituto, il 1° maggio 1870.

682 - Benchè la sua mente fosse potentemente attratta dallo studio di fatti reali, Lamé non tralasciò di occuparsi di questioni prettamente teoriche, per le quali sin da giovane aveva dimostrata una spiccata attitudine. Infatti un suo articolo intitolato *Un polygone convexe etant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen des diagonales?* (Journ. de Mathèm., T. III, 1838) contiene una nuova soluzione di un problema che vedemmo (n. 643) proposto dal Segner. Anche la teoria dei numeri attrasse la sua attenzione; animato dalla nobile ambizione di essere l'Edipo dell'enigma legato da Fermat, egli riuscì a dimostrare l'impossibilità dell'equazione $x^7 + y^7 = z^7$ (Id., T. V, 1840), studiò poi anche l'enunciato generale, nonchè il caso dell'esponente 5 (Id., T. XII, 1847). Inoltre il suo nome è legato ad un'equazione differenziale di 2° ordine da lui incontrata nella teoria del calore e che fu poi oggetto d'importanti ricerche. Egli è a ragione riguardato come creatore della teoria delle coordinate ellittiche, che egli ha brillantemente applicate nel suo *Mémoire sur les Surfaces isothermes dans les Corps solides homogènes en équilibre de temperature* presentato nel 1837 all'Istituto di Francia e pubblicato nel 1837 nella raccolta dei *Sav. Étr.*

(1) In Lamé l'esponente *a* si suppone sempre intero e positivo; ma in seguito gli si attribuirono tutti i valori razionali.

(v. anche *Journ. di Liouville,* T. II); delle stesse fece poi altre importanti applicazioni alla fisica (Id., T. IV, 1839) ed all'analisi (Id., T. III e C. R., T. IV, 1845). Lamé non tardò ad estendere quel concetto giungendo alle coordinate curvilinee, limitate però al caso — che è nella pratica il più importante — dell'ortogonalità; già nel *Mémoire sur les Lois de l'équilibre du Fluide éthéré* (Journ. Ec. Pol., XXIII Cah., 1834) si trovano le relazioni che legano le nuove coordinate alle cartesiane; ma gli è nel *Mémoire sur les Coordonnées curvilignes* presentato all'Accademia delle Scienze nel 1838 (e pubblicato nel T. V del *Journ. di Liouville*) che si trovano le formole fondamentali relative a questa importante teoria. Nel posteriore *Mémoire sur les Surfaces orthogonales et isothermes* (Ivi, T. VIII, 1843) dimostrò che le superficie dell'indicata specie sono quàdriche particolari. Finalmente nel *Mémoire sur les variations des Coordonnées curvilignes* (Ivi, T. XVI, 1851) ha, fra l'altro, risolto il problema di determinare tutti i sistemi tripli ortogonali dotati della proprietà che, se contengono una certa superficie, conterranno pure quella parallela a distanza infinitesima. Un suo corso di *Lezioni* sulle coordinate curvilinee, benchè di data ormai remota, ha conservato intatto il suo alto valore.

Commetteremmo una imperdonabile ingiustizia chiudendo questa sezione della nostra *Storia* senza far cenno di un altro alunno della Scuola Politecnica il quale, benchè siasi dedicato di preferenza alla scienza dell'ingegnere, ha saputo perfezionare in almeno due punti la geometria. Parliamo di A. J. C. Barré de St. Venant (n. vicino a Melun il 23 agosto 1797, m. nei pressi di Vendôme il 6 gennaio 1886); di lui va ricordato con distinzione il *Mémoire sur les lignes Courbes non planes* (presentato all'Accademia di Parigi il 16 ottobre 1844 e pubblicato l'anno dopo nel XXX Cah. del *Journ. de l'Ec. Pol.*), ove, fra l'altro, l'autore (senza conoscere un articolo a noi noto, p. 840 di Jacobi) espose il concetto, il nome e la determinazione della sfera osculatrice di una curva gobba. Nè va taciuto che con la nota *Somme et Différence géométriques relatives à la mécanique* (C. R., T. XXI, 1855) ha preso posto fra coloro che contribuirono alla costituzione della geometria vettoriale, così utile specialmente nello studio di questioni fisiche.

## In Inghilterra

683 - Mentre gli scienziati di cui testè trattammo furono matematici fisici (ove il primo vocabolo è un sostantivo ed il secondo un aggettivo), in quanto — ad eccezione dell'Ampère — si occuparono di applicare il calcolo alla spiegazione ed illustrazione di fatti che altri avevano osservati, quelli a cui ora ci volgiamo furono prevalentemente fisici, onde al progresso della matematica contribuirono soltanto scarsamente e incidentalmente.

Il primo che, in ordine cronologico, ci si presenta è Giorgio Green; nacque a Nottingham il 14 luglio 1793; studiò a Cambridge, ove gli fu conferito il grado di Fellow del Cajus College; morì a Sneiton il 31 marzo 1841. È celebre per un saggio di applicazione dell'analisi matematica

all'investigazione dei fenomeni elettrici, pubblicato a parte nel 1828, ma che raggiunse la meritata rinomanza quando venne ristampato nel *Giornale di Crelle;* oltre il termine tecnico « potenziale » che non tardò ad entrare nella fisica, vi si trova una formola di calcolo integrale che porta ancora il nome di Green; va pure rilevato che in una sua memoria sull'attrazione degli ellissoidi (1835) ha, forse per primo, applicata in questioni di fisica la considerazione di spazi a più dimensioni.

In altro campo lavorò J. Mac Cullagh, un irlandese nato nel 1809, che insegnò all'Universtià di Edimburgo a partire dal 1835 e che morì suicida, in un accesso di melanconia, il 27 ottobre 1847. Egli s'interessò alle teorie ottiche dovute a Fresnel, apportando alle ipotesi fondamentali del fisico francese alcune modificazioni che non incontrarono l'approvazione dei competenti. Da tali studi egli fu portato a occuparsi della teoria delle curve e delle superficie di 2° ordine e in questo campo mietè ben meritati allori; in particolare scoprì e svolse una notevole generazione delle quàdriche, mostrando che una qualunque di tali superficie si può definire come luogo di un punto per cui è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso e da una retta fissa, questa seconda distanza essendo contata parallelamente ad un piano fisso.

Gli altri tre scienziati che dobbiamo ora citare possono, insieme al Green, riguardarsi come i fondatori della scuola dei fisici matematici inglesi, degna continuatrice delle tradizioni newtoniane.

Il più anziano è Gabriele Stokes; egli nacque a Skreen (Irlanda) il 13 agosto 1819; nel 1837 si recò a studiare a Cambridge e nel 1841 divenne Fellow del Collegio Pembroke ove era stato alunno. Otto anni dopo divenne professore Lucasiano in quella Università e a Cambridge morì il 1° febbraio 1903. Benchè abbia agito principalmente sotto la veste del fisico, della sua abilità matematica fanno fede una formola che porta il suo nome e la memoria *On the Discontinuity of arbitrary constants taht appears as multipliers of semi-convergent series,* pubblicata negli Acta mathematica (T. XXVI) l'anno prima della sua morte.

La trasformazione per raggi vettori reciproci è legata al nome di William Thomson, il quale vi dedicò una memoria (*G. di Liouville*, T. XII, 1847), la cui importanza geometrica fu posta in piena luce quando dal Liouville fu dimostrato che è l'unica trasformazione non lineare dello spazio che conservi gli angoli.

Meno conosciuto (e ingiustamente) è un complemento da lui dato agli elementi della geometria. È a tutti noto che il cubo è l'unico poliedro regolare con cui si possa riempire lo spazio senza sovrapposizioni o lacune ; ora egli, nel corso di ricerche sulla struttura dello spazio, scoprì che lo stesso risultato può ottenersi mediante uno dei poliedri semiregolari archimedei; si tratta di quello limitato da otto facce esagonali regolari e sei quadrati e che può ricavarsi mediante troncatura da un ottaedro regolare.

Egli pure nacque in Irlanda (Belfast, 26 giugno 1824); nel 1841 si recò a studiare a Cambridge; dal 1846 insegnò fisica nell'Università di Glasgow; nel 1892 gli fu conferita la dignità di Lord Kelvin (Kelvin è un piccolo affluente del fiume Clive, che scorre nei pressi di Belfast): alla sua morte (17 dicembre 1907) fu sepolto nell'abbazia di Westminster

accanto a Newton in considerazione degli eminenti servigi da lui resi alla scienza ed alla patria (¹). Conseguì grande diffusione il *Traetise on Natural Philosophy* (I ed., 1867; II ed., 1879) che reca anche la firma di altro distinto fisico, P. G. Tait (n. nei pressi d'Edimburgo il 28 aprile 1831, m. in detta città il 4 luglio 1901).

Chiude questa brillante serie J. Clerk Maxwell; egli è pure scozzese, essendo nato a Edimburgo il 13 giugno 1831. Sino dal 1846 presentò a quell'Accademia pregevoli memorie geometriche; nel 1850 si trasferì a Cambridge per ragioni di studio e nel 1855 fu eletto Fellow di quel Trinity College. Insegnò poi nell'Università di Aberdeen e nel King's College di Londra; finalmente (25 ottobre 1871) fu chiamato a Cambridge per dirigere un laboratorio di fisica sperimentale istituito in quella Università; ed a Cambridge morì il 5 novembre 1879.

Il Maxwell salì ad alta rinomanza per avere dato forma matematica alle idee sui fenomeni elettrici del Faraday (1791-1869); da noi vanno ricordate alcune sue memorie geometriche: una (*Quart. Journ. of Mathem.*, T. IX, 1868) sulla cicloide di Dupin, altra sulle figure reciproche della statica grafica (*Proc. Lond. math. Soc.*, T. II, 1869) e una terza sull'invasione nello spazio (Ivi, T. IV, 1872). Almeno un cenno va qui finalmente fatto del suo grande *Treatise on Electricity and Magnetism* (I ed., 1873; II ed., 1879), perchè contiene importanti sviluppi matematici.

## In Germania

684 - Volendo rintracciare le prime manifestazioni della fisica matematica in Germania fa mestieri risalire a Gauss, nelle cui opere, come sappiamo (p. 822), s'incontrano importanti ricerche sulla teoria del potenziale, nonchè sopra i fenomeni elettrici e magnetici. Ma, prima che la sua influenza venisse avvertita, fondavasi a Königsberg una vera e propria scuola di fisici-matematici, per merito precipuo di F. E. Neumann, capostipite di un'intera famiglia di distinti matematici, tuttora esistente. Nato a Uckemark l'11 settembre 1798, fu studente e poi professore nell'Università di Königsberg sino al momento del suo collocamento a riposo; in quella città si spense pressochè centenario il 23 maggio 1895. Il I volume delle sue *Opere complete* contiene, oltre a lavori di cristallografia geometrica, alcune ricerche sopra le intersezioni e i contatti dei cerchi e delle sfere che fanno apparire l'autore come un precursore di J. Steiner (Cfr. n. 696); in altri suoi scritti i cultori dell'analisi troveranno notevoli contributi alla conoscenza delle funzioni sferiche. Le sue eminenti qualità didattiche sono provate dalla collezione delle sue lezioni di fisica matematica raccolte, conservate e pubblicate dai suoi discepoli.

Fra coloro che proseguirono gloriosamente nell'indirizzo neumanniano emergono H. L. F. Helmholtz e G. R. Kirchhoff.

Il primo nacque a Potsdam il 31 agosto 1821; abbracciò la carriera del medico militare; ma, per approfondire le ricerche fisiologiche che

(¹) Limitiamoci a ricordare che è sotto la direzione scientifica di Lord Kelvic che potè venire collocato il primo cavo elettrico fra l'Inghilterra e gli Stati Uniti d'America.

aveva intraprese, sentì il bisogno di completare la propria istruzione fisica, e questa fu il ponte che lo condusse alle investigazioni matematiche che impareremo a conoscere nel Capitolo XLIII. Lo ebbero acclamato insegnante le Università di Bonn e Heidelberg; nel 1871 fu chiamato a Berlino, ove nel 1888 fu incaricato di dirigere il grande istituto fisico creato allora in quella città; ivi morì l'8 settembre 1894. Brillante conferenziere, lascia una magnifica collezione di discorsi, ove lo splendore della forma è pari alla profondità dei concetti.

L'altro nacque a Königsberg il 12 marzo 1824; insegnò successivamente nelle Università di Berlino, Breslau e Heidelberg; l'invenzione dell'analisi spettrale lo condusse ai fastigi della gloria; dal 1875 sino alla sua morte (17 ottobre 1887) visse a Berlino in qualità di accademico. Meritatamente apprezzatissimo è un suo trattato di meccanica, degno preludio a una raccolta di lezioni di fisica matematica, curata da alcuni suoi discepoli.

A partire da questo momento riesce difficile tracciare una netta linea di demarcazione fra analisti puri e fisici matematici, molti degli scienziati appartenenti senza discussione alla prima categoria avendo arrecato (lo dimostrerà il nostro Capitolo XLIV) contributi più o meno importanti allo studio matematico della luce e del calore, dell'elettricità e del magnetismo, e, d'altra parte, non mancando (benchè il caso sia stato meno frequente) fisici che seppero aggiungere qualche formola e qualche teorema all'analisi di cui servivansi nei loro studi. Donde la ragione per cui noi poniamo qui fine al presente Capitolo.

## BIBLIOGRAFIA


J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (Paris, 1822).

J. Fourier, *Analyse des équations détérminées*, Première Partie (Paris, 1831).

E. D. Budan, *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque; d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'arithmétique* (Paris, 1807).

G. Lamé, *Examen des différentes méthodes émployées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris, 1818).

G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, 1852; III ed., 1866).

G. Lamé, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes* (Paris, 1857).

G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Paris, 1859).

G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (Paris, 1861).

J. Mac Cullagh, *The collected Works.* Edited by J. H. Jellet and S. Haughton (Dublin, 1880).

G. Green, *An essay on the application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Journ. f. Mathem., T. XXXIX, XLIV e XLVII).

G. Green, *Mathematical Papers.* Edited by N. M. Ferrers. Facsimile Reprint (Paris, 1903).

G. G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers,* cinque Volumi (Cambridge, 1880-1905).

*Memoir and scientific Correspondence of the late Sir* G. G. Stokes, *selected and arranged by J. Larmor,* due Volumi (Cambridge, 1907).

W. THOMSON (Lord Kelvin), *Mathematical and physical Papers*, sei Volumi (Cambridge, 1882-1911).

W. THOMSON, *Popular Lectures and Adresses*, tre Volumi (Cambridge, 1889-1894).

J. CLERK MAXWELL, *Scientific Papers*. Edited by W. D. Niven (Cambridge, 1890).

F. NEUMANN, *Gesammelte Werke herausgegeben von seinen Schülern*, tre Volumi (Leipzig, 1906, 1912, 1928).

F. NEUMANN, *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, 1878).

F. NEUMANN, *Vorlesungen über mathematische Physik*. I Heft: *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus*. II Heft: *Einleitung in die theoretische Physik*. III Heft: *Vorlesungen über elektrische Ströme*. IV Heft: *Vorlesungen über theoretische Optik*. V Heft: *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtethers*. VI Heft: *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*. VII Heft: *Vorlesungen über de Theorie der Kapillarität*. VIII Heft: *Vorlesungen über die Wärme* (Leipzig, 1883-1895).

H. VON HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, tre Volumi (Leipzig, 1882-1895).

H. VON HELMHOLTZ, *Vorträge und Reden*, due Volumi, IV ed. (Braunschweig, 1896).

G. KIRCHHOFF, *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig, 1882), *Nachträge* (Ivi, 1891).

G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*. I Bd.: *Mechannik, IV Aufl.* (Leipzig, 1897). II Bd.: *Optik* (Id., 1891). III Bd.: *Elektrizität und Magnetismus* (Id., 1891). IV Bd.: *Theorie der Wärme* (Id., 1894).

## CAPITOLO XLII.

# ORIGINE E PRIMO STADIO DI SVILUPPO DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

## Parte Prima: RICERCHE PURAMENTE GEOMETRICHE

### M. Chasles ed i suoi discepoli diretti

685 - L'abbandono della geometria (v. p. 809) da parte di colui che, preseguendo nella via spianata da Monge, aveva aperto a quella scienza sconfinati orizzonti, non determinò un nuovo arresto nello sviluppo dell'antica disciplina. Provvide a stornare siffatto pericolo, applicando appunto i principi stabiliti da Poncelet, un giovane che, uscito con lode dalla Scuola Politecnica, rinunciò alle spalline di tenente del genio per beneficare un suo condiscepolo meno favorito dalla fortuna, e, dopo una prova infelice nel mondo degli affari, verso i trent'anni si dedicò completamente alle ricerche matematiche. È Michele Chasles, nato a Épernon il 19 novembre 1793. Con alcuni articoli della *Corresp. sur l'Éc. Pol.*, scritti quando egli era ancora alunno di questo istituto, egli palesò la propria attitudine alla ricerca geometrica; ritornato agli studi pubblicò nelle *Ann. de Math.* (T. XIX) due articoli sulle quàdriche, ove merita di essere rilevata l'estensione a tutte le superficie di 2° ordine della proiezione stereografica; circa nello stesso tempo mostrava (T. V, 1829, della *Correspondence Mathématique*) [1] che, scegliendo una parabola come curva fondamentale di una polarità, si giunge ad un procedimento utilissimo per scoprire nuove proprietà delle figure piane. Proseguendo in tali studi compì (*Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, T. V e VI, 1829-30) notevoli ricerche sopra i coni quàdrici e le coniche sferiche, i cui risultati diedero materia a memorie che furono reputate degne di venire tradotte in inglese. Ad intensificare i proprii studi Chasles fu indotto dal seguente tema di concorso proposto dall'Accademia di Bruxelles: « On demande un examen philosophique des différentes métodes employées dans la géométrie récente et, particulièrement, de la méthode des polaires réciproques »; egli decise di concorrere e nel gennaio 1830 presentò una memoria che gli fece conseguire la vittoria e che — pubblicata col titolo di *Aperçu historique* — non tardò a fargli toccare i fastigi della fama.

Dalla tranquilla residenza di Chartres da lui scelta, venne tolto

(1) Questo periodico che si pubblicò a Bruxelles dal 1824 al 1839 ebbe per principale direttore A. Quetelet (n. a Gand il 22 febbraio 1796, m. a Bruxelles il 17 febbraio 1874), eminente scienziato che, con G. P. Dandelin (n. a Bourget il 12 aprile 1794, m. a Bruxelles il 15 febbraio 1847) legò il proprio nome all'elegante teorema che insegna a costruire i fuochi della sezione prodotta da un piano in un cono rotondo.

nel 1843 per insegnare geodesia alla Scuola Politecnica, incarico da lui assunto con ripugnanza e che abbandonò nel 1846 quando fu creata apposta per lui la cattedra di geometria superiore alla Sorbona. Il resto della sua vita — conclusa il 12 dicembre 1880 — non presenta episodi degni di venire qui registrati, uno solo escluso, che va qui registrato: nel 1814 egli prese parte alla difesa di Parigi, combattendo nel battaglione costituito dagli alunni della Scuola Politecnica; ebbene, nel 1870 (a 73 anni!) volle servire nella batteria organizzata dagli insegnanti di quella Scuola per difendere Parigi dall'esercito prussiano.

686 - L'opera premiata dall'Accademia di Bruxelles consta di tre Parti [1]. La I è un'esposizione profonda e brillante dell'evoluzione della geometria dal tempo dei Greci sino a Poncelet; essa è basata in gran parte sulla storia del Montucla, ma, il geometra prendendo il posto dello storico, Chasles espone spesso considerazioni di carattere prettamente scientifico che non di rado assurgono al livello di vere scoperte. E poichè le idee originali gli si affollavano in gran copia, per non interrompere il filo storico, egli le relegò in alcune importanti Note, che costituiscono la II Parte della sua opera; fra quelle di contenuto dottrinale, parecchie (XXV, XXVIII, XXXI, XXXII) concernono le quàdriche, la cui teoria trovavasi allora nel suo stato nascente; nella IX Chasles ha introdotta l'importante funzione che egli (con denominazione poco felice, che, almeno in Italia, finì con lo scomparire) ha chiamato « rapporto anarmonico »; e nella successiva ne mostrò l'intervento nella teoria delle coniche; la X contiene una teoria completa dell'involuzione; alle cubiche piane è dedicata la XX ed alle cubiche gobbe la XXXIII. La III Parte dell'*Aper. hist.* porta il titolo *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie,* ed è ispirato al concetto di mostrare che la geometria, non meno dell'analisi, possiede metodi generali e principî fecondi. Essa consta di due sezioni, ciascuna dedicata ad uno dei suindicati metodi di trasformazione, i quali vengono studiati sia col puro ragionamento che col mezzo di coordinate e poi applicati a estendere il metodo cartesiano e a studiare le quàdriche.

Asceso ad una cattedra universitaria, Chasles pubblicò un trattato della materia di cui era titolare la cui I Sez. contiene una metodica esposizione della teoria dei rapporti anarmonici e dell'involuzione; la II Sez. tratta delle figure rettilinee, in particolare insegna una completa teoria delle trasversali. Generalizzato poi il sistema di coordinate tradizionale e, stabilitone uno di carattere proiettivo applicabile a punti ed a rette (Sez. III), Chasles se ne serve (Sez. IV) per stabilire la teoria delle figure piane omografiche e correlative. L'ultima Sezione è dedicata ai cerchi ed ai sistemi da essi formati; ivi si apprende il concetto e l'uso dei circoli immaginari, non soltanto per investigare figure piane, ma an-

[1] Nell'esordio vi si legge la seguente eloquente dichiarazione: « Une pensée principale a présidé à l'élaboration de l'*Aperçu historique*, celle de montrer que la Géométrie, regardée depuis plus d'un siècle comme impuissante par elle-même, était, au contraire, susceptible de principes généraux et de méthodes fécondes comme celles de l'Analyse; que ces méthodes avaient parfois des avantages propres, en permettant de pénétrer jusqu'à l'origine des vérités et de mettre à nu la chaîne mistérieuse qui les relie entre elles ».

che per studiare i coni quàdrici. Da notarsi il Capitolo finale destinato a far conoscere l'applicazione alle funzioni ellittiche di considerazioni tratte dai sistemi di cerchi di un piano.

Le coniche, escluse da questo trattato, dovevano dar materia ad un altro, di cui però non fu pubblicato che il I Volume, dedicato ad una esposizione della parte elementare della teoria, quale risulta dall'applicazione dei concetti di rapporto anarmonico ed involuzione; è un volume che ben poco aggiunse alla fama dell'autore, la quale era andata continuamente aumentando grazie alle numerose ed importanti memorie prodotte dopo la pubblicazione dell'*Aper. hist.* e di cui ci corre l'obbligo di indicare, sia pure con forzata brevità, i temi ed i più essenziali risultati.

687 - Nel periodo interposto fra la pubblicazione di quell'opera e l'istituzione alla Sorbona di una cattedra di geometria superiore, Chasles proseguì (*Journ. Ec. Pol.,* Cah. XXV, 1834; C. R., T. VI, 1838 e VII, 1839; *Mém. Sav. Etr.*, T. IX, 1846) le belle ricerche sintetiche sopra l'attrazione degli ellissoidi, a cui aveva dedicata la Nota XXXI della succitata opera. Buon numero degli altri suoi scritti concernono coniche e quàdriche; notiamo in particolar modo quelli relativi alle geodetiche e alle linee di curvatura delle superficie di 2° ordine (C. R., T. XXII, 1846) e l'altro (*Journ. de Math.,* T, IV, 1839) ove, accoppiando in involuzione le generatrici di un sistema di un iperboloide a una falda, si giunge a un complesso lineare. A questa figura Chasles fu condotto anche studiando i moti infinitesimi dei corpi solidi in un lavoro (C. R., T. XII, 1846) che fa parte delle sue importanti ricerche di cinematica. La teoria delle superficie rigate è debitrice a Chasles dei concetti di « punto centrale di una generatrice » e di « linea di stringimento », nonchè del teorema che afferma la proiettività fra i punti di una generatrice di una rigata e il fascio dei corrispondenti piani tangenti (*Corr. Math.,* T. XI, 1839).

L'esercizio dell'insegnamento gli suggerì numerose applicazioni dei concetti fondamentali della geometria proiettiva. Alcune concernono la generazione delle cubiche e delle quartiche piane (C. R., TT. XXXVI, XXXVII e XLI, 1853-5), nelle quali si trova qualche caso particolare del « principio di corrispondenza » che Chasles enunciò nel 1864 con piena generalità (¹). Passando allo spazio egli completò (C. R., T. XLV, 1857) le proprietà che, come dicemmo, espose sulle cubiche gobbe nell'*Aper. hist.,* passò poi alle quartiche gobbe delle due specie (C. R., T. LIII, 1861 e LIV, 1862) ed elevandosi ancora più giunse, prima a studiare tutte le curve situate sopra una quàdrica rigata e poi quelle situate sopra una rigata di 3° o 4° grado (C. R., T. LIII, 1861). Questi risultati ed altri congeneri che per brevità si tacciono valsero a confermare la fama dell'autore; ma essa si accrebbe a dismisura quando il valoroso geometra (a sessantasette anni!) creò la teoria delle caratteristiche dei sistemi di coniche (v. i C. R. a partire dal 1864); con l'introdurre la costante considerazione delle curve degeneri di un sistema $\infty^1$ e di due numeri atti a definire un tal sistema, egli scrisse le prime pagine di un

(¹) Se ne erano già serviti tacitamente Cremona e de Jonquières.

nuovo capitolo della scienza dell'estensione (la Geometria numerativa), a cui altre ne aggiunse investigando i sistemi infiniti di coniche nello spazio (C. R., T. LXI, 1865) e di quàdriche (Id., TT. LXII e LXV, 1866) e persino di quartiche piane (Id. id.). Le numerose serie di enunciati da lui pubblicati, mentre confermavano la sua perenne forza inventiva, schiusero nuovi orizzonti ai geometri del suo tempo. Ed altri ne avrebbe certamente aggiunti se il Governo francese non lo avesse incaricato di redigere quel *Rapporto sullo stato della geometria in Francia* che, come vedremo (n. 757), corona degnamente la sua opera di storico (m. 12 dicembre 1880).

688 - Il numero e l'importanza delle scoperte di Chasles fecero moltiplicare i valorosi che, pur dichiarandosi suoi discepoli, si proposero di emularlo; ricorderemo qui soltanto i più eminenti fra coloro che vissero in Francia mentre egli trovavasi tuttora sulla breccia, ordinandoli in base alla cronologia.

Il primo posto spetta a buon diritto ad un distinto ufficiale di marina, F. F. E. Faque de Jonquières (n. a Carpentras il 3 luglio 1820, m. vicino a Grasse il 12 agosto 1901). Che egli sia un vero figlio spirituale di Chasles risulta dalla semplice ispezione del titolo che porta il volume con cui egli prese posto nella schiera dei geometri (v. *Bibliografia*). Che tale egli sia rimasto è provato dal suo *Essai sur la Génération des Courbes Géométriques et en particulier sur celle de la courbe du Quatrième degré* (*Mém. Sav. Etr.*, T. XVI, 1858), ove trovasi largamente applicata la generazione di una curva algebrica mediante fasci di curve d'ordine inferiore. Il nome del Jonquières è anche legato ad una trasformazione piana d'ordine qualunque, da lui studiata nel 1859 in una memoria che vide la luce soltanto nel 1885 (*Giorn. di Matem.*, T. XXIII). Nè questi sono gli unici lavori che gli assicurano un posto non indecoroso nella storia della geometria.

Segue un eminente ufficiale d'artiglieria, A. Mannheim (n. a Parigi il 7 luglio 1831, m. ivi l'11 dicembre 1906), il quale si dedicò di preferenza a svolgere e completare i lavori cinematici di Chasles; i più cospicui dei risultati da lui ottenuti si trovano in un volume che documenta l'utilità di considerare il movimento in ricerche di pura geometria.

E. Laguerre, terzo del gruppo (n. a Bar-le-Duc il 9 aprile 1834, m. ivi il 14 agosto 1886) era ancora studente quando riuscì (v. la *Note sur la Thèorie des Foyers* inserita nel T. IX, 1853 delle *Nouv. Annales*) a porre l'angolo di due rette sotto forma di birapporto. In età matura egli arricchì la geometria di nuovi tipi di trasformazioni piane, senza trascurare le altre branche della matematica, chè nell'algebra e nel calcolo infinitesimale il suo nome s'incontra con lode; l'Istituto di Francia, che lo aveva chiamato nel proprio seno, gli concesse l'onore (che Chasles aspetta ancora) di promuovere e tutelare la ristampa completa dei suoi lavori matematici.

Una delle più originali produzioni di Chasles — la teoria delle caratteristiche — diede occasione di dar prova del suo acume ad altro ufficiale d'artiglieria, G. H. Halphen. Nato a Rouen il 30 ottobre 1844, nel 1862 entrò nella Scuola Politecnica, donde uscì per continuare i proprii

studi nella Scuola di Applicazione di Metz. Mentre vi si trovava scoprì il teorema che dà il numero delle rette comuni a due congruenze di rette, in funzione degli ordini e delle classi delle stesse. Popo dopo pubblicava gli enunciati di alcuni teoremi fondamentali della teoria delle curve gobbe, germe della gran de memoria *Sur la Théorie des Courbes gauches Algébriques,* che nel 1882 conseguì il premio Steiner dall'Accademia di Berlino e che viene considerata come il più perfetto dei suoi lavori. La guerra franco-prussiana lo costrinse ad abbandonare momentaneamente gli studi, ma gli diede occasione di mostrare il suo valore (ottenne sul campo la promozione a capitano). Dal 1872 al 1886 disimpegnò vari uffici di fiducia nella Scuola Politecnica; gli è in questo periodo che scoperse la necessità di qualche ritocco alla formola $a\,\mu + \beta\,\nu$ data da Chasles per esprimere il numero delle coniche di un sistema $\infty^1$ soddisfacenti ad una ulteriore condizione, e così fu condotto a scoprire nuovi tipi di coniche degeneri; nella stessa epoca perfezionò la teoria dei punti singolari delle curve piane e gettò le basi della teoria degli invarianti differenziali. Orientandosi sempre più verso l'analisi presentò all'Accademia di Parigi una memoria *Sur la Réduction des Equations linéaires aux Formes intégrables*, che ottenne nel 1880 il Gran Premio delle Scienze matematiche. Nel 1886 fu ammesso all'Istituto, iniziò la pubblicazione del grande *Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications* e, per suo desiderio, fu riammesso al servizio militare attivo, ma morì solo due anni dopo, presumibilmente a cagione del troppo intenso lavoro (21 maggio 1888).

## A. F. Möbius

689 - Nel mentre la Francia così validamente contribuiva alla ripresa degli studi geometrici, la Germania non restava inerte. Primo ad emulare i colleghi d'oltre Reno fu Augusto Ferdinando Möbius. Egli nacque a Schulpforta il 17 novembre 1790; esauriti gli studi secondari, s'inscrisse alla Facoltà giuridica dell'Università di Lipsia, ma, attratto dall'astronomia, abbandonò ben presto codici e pandette e, appunto per perfezionarsi in quella materia sotto la guida di Gauss, nel 1813 si trasferì a Gottinga; però all'Università di Lipsia ottenne tanto la laurea dottorale (11 dicembre 1814) quanto la libera docenza (19 aprile 1815). In data 1° maggio 1816 fu ivi nominato professore straordinario di astronomia, ma non entrò in carica che nell'ottobre successivo, avendo nel frattempo effettuato un viaggio di studi, per porsi a contatto con altri professori tedeschi della stessa materia; per ragioni amministrative conseguì l'ordinariato soltanto nel 1844; la sua vita scorse senza incidenti e finì placidamente il 26 settembre 1868.

La sua produzione scientifica (che si risente dell'influenza di Gauss soltanto nella parte astronomica) può ripartirsi in quattro sezioni: Calcolo baricentrico, Statica, Meccanica celeste, Poliedri e figure ad essi connesse; giova sin da ora notare che anche i lavori che escono dal nostro programma contengono applicazioni di concetti essenzialmente geometrici.

Un breve articolo su due questioni di geometria, pubblicato nel 1823, prova che sino d'allora egli era giunto ai metodi che gli diedero

fama; ed il suo Diario, tuttora esistente, mostra che i primi studi sull'argomento risalgono al periodo 1818-1821; essi si trovano metodicamente esposti nell'opera *Der barycentrische Calcul,* pubblicata nel febbraio del 1827. Ivi egli parte dall'osservazione che, dati tre punti fissi $A, B, C$, qualunque altro punto del piano da essi determinato può considerarsi come baricentro dei dati, purchè ad essi si annettano opportuni pesi $\alpha, \beta, \gamma$; questi sono determinati a meno di un fattore comune, onde possono considerarsi come coordinate omogenee del punto $P$ (sono le prime del genere che s'ncontrino nella scienza) e questo indicarsi col simbolo $\alpha A + \beta B + \gamma C$. Nello spazio il simbolo $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ ha un significato analogo. Supponendo quei coefficenti variabili si ottiene nel piano la rappresentazione analitica di una curva, nello spazio quella di una curva o di una superficie, rappresentazione che riesce utile specialmente quando le funzioni rappresentatrici sono razionali, chè allora degli enti rappresentati si possono stabilire agevolmente molte proprietà, come il Möbius mostra nel I Libro della sua opera. Quando si considerano due piani (o spazi) e si conviene di considerare come corrispondenti due punti che abbiano le stesse coordinate, si giunge ad una vasta classe di trasformazioni geometriche, di cui le più generali sono le « collineazioni »; esse sono ampiamente studiate da Möbius nel suo II Libro. E nel III il nuovo sistema di coordinate è applicato ad esporre metodicamente e completamente la teoria delle sezioni coniche.

690 - Negli anni che seguirono la pubblicazione di quest'opera il Möbius fece altre applicazioni del proprio metodo: così (*G. di Crelle*, T. III, 1828) dimostrò l'esistenza di tetraedri mutuamente inscritti e circoscritti; poi (Id., T. X, 1833) fece conoscere le proprietà della corrispondenza (polarità nulla) da cui dipende l'esistenza stessa; in altri lavori (Id., T. IV, 1829 e XXIV, 1842) fece applicazioni del concetto di « doppio rapporto » e di coordinate baricentriche, fra l'altro, per stabilire nuove relazioni trigonometriche; lo stesso calcolo gli permise (Id., T. XXVI, 1843) di ritrovare la condizione affinchè cinque punti dello spazio appartengano alla stessa sfera. Dal punto di vista teorico, di maggiore importanza è un articolo (Id. T. XXVIII, 1844) destinato a stabilire il calcolo baricentrico col mezzo del concetto di « somma geometrica » di due segmenti e dell'artificio di considerare un segmento rettilineo come differenza dei suoi estremi; esso va avvicinato al commento da lui fatto a una memoria (*Geometrische Analyse*) del Grassmann (v. numero 727).

Continuando a meditare sopra gli stessi temi il Möbius trasportò il suo metodo dal piano alla sfera; così creò una completa « sferica analitica » di cui pose in luce il valore dimostrando tutte le formole della trigonometria sferica senza supporre che gli elementi dei triangoli sferici considerati fossero tutti $< 180°$ (*Abh. Sächs. Ges.*, 1846), argomento questo di interesse generale che approfondì e svolse poi ulteriormente (*Ber. Sächs. Ges.*, 1860). Del calcolo baricentrico esteso alla sfera egli fece una nuova importante applicazione alla ricerca delle forme delle curve piane di terzo ordine, riguardate come sezioni di coni cubici o proiezioni di curve sferiche (*Ber. Sächs. Ges.*, 1848, e *Abh.* della stessa

società, 1852): già prima aveva dimostrato (*Ber. Sächs. Ges.,* 1848) che le curve sferiche esenti da punti singolari non possono presentarsi che sotto tre forme da lui caratterizzate.

Una nuova serie di lavori dello stesso matematico hanno per punto di partenza la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, di cui si era anteriormente occupato con pieno successo il Bellavitis (v. n. 726). Le prime pubblicazioni del Möbius sull'argomento concernono triangoli e quadrilateri (*Ber. Sächs. Ges.,* 1852); ma ben presto (Id., 1853) egli assurse a considerazioni più elevate, estendendo anzitutto il concetto di doppio rapporto e poi studiando le trasformazioni univoche fra due piani che sono caratterizzate dalla proprietà di conservare la conciclicità di quattro punti; sono le « Kreisverwandschaften », di cui il Möbius fece poi una trattazione puramente geometrica (*Abh. Sächs. Ges.,* 1855), senza però rilevarne il legame con la trasformazione per raggi vettori reciproci. Dello stesso artificio egli si giovò (*Ber. Sächs. Ges.,* 1853-56) per estendere in vari modi il concetto d'involuzione.

691 - In altra direzione procedette il pensiero dell'eminente geometra. Alludiamo agli studi che lo portarono a concepire, sotto il nome di « trasformazioni elementari », quelle in virtù delle quali agli elementi infinitesimi di una figura corrispondono elementi analoghi dell'altra (Id., 1863); così egli è passato in altro provincia geometrica (l'« Analysis situs »), in cui aveva già soggiornato a scopi cristallografici (Id., 1849) e ove rimase lungamente, avendo deciso di concorrere al Gran Premio delle Scienze matematiche, per il quale l'Istituto di Francia aveva nel 1863 scelto come tema il seguente: « Perfectionner en quelque point important la théorie des polyèdres ». Quantunque la memoria del Möbius sull'argomento non abbia ottenuto l'ambito premio (sorte di cui furono vittime anche gli altri sette che vi aspirarono), le ricerche del Möbius condussero a risultati di valore permanente; a provarlo servono due memorie, una sulla teoria delle trasformazioni elementari (Id., 1863) e l'altra sul volume di un poliedro (Id. 1865), nonchè numerose pagine che videro la luce molto tempo dopo la sua morte nella collezione delle sue *Opere complete*. A prova di tale giudizio basti ricordare che è a Möbius che devesi la scoperta della « legge degli spigoli » (secondo cui ai perimetri delle facce di un poliedro si possono attribuire sensi tali che ogni spigolo, considerato nelle due facce che in esso concorrono, riceva sensi opposti); essa sussiste pei poliedri anteriormente noti; ma ve ne sono altri, di specie del tutto differente, pei quali essa non vale sono « poliedri unilateri » (v. Figure 75, 76, 77 ottenute con la piegatura di un nastro o di una striscia di carta) scoperti da Möbius nell'ultimo trimestre del 1858.

Fig. 75.

Giunti al termine di questa rapida analisi aggiungiamo che chi vuol conoscere appieno il *Matematico* Möbius deve ricorrere, non soltanto ai suoi lavori schiettamente geometrici, ma anche a quelli (spesso estratti dalle sue lezioni universitarie) relative alla statica, alla diot-

trica ed alla meccanica celeste, chè vi si trovano concetti e metodi puramente geometrici; senza tacere che tutti sono redatti con lo stile accurato e rigoroso che è (o, meglio, dovrebbe essere) di prammatica per chi

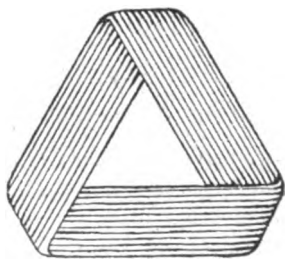
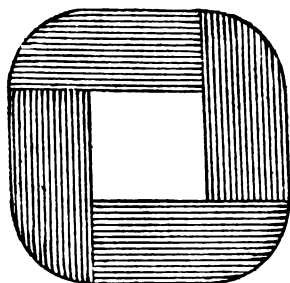



Fig. 76.

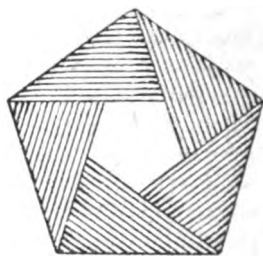



Fig. 77.

scrive intorno alle scienze esatte; ad essi deve, dunque, ricorrere chi voglia completare questa nostra troppo rapida rivista della sua produzione matematica.

692 - Il *Barycentrischer Calcul* non fu subito apprezzato quanto meritava; lo stesso Gauss non prestò che più tardi la debita attenzione all'opera del suo antico discepolo; tuttavia almeno alcuni dei risultati ivi esposti non tardarono a diffondersi. Una prova di ciò è offerta dai due volumi intitolati *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833 e 1837). Ne è autore L. I. Magnus: egli nacque a Berlino il 15 marzo 1790; si fece conoscere come geometra con un articolo inserito nel T. XVI delle *Annales* di Gergonne, nel quale le proprietà focali delle coniche sono estese ai coni quàdrici ed alle coniche sferiche. Dopo un breve periodo d'insegnamento (1826-34), passò come impiegato in una banca di Berlino; morì il 25 settembre 1861, fregiato del titolo di dottore, conferitogli « honoris causa » dall'Università di Bonn. Nella sua opera dianzi citata egli, seguendo Möbius, ha esposte col mezzo di coordinate cartesiane le proprietà essenziali della collineazione e della reciprocità; in un posteriore lavoro (*G. di Crelle*, T. VIII, (1832) delle trasformazioni piane di ordine superiore studiando quella (quadratica) chè nasce quando in un piano sono due date *reciprocità* e si fa corrispondere ad ogni punto l'intersezione delle rette che gli corrispondono nelle ipotetiche reciprocità.

## J. Steiner ed i suoi continuatori immediati

693 - Restiamo in paesi di lingua tedesca occupandoci della grande opera geometrica di Jacob Steiner. Egli nacque da poveri contadini a Butzisdorf (cantone di Berna) il 18 marzo 1796. La sua istruzione fu così trascurata che a diciannove anni sapeva scrivere a mala pena. Cedendo a un irresistibile impulso, egli, contro il volere paterno, sollecitò ed ottenne (primavera 1814) di essere ammesso nella scuola di Yverdum

diretta dal celebre Pestalozzi e degli insegnamenti ricevuti profittò talmente che poco dopo fu in grado di impartirvi egli stesso lezioni di matematica elementare. A partire dal 1818 e per cinque semestri frequentò le lezioni di matematica nell'Università di Heidelberg. Sollecitato da un amico, il quale sperava di assicurargli un posto in un Ginnasio di Berlino, si trasferì in questa città; il 15 aprile 1821 fece istanza di essere sottoposto all'esame di Stato che lo avrebbe abilitato all'insegnamento; la domanda fu accolta e la prova ebbe luogo il 9 giugno seguente, ma con esito negativo, cosicchè Steiner fu costretto a lasciare (1° novembre 1822) la cattedra da lui occupata interinalmente; le lezioni private gli assicurarono allora i mezzi di sussistenza. La fondazione a Berlino di una Scuola industriale gli consentì di rientrare (ottobre 1825) nell'insegnamento pubblico, mentre la creazione del *Giornale di Crelle* gli permise di pubblicare i suoi primi lavori geometrici; grazie a questi gli fu conferito (11 marzo 1826) il diploma d'abilitazione, senza prova scritta. Grazie ad un sussidio di 300 talleri, accordatogli in seguito a sua domanda [1], dall'Accademia di Berlino il 17 aprile 1827, potè sottrarre qualche ora all'insegnamento e attendere ai proprii studi con maggiore intensità. Giova qui notare che il soggiorno a Berlino fu per Steiner della massima utilità avendolo posto a contatto con Abel e Jacobi, col Crelle e con Guglielmo von Humboldt (1769-1859), all'appoggio dei quali egli dovette se potè pubblicare le memorie e i volumi che non tardarono a farlo conoscere come geometra di eccezionale valore. Le attestazioni di alta stima non si fecero attendere: l'Università di Königsberg gli decretava (29 dicembre 1832) la dignità dottorale; poco dopo (20 aprile 1833) il Governo prussiano lo autorizzava a fregiarsi del titolo di professore e (5 giugno 1834) l'Accademia di Berlino lo chiamava nel proprio seno. Nello stesso anno, in seguito a ripetuti sforzi del Crelle, veniva nominato professore straordinario di quella Università, grado modesto che egli conservò sino alla morte, avvenuta il 1° aprile 1863 a Berna, ove trovavasi per motivi di salute; ivi egli fu sepolto, e chi visita il cimitero di quella città non mancherà di cercarvi la modesta tomba recante la semplice epigrafe: « Jacob Steiner, Mathematiker und Akademiker in Berlin, 1796 bis, 1863 ».

694 - Durante i primi anni del suo soggiorno a Berlino la mente di Steiner era volta principalmente alla geometria dei cerchi e delle sfere, argomento studiato tanto nell'antichità quanto nella scuola di Monge; ma, mentre prima erano state considerate quasi esclusivamente questioni di contatto, Steiner si propose di trattare la materia in modo generale ed organico, onde abbracciare anche i problemi in cui intervengono condizioni d'intersezioni sott'angoli assegnati. Un saggio di tali ricerche egli diede nel 1826 in un articolo dal titolo *Einige geometrische Betrachtungen* (*G. di Crelle*, T. I), nel quale è rivelata l'esistenza di un'opera sulla geometria dei cerchi e delle sfere, già da due anni pronta per la stampa e la cui ampiezza veniva valutata dai 25 ai 30 fogli di stampa;

(1) Il testo di questo documento (recante la data 3 marzo 1827) fu pubblicato, insieme ad altri che illustrano i soggiorni di Steiner a Yverdum e Heidelberg, da F. BÜTZENBERGER nel T. XXVII (1896) della *Zeitschr. für math. und naturwiss. Unterricht.*

della stessa veniva confermata l'esistenza della Prefazione all'« opus magnum » (v. n. seg.) del grande geometra, ove è aggiunto che la stampa ne veniva ritardata potendosi le proposizioni ivi contenute estendersi a tutte le superficie di secondo ordine. Attratto da altre ricerche lo Steiner rinunciò alla stampa di quell'opera, che durante buona parte dello scorso secolo fu considerata come perduta; ma tale fortunatamente non era, come riconobbe il matematico svizzero H. Graf (1852-1918) esaminando le carte lasciate dal sommo geometra, all'approssimarsi del primo centenario della sua nascita. E poichè si riconobbe che si trattava effettivamente di un'opera pressochè pronta per vedere la luce, superati alcuni ostacoli finanziari, essa potè vedere la luce a complemento della collezione delle opere già edite di quel grande. Non potendo addentrarci in un'esauriente enumerazione di quanto essa contiene, ci limitiamo a indicare gli argomenti trattati nelle quattro Sezioni in cui essa è divisa: I. Centri, rette e piani di similitudine dei cerchi e delle sfere. II. Della potenza e dei luoghi di egual potenza dei cerchi e delle sfere. III. Potenze comuni dei cerchi e delle sfere. IV. Angoli sotto cui tagliansi cerchi e sfere. Si può aggiungere che ogni sezione consta di due parti, una di carattere teorico, l'altra dedicata alla risoluzione dei relativi problemi. A dimostrare l'importanza di tali ricerche sta il fatto che esse culminarono nella più elegante soluzione geometrica che si conosca del problema di Malfatti, che Steiner ha semplicemente enunciata nella memoria succitata del *G. di Crelle* e di cui soltanto a stento si mostrò l'esattezza.

Alcuni altri articoli pubblicati da Steiner nei tre primi volumi del *G. di Crelle* fanno fede di altre direzioni in cui allora si svolse il suo pensiero: limitiamoci a citare la dimostrazione da lui data per il teorema di Descartes-Euler sui poliedri; passano poi sei anni durante i quali egli cessa di collaborare alla grande effemeride berlinese.

695 - Tale pausa trova la sua spiegazione nel fatto che in quel periodo cade l'elaborazione e redazione della sua opera di maggior mole, la quale gli fu possibile dopo aver vinto lo scoraggiamento da cui fu assalito quando venne avvertito da Jacobi che alcune delle sue idee trovavansi già in lavori francesi — specialmente di Poncelet — a lui ignoti.

Quest'opera ha per titolo *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin, 1832), prima Parte, unica pubblicata, di un grande lavoro che ne doveva comprendere altre sei; è dedicata a G. von Humboldt « quale segno di profonda gratitudine ». Come dichiara l'autore nella Prefazione, scopo di essa è di « scoprire l'organismo grazie a cui sono fra loro collegati i fenomeni dello spazio »; esso è raggiunto con la metodica introduzione di figure ancora più semplici di quelle di cui occupasi la gometria elementare e per le quali egli ha suggerite denominazioni nuove ed assai felici: sono le « forme geometriche di I specie » che oggi sono a tutti familiari; servendosi di esse e con l'uso metodico della stampa a due colonne risulta stabilito il principio di dualità senza ricorrere alle vedute metafisiche di Gergonne o alla polarità caldeggiata da Poncelet. Da notarsi, con Steiner, che risulta così una struttura per la geometria che può adottarsi

anche da chi vuol ricorrere a coordinate. Stabilita poi la proiettività fra forme di I specie, Steiner l'applica alla generazione delle curve e dei coni di secondo ordine e delle quàdriche rigate, e poi si arresta a mostrare come in conseguenza si deducano metodicamente tutte le proprietà di tali figure e le soluzioni dei problemi relativi. Negli esercizi sono esposti risultati originali ed importanti; basti notare che vi si trova un notevole esempio di trasformazione quadratica fra due piani distinti (« proiezione gobba ») ed i primi teoremi concernenti la configurazióne avente per nocciolo l'esagrammo mistico di Pascal.

Più ristretto è il tema dell'opuscolo intitolato *Die geometrischen Construktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises* (Berlin, 1833); per giungere a dimostrare — come sta affermato in questo titolo — la possibilità di risolvere tutti i problemi di 2° grado con la sola riga, quando sul disegno sia tracciato un cerchio, Steiner stabilisce tutte le proposizioni necessarie; e siccome applica il suo metodo a risolvere anche le più essenziali questioni che s'incontrano nella teoria delle coniche, così ha dato un utile complemento alla precedente sua opera. A tale proposito rileviamo che di queste curve egli si è ripetutamente e fruttuosamente occupato, non soltanto in lavori originali (v. *Ann. de Math.*, T. XIX; *G. di Crelle,* TT. XXXVII e XLV), ma anche in parecchi corsi di lezioni universitarie: da queste traggono origine l'opuscolo *Populäre Kegelschnitte e le Vorlesungen über synthetische Geometrie* redatte da C. F. Geiser e H. Schröter (v. pag. seguente).

696 - Dotato di meravigliosa forza inventiva, Steiner non si è arrestato a queste semplici figure, ma si è slanciato in campi più elevati, dopo di avere vinta (in qual modo si ignora) la difficoltà di usare gli immaginari in geometria (« la lotta contro lo spettro », per usare il suo immaginoso linguaggio); indicheremo i più cospicui dei suoi risultati.

Riprendendo in modo originale le ricerche del Lhuillier (v. p. 788) sulla teoria dei massimi e minimi, egli ha scritto un gruppo di memorie che vengono riguardate come classiche sull'argomento, anche dopo che gli incontentabili analisti vi ravvisarono un nèo, proveniente dall'esservi postulata l'esistenza del massimo o minimo che si cerca; a suo gran merito va rilevato che ad alcune delle conseguenze a cui egli giunse il calcolo delle variazioni è arrivato soltanto più tardi e non senza grande fatica.

A nuove e notevoli proprietà delle curve piane egli pervenne investigandone le prorogative di carattere metrico; il lettore desideroso di prenderne notizia consulti le sue memorie sul baricentro di curvatura delle curve piane, sopra le curve dotate di centro e sulle normali a curve (e superficie) algebriche. Di ancor più fondamentale importanza è la comunicazione da lui fatta nel 1848 all'Accademia di Berlino, nella quale, ricorrendo alla teoria delle polari dovuta al Bobillier (p. 808), egli definisce ed enuncia le prorogative più salienti delle curve dette oggi Hessiana e Steineriana; ed è doloroso notare come un uomo del valore di Steiner abbia rivelato di essere roso da un sentimento d'invidia [1]:

[1] I biografi di Steiner hanno rilevata in generale la morbosa preoccupazione, che egli manifestò in età matura, di non vedere riconosciuto ogni suo merito.

chè, giovandosi delle relazioni che legano le sei caratteristiche di una curva piana algebrica, manca di attribuirle a Plücker, a cui indiscutibilmente ne appartiene la scoperta (vedi n. 702). Otto anni più tardi, in altra comunicazione fatta alla stessa Accademia, egli ha enunciato una folla di proprietà della curva inviluppata dalle $\infty^1$ rette di Simson dei punti di una circonferenza rispetto ad un triangolo inscrittovi; verso il termine egli nota che la stessa curva è generabile anche col ruzzolamento di un cerchio, senza però dire che si tratta di un'osservazione fatta da un suo giovane conterraneo, L. Schläfli (v. n. 697), il quale notò per primo essere quella curva un'ipocicloide tricuspide.

Un'altra classe di superficie di cui Steiner scoprì molte importanti proprietà è quella costituita dalle superficie di terzo ordine. È stato dimostrato che, nel corso di un viaggio fatto a Parigi nel 1853, egli ebbe notizia della scoperta fatta in Inghilterra (v. n. 708) delle rette di una tal superficie e del relativo pentaedro. Tuttavia di tale circostanza egli non tenne parola nella importantissima comunicazione relativa a quelle figure da lui fatta all'Accademia di Berlino nel 1856, in cui di esse sono indicati parecchi modi di generazione e sono enunciate tutte le proprietà fondamentali. Altra superficie (di 4° ordine e 3ª classe) fu da lui scoperta nel 1844 a Roma durante il viaggio da lui compiuto nell'eterna città; è quella detta appunto « superficie romana »; su di essa egli non fece alcuna pubblicazione, ma chi venne dopo vi avvertì mirabili proprietà.

Steiner, che imparò a scrivere assai tardi, incontrò sempre grandi difficoltà a porre in carta le sue scoperte, onde in innumerevoli casi si limitò a pubblicarne gli enunciati; i lavori intesi a dimostrarne la verità costituiscono una ricca biblioteca, la quale sta a documentare la grande e benefica influenza esercitata dal sommo investigatore.

697 - Che i semi da lui deposti abbiano germogliato rapidamente è provato da alcuni articoli pubblicati nel periodo 1843-50 nell'*Arch. f. Math. u. Phys.* da un esperto professore liceale, F. Seydewitz (n. a Erfurt l'11 gennaio 1807, m. a Heiligenstadt il 14 aprile 1852) il quale, estendendo allo spazio la generazione steineriana delle coniche e delle quàdriche rigate, scoprì i metodi, oggi a tutti noti, per costruire tutte le superficie di 2° ordine e le cubiche gobbe mediante stelle reciproche o proiettive; in particolare, occupandosi della costruzione di una quàdrica determinata da nove punti, spinse Steiner a risolvere la medesima questione, come risulta da alcune sue pagine postume. Proseguirono poi nello stesso indirizzo H. Schröter (n. a Königsberg l'8 gennaio 1829, m. a Breslau il 3 gennaio 1892) e R. Sturm (n. a Breslau il 6 gennaio 1841, m. ivi il 2 aprile 1919), i cui principali lavori appartengono al periodo storico posteriore a quello di cui noi ci occupiamo.

Altrettanto non può ripetersi riguardo a un distinto matematico di cui già facemmo (v. sopra) incidentale menzione: L. Schläfli, n. a Grasswyll (cantone di Berna), il 15 gennaio 1814. S'inscrisse nel 1834 alla Facoltà teologica fondata allora nell'Università di Berna (da cui nel 1838 fu ordinato pastore), ma per proprio impulso coltivò le scienze positive. Venuto a contatto con Steiner, accettò di accompagnarlo nel

viaggio da lui fatto a Roma nell'inverno 1843-44; così potè giovarsi dei consigli ed ammaestramenti, non soltanto di lui, ma anche di Jacobi, Dirichlet e Borchardt, grazie a cui si orientò definitivamente verso la matematica. Rimpatriato, insegnò tale scienza nel Ginnasio di Thun sino al 1847; passò poi all'Università di Berna, prima come libero docente, poi (1853) come professore straordinario e più tardi come ordinario; nel 1891 fu collocato a riposo; morì il 20 marzo 1895 raccomandando il proprio nome ad una variopinta collezione di pregevoli lavori. Si deve a lui un notevole studio (*Quart. Journ. of Math.,* T. II) sopra la configurazione formata dalle rette di una superficie cubica, il quale, fra l'altro, lo condusse alla nozione di « bisestupla » che oggi non manca in alcuna trattazione della materia; continuando nelle stesse ricerche stabilì (*Phil. Trans.,* 1863) la classificazione delle superficie di terzo ordine reali e generali e poi rispose (*Ann. di Mat., Ser.* II, T. V, 1873) alla questione « quand'è che dalla superficie di terzo ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? ». All'analisi contribuì con importanti lavori sulla eliminazione, sopra varie funzioni particolari, ecc.; finalmente un suo lavoro postumo (*Theorie der vielfachen Kontinuität,* Bern, 1901) di geometria a più dimensioni dimostra che egli per primo si occupò delle figure regolari degli spazi superiori.

## C. K. C. von Staudt

698 - Per gettare le basi della nuova geometria, Chasles, Möbius e Steiner ricorsero a considerazioni e concetti di carattere metrico, che alcuni giudicarono estranei all'argomento, epperò da espellere; così ebbe origine un problema, che venne ritenuto importante nell'epoca in cui la nostra scienza era improntata all'aspirazione verso la purezza dei metodi, e che fu risolto da C. K. C. von Staudt. Egli nacque da famiglia patrizia a Rothenburg (Baviera) il 24 gennaio 1798; nel 1814 entrò nel ginnasio della vicina Ansbach e tre anni dopo passò all'Università di Gottinga, ove studiò sotto la direzione di Gauss, che ne seppe misurare il non comune valore. La dignità dottorale gli fu conferita nel 1822 ad Erlangen; ivi egli (dopo un non breve soggiorno in scuole secondarie) fu chiamato nel 1835 in qualità di professore ordinario, carica che conservò sino alla morte, avvenuta il 1° giugno 1867.

L'influenza esercitata sopra lo Staudt dal suo gran maestro si manifesta in alcuni lavori da lui pubblicati nel *G. di Crelle* (T. XXI, XXIV, XXIX e LVII) su questioni di algebra e teoria dei numeri, nonchè nella costruzione da lui ideata per il poligono regolare di 17 lati (Id., T. XXIX), che completa in un punto importante le *Disq. Arithm.* Malgrado l'indiscutibile pregio di tali scritti, non è su di essi che riposa la fama di Staudt, ma sulla sua opera geometrica di cui ora ci occuperemo.

Le relative ricerche devono essere state intraprese non più tardi del 1830, dal momento che nel 1831 egli potè inserire nel Programma del ginnasio di Norimberga un articolo, *Ueber die Curven II Ordnung,* nel quale sono esposte alcune nuove proprietà metriche e proiettive suggeritegli dallo studio della grande opera di Poncelet, l'influenza del quale è visibile per il grande uso fatto del principio di continuità. Ma qualche

tempo dopo, presa notizia delle opere di Möbius e Steiner, si convinse. da un lato della necessità di trattare la nuova geometria col rigore antico, e d'altro lato di separare le proprietà metriche dalle proprietà descrittive delle figure e quindi di costruire la geometria di posizione senza ricorrere al concetto di misura; dopo assiduo lavoro vi riuscì con l'opera pubblicata nel 1847 e con le aggiunte fattevi negli anni 1856, 1857 e 1860. La definizione di proiettività tra forme di I specie ideata dal geometra di cui ci occupiamo — come corrispondenza univoca che trasforma un gruppo armonico in altro gruppo armonico — appare a prima giunta artificiosa, ma offresi spontanea quando si definisce l'analoga corrispondenza per forme di II e III specie con la condizione di far corrispondere punti in linea retta a punti godenti della stessa proprietà; essa poi mette in luce che la definizione di quella relazione (Chasles e Steiner) fondata sulla eguaglianza dei birapporti contiene più di quanto sia strettamente necessario. Similmente la definizione staudtiana di conica, come curva unita di una polarità, ha il gran pregio di riuscire di eguale ampiezza di quella mediante un'equazione cartesiana, giacchè, al pari di questa, abbraccia anche le curve immaginarie. Aggiungiamo che la perfezione logica e le doti estetiche dell'edificio staudtiano porgono i migliori argomenti per stabilirne il sommo valore; e il fatto che l'esposizione pura della geometria di posizione ne ha posto in luce l'indipendenza dal postulato d'Euclide sta a dimostrare che il metodo di Staudt possiede anche un cospicuo valore dottrinale. Nè va dimenticata, fra le caratteristiche di colui che fu chiamato l'« Euclide del secolo XIX », l'assenza di figure, determinata e giustificata dalla considerazione che una figura è sempre un caso particolare, mentre un ragionamento è applicabile in ogni ipotesi.

699 - Verso il termine della sua *Geometrie der Lage* lo Staudt ha introdotte come semplici abbreviazioni le locuzioni « coppia di punti immaginari » e « conica immaginaria », evidentemente col proposito di ritornare sull'argomento. E infatti, tredici anni dopo, con i suoi *Beiträge* egli ha insegnata la prima teoria veramente soddisfacente degli elementi immaginari, senza ricorrere a coordinate; come è noto, per lui una coppia di elementi immaginari di una forma di I specie è un'involuzione ellittica a cui sia annesso un determinato verso. A noi non è dato di esporre il modo ingegnoso in cui egli applicò questa definizione alle più svariate questioni; ma richiamiamo l'attenzione dei lettori quanto egli scrisse intorno alle rette immaginarie di II specie, l'originale calcolo coi « Würfe » e la definizione delle coordinate proiettive per gli elementi delle forme di I, II e III specie.

Negli ultimi anni della sua vita egli continuò ad accuparsi delle stesse questioni; lo provano un articolo (*G. di Crelle*, T. LVII, 1863) sopra un nuovo elemento introdotto da Steiner nella teoria delle coniche e un opuscolo relativo ai diametri di una conica o di una quàdrica.

Chiuderemo notando che Staudt, malgrado l'attitudine da lui assunta, non fu animato da alcuna intransigenza settaria; infatti egli vagheggiava l'idea di scrivere una *Geometria di Misura* come « pendant » della sua *Geometria di Posizione* (un saggio se ne trova nell'importante

articolo sul volume di un poliedro pubblicato nel Vol. XXIV del *G. di Crelle*); ma sgraziatamente a tanto non gli bastarono le forze e la vita.

L'opera di Staudt faticò non poco ad essere apprezzata a dovere; essa presentava troppe finezze logiche per trovare facilmente un cospicuo numero di lettori in grado di comprenderle. Fortuna volle che essa venisse intesa da un eminente cultore della scienza delle costruzioni, il quale, facendo della stessa suo precipuo punto d'appoggio, creò una nuova branca della nostra scienza: alludiamo a Carlo Culmann (n. a Begraben il 10 luglio 1821, m. il 9 dicembre 1881 a Zurigo nel cui Politecnico era insegnante) e alla Statica grafica. Questa nuova materia cominciò ad essere insegnata in detto Politecnico sino dal 1860 e il Culmann per renderne possibile l'intelligenza ai proprii alunni indusse T. Reye (n. a Ritzenbüttel il 20 giugno 1838, m. a Würzburg il 2 luglio 1919) a tenere quelle lezioni sopra *La geometria di posizione* che si diffusero in tutto il mondo, grazie ad una pubblicazione che fece acquistare alle idee di Staudt la meritata celebrità [1]; oggi (in cui la purezza dei metodi è poco in favore presso la frettolosa epoca moderna) esse sono mediocremente apprezzate e raramente applicate; ma chi è in grado di misurarne il valore crede (o almeno spera) si tratti non di un definitivo tramonto, ma soltanto di un'eclisse transitoria [2].

## L. Cremona

700 - Passando in Italia troveranno un matematico che, dopo essersi assimilato quanto scrissero i geometri ricordati nel presente Capitolo, ne fece brillanti applicazioni e poi aperse alla geometria strade del tutto nuove: Luigi Cremona. Egli nacque a Pavia il 7 dicembre 1830; nel 1849 partecipò validamente alla difesa di Venezia, assediata dall'esercito austriaco; caduta l'eroica città, riprese gli interrotti studi e così conseguì (24 novembre 1849) a Pavia la licenza liceale e quattro anni dopo (9 maggio 1853) il diploma di dottore negli studi d'ingegnere civile e architetto. Avendo scelto la carriera dell'insegnamento, ebbe un posto di supplente e poi (17 gennaio 1857) la nomina a professore ordinario nel liceo di Cremona. Liberata la Lombardia dal dominio straniero, fu trasferito a Milano (28 novembre 1859), ma vi rimase poco tempo chè, con decreto del 10 giugno 1860, venne destinato ad occupare la cattedra di geometria superiore istituita allora nell'Università di Bologna; fu poi

---

(1) Degli altri lavori del Reye dirà lo storico dell'epoca seguente quella di cui ci occupiamo.

(2) Le tradizioni geometriche caratterizzate in Germania dalla fulgida triade Möbius, Steiner, von Staudt avrebbero potuto essere validamente continuate da un altro matematico, ove la sorte gli avesse concessa una men breve esistenza: Carlo Guglielmo Feuerbach (n. a Jena il 30 maggio 1800, m. professore al ginnasio di Erlangen il 12 marzo 1834). Con un volume che, dopo un secolo, conserva intatto il proprio valore, egli, riprese metodicamente lo studio delle proprietà dei triangoli rettilinei, iniziato dal conte di Fagnano e con l'esempio indusse ad occuparsene una pleiade di matematici posteriori; il suo nome è legato al teorema « il cerchio dei nove punti è tangente ai quattro cerchi inscritti ed ex-inscritti ad un triangolo ». Incoraggiato dal successo ottenuto in tali ricerche, le estese allo spazio e così ci si presenta come fondatore della geometria del tetraedro, altra branca che conta oggi una ricca letteratura.

(10 ottobre 1869) comandato all'Istituto Tecnico Superiore di Milano per insegnarvi la Statica grafica. Ma anche in questo nuovo ufficio non rimase a lungo, chè quattro anni dopo fu nominato Direttore della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Roma; a Roma insegnò nella Facoltà di Scienze geometria superiore e poi geometria analitica e proiettiva (riunione avvenuta per sua iniziativa); ivi morì il 10 giugno 1903.

Tutta la produzione scientifica del Cremona mostra che egli, benchè incline a sfruttare le inesauribili risorse del puro ragionamento, non ebbe scrupolo di ricorrere alle coordinate quando queste mostravansi più convenienti all'assunto; però, introdotto che fu in Italia per suo consiglio l'insegnamento della geometria proiettiva, ritenne proprio dovere di agevolare il còmpito degli insegnanti fornendoli di un apposito trattato (il quale, benchè incompleto, venne tradotto in francese ed in inglese). Altre due sue pubblicazioni rispecchiano l'insegnamento da lui tenuto a Milano (quella di Statica grafica ha una notevole originalità, rivelando il legame delle figure reciproche con i complessi lineari). Più alto è il tema dei lavori intitolati *Introduzione a una Teoria geometrica delle Curve piane* e *Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie* (entrambi tradotti in tedesco), ove sono elegantemente esposti, sapientemente coordinati e notevolmente aumentati tutti i risultati ottenuti da coloro che prima si erano occupati di curve e superficie algebriche; benchè nelle basi l'esposizione non sia del tutto indipendente da coordinate, pure l'uso metodico di ragionamenti diretti giustifica pienamente i titoli surriferiti. Della fecondità dei procedimenti ivi usati il Cremona offrì molteplici prove in lavori speciali; l'angustia dello spazio ci costringe a citarne due soli. Uno (*G. di Crelle,* T. LXIV, 1865) ha per iscopo il dimostrare e completare le proprietà scoperte da Steiner nell'ipocicloide tricuspide (v. p. 872); nell'altro (Id., T. LXVIII, 1868) egli ha vittoriosamente risposto al concorso (premio Steiner) bandito dall'Accademia di Berlino perchè fossero dimostrati i teoremi sulle superficie cubiche enunciati da quel grande geometra (v. p. 872).

701 - Non sono queste le uniche figure che attrassero l'attenzione del Cremona. Infatti alle cubiche gobbe egli dedicò gran numero di importanti lavori (*Ann. di Mat.,* T. I e II, 1858-59; *G. di Crelle*, TT. LVIII, LX e LXIII, 1861, 1862 e 1864; *Nouv. Ann. de Math.,* Ser. II, T. I, 1862; *Giorn. di Mat.,* T. I, 1864; *Rend. Ist. Lomb.,* Ser. II, T. XII, 1879), i quali mostrano che il suo interesse per l'importante argomento durò non meno di un ventennio. Non trascurò le quartiche gobbe sia generali (*Ann. di Mat.,* T. IV, 1861) che speciali (*Rend. Ist. Lomb.*, T. I, 1868). Delle superficie rigate egli si è occupato più volte, cioè di quelle cubiche (*Rend. Ist. Lomb.,* 1861 e *G di Crelle,* T. LX, 1862), di quelle di quarto grado (*Mem. Acc. Bologna,* Ser. II, T. VIII, 1868, lavoro classico che contiene la completa enumerazione di quelle importanti figure) e finalmente in generale di quelle con due direttrici rettilinee (*Rend. Ist. Lomb.,*. Ser. II, T. I, 1868). Ricordiamo di sfuggita una sua memoria sopra la superficie di Steiner (*G. di Crelle,* T. LXIII, 1864) e i contributi da lui dati alla teoria delle caratteristiche (*C. R.,* T. LXIV, 1867) per finire accennando alla teoria destinata ad attraversare i secoli col

nome di Cremona. La serie dei lavori relativi si apre con due importanti memorie che gettano le basi della teoria delle corrispondenze univoche fra due piani (*Giorn. di Mat.*, T. I, 1863); segue altra (*Math. Ann.*, T. IV, 1868) intorno alla rappresentazione su di un piano di superficie algebriche: degno coronamento è la memoria (*Ann. di Mat.*, Ser. II, T. V, 1872), sgraziatamente non completa, ove sono posti i fondamenti ed esposte numerose applicazioni della teoria generale delle trasformazioni univoche fra due spazi. In conseguenza di questi lavori lo studio delle proprietà delle figure che non si perdono per proiezione apparve come caso particolare di una questione ben più vasta e complessa; per ciò essi chiudono l'èra eroica della geometria proiettiva e preparano efficacemente quella della geometria algebrica oggi in piena fioritura, scopo precipuo della quale è la ricerca di quelle proprietà delle figure che non si perdono quando queste vengono sottoposte ad una trasformazione birazionale qualunque.

---

## Parte Seconda: RICERCHE ANALITICO-GEOMETRICHE; NUOVI SUSSIDI ALGORITMICI

### J. Plücker

702 - J. Plücker nacque a Elberfeld il 16 giugno 1801; frequentò successivamente le Università di Bonn, Heidelberg e Berlino; passò a Parigi buona parte degli anni 1823 e 1824; durante il primo di essi l'Università di Marburg gli conferì « in absentia » (31 agosto 1823) la dignità dottorale; nel 1828 fu nominato professore straordinario a Bonn, l'anno successivo conseguì l'ordinariato a Halle, donde nel 1836 ritornò a Bonn, ove rimase sino alla morte (22 maggio 1868) che lo colpì nel pieno rigoglio delle sue mirabili qualità inventive. Sino al 1840 egli si consacrò quasi esclusivamente alla geometria; dopo una pausa di sei anni, pubblicò una nuova opera sopra tale materia; si dedicò poi completamente alla fisica sperimentale con memorabile successo; ma nel 1864 ritornò alla scienza che gli aveva data per prima la fama, componendo un'opera poderosa, la cui II parte vide la luce dopo la sua morte. Il Plücker, che non amava leggere lavori altrui, s'imbattè più volte in risultati già noti; di natura impulsiva, qualche volta incorse in affermazioni errate; mediocre ammiratore dell'eleganza dei calcoli, usò dell'algebra esclusivamente come mezzo, il che nocque al buon successo dei suoi scritti. Il metodo della notazione abbreviata deve a lui quei perfezionamenti che una morte inattesa vietò al Babilier di arrecarvi e che gli permisero di compiere importanti scoperte (ad es. di trovare nuove proprietà della configurazione determinata dall'esagrammo di Pascal). Si deve a lui il sistema oggi in uso per determinare mediante coordinate una retta nel piano ed un piano nello spazio; così egli potè, diversamente dallo Staudt (v. p. 874), togliere quanto di nebuloso aveva il principio di dualità negli scritti di Gergonne e fissare con precisione il concetto di « classe di una curva piana ». Inoltre introdusse un sistema di coordinate omogenee

indipendente dalle considerazioni baricentriche del Möbius (v. p. 865). È sua creazione il « metodo della numerazione delle costanti » di cui egli dimostrò il considerevole valore euristico e di cui segnalò i pericoli, nonchè i mezzi per evitarli. Ancora: diede opera alla spiegazione del cosidetto « paradosso di Cramer » e così fu condotto a quell'elegante dimostrazione del teorema di Pascal, fondata sulla considerazione dei punti comuni a due cubiche trilatere, che fu riprodotta da tanti posteriori trattatisti. A lui devesi completamente la spiegazione del « Paradosso di Poncelet », a cui egli giunse stabilendo essere sei le caratteristiche ordinarie di una curva algebrica piana (a coppie correlative) ed essere esse legate da quattro relazioni (riducibili a tre) che portano e sempre porteranno il nome di « formole di Plücker ». Numerose e feconde furono poi le sue indagini sopra le curve di 3° e 4° ordine; infatti sono scoperta sua le proprietà essenziali della configurazione formata dai flessi di una cubica e (malgrado qualche svista) molti teoremi sulle bitangenti di una quartica; meno felice fu nelle classificazioni da lui proposte per le curve dei detti ordini, mentre prese posto stabile nella scienza la sua definizione di « fuoco » di una curva piana (*Giorn. di Crelle,* T. X, 1833).

703 - Tutto ciò si apprende da tre importanti opere che egli dedicò alla geometria piana durante il periodo 1828-1839 e da parecchie memorie inserite a partire dal 1826 nelle *Ann. de Math.* e nel *G di Crelle.* Ma egli non trascurò nemmeno la geometria dello spazio. Infatti vi appartiene un lavoro (*G. di Crelle,* T. XXIV, 1847) ove è studiata la geometria sopra un'iperboloide, assumendo come coordinate di un suo punto qualunque i parametri determinatori delle due generatrici che s'incrociano in esso; altrettanto dicasi di un lavoro (Id., T. XIX, 1839) sopra la superficie delle onde, ove è, fra l'altro, dimostrato che essa è autopolare rispetto ad una determinata quàdrica. Allo stesso ramo appartiene l'ultimo dei volumi da lui pubblicati (1846) prima di volgersi alla fisica; precipuo scopo di esso è di estendere allo spazio i sistemi di coordinate da lui già introdotti nella geometria piana. Aggiungiamo che vi si leggono (n. 260) alcune frasi che, dopo lunga incubazione, produssero un nuovo ramo della geometria. Parliamo delle linee in cui è affermata la possibilità di considerare la retta come elemento generatore delle figure dello spazio e di determinarne la posizione mediante quattro numeri. Idee oggi familiari a tutti, ma in cui nessuno ravvisò un germe fecondo, sino a che l'autore stesso non se ne servì per costruire una « nuova geometria dello spazio ». Mentre prima erano stati studiati soltanto i sistemi di $\infty^1$ (rigate) o $\infty^2$ (congruenze) rette, egli mostrò doversi introdurre nella scienza anche i sistemi di $\infty^3$ rette (complessi) e di più rese palese l'opportunità di studiare le supercie rigate, considerandole come enti dello spazio di rette (memoria inserita nel T. I, 1867, della II Ser. degli *Ann. di Mat.*). E va notato che egli non rifuggì dal considerare la geometria della retta come una geometria a quattro dimensioni, appartenendo a lui il concetto generale che al nostro spazio si possono attribuire quantesivogliano dimensioni, purchè si scelga opportunamente l'elemento generatore. Malgrado la novità di tutte queste vedute, la trattazione della nuova geometria fatta da Plücker ha un'impronta antiquata.

numerose essendo le considerazioni metriche di scarso interesse e le discussioni di equazioni di superficie speciali; ma la freschezza di mente di cui egli godette sino al termine della sua carriera fa ritenere che egli avrebbe impressa poi alla nuova geometria la fisonomia moderna necessaria al suo ulteriore progresso, ove la morte non glielo avesse vietato.

## D. Chelini e O. Hesse

704 - Al perfezionamento della geometria analitica si adoperarono efficacemente, contemporaneamente ed indipendentemente, sia pure con mentalità differenti, due matematici di cui va ora fatta menzione: Domenico Chelini e Otto Hesse.

Il primo nacque a Gragnano (prov. di Lucca) il 18 ottobre 1802; sedicenne vestì l'abito dello scolopio; nel 1851 fu destinato all'insegnamento della meccanica nell'Università di Bologna e lo tenne sino al 1864; dovette allora abbandonarlo per avere rifiutato il prescritto giuramento di fedeltà al Governo italiano. Dal 1867 fu professore nell'Università di Roma, sino all'occupazione dell'eterna città da parte dell'esercito nazionale; da quel momento sino alla morte (16 novembre 1878) appartenne all'Università Vaticana. Non meno di 53 lavori pubblicati dal 1834 al 1877 fanno fede della sua operosità, la quale si esplicò esclusivamente nel semplificare o perfezionare procedimenti o risultati già noti. Egli caldeggiò l'uso in geometria di concetti appartenenti alla teoria dei moti e delle forze e da quelli di « proiezione » e « momento » dedusse esposizioni nuove e di perfetta eleganza delle principali branche della geometria analitica (sino alla teoria della curvatura delle superficie e alla geometria della retta inclusivamente); paragonando il suo *Saggio di Geometria Analitica* (1838) e gli scritti successivi che ne sono corollarii, con alcune moderne esposizioni del metodo delle coordinate si ravvisa nel Chelini un vero precursore e si è condotti a osservare che la nostra scienza si sarebbe notevolmente avvantaggiata se i suoi lavori non fossero stati, per la maggior parte, sepolti in raccolte clandestine, e in un'epoca in cui gli sforzi per scuotere il giogo straniero, mantenevano gli scienziati italiani in uno stato di quasi completo isolamento di fronte all'estero.

705 - O. Hesse nacque a Königsberg l'11 aprile 1811; entrò nel 1832 in quell'Università, ove fu diletto discepolo di Jacobi; nel 1840 conseguì la laurea e poco dopo la libera docenza; questa esercitò sino al 1845, quando nel patrio Ateneo fu nominato professore straordinario, il ritardo frapposto a una promozione di cui gli si sentiva in diritto gli fece accettare nel 1855 il posto di ordinario a Halle, donde l'anno seguente passò a Heidelberg. Da questo momento cessa il periodo di sua più intensa produzione e comincia quello in cui egli dotò la letteratura di ottime opere didattiche, fra cui spiccano le *Vorlesungen uber analytische Geometrie dei Raumes* (ne conosciamo tre edizioni recanti le date 1861, 1869, 1876). Nel 1868 fu chiamato a insegnare nel Politecnico allora fondato a Monaco e in questa città si spense il 4 agosto 1874.

L'esame dei lavori del Hesse lo fanno apparire come il tipo del cultore della geometria analitica, il quale, per conseguire qualunque scopo, ricorre a coordinate, sdegnando di assumere gli elementi di riferimento in posizioni particolari, e che le formole ottenute interpreta per giungere a nuovi teoremi e eleganti costruzioni. La perfezione dei risultati da lui ottenuti è tale che nulla seppe aggiungervi chi venne poi; forse il segreto di tanto successo sta in ciò che la maggior parte dei soggetti da lui studiati lo occuparono durante quasi tutta la vita. Così delle quàdriche cominciò ad occuparsi (1838) fin da quando era studente in occasione di un tema propostogli da un suo maestro (*G. di Crelle,* T. XVIII), ne trattò nella sua Dissertazione di laurea (Id., T. XX), e vi dedicò non meno di sette memorie (Id., TT. XXIV, XXVI, XLV, LX e LXXIII) che vanno dal 1842 al 1871; che più? fra le sue carte vennero trovati altri lavori sullo stesso soggetto, i quali furono giudicati degni di stampa. Un secondo tema da lui preferito è la teoria delle coniche — in particolare l'esagrammo di Pascal — su cui dal 1851 al 1874 pubblicò cinque memorie (Id., TT. XLI, XLV, LXVIII, LXXV e *Münch. Abb.,* T. XI) e ne lasciò altre inedite. Sulle cubiche piane scrisse ben cinque memorie (Id., TT. XXVIII, XXXVI, XXXVIII e XLI) e altrettante sopra le quartiche (Id., TT. XLI, XLIX, LII e LV), completando ed in parte rettificando quanto al riguardo avevano asserito Steiner e Plücker. Una importante memoria pubblicata nel T. XLI (1851) del *G. di Crelle* insegna a risolvere il difficile problema di determinare l'equazione del piano che oscula l'intersezione di due superficie algebriche; ivi fa il proprio ingresso nella scienza il determinante delle derivate seconde di una funzione omogenea, detto ora *Hessiano* per ricordare le fondamentali ricerche su di esso compiute dal matematico di cui ci occupiamo (*G. di Crelle*, TT. XLII, 1851 e LVI, 1859). Non è questo l'unico contributo dato da Hesse alla scienza del numero, occupandosi di problemi relativi alla scienza dell'estensione; infatti egli ha compiuto notevoli ricerche intorno ad alcune equazioni abeliane (Id., TT. XXXIV e XLI), è giunto per proprio conto (Id., T. XXVII) al cosidetto « metodo dialitico » di Sylvester ed ha di più insegnato (Ivi, T. XXVIII) a calcolare il risultante di tre equazioni di secondo grado. Tacendo di suoi lavori sopra altri soggetti, chiuderemo citando il « principio di trasporto » da lui suggerito (Ivi, T. LXVI), che consiste nel rappresentare i punti del piano mediante le coppie di punti di una retta fissa.

## In Inghilterra: Cayley, Sylvester e loro seguaci

706 - Mentre — come fu scritto — la storia della matematica durante gran parte del secolo XVIII può narrarsi prescindendo affatto dall'Inghilterra, a partire dal 1830 si manifesta visibile la benefica influenza della Scuola analitica (p. 778),e quella nobile terra prende posto assieme alle altre nazioni europee nella gara di far progredire la nostra scienza, in parte battendo le vie già aperte da altri, ma anche in modo originale, specialmente creando quelle teorie algebriche che servono ad esprimere l'invariabilità per proiezione di certe proprietà delle figure.

cioè l'algebra delle trasformazioni lineari o teoria delle forme invariantive.

Primo del gruppo di matematici di cui imprendiamo a narrare le gesta è Giorgio Boole; n. a Lincoln il 2 novembre 1815, insegnò a Cork dal 1849 sino al giorno della sua morte (8 dicembre 1864). Con l'articolo intitolato *Researches on the Theory of Analytical Transformations* (Cambridge Math. Journ. T. 1841) egli inaugurò gli studi di detta specie; lasciando poi ad altri di coltivare questo nuovo campo, si volse allo studio della logica nel senso adombrato da Leibniz e Lambert: così ebbe origine l'opera *The Laws of Thought* (1854) che lo fa riguardare come fondatore della moderna logica matematica. Il calcolo delle differenze finite deve a lui una pregevole esposizione. Finalmente non apprendiamo certamente nulla di nuovo al lettore citando Boole come autore anche di un *Treatise on Differential Equations*, che ebbe larga e ben meritata diffusione non soltanto in Inghilterra.

707 - Al Boole segue Arturo Cayley; n. a Richmond (Surrey) il 16 agosto 1821, nel 1838 entrò come studente nel Trinity College di Cambridge, di cui divenne (1842) « minor » e poi (1845) « major » Fellow; leggi antiquate, che lo avrebbero costretto ad entrare nel sacerdozio, gli fecero nel 1846 lasciare questa posizione, e allora esercitò a Londra la professione dell'avvocato; ma non abbandonò neppure allora le ricerche matematiche, di cui sin dal 1841 aveva cominciato a dare pubblici saggi e che gli fecero conferire nel 1852 la dignità di F. R. S. La creazione nell'Università di Cambridge di una nuova cattedra di matematica concesse a Cayley di consacrarsi esclusivamente alla scienza, giacchè in data 10 giugno 1863 egli fu nominato professore sadleriano [1] e in tale ufficio rimase sino alla sua morte (26 gennaio 1899), aprendo soltanto una parentesi nell'anno scolastico 1881-82, per tenere un corso di lezioni all'Università di Baltimora. Il Cayley fu uno dei più fecondi matematici che ricordi la storia, avendo scritto quasi mille memorie di matematica oltre un *Treatise on elliptic Functions* (tradotto anche in italiano); assiduo lettore di lavori altrui, trovata ivi lo stimolo a ricerche originali; era principalmente un analista, ma con importanti lavori geometrici e meccanici diede prova di non essere esclusivista. Limiti di spazio ci costringono a far menzione soltanto dei suoi lavori di maggiore importanza.

Egli ha il grande merito di avere iniziato la metodica ricerca delle funzioni dotate di proprietà invariantive rispetto a trasformazioni lineari; prendendo lo spunto dalla succitata memoria del Boole, egli dedicò a tale argomento due succosi lavori (*Cambridge Math. Journ.*, T. IV, 1845 e *Cambridge and Dublin Math. Journ.*, T. I, 1846) che, essendo stati riprodotti nel *G. di Crelle* (T. XXX, 1846), conseguirono larga diffusione, e poi dieci scritti fondamentali (*Memoirs upon Quantics*) nelle P. T. durante il periodo 1854-1878. Ivi l'autore stabilì che il problema centrale della relativa teoria consiste nella ricerca delle funzioni inva-

[1] La fondazione di tale cattedra risale ad un lascito di Lady Maria Sadler (1701); ma fu una riforma del primitivo statuto effettuata nel 1857 ed entrata in vigore nel 1863 che permise l'ingresso nell'insegnamento del grande geometra.

riantive linearmente indipendenti di una forma o di un sistema di forme algebriche e lo risolse in molti casi ricorrendo ad una speciale simbolica che i suoi conterranei non hanno ancora abbandonata; in una di esse egli credette di poter affermare che esse sono in numero infinito, ma, posto sull'avviso (v. n. 713), riparò prontamente all'errore commesso.

A diffondere nelle scuole — non soltanto inglesi — questo nuovo capitolo dell'algebra, giovarono grandemente le *Lessons introductory to the Modern Higher Algebra,* pubblicate nel 1859 e riprodotte più volte nell'originale e in traduzioni. Ne è autore Giorgio Salmon; n. a Cork il 25 settembre 1819, dal 1833 fu allievo del Trinity College di Dublino, di cui nel 1841 divenne Fellow e in cui dal 1848 al 1866 insegnò matematica e poi sino al 1888 teologia; a Dublino morì il 22 gennaio 1904. Sino dal 1844 diede pubblici saggi delle sue attitudini alla ricerca matematica; ma le sue principali benemerenze nel nostro campo sono rappresentate da una serie di trattati in cui egli dottamente coordinò quanto allora conoscevasi di alta geometria: sono le *Conic Sections* (1847), le *Higher plane Curves* (1852) e la *Geometry of Three Dimensions* (1862), opere tutte più volte ristampate, con miglioramenti ed aggiunte, e tradotte in varie lingue.

708 - Torniamo al Cayley per far conoscere gli altri contributi da lui dati alla nostra scienza. Una seconda teoria algebrica su cui egli vanta a ragione diritti di paternità è la teoria delle matrici, grazie a due fondamentali memorie (P. T., 1858 e 1866); a molti altri capitoli dell'algebra (funzioni simmetriche, determinanti, eliminazione, funzioni di Sturm, metodo di derivazione di Arbogast, ecc.), egli arrecò perfezionamenti rilevanti; parecchi suoi lavori attestano il suo fattivo interesse per le funzioni biperiodiche (*Journ. de Math.,* T. X, 1845 e P. T., 1874), di cui fece un'importante applicazione allo studio dei poligoni di Poncelet relativi a due coniche (P. T., 1861); assurgendo poi ancora più in alto, studiò le funzioni $\theta$ multiple (Id., 1861).

Passiamo alla geometria. Le 27 rette di una superficie cubica e i suoi 45 piani tritangenti furono da lui segnalati nel corso di una corrispondenza col Salmon (cfr. *Cambr. and Dubl. Math. Journ.,* T. IV, 1849); tale scoperta contrassegna gli inizi degli studi sopra queste figure. Si deve pure a lui la scoperta della rigata cubica con due direttrici infinitamente vicine (P. T., 1862); numerosissimi sono poi i suoi lavori sopra speciali superficie di 4° ordine. Riguardo alle curve piane, oltre a comporre molti studi sopra le curve di 3° e 4° ordine e quelle d'ordine qualunque dotate di prerogative particolari, egli ha insegnato a determinare i punti sestattici di una curva piana algebrica qualunque (P. T., 1865) e a scomporre una singolarità superiore in singolarità ordinarie (*Quart. Journ. of Math.,* T. VII, 1866). Si deve a lui un teorema generale sopra le intersezioni di due curve piane (*Cambridge Math. Journ.,* 1843) e l'uso delle equazioni funzionali nelle questioni di geometria numerativa concernenti le curve soddisfacenti a certe condizioni (P. T., 1868). Non meno fondamentali sono i contributi da lui dati alla teoria delle curve gobbe algebriche; infatti egli ha scoperte le formole

analoghe a quelle di Plücker che legano le singolarità ordinarie di una curva di detta specie (*Journ. de Math.,* T. X, 1845); di tali curve ha suggerita la nota rappresentazione analitica « monoidale » (C. R., TT. LIV, 1862 e LVIII, 1864). Indipendentemente da Plücker ha insegnato a rappresentare (anzi con maggiore generalità) una retta dello spazio mediante sei numeri legati da una relazione quadratica (*Quart. Journ. of Math.,* T. III; *Cambridge Trans.,* T. XI). Ancora a lui si devono le prime ricerche sopra le singolarità di una superficie algebrica (P. T., 1869 e 1872); finalmente egli contribuì notevolmente alla teoria delle trasformazioni razionali fra due piani o fra due spazi (*Proc. of the Lond. Math. Soc.,* T. III, 1869-71)

Anche la teoria dei numeri occupò l'infaticabile investigatore, come il lettore riconoscerà ricorrendo alla collezione delle sue opere complete; finalmente di lui dovremo occuparci nel Capitolo seg. (n. 721), grazie al posto che occupa in una nuova branca della geometria.

709 - Nella storia delle matematiche il nome del Cayley è indissolubilmente legato a quello di un suo conterraneo, il Siylvester, quantunque si tratti di una personalità di carattere totalmente diverso; chè, mentre tutte le pagine vergate dal primo sono scritte con lo stile freddo e pacato che ben s'addice ad argomenti scientifici, i lavori del secondo hanno assai spesso l'aspetto di note frettolose pubblicate col proposito di prendere data; inoltre in parecchie occasioni si trovano versi in luogo di dimostrazioni; finalmente ciò che è peggio, è forza riconoscere che l'autore, abbagliato dall'analogia, spesso ingannatrice, si lasciò trascinare a affermazioni contrarie al vero, cosa che devesi tener presente affinchè l'ammirazione per un uomo di genio non faccia trascurare il rigoroso controllo delle sue asserzioni. In questo tumultuoso stile si rispecchia la vita irrequieta dell'autore, che ora delineeremo a grandi tratti.

J. J. Sylvester nacque a Londra il 3 settembre 1814; nel 1831 fu ammesso al St. John College di Cambridge, ma non potè conseguirvi i gradi tradizionali non essendo di religione cattolica. I lavori da lui pubblicati a partire dal 1837 gli fecero conferire nel 1838 la cattedra di filosofia naturale nell'University College di Londra e il grado di F. R. S. Nel 1841 accettò una cattedra nell'Università della Virginia, ma fu costretto a rinunciarvi poco dopo, avendo manifestate convinzioni antischiaviste contrarie alle idee del Governo. Rimpatriato, in attesa di qualche occupazione scientifica, si dedicò all'avvocatura; ciò gli diede occasione di avvicinare il Cayley, con cui non tardò a legarsi di fraterna amicizia. Dal 1855 al 1870 insegnò nella Scuola militare di Woolwich e dal 1875 al 1883 nell'Università di Baltimora; durante questo soggiorno in America fondò e diresse l'*American Journal of Mathematics* ed esercitò un'influenza tanto profonda e benefica che gli è da allora che la matematica è regolarmente coltivata negli Stati Uniti. Chiamato a Oxford come successore di H. J. S. Smith (v. pag. seguente) occupò la cattedra saviliana sino al 1892; si ritirò poi a Londra, ove morì il 5 marzo 1897.

710 - Della teoria delle forme egli misurò subito la grande importanza e la fece notevolmente progredire; infatti furono da lui inventati i vocaboli invariante, covariante, contravariante, concomitante, congre-

dienti, contragredienti, emanante, combinante, forma canonica e qualche altro. Fra i contributi da lui dati a quella teoria spiccano quelli relativi alla riduzione a forma canonica delle funzioni algebriche razionali; fu appunto la riduzione di una forma quaternaria cubica alla somma dei cubi di cinque forme lineari che lo condusse alla scoperta del « pentaedro » che porta il suo nome (*Cambridge and Dubl. Math. Journ.,* T. I).

Di grande importanza sono i suoi studi sulla teoria delle equazioni algebriche; egli, infatti, ha trovato e denominato il metodo di eliminazione detto da lui « dialitico » e di più ha mostrato che il concetto fondamentale di esso può servire anche a risolvere altre questioni di eliminazione (Id., T. II); ha poi scoperti criteri relativi alla realità delle radici di un'equazione di 5° grado (P. T., T. 154, 1864); è pure sua massima gloria avere trovata (Ivi) la tanto desiderata dimostrazione di una regola enunciata da Newton (v. p. 575). Ha poi scoperta e denominata la « legge d'inerzia delle forme quadratiche » (*Phil. Magazine*, T. IV, 1852) ed ha date le espressioni delle funzioni a cui guida il teorema di Sturm col mezzo delle radici dell'equazione considerata (P. T., T. CLXIII, 1853). Dalla teoria delle forme fu indotto ad occuparsi di questioni di aritmetica, in particolare della partizione dei numeri, teoria a cui diede notevole incremento (*Quart. Journ. of Math.*, T. I, 1865). Le sue ricerche sopra l'algebra universale si riferiscono alla teoria dei numeri complessi a più unità (v. n. 729), mentre quelle sopra i cosiddetti « reciprocanti » si collegano a quella degli invarianti differenziali. Non possiamo che farne rapido cenno; e finiremo notando che, mentre una sua memoria sul moto di un solido attorno a un punto fisso (P. T., T. CLVI, 1866) gli accorda un posto nella storia della meccanica, in quella della geometira viene nominato per la sua teoria della residuazione rispetto ai punti di una cubica piana, inserita nella II ed. (1873) delle *Higher Plane Curves* del Salmon, e per una notevole generazione del complesso lineare di rette da lui scoperta (C. R., T. LII, 1861).

711 - L'influenza esercitata in Inghilterra dalla fulgida triade Cayley, Salmon, Sylvester fu benefica, profonda e permanente, come può desumersi dal numero e dal valore di coloro che ne calcarono le orme: a mostrarlo basta far cenno solo dei due più eminenti.

H. J. S. Smith, n. a Dublino il 2 novembre 1827, fu studente nell'Università di Oxford e in quella Università divenne nel 1860 professore saviliano; ad Oxford si spense addì 9 febbraio 1883. Il premio Steiner conferitogli nel 1868 dall'Accademia di Berlino per una memoria (pubblicata poi negli *Annali di matematica*) sulla risoluzione grafica dei problemi e biquadratici è documento della sua perizia geometrica, la quale è confermata da altre ricerche, fra i risultati delle quali ricordiamo la scoperta delle proprietà focali delle figure omografiche o correlative. Profondo conoscitore dell'aritmetica superiore, ne fece argomento di una serie di *Rapporti* (1859-65) presentati alla Associazione britannica per il progresso della scienza; sulla stessa materia pubblicò poi nelle P. T. degli anni 1861 e 1867 due memorie relative ad un argomento che l'Accademia delle scienze di Parigi propose nel 1882 per il Gran Premio delle

scienze matematiche; lo Smith partecipò alla gara col *Mémoire sur la Représentation des Nombres par des Sommes de cinq Carrés,* la quale non conseguì (dopo la morte dell'autore) che una metà del premio, il che destò meraviglia in chi sapeva che la questione era stata risolta dallo Smith più di vent'anni prima, in lavori di pubblico dominio (cfr. n. 740).

Breve ma assai fruttifera per la scienza fu l'esistenza di W. Kingdon Clifford; n. a Exeter il 4 maggio 1845, a diciott'anni fu ammesso al Trinity College di Cambridge, di cui nel 1868 divenne Fellow; tre anni dopo fu chiamato ad insegnare matematica applicata nell'University College di Londra; il 4 marzo 1879 morì a Madera, ove aveva cercato sollievo ad un morbo che non perdona. Mente aperta alle più svariate correnti del pensiero moderno, si occupò di tutte le questioni scientifiche che agitavansi al tempo suo, come si apprende dalla raccolta de' suoi scritti. Dal punto di vista rigorosamente matematico, emerge fra i suoi lavori (benchè sgraziatamente incompleta) la memoria *On the Classification of loci* (P. T., 1878) ove è iniziato e spinto notevolmente innanzi lo studio delle curve negli iperspazi.

## In Germania: dall'Aronhold al Klein

712 - La teoria delle forme algebriche, passando dall'Inghilterra alla Germania, subì una radicale trasfigurazione grazie all'introduzione e all'uso di una geniale rappresentazione simbolica, in forza della quale una funzione omogenea si scrive come potenza di una forma lineare. Ne è autore S. H. Aronhold; n. a Angerburg il 16 luglio 1819, studiò nelle Università di Königsberg e Berlino, la prima delle quali nel 1851 gli conferì la lauera dottorale « ad honorem »; nello stesso anno venne abilitato alla libera docenza presso quel Politecnico, ove divenne poi titolare ed ove insegnò sino alla sua morte, avvenuta il 13 marzo 1884. Le memorie che lo fanno considerare uno dei fondatori della teoria delle forme hanno un carattere esclusivamente algebrico; furono pubblicate tutte nel *G. di Crelle* (TT. XXXIX, LV, LXII e LXIX).

Ben diversa da quella dell'Aronhold è la mentalità di un altro matematico tedesco, non meno benemerito riguardo alla medesima teoria: R. A. F. Clebsch. Nato a Königsberg il 19 gennaio 1833, usufruì nel patrio Ateneo degli insegnamenti di F. Neumann, Richelot (v. n. 674) e Hesse; ivi si addottorò nel 1854. Si trasferì poi a Berlino, ove si diede all'insegnamento privato; a Berlino nel 1858 conseguì la libera docenza, ma non potè esercitarla essendo stato frattanto chiamato al Politecnico di Karlsruhe. Nel 1863 passò all'Università di Giessen e nel 1868 in quella di Gottinga; in questo stesso anno fondò, col concorso di Carlo Neumann (n. 746), i *Mathematische Annalen;* la difterite lo uccise il 7 novembre 1872 nella pienezza della produzione scientifica. Dalle sue lezioni tenute nel 1871 sulla teoria delle coniche e da quelle tenute poi (1872) sulla teoria delle curve algebriche traggono origine le *Vorlesungen über Geometrie,* pubblicate con notevoli aggiunte originali, da F. Lindemann (l'eminente matematico che ha la gloria di avere risolto, sia pure negativamente, il plurisecolare problema della quadratura del cerchio).

Il Clebsch subendo da giovane l'influenza di F. Neumann, si orientò dapprima verso la fisica matematica; ne sono prova la sua Dissertazione di laurea (che tratta del movimento di un ellissoide in un fluido) e poi la *Theorie der Elasticität fester Körper* (Leipzig, 1862). Subentrata l'influenza del Richelot, egli dedicò tempo e fatica allo studio delle opere di Jacobi, di cui pubblicò una importante memoria postuma (T. LX, 1862) e poi le *Vorlesungen über Dynamik*.

Durante il suo soggiorno a Karlsruhe da un suo distinto collega (W. Schell) fu posto al corrente dello stato della moderna geometria quale era uscita dalle mani di Chasles, Seiner e Staudt; da ciò egli fu indotto ad applicare alla geometria l'algebra, sia quale aveva appresa dalle lezioni e degli scritti del suo antico maestro Hesse, sia nella veste simbolica di cui servivasi l'Aronhold.

713 - Da questo momento s'inizia la fulgida serie di memorie ove l'algebra è dal Clebsch sapientemente applicata a svariate e importanti questioni concernenti le curve di 3° e 4° ordine (*G. di Crelle*, TT. LVIII e LIX, 1860), le superficie cubiche (Id., T. LIX, ivi la prima applicazione della notazione simbolica), la curva luogo dei punti in ciascuno dei quali una superficie ammette tangenti quadripunte (Id., T. LVIII). i piani stazionari dell'intersezione di due superficie algebriche (Id.., T. LXIII. 1863) e alcuni teoremi enunciati da Steiner (Id., T. LXIV, 1864): aggiungiamo che, con un bel lavoro relativo alle normali a coniche e quadriche (Id., T. LXII, 1862), egli mostrò come i suoi metodi potessero venire impiegati anche alla risoluzione di questioni metriche.

Un giovane chiàmato ad alti destini, P. Gordan (n. a Breslau il 27 aprile 1837, m. il 21 dicembre 1912 ad Erlangen, ov'era professore) [1], con una Tesi d'abilitazione da lui presentata nel 1863 all'Università di Giessen diede una novella orientazione al pensiero di Clebsch, attraendolo verso le nuove funzioni che portano il nome di Abel; allora il Clebsch vide che l'applicazione delle funzioni trascendenti alla geometria rappresentava un campo tuttora vergine, ma di mirabile fecondità, e vi si lanciò da coraggioso pioniere. Già in una memoria sul problema di Malfatti (*G. di Crelle*, T. LIII, 1857) egli fece una bella applicazione delle funzioni ellittiche e un po' più tardi applicò le stesse allo studio dei poligoni di Steiner nelle curve del 3° ordine (Id., T. LXIII, 1863); ma la teoria generale e l'applicazione alle curve razionali ed ellittiche si apprendono in memorie pubblicate poco più tardi (Id., TT. LXIII e LXIV, 1863-64) dalle quali, fra l'altro, venne posta in evidenza l'importanza del concetto di « genere » di una curva. Ciò suggerì al Clebsch l'idea di fare una metodica esposizione delle nuove trascendenti e la tradusse in atto con la collaborazione del Gordan (*Theorie der Abel'schen Functionen*, Leipzig, 1866).

Circa nello stesso tempo egli cominciò ad occuparsi della rappresentazione delle superficie su di un piano; dopo di avere insegnato come la si

(1) Devesi a lui la dimostrazione dell'esser finito il numero delle forme invariantive linearmente indipendenti di una forma o di un sistema di forme binarie, contrariamente a quanto opinava il Cayley (v. p. 881); più tardi (Hilbert) fu dimostrato che il teorema sussiste eziandio per un numero qualunque di variabili.

ottenga per le superficie cubiche (*G. di Crelle*, T. LXV, 1865), per quella di Steiner (Id., T. LXVII, 1866), per quelle di 4° ordine con conica doppia (Id., T. LXIX, 1868) o con retta doppia (*Math. Ann.*, T. I, 1868), egli ha esposte (Ivi) alcune norme generali governatrici di dette corrispondenze, applicandole a nuove superficie e poi (Id., T. V, 1871) a tutte le rigate razionali e ad altre superficie notevoli. Da tali investigazioni egli fu indotto a estendere alle superficie la nozione di « genere »; così scrisse (C. R., Dic. 1868) la prima pagina di uno dei capitoli fondamentali della moderna teoria delle superficie.

La produttività del Clebsch negli ultimi anni della sua vita fu realmente prodigiosa; si direbbe quasi che egli udendo la morte galoppargli minacciosamente alle spalle, volesse usare utilmente i pochi anni di lavoro che essa ancora gli concedeva. Infatti, mentre faceva progredire tanto efficacemente le parti più elevate della geometria, perfezionava la teoria delle forme binarie su cui scriveva un trattato (*Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig, 1872) tuttora insuperato e insegnava (*Math. Ann.*, T. II e V, 1870 e 1872) l'uso della notazione simbolica nella neonata teoria dei complessi di rette. Devesi poi a lui un utilissimo principio di trasporto dal campo binario al ternario, la introduzione e il primo studio dei « connessi » (*Abh. Ges. Göttingen*, T. XVII, 1872 e *Math. Ann.*, T. VI, 1873) e contributi di dettaglio alla teoria delle caratteristiche e a quella delle trasfomazioni piane (*Math. Ann.*, T. IV, 1871 e VI, 1873).

La memoria fondamentale di Riemann sulle funzioni Abeliane e il volume di Clebsch e Gordan sulla stessa teoria, rappresentano una miniera, per molto tempo non sfruttata tanto per la geometria quanto per l'algebra. Essa consiste nella teoria delle funzioni algebriche, specialmente riguardo alle loro proprietà invarianti e di fronte a trasformazioni razionali, ond'era naturale lo studiarle metodicamente senza ricorrere a funzioni trascendenti. È il problema che si proposero e risolsero in modo superiore ad ogni elogio due matematici, di cui passiamo ora ad occuparci.

Max Nöther nacque a Mannheim il 24 settembre 1844; dal 1875 fu professore ad Erlangen ove morì il 13 dicembre 1921. Analista di forza non comune si servì del calcolo per investigare le più svariate proprietà di molte figure geometriche. Fu dei primi a studiare la teoria generale delle trasformazioni razionali fra due spazi (*Math. Ann.*, T. III e XXIII); anche allo studio delle curve algebriche, sia in generale che a quelle di 4° ordine, arrecò contributi di valore permanente (Id. T. XX e XXI). Delle forme algebriche con Hessiano nullo si occupò col Gordan (T. X). Numerose e importanti sono le sue memorie sulle funzioni algebriche (TT. XIV, XVII, XXX, XL) le quali misero in luce la sua preparazione per svolgere il tema di cui sopra.

Ma, prima di occuparcene dobbiamo ricordare che il Nöther ottenne nel 1882 (insieme ad una memoria congenere dell'Halphen) dall'Accademia di Berlino il premio Steiner per un importante lavoro sulla teoria e la classificazione delle curve sghembe algebriche.

Alessandro von Brill nacque il 20 settembre 1842 a Darmstadt; ivi si laureò nel 1884 e poi fu chiamato alla Università di Tübingen, ove rimase

sino al termine della sua vita durata più di ottant'anni. Algebrista di innumerevoli risorse portò notevoli miglioramenti alle applicazioni del calcolo alla geometria. Un gruppo notevole delle sue memorie tratta del principio di corrispondenza sopra curve qualisivogliono, correggendo e dimostrando rigorosamente un teorema dovuto al Cayley, giungendo così ad una formola molto importante che reca il nome di principio di corrispondenza di Cayley-Brill (*Math. Ann.*, TT. VI, VIII); pure rigorosamente dimostrò formole ottenute da Zeuthen mediante considerazioni di geometria numeratoria (T. IV); altrove egli riuscì (T. XXXI) a dimostrare rigorosamente una formola scoperta da de Jonquières applicando il principio di corrispondenza di Chasles. Notevole è eziandio la determinazione rigorosa dell'ordine del sistema che nasce annullando tutti i determinanti d'ordine massimo che si possono estrarre da una matrice, che era stata compiuta induttivamente dal Salmon e verificata poi dal Roberts (T. V).

Nè questi sono gli unici risultati ottenuti dal Brill nei suoi sforzi per rendere inoppugnabili proposizioni raggiunte mediante discutibili ragionamenti di geometria numerativa.

Nell'enumerare gli scritti di Nöther e Brill abbiamo sinora lasciato in disparte il lavoro in comune sulla teoria e le applicazioni geometriche delle funzioni algebriche (T. VII). Riguardo ad esso noi dobbiamo limitarci a segnalarlo ai nostri lettori e ciò perchè gli autori avendo dovuto introdurre nuovi concetti e quindi una nuova nomenclatura, per farci comprendere dovremmo entrare in lunghi sviluppi non consentanei con l'indole ed il piano dell'opera presente. Ci basti, per stabilire l'eccezionale valore di quella memoria, dire che essa servì di solida base per la geometria algebrica, nuovo ramo della matematica che fiorì specialmente per merito di matematici italiani. A chi desidera ottenere sull'argomento un primo orientamento va suggerito lo studio di un eccellente *Rapporto* presentato dai due citati autori alla Società matematica tedesca e da essa pubblicato nel T. III dei suoi *Atti*.

714 - Come procedente sulle orme di Plücker, Riemann e Clebsch ci si presenta F. Klein. Nato a Düsseldorf il 25 aprile 1849, nel 1865 s'inscrisse all'Università di Bonn, ove attrasse l'attenzione di Plücker, che lo volle subito suo assistente. Come tale, dopo la morte del maestro, curò la stampa della II Parte della *Neue Geometrie des Raumes* e alla geometria della retta si riferiscono appunto i suoi primi lavori (uno dei quali gli fece conferire nel 1868 la dignità dottorale dall'Università di Bonn), lavori che occupano ancora un posto importante nella collezione dei suoi scritti. Continuò poi i propri studi a Berlino, Parigi e Gottinga; ma, mentre dai matematici berlinesi non risentì alcuna influenza, il Clebsch gl'impose l'orientamento che doveva serbare (notisi che sino a quel momento egli oscillava fra la matematica e la fisica). Le speranze che egli faceva nutrire di un fulgido avvenire scientifico consigliarono a chi allora governava l'Università di Erlangen di affidargli la cattedra di matematica che eravi allora vacante; e il ventitreenne professore si mostrò ben degno di tale eccezionale provvedimento, pubblicando come suo discorso inaugurale quelle *Vergleichende Betrachtungen über neuere*

*geometrische Forschungen,* le quali, dopo sessant'anni, nulla hanno perduta della loro suggestiva freschezza, chè la geniale classificazione dei vari indirizzi seguiti dai geometri nelle loro ricerche conserva tuttora il suo valore. Tre anni dopo il Klein, desiderando più ampio campo d'influenza, accolse una chiamata al Politecnico di Monaco, che lasciò nel 1880 per l'Università di Lipsia. Gli è circa in questa epoca che furono iniziati i suoi studi sulla teoria delle funzioni dell'indirizzo rimanniano; mentre il Clebsch l'aveva lumeggiata col mezzo di considerazioni geometriche, il Klein (con la convinzione di così penetrare nell'intimo del pensiero dell'inventore) ricorse a rappresentazioni tratte dalla distribuzione dell'elettricità (si vegga l'opuscolo *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen,* Leipzig, 1882). Alla geometria egli invece ricorse per spiegare un'altra importante teoria nelle sue *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Greade* (Id., 1884). Da detti studi egli fu condotto a ricerche originali sopra la teoria delle funzioni automorfe, nella quale doveva trovare nel Poincaré un emulo degno di lui (cfr. n. 736); sgraziatamente le condizioni della sua salute lo costrinsero (a soli 33 anni!) ad abbandonare le ricerche che esigono grandi sforzi. Circa nello stesso tempo (1886) accettò l'invito di trasferirsi a Gottinga e allora, con l'aiuto di esperti collaboratori, si occupò di esporre metodicamente i risultati già raggiunti. In pari tempo diede le cure più solerti al proprio insegnamento, e i corsi litografati, redatti sotto la sua direzione, diffusero in tutto il mondo l'eco della magica parola del maestro sopra svariati oggetti (superficie di Riemann, teoria dei numeri, funzioni iper-geometriche, geometria non-euclidea, geometria superiore, matematiche elementari da un punto di vista elevato) (1).

Mente filosofica dalle larghe vedute, esercitò larga influenza sopra l'insegnamento scientifico, medio e superiore; fu l'anima della Commissione internazionale d'insegnamento creata a Roma nel 1908, come fu il direttore spirituale della grande *Encyklopädie der mathem. Wissensch.*, ed ebbe parte direttoria nella redazione della collezione *Die Kultur der Gegenwart.*

Nel 1911 era stato dispensato dall'insegnamento; ma, allo scoppio della grande guerra, ritornò alla cattedra, esponendo vedute sue proprie intorno alla fase più recente dell'evoluzione delle matematiche. Chiusa la sanguinosa parentesi, trovò in sè energia sufficiente per curare la ristampa dei suoi lavori, corredandoli di preziose note storico-critiche: onde si può ben dire che rimase sulla breccia sino al suo ultimo respiro; perciò, quando il 22 giugno 1925 ebbero termine le sue sofferenze, si ebbe la dolorosa impressione che si fosse arrestato per sempre un potente motore che funzionava da più di mezzo secolo.

(1) Quest'ultimo corso, largamente diffuso anche mediante la stampa, servì di stimolo e guida a molte pubblicazioni a carattere didattico e a molti corsi di lezioni, anche fuori della Germania.

## G. Battaglini

715 - Ad orientare e dirigere la gioventù italiana verso le regioni analitico-geometriche di recente scoperte si adoperò efficacemente, con esposizioni originali e nuove applicazioni, Giuseppe Battaglini (n. a Napoli l'11 gennaio 1826, m. vi il 29 aprile 1894). Alla caduta dei Borboni fu nominato (29 ottobre 1860) professore ordinario di geometria superiore nel patrio Ateneo; nel 1863 fondò il *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane*; occupata Roma dalle truppe italiane, il Governo nazionale lo chiamò a insegnare in quella Università; ma nel 1885 ragioni di salute lo indussero a ritornare nella sua città nativa. Pronto ad assimilare le idee nuove, fece conoscere ai suoi connazionali la teoria delle forme algebriche e le sue applicazioni geometriche, la teoria dei connessi (soltanto abbozzata dal Clebsch), la geometria non-euclidea e la teoria dei complessi, non appena il Plücker ne ebbe comunicate le linee fondamentali alla Società Reale di Londra: cosicchè per primo diede una teoria dei complessi di 2° grado, la quale conserva il suo valore anche se l'equazione di partenza non possiede completa generalità (quell'equazione rappresenta quello che fu detto « complesso di Battaglini » che può considerarsi come costituito dalle rette che incontrano due date quàdriche in coppie armoniche di punti. Sotto il nome di « involuzioni dei vari ordini » studiò per primo le proiettività cicliche e alle curve di 3° ordine dedicò nel 1881 *(Collectanea Mathem. in memoriam D. Chelini)* una delle sue più notevoli memorie. Finalmente le traduzioni da lui curate di opere del Todhunter per lungo tempo servirono utilmente all'istruzione matematica degli studenti universitari italiani.

### BIBLIOGRAFIA


M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particuliérement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie* (I ed., Bruxelles, 1837; II ed., Paris, 1875; III ed., Paris, 1889).

M. CHARLES, *Traité de géométrie supérieure* (I ed., Paris, 1852; II ed., 1880).

M. CHASLES, *Les trois Livres des Porismes d'Euclide, retablis pour la première fois d'après les notices et les lemmes de Pappus et conformement au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions* (Paris, 1860).

M. CHASLES, *Traité des sections coniques, faisant suite au Traité de géométrie supérieure*, I Partie (Paris, 1865).

M. CHASLES, *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris, 1870).

*Two geometrical Memoirs on the general properties of Cones of the second degrée and the spherical Conics by* M. CHASLES. *Translated from the French, with Notes and Additions and an Appendix on the application of analysis to Spherical geometry, by* CH. GRAVES (Dublin, 1841).

E. DE JONQUIÈRES, *Mélanges de géométrie pure contenant diverses applications de théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. Chasles au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes de troisième ordre, etc. et la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre* (Paris, 1856).

A. MANNHEIM, *Principes et developpements de géométrie cinématique, ouvrage contenant nombreuses applications à la théorie des surfaces* (Paris, 1894).

*Oeuvres de* LAGUERRE *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences* (due Vol., Paris, 1898 e 1905).

G. H. HALPHEN, *Oeuvres publiées par les soins de* C. JORDAN, H. POINCARÉ, E. PICARD *avec la collaboration de* E. VESSIOT (quattro Vol., Paris, 1916-24).

A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet* (Leipzig, 1857).

A. F. MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik* (Leipzig, 1837).

A. F. MÖBIUS, *Die Elemente der Mechanik des Himmels. Auf neue Wege und ohne Hülfe höherer Rechnungsarten dargestellt* (Leipzig, 1843).

AUGUST FERDINAND MÖBIUS, *Gesammelte Werke* (quattro Vol., Leipzig, 1885-87).

JACOB STEINER'S, *Gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften, herausgegeben von* K. WEIERSTRASS (due Vol., Berlin, 1881-82).

JACOB STEINER, *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, worunter eine grosse Anzahl neuer Untersuchungen und Sätze vorkommen, in einem systematischen Entwickelungsgange dargestellt, herausgegeben von* R. FUETER *und* F. GONSETH (Zürich, 1931).

H. GRAF, *Der Briefwechsel zwischen Jacob Steiner und Ludwig Schläfli* (Mitth. der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1896).

J. LANGE, *Jacob Steiner's Lebensjahre in Berlin* 1821-1863, *nach Personalakten dargestellt* (Berlin, 1899).

R. STURM, *Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen* (Bibl. mathem., III Ser., T. IV, 1903).

JACOB STEINER'S, *Vorlesungen über syntetische Geometrie.* I Tl. *Die Theorie der Kegelschnitten in elementarer Darstellung, bearbeitet von* C. F. GEISER. II Tl. *Die Theorie de Kegelschnitten gestützt auf projektive Eigenschaften, bearbeitet von* H. SCHRÖTER (Leipzig, parecchie edizioni).

G. K. C. VON STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847).

G. K. C. VON STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Hefte, I, II, III (Nürnberg, 1856, 1857 e 1860).

G. K. C. VON STAUDT, *Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II Ordnung* (Nürnberg, 1867).

G. K. C. VON STAUDT, *Geometria di posizione*. Trad. dal tedesco a cura del dott. M. PIERI, preceduta da uno studio del prof. C. SEGRE sulla vita e le opere del von Staudt (Torino, 1889).

K. W. FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwurding Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehreren durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-geometrische Abhandlung. Mit einer Vorrede von* K. BUZENGEIGER (Nürnberg, 1822); II nichtgeänderte (Berlin, 1908).

K. W. FEUERBACH, *Grundriss zu analytischen Untersuchung der dreieckingen Pyramide* (Nürnberg, 1827).

L. CREMONA, *Le figure reciproche nella statica grafica* (Milano, 1872; III ed., id., 1899).

L. CREMONA, *Elementi di geometria proiettiva* (Torino, 1873).

L. CREMONA, *Elementi di calcolo grafico* (Torino, 1874).

L. CREMONA, *Opere matematiche* (tre Volumi, Milano, 1914-1917).

J. PLÜCKER, *Analytisch-geometrische Entwickelungen.* I Bd. (Essen, 1828); II Bd. (Essen, 1831).

J. PLÜCKER, *System der analytischen Geometrie auf neue Betrachtunsweise gegründet und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend* (Berlin, 1835).

J. Plücker, *Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie* (Bonn, 1839).

J. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung enthaltend* (Düsseldorf, 1846).

J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf der Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* I Abth. (Leipzig, 1868); II Abth. (Id., 1869).

Ludwig Otto Hesse's, *Gesammelte Werke. Herausgegeben von der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften* (München, 1897).

A. Cayley, *The collected mathematical Papers* (tredici Volumi e un supplemento, Cambridge, 1889-1898).

J. J. Sylvester, *The collected mathematical Papers* (quattro Vol., Cambridge, 1904-1912).

H. J. S. Smith, *The collected mathematical Papers* (due Vol., Oxford, 1894).

W. K. Clifford, *Mathematical Papers, edited by* R. Tucker, *with an Introduction by* H. J. S. Smith (London, 1882).

W. K. Clifford, *Lectures and Essays edited by* L. Stephen *and* F. Pollock (due Vol., London, 1879).

F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen herausgegeben von* R. Fricke *und* O. Ostrowski (tre Vol., Berlin, 1921-25).

CAPITOLO XLIII

# NUOVI RAMI SUL VETUSTO TRONCO

## Geometria non-euclidea

716 - In parecchie occasioni vennero da noi ricordati alcuni dei numerosi tentativi fatti per rendere perfetti gli *Elementi di Euclide*, nell'unico punto indiscutibilmente difettoso; i primi a noi noti risalgono a venerabile antichità, giacchè Erone Alessandrino e Proclo ne attribuiscono uno al grande astronomo Claudio Tolomeo. Altri vedemmo dovuti all'arabo Nassir-ed-din e al Wallis (v. n. 418); Clavio, Vitale Giordano e Cataldi (vedi nn. 300 e 467) s'illusero di avere raggiunta l'agognata perfezione definendo le rette parallele come linee equidistanti; ci sono pure noti i geniali sforzi del Saccheri (p. 667) e Lambert (n. 579) per raggiungere l'intento. Alle ricerche sopra i fondamenti della geometria non potevano rimanere ed effettivamente non rimasero indifferenti i matematici dell'*Enciclopedia*, i quali notoriamente inaugurarono l'êra avente per suo carattere spiccato la critica spassionata di tutto il retaggio del passato [1]. Alla desiderata mèta si accostò Legendre (n. 609), ma non la raggiunse, forse, perchè, al pari dei predecessori, concepì il problema in una forma sotto cui era impossibile risolverlo, ammettendo, cioè, la verità del famoso postulato e sforzandosi di dimostrarlo. È gloria di Gauss (cfr. n. 653) di avere visto per primo che esso non è dimostrabile, essendo una delle premesse che caratterizzano la struttura del nostro spazio, e di avere scorta la possibilità di sistemi geometrici differenti da quello tradizionale; ma, essendosi limitato a cenni timidi ed incompleti sull'argomento, lasciò ad altri la gloria di gettare le basi di una nuova geometria che, per ragioni evidenti, fu detta non-euclidea. Ed è da notare che nel primo trentennio del secolo XIX il mondo dei matematici sembra fosse preso da una specie di frenesia di arrivare a sciogliere il secolare enigma, chè in Francia e in Germania uscirono allora non meno di sessanta lavori sull'argomento; noi faremo menzione soltanto degli autori che più si avvicinarono allo scopo e poi di quelli che diedero la soluzione definitiva dell'annosa questione.

717 - La serie deve forse cominciare con un professore di giurisprudenza, F. K. Schweikart (n. a Elsbach il 28 febbraio 1780, m. a Königs-

---

(1) Giova ricordare che gli articoli concernenti la matematiche furono scritti da d'Alembert. Alla celebre questione non rimase indifferente Lagrange, di cui una memoria tuttora inedita si trova conservata nella Biblioteca dell'Istituto di Francia.

berg il 17 agosto 1859), non già grazie all'opera *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* (Jena und Leipzig, 1807), la quale non contiene più di una metamorfosi formale della geometria tradizionale, ma perchè egli, continuando a meditare sull'argomento, arrivò a concepire un'*Astralgeometrie* del tutto differente dall'euclidea. Lo prova una lettera indizzata il 1° ottobre 1820 ad un suo nipote, con l'esortazione di occuparsi della questione. Il destinatario è F. A. Taurinus (n. a Königl il 15 novembre 1794, m. a Colonia il 13 febbraio 1874), il quale non rimase sordo a quell'invito, e, pur non essendo matematico di professione, dedicò alla questione delle parallele due pregevoli volumetti: *Theorie der Parallelinien* (Köln, 1825) e *Geometriae prima Elementa* (Id., 1825). Dal primo emerge che egli, al pari del Saccheri, giunse alle tre geometrie; durante la stampa ebbe notizia delle ricerche congeneri di Legendre e allora decise di dedicare nuove ricerche sulla questione di decidere a quale delle tre geometrie fosse da darsi la preferenza. Da tali studi ebbe origine il secondo di quegli opuscoli, ove è svolta, con sufficiente ampiezza, una trigonometria non-euclidea; dall'esame delle formole risultanti il Taurinus fu condotto, come già il Lambert, a riconoscere che esse nascono da quelle dell'ordinaria trigonometria sferica supponendo immaginario il raggio della sfera considerata.

Questi scritti non destarono alcun interesse, neppure presso Gauss, e furono ben presto dimenticati; settant'anni dovevano passare prima che ne fossero riconosciuti il significato ed il valore. Nello stesso periodo di tempo visse un discepolo di Gauss, che, forse più di qualunque altro, fu posto al corrente delle idee del sommo matematico intorno ai principi della geometria: F. L. Wachter; nacque a Cleve il 12 settembre 1792; si laureò a Gottinga nel 1813 dietro presentazione di una dissertazione di soggetto astronomico; ottenne subito una cattedra di matematica nel Ginnasio di Altenburg, donde nel 1816 passò in quello di Danzica; il 3 aprile 1817 intraprese una passeggiata solitaria, dalla quale non è mai tornato; le più accurate ricerche istituite per dissipare il mistero che avvolge la sua fine riuscirono sempre infruttuose. Rimangono di lui soltanto un opuscolo dal titolo *Demonstratio Axiomatis in Euclideis Undecimi* (pubblicato due mesi prima della sua tragica fine), nel quale il celebre principio è dedotto dall'altro « una retta non può essere asintoto di un'altra », la critica di una pretesa completa teoria delle parallele e alcune lettere, donde risulta che il Wachter era uomo su cui la scienza poteva fare sicuro assegnamento.

Questi uomini e questi lavori appartengono all'immediata preistoria della nuova branca di geometria che stava per costituirsi grazie alle geniali fatiche di due uomini nati in due regioni d'Europa che dianzi non avevano, per quanto ci è noto, contribuito al progresso della nostra scienza, l'Ungheria (¹) e la Russia; ne parleremo successivamente.

(¹) Soltanto recentemente fu tratto da un ingiusto oblio un matematico ungherese del Secolo XVIII (v. la memoria di J. v. Woyciechowsky, *Paul Sipos, ein ungarischer Matematiker des ausgehenden 18. Jahrhunderts*; Mittheilungen des mathem. Seminars der Universität Debrecen, VI Heft, 1932). Egli visse dal 16 ottobre 1759 al 22 settembre 1816. Le *Memorie dell'Accademia di Berlino* dell'anno 1790-91 contengono una sua memo-

718 - Farkas (Wolfango) Bolyai nacque a Bolya il 9 febbraio 1775; dopo avere studiato a Jena e poi a Gottinga (ove strinse amicizia col suo condiscepolo Gauss) dal 1802 al 1849 insegnò matematica nel Collegio di Maros-Vasarhely, città in cui morì il 20 novembre 1856. Benchè buon matematico, il suo nome non avrebbe preso posto nei fasti della nostra scienza ove con gli insegnamenti e i consigli dati al figlio Giovanni non avesse contribuito, indirettamente ma senza dubbio efficacemente, ad un memorabile perfezionamento di essa. Giovanni Bolyai nacque il 15 dicembre 1802 e sino dalla più tenera età diede prova di una non comune intelligenza; il 24 agosto 1818 entrò nell'Accademia militare di Vienna e dal suo carteggio col padre risulta che sino da allora aveva intrapresa la lotta che doveva condurlo alla gloria; ne uscì il 1° settembre 1823 sottotenente del genio. I suoi superiori lo giudicarono *primo* di tal corpo per sapere matematico, come suonatore di violino e come schermitore; e di queste due ultime doti è rimasto documento in un fatto forse unico nella storia e che va qui riferito: per ragioni che non sono giunte sino a noi, egli sfidò contemporaneamente tredici ufficiali di cavalleria, col patto che ogni due duelli egli avrebbe suonato un pezzo col suo diletto strumento; tale condizione fu accettata ed egli uscì vincitore dalla strana prova.

Malgrado gli obblighi militari egli non perdette mai di vista il problema connesso alla teoria delle parallele, giacchè, in una lettera diretta al padre in data 3 novembre 1823, egli annuncia di avere « creato dal nulla un nuovo mondo »; ulteriori progressi da lui compiuti gli permisero di convincere suo padre — durante una visita fattagli nella primavera del 1825 — di essere giunto alla sospirata mèta; mancano precisi particolari al riguardo. In seguito ottenne parecchie promozioni, tanto che il 14 marzo 1832 raggiungeva il grado di capitano; l'ipocondria di cui era affetto (1) lo fece collocare a riposo in data 16 giugno 1833. Morì nella sua città natale il 27 gennaio 1860.

719 - La soluzione della « vexata quaestio » fu da lui pubblicata in Appendice a un'opera didattica del padre e fu diffusa largamente grazie ad estratti che ne furono fatti in buon numero. Essa soluzione è d'indole negativa giacchè per Bolyai la questione della verità o meno del postulato euclideo è perfettamente oziosa; esso non è nè vero nè falso ed è superfluo per la costituzione di un solido sistema geometrico. Il sistema euclideo (il sistema $\Sigma$ per usare la simbolica bolyaiana) è atto alla descrizione dei fenomeni spaziali, come qualunque altro caratterizzato dal valore di una costante $i$, finita, ma sufficientemente grande; se il sistema $\Sigma$ si è svolto a preferenza dell'altro è, secondo lui, soltanto

ria dal titolo *Beschreibung und Anwendung eines mathematischen Instrument für Mechaniker, zur unmittelbaren Vergleichung der Circulbogen*, dove si legge una notevole applicazione della curva detta cocleoide alla rettificazione dell'ellisse, considerata come speciale curva ciclica. Il Sipos è anche autore dell'opuscolo *Specimen novae tabulae trigonometricae ad compendium systematicae constructionis reductae* (Pesonii, 1807). Chi è in grado di leggere l'ungherese troverà nella succitata memoria del Woyciechowsky molti particolari intorno alla vita e alle opere del Sipos.

(1) Questo stato patologico fu probabilmente causa dei gravi dissensi sorti fra padre e figlio, i quali culminarono (incredibile, ma pur vero!) in una sfida di questo a quello.

grazie alla sua semplicità; invece il sistema $S$ della geometria assoluta è suscettibile di ben maggiore sviluppo, giacchè si comporta rispetto al sistema $\Sigma$ circa come la teoria delle funzioni ellittiche rispetto a quella delle funzioni circolari.

Queste conclusioni collimano con quelle a cui giunse Gauss. Da ciò e dalla considerazione dell'amicizia esistente fra questo e Wolfango Bolyai si è creduto dedurre una stretta interdipendenza fra la scoperta di Giovanni ed i frutti delle meditazioni del sommo scienziato di Gottinga, Ma a stabilire la piena originalità dell'opera di Giovanni Bolyai sta una lettera scritta da Gauss a Wolfango il 6 marzo 1832 al ricevere l'opuscolo di cui si è dianzi parlato; giova qui riferirne le frasi più significanti: « Se io comincio scrivendo *che io non posso lodarlo* » (il lavoro di Giovanni Bolyai), « tu sarai al primo momento urtato; ma io non posso fare diversamente; lodarlo equivarrebbe lodare me stesso; giacchè il contenuto di tutto lo scritto, la via che ha battuta tuo figlio ed i risultati a cui è giunto, coincidono quasi completamente con i frutti delle mie proprie meditazioni. In realtà di tale circostanza io sono sommamente sorpreso. Mio proposito era di non pubblicare in vita nulla dei miei lavori sull'argomento, di cui, del resto, io ho messo ben poco in carta... Era invece mio intendimento di redigerli completamente, affinchè non ne andasse perduto nulla con la mia morte. Ora io sono stupito che tale fatica mi sia ormai risparmiata, e mi rallegro immensamente che ciò sia avvenuto in modo tanto notevole per merito di un mio vecchio amico ».

Malgrado questo lusinghiero apprezzamento della più alta autorità matematica del tempo, l'opuscolo del Bolyai non conseguì che assai più tardi la considerazione di cui aveva ben diritto; le conclusioni a cui egli era giunto cozzavano troppo vivamente con le opinioni generali per essere accolte senza resistenza! Tale indifferenza spiega forse perchè quell'opuscolo non fu seguìto da alcun'altra pubblicazione del Bolyai; tuttavia recenti ricerche archivistiche hanno dimostrato che egli non abbandonò l'argomento a cui aveva dedicate tante giovanili fatiche; esse infatti hanno condotto alla scoperta di alcuni fogli (ora in dominio del pubblico) contenenti calcoli di trigonometria non-euclidea e la determinazione del volume di un tetraedro speciale (di cui, notisi, si occuparono, indipendentemente, anche Gauss e Lobacevskij). Chiuderemo questi cenni notando che Giovanni Bolyai nel 1838 partecipò (e altrettanto fece suo padre) ad un concorso sopra le quantità immaginarie bandito dalla Società Jablonowski di Lipsia, ma (pure al pari del padre) senza conseguire la vittoria, devesi però notare che nelle poche pagine da lui presentate siansi ai dì nostri ravvisati alcuni accenni profetici sulla teoria dei quaternioni.

720 - L'altro dei creatori della nuova geometria è N. I. Lobacevskij. Egli nacque nel distretto di Makarjef (governo di Nijni-Novgorod) il 22 ottobre-2 novembre 1793. Rimase orfano di padre a quattro anni e allora la sua famiglia si trasferì a Kazan, nella cui Università, di recente istituzione (1805), egli fu ammesso nel gennaio 1807. Quattro anni dopo gli fu da essa conferito il grado di « magister », poi vi fu chiamato

in qualità di professore, prima (1816) straordinario, poi (1823) ordinario; nel 1827 fu elevato al grado di rettore; nel 1846 fu collocato a riposo e il 12-24 febbraio 1846 passò a miglior vita. Durante il proprio soggiorno nella detta Università egli ebbe rapporti continui col Bartels (v. n. 646), che v'insegnava dal febbraio 1808, e non è escluso che dal fedele amico di Gauss egli sia stato diretto verso le ricerche geometriche che dovevano portarlo all'immortalità. Quando esse siano cominciate non è noto con precisione; però un quaderno di appunti di lezioni da lui tenute negli anni 1815-1817, e che tuttora esiste, mostra che egli sino da allora tentò varie vie per risolvere la questione collegata al celebre postulato. Nel 1823 egli aveva finalmente trovato quella giusta perchè un suo trattato di geometria fu inviato per esame a Nicola Fuss (n. 566), il quale, probabilmente per averlo trovato troppo rivoluzionario, non gli accordò la sua approvazione; l'originale ne fu scoperto soltanto nel 1898. Delle sue idee egli diede comunicazione ai propri colleghi con la memoria intitolata *Exposition succinte des Principes de la Géométrie, avec una Démonstration rigoureuse de la Théorie des Parallèles,* letta il 12-24 febbraio 1826. Essa non venne ancora ritrovata, ma se ne conosce un riassunto intitolato *Sui principi della Geometria,* inserito nel *Messaggero di Kazan*, 1829-30, sufficiente per stabilire, in base alla data di pubblicazione, la priorità del Lobacevskij su G. Bolyai. Seguirono i lavori: *Geometria immaginaria* (*Scritti scientifici dell'Università di Kazan,* 1835); *Applicazione della Geometria immaginaria ad alcuni Integrali* (Ivi); *Nuovi Principi della Geometria con una Teoria completa delle Parallele* (Id., 1836-38; è un completo trattato di geometria non-euclidea); *Pangeometria* (Id., 1836). Giustamente desideroso di far conoscere le proprie idee nel resto d'Europa, il Lobacevskij inserì nel *G. di Crelle* (T. XVII, 1837) un articolo intitolato *Géometrie imaginaire* (trad. di altro di ugual titolo citato prima) e poi pubblicò a Berlino (1840) in opuscolo a parte le *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien.* Questi lavori, nella cui accurata redazione si ravvisa l'esperto insegnante, conducono, per via diversa da quella battuta da G. Bolyai, alle medesime conclusioni: la geometria classica è una delle infinite forme che può assumere la base di ogni ricerca geometrica. La novità di tale risultato fece apparire un ribelle il matematico di Kazan ai ciechi ammiratori di Euclide; ed è merito di R. Baltzer (n. il 27 gennaio 1818, m. il 7 novembre 1887), J. Hoüel (n. il 7 aprile 1825, m. il 14 giugno 1886), G. Battaglini, F. Frischauf (n. a Vienna il 17 ottobre 1837, m. a Graz il 7 gennaio 1924) e G. B. Halsted (n. il 25 novembre 1853, m. a New York il 19 marzo 1922), di recente seguiti da P. Stäckel (n. il 20 agosto 1862, m. il 12 dicembre 1919), F. Engel e H. Liebmann, di essersi validamente adoperati a diffondere le idee tanto del Lobacevskij quanto del Bolyai, mediante traduzioni, e a farle trionfare col mezzo di opportuni commenti.

A completare il quadro dell'attività scientica del geometra russo va ricordato che egli ha dato un necessario complemento alla teoria gaussiana delle equazioni binomie (*Scritti scient. dell'Univ. di Kazan,* 1834), ha compiuti studi notevoli sopra le serie (Id., 1834-35; ivi una chiara distinzione fra continuità e derivabilità di una funzione) e sopra alcuni

integrali definiti (Id., 1852); finalmente un suo trattato d'*Algebra*, pubblicato nel 1834, mostra che egli, prima del Weierstrass, vide la necessità di erigere questa scienza sopra una solida base aritmetica. La nuova Russia, superba di questo suo figlio non meno della Russia czarista, prima della seconda conflagrazione europea, aveva iniziata in un complesso organico la totalità dei suoi lavori scientifici.

721 - Al trionfo delle nuove vedute sopra i fondamenti della geometria contribuirono efficacemente alcuni importanti lavori di cui va qui tenuto parola. Uno è dovuto a B. Riemann (v. n. 744) ed ha per titolo *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen;* scritto nel 1855 per conseguire la libera docenza, fu pubblicato postumo nel 1867. Ivi l'autore tratta il grande problema di determinare le proprietà necessarie e sufficienti per caratterizzare uno spazio (non necessariamente a tre dimensioni); per la concisione dello stile e la generalità dei concetti fu giudicato estremamente difficile; tuttavia il contenuto di esso potè arrivare in dominio universale quando l'Helmholtz (v. n. 684) giunse per altra via a congeneri conclusioni; le ricerche di entrambi vennero portate a perfezione da S. Lie (n. 725), il quale, nel III vol. della sua *Theorie der Transformationsgruppen,* applicò con successo la nozione di gruppo allo studio della struttura del nostro spazio. Ancora più utile all'accettazione delle nuove idee riuscì il *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea* (Giorn. di Matem., T. VI, 1868) di E. Beltrami (v. p. 750); chè il fatto che i fenomeni caratteristici della geometria iperbolica si verificano sopra le superficie a curvatura costante negativa valse a debellare l'opposizione di coloro che ritengono l'esperienza giudice supremo del valore di qualunque teoria; sia pure che più tardi fu dimostrato (Hilbert) che le superficie a cui ricorse il Beltrami non godono in tutta la loro estensione della perfetta regolarità da lui postulata; nel frattempo la battaglia era vinta a gloria di Bolyai e Lobacevskij !.

Ai concetti caratteristici della geometria non-euclidea si è pervenuti per un altro cammino, che va qui segnalato. È noto che a partire da Poncelet fu introdotta una netta distinzione fra le proprietà (dette proiettive) delle figure che non si perdono per proiezione e quelle che mancano di tale prerogativa; della prima specie sono tutte le proprietà descrittive, ma soltanto alcune proprietà metriche; ora, è possibile enunciare tutte queste sotto tal forma da farle apparire come proiettive? Per alcune la cosa fu resa possibile dall'introduzione dei punti ciclici del piano e del cerchio immaginario all'infinito, che risale a Poncelet e Chasles; più tardi il Laguerre (v. n. 688) riuscì a rendere proiettivo il concetto di angolo, ricorrendo a un birapporto. Ma chi sciolse la questione di tutta la sua generalità fu A. Cayley (v. n. 707), il quale nel suo *Fifth Memoir upon Quantics* (P. T., T. CXLIX, 1859) mostrò che qualsiasi proprietà metrica di una figura piana (solida) può riguardarsi come caso particolare di una sua relazione con una conica (quàdrica) fissa detta da lui *assoluto;* supponendo che questa si spezzi in due punti (cioè si riduca ad una conica degenere come inviluppo) si ricade nella geometria tradizionale. Fra queste idee e i lavori di Bolyai e Lobacevskij esistono

legami strettissimi, i quali furono messi in luce in due importanti memorie di F. Klein (n. 714) *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie* (*Math. Ann.*, TT. IV e VI, 1871-73); in conseguenza sorse la questione di determinare quelle proprietà proiettive delle figure di cui le proprietà metriche possono riguardarsi casi speciali; ad essa sono dedicate innumerevoli memorie, di varia importanza, di cui noi non possiamo segnalare l'esistenza.

## Geometria a più dimensioni

722 - La creazione dei nuovi sistemi geometrici di cui ci siamo testè occupati, avendo mostrato la possibilità logica di negare i postulati fondamentali dell'ordinaria geometria, indussero matematici e filosofi a studiare in generale la questione della inevitabilità e dell'indipendenza dei principii accettati da secoli; da ciò ebbe origine la cosidetta *Assiomatica,* che tanti profondi e geniali studi ha prodotti durante l'epoca posteriore a quella di cui ragioniamo.

Ora, dall'abbandono del postulato che il nostro spazio abbia tre dimensioni (postulato che Galileo s'illudeva di avere elevato a teorema) ebbe origine un'altra nuova branca della nostra scienza, la geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni (o iperspazi) della quale dobbiamo occuparci. Storicamente parlando non è per detta via che vi si è giunti. Essa deve l'origine all'aspirazione di trovare interpretazioni geometriche della teoria delle funzioni con più di tre variabili, analoghe a quelle che la retta, il piano e lo spazio ordinario avevano offerto per le funzioni di una, due o tre. Prescindendo da accenni sparsi che si trovano nella letteratura matematica dei secoli scorsi, a partire almeno dall'epoca cartesiana, come iniziatrice delle conseguenti ricerche va segnalata la nota di Cayley intitolata *Chapters in the analytical Geometry of* n *Dimensions* (Cambridge math. Journ., T. IV, 1843), germe di *A Memoir on abstract Geometry* (P. T. CLX (1870), a cui poco dopo tenne dietro l'altra di Cauchy *Sur les lieux analytiques* (C. R., T.. XXIV, 1847); sono tutti lavori in cui gl'iperspazi sono studiati quali varietà numeriche.

Un concetto più geometrico si trova nella già citata memoria di Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* e nella *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (Ann. di mat., Ser. II, T. II, 1868) di E. Beltrami, e in generale negli innumerevoli lavori intesi ad estendere agli iperspazi le proposizioni dell'ordinaria geometria; non potendone fare una completa enumerazione, limitiamoci a ricordare le importanti memorie sopra le forme differenziali quadratiche di E. B. Christoffel (n. a Montjoie il 10 novembre 1829, professore successivamente nei Politecnici di Zurigo e Berlino e poi nell'Università di Strasburgo; m. qui il 14 maggio 1892, e R. Lipschitz (n. a Königsberg il 14 maggio 1832, m. il 7 ottobre 1903 a Bonn, nella cui Università insegnava dal 1864), pubblicate nei TT. LXX e LXXII del *G. di Crelle,* le quali prepararono il calcolo differenziale assoluto di Gregorio Ricci (n. a Lugo il 12 gennaio 1853, m. a Bologna il 6 agosto 1925), costituitosi in un susseguente periodo storico.

Allo spazio a quattro dimensioni si è anche ricorso per ottenere spiegazioni plausibili di alcuni fatti naturali; va però notato che in tal modo *non* si riuscì (come alcuni credettero) a provare la esistenza di un tale spazio, risultando dalle considerazioni relative che tale esistenza è « sufficiente » ma non « necessaria » allo scopo.

Postisi sopra tale via i matematici generalizzarono le principali teorie della geometria elementare e tutte le formole dell'ordinaria geometria analitica; incoraggiati dal successo si proposero di fare altrettanto riguardo alla geometria proiettiva. Alcuni per raggiungere lo scopo ricorsero a coordinate; come pioniere in tal campo troviamo nuovamente il Cayley, grazie alla memoria *Analytical Researches connected with Steiner's extention of Malfatti's problem* (P. T., CLXII, 1852) e fra coloro che seguirono l'esempio ricordiamo M. Nöther (n. 713) per un lavoro già citato che getta le basi della teoria delle corrispondenze razionali fra due spazi comunque estesi (*Math. Ann.*, T. II, 1870). Ma che l'ausilio delle coordinate non fosse indispensabile dimostrò per primo nuovamente il Cayely, in una memoria modestamente intitolata *Sur quelques Théorémes de la Géométrie de Position* (*G. di Crelle*, T. XXXI, 1846). Lo dimostrò poi con la massima generalità Giuseppe Veronese (n. a Chioggia il 7 maggio 1854, dal 1882 professore nell'Università di Padova, m. in questa città il 7 luglio 1917) in un'estesa memoria inserita nel T. XIX (1882) dei *Mathem. Annalen*, la quale servì di fondamento e punto di partenza per un'estesa e importante serie di lavori, che costituiranno uno dei più brillanti capitoli del proseguimento della presente storia; e benchè noi non ci siamo occupati di proposito della geometria descrittiva avendone già fatto oggetto di altra pubblicazione [1], notiamo finendo che lo stesso distinto matematico ha insegnato (*Atti Ist. Ven.*, Ser. VI, T. II, 1882) come si possano estendere allo spazio a quattro dimensioni i metodi di rappresentazione usati da chi coltiva tale scienza.

## Sostituzioni. Gruppi di trasformazioni

723 - La pagina che ci apprestiamo a scrivere è senza dubbio la più dolorosa fra quelle che leggonsi nella storia della scienza; chè, se è spontanea la commozione leggendo la narrazione delle persecuzioni di cui fu vittima Galileo o quella delle lotte di Kepler per salvare dal rogo sua madre, accusata di magia, l'anima si solleva pensando che nessun danno irreparabile subì in conseguenza la scienza; ma come non imprecare contro una sorte avversa che soffocò e disperse un seme di insuperabile fecondità?... Il protagonista della lacrimevole storia a cui alludiamo, Evaristo Galois, nacque a Bourg-la-Reine il 25 ottobre 1811, in un collegio fondato da suo padre per sopperire alle deficienze nella pubblica istruzione che fu conseguenza della rivoluzione francese. Nel 1825 passò a studiare nel Collegio Louis le Grand di Parigi e non tardò a farsi notare tanto per la svegliata intelligenza (in questa epoca egli s'illuse di avere risolute le equazioni di 5° grado), quanto per il suo spirito ribelle; a questo e all'alta considerazione che egli aveva del proprio valore de-

[1] *Storia della geometria descrittiva* (Milano, 1921).

vesi attribuire il duplice insuccesso dei suoi tentativi di essere ammesso alla Scuola Politecnica, insuccesso che fu la prima radice di tutti i suoi mali. Nel 1829 pubblicò nelle *Ann. de Math.* (T. XIX) una nota sopra le frazioni continue, ove trovasi dimostrato un elegante teorema concernente le radici di un'equazione algebrica di grado qualunque. Nello stesso anno presentò all'Accademia delle Scienze una memoria che, consegnata a Cauchy perchè la esaminasse e riferisse, fu da lui smarrita; d'altra parte il suicidio del padre, il quale non aveva avuta la forza di resistere ad attacchi di carattere politico, violenti quanto ingiustificati, accrebbe il malessere morale del giovane, il quale, costretto a rinunciare al suo sogno di essere ammesso nella Scuola politecnica, accettò di entrare in quella Scuola preparatoria al pubblico insegnamento che prese il posto della Scuola normale nel periodo (1829-30) in cui questa cessò di funzionare. Nel 1830 inserì nel T. XXI delle *Ann. de Math.* due *Notes sur quelques Points d'Analyse,* ove trovansi alcuni risultati di notevole importanza; pubblicò pure tre brevi scritti nel *Bulletin* del Férussac relativi alla teoria delle equazioni algebriche ed alla teoria dei numeri. Finalmente presentò all'Accademia delle Scienze una memoria destinata al concorso al Gran Premio delle Scienze matematiche; il manoscritto venne consegnato a Fourier, ma questi morì poco dopo e non fu possibile trovare fra le sue carte il prezioso quaderno; il riassuto che ne pubblicò il Férussac nel suo *Bulletin* basta a dimostrare la grande importanza di questo lavoro e desta in conseguenza vivo rammarico per il suo smarrimento. Questo nuovo scacco influì a dirigere più decisamente Galois verso la politica, nell'epoca agitatissima che portò al trono di Francia Luigi Filippo. D'altra parte una lettera contro il direttore della risorta Scuola Normale pubblicata nella *Gazette des Écoles,* senza firma, ma che gli fu attribuita, portò alla sua espulsione da detta scuola (3 gennaio 1831). Decise allora di dedicarsi all'insegnamento privato, annunciando un corso di Algebra superiore contenente una nuova teoria degli immaginari, la teoria delle equazioni risolubili per radicali, la teoria dei numeri e finalmente quella delle funzioni ellittiche, trattata con la pura algebra. Ma è presumibile che egli non abbia potuto tenere che poche lezioni, giacchè da allora si succedettero incessantemente detenzioni e processi contro l'ardente repubblicano. In questo stesso periodo di tempo il Poisson, avendo ricevuta dall'Accademia delle Scienze una nuova memoria del giovane scienziato, la dichiarò inintelligibile (essa fu pubblicata nel 1846 da Liouville nel suo *Journal*). È questo l'ultimo fatto accertato nella vita di Galois: come e perchè egli siasi lasciato trascinare ad un duello per cagione di una « infâme coquette » (così egli scrisse alla vigilia della morte), è ignoto; si conosce soltanto il tragico epilogo di quella vertenza, cioè la morte, dopo un giorno di agonia, dell'infelice giovane (29 maggio 1832).

724 - Il ventenne investigatore, nella notte che precedette quel fatale duello, consegnò frettolosamente alla carta alcune idee per esser trasmesse al suo più fedele amico, A. Chevalier; avendo questi religiosamente raccolte e conservate quelle pagine, esse vennero pubblicate nel 1846 nel *Journal de Mathèmatiques*, insieme ad altri scritti inediti dello

stesso autore. Quando furono profondamente accuratamente studiati, portarono alla Teoria delle sostituzioni, la quale costituisce oggi il più solido fondamento per la teoria delle equazioni algebriche: in conseguenza Galois si presenta come felice continuatore di Vandermonde, Lagrange e, specialmente, di Abel; si potrebbe aggiungere il nome di Ruffini, ove venisse dimostrato che gli fossero noti i lavori del geniale medico italiano. È da Galois che i concetti di gruppo e sottogruppo, di invariante, di transitività, primitività e composizione di un gruppo dominano e governano la teoria delle equazioni algebriche, avendo egli dimostrato che essi permettono di risolvere le questioni concernenti la riducibilità di esse e la èventuale riduzione della loro risoluzione a quella di equazioni di grado inferiore; nè va dimenticato che più tardi si riconobbe che gli stessi concetti si incontrano, sia pure sotto forma larvata, nelle principali diramazioni della matematica, onde la loro importanza si accrebbe.

Ma non è questo l'unico argomento a cui Galois abbia volta la mente; dai rapidi cenni da lui vergati preparandosi al viaggio che non ha ritorno, risulta, infatti, che egli meditò a lungo e fruttuosamente sopra la teoria delle funzioni algebriche e dei loro integrali e che alla sua mente balenarono certe idee (ad es. quella di « genere » di una funzione) che si riconobbero poi di fondamentale importanza: onde con pieno fondamento si può asserire che il colpo di pistola che barbaramente spense il giovane investigatore ritardò di parecchi decenni il progresso dell'analisi.

Il primo che con pregevoli pubblicazioni dimostrò di essere riuscito a penetrare nel pensiero di Galois fu un giovane destinato — come vedremo (n. 751) — ad occupare uno dei posti più elevati fra gli analisti italiani, Enrico Betti, il quale nel 1852 (*Ann. delle Scienze mat. e fis.*, T. IV) dimostrò alcuni importanti teoremi semplicemente enunciati dal giovane matematico francese. Ma colui al quale si deve se fu completamente squarciato il velo che ne nascondeva il recondito pensiero è Camillo Jordan. Egli nacque a Lione il 5 gennaio 1838; nel 1855 conseguì il grado di ingegnere delle miniere e nel 1861 il diploma di dottore in matematica; insegnò alla Scuola Politecnica dal 1876 al 1912, dal 1881 fu membro dell'Istituto di Francia e dal 1897 diresse il *Journal de Mathématiques* fondato da Liouville sino al giorno della sua morte (21 gennaio 1922). A svolgere le idee di Galois egli dedicò parecchie belle memorie e poi il monumentale *Traité des Substitutions et des Équations algébriques* (Paris, 1870), ove la nuova teoria trovasi rigorosamente esposta e poi applicata ad importanti problemi di geometria, quali le ricerche dei flessi di una cubica piana, delle rette di una superficie di 4° ordine con conica doppia, dei punti e piani singolari di una superficie di Kummer e delle rette di una superficie cubica; delle risultanti configurazioni è poi fatto uno studio accurato e profondo. Aggiungiamo che la produzione scientifica del Jordan abbraccia anche altri campi, cioè la teoria dei poliedri, la geometria a più dimensioni, la cinematica e l'alta aritmetica; inoltre, col suo grande *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique* (I ed., Paris, 1882; III, id., 1999) egli ha portati notevoli miglioramenti a parecchie teorie classiche dell'analisi infinitesimale.

725 - Durante il secolo scorso le nozioni di « trasformazione » e di « gruppo » andarono continuamente crescendo d'importanza, con la scoperta di campi sempre nuovi in cui trovano applicazione. Dal loro connubio traggono origine le teorie che recano il nome di un illustre connazionale di Abel, Mario Sophus Lie. Egli nacque in un piccolo villaggio della Norvegia l'11 dicembre 1842; l'Università di Christiania, che lo annoverò fra i propri studenti a partire dal 1859, gli conferì nel 1865 l'abilitazione all'insegnamento. L'attitudine alla ricerca matematica si rivelò in lui con qualche ritardo, chè, per confessione sua, ne ebbe un primo indizio apprendendo che, secondo Plücker (v. n. 702), al nostro spazio si possono attribuire quantesivogliano dimensioni, purchè si scelga a dovere l'elemento generatore. Ottenuto un posto di perfezionamento all'estero, passò a Berlino il semestre invernale 1869-70 e v'incontrò F. Klein, con cui si recò a Parigi; la guerra franco-prussiana lo costrinse a lasciare la Francia, ma va rilevato che gli è a quel periodo che risale la scoperta della famosa trasformazione dello spazio di rette nello spazio di sfere [1], nonchè di quanto trovasi esposto in un'estesa memoria pubblicata nel T. V (1872) dei *Mathematische Annalen*. Già prima (1871) l'Università di Christiania gli aveva conferita la dignità dottorale, mentre in detto anno gli assegnò una cattedra di matematica. È in questa epoca che egli giunse al suo metodo di integrazione delle equazioni a derivate parziali di 1° ordine e che scoprì il legame fra il fattore integrante di un'equazione differenziale di 1° ordine e la trasformazione infinitesima in sè stessa della serie delle sue curve integrali. Poco dopo (1873) stabilì il concetto di « gruppi di trasformazioni » e, giovandosi della fervida fantasia geometrica di cui natura lo aveva dotato scortato da una profonda conoscenza di tutte le teorie dell'analisi ne pose in luce il valore con svariate ed importanti applicazioni geometriche [2]. Nel 1876 fondò l'*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, e dieci anni dopo accettò di occupare all'Università di Lipsia la cattedra già illustrata da F. Klein; ivi trovò in F. Engel e G. Scheffers due preziosi collaboratori, grazie a cui potè esporre le proprie idee in trattati destinati all'insegnamento e farne nuove importanti applicazioni; fra queste emerge lo studio da lui fatto dei principi della geometria (v. n. 721) che, nel 1898, gli fece conferire dall'Università di Kazan il premio Lobacevskij. In questo anno ragioni di salute lo indussero ad accettare all'Università di Christiania la cattedra di teoria dei gruppi di trasformazioni, creata per lui; ma l'occupò brevemente, chè una anemia perniciosa lo spense il 18 febbraio 1899. Gli ultimi anni della sua vita furono infelicitati da gravi disturbi nervosi, che lo portavano a dubitare dell'avvenire riserbato alle proprie idee: le fasi ulteriori della nostra scienza stanno a provare che tale preoccupazione era totalmente ingiustificata, chè i concetti ed i metodi più originali del Lie sono ormai divenuti parti integranti dell'analisi e se ne trova traccia anche in parecchi capitoli della geometria [3].

---

(1) È il primo esempio delle *trasformazioni di contatto* introdotte nella scienza dal Lie.

(2) Fra le figure studiate dal Lie notiamo le superficie d'area minima, quelle a curvatura costante e quelle di traslazione.

(3) Un elenco completo delle sue pubblicazioni redatto con esemplare diligenza da F. Engel leggesi nel T. I della III Ser. (1900) della *Bibliotheca Mathematica*.

## Equipollenze. Ausdehnungslehre

726 - La rappresentazione geometrica dei numeri complessi, che fece il proprio ingresso nelle matematiche fra la fine del sec. XVIII e il principio del XIX (v. nn. 618-619), fu il punto di partenza dei lavori che fecero assurgere Giusto Bellavitis a meritata rinomanza. Egli nacque a Bassano (prov. di Vicenza) il 22 novembre 1803, da famiglia nobile decaduta. Le condizioni disagiate in cui trovavasi lo costrinsero ad accettare un modesto impiego; ma questo non gl'impedì di dedicarsi alle scienze e con tanto ardore e tanto successo che nel 1843 aveva già pubblicati venticinque lavori. Due anni dopo ottenne una cattedra di matematica nel Liceo di Vicenza; nel 1845 l'Università di Padova gli conferì la laurea « ad honorem » e poco dopo lo chiamò nel proprio seno per l'insegnamento della geometria descrittiva; nel 1867 passò alla cattedra di algebra complementare e geometria analitica, che occupò con plauso sino alla morte, prodotta da un disgraziato incidente, il 6 novembre 1880. Sulla sua tomba si legge una commovente epigrafe, redatta da lui stesso, ove è dichiarato che egli « visse felice »; tuttavia attendeva la morte con tanto sereno stoicismo che egli stesso aveva preparate le buste destinate a contenere l'annuncio di morte da inviarsi ai suoi amici.

Secondo lui la rappresentazione geometrica dei numeri complessi è sola capace di legittimare l'ammissione nell'algebra di questi nuovi enti; tale artificio egli, a partire dal 1832, cominciò a perfezionare, svolgere, applicare, sì da crearne un nuovo capitolo della nostra scienza, da lui chiamato *Teoria delle equipollenze,* e di cui fece una metodica esposizione in un'estesa memoria, pubblicata nel 1854 dalla Società dei XL e nel 1874 tradotta in francese da C. A. Laisant. Altre applicazioni egli fece nei quindici articoli intitolati *Riviste di Giornali* da lui pubblicati dal 1859 al 1880 negli *Atti dell'Istituto Veneto,* articoli nei quali egli espose, applicando il suo metodo, i risultati che andava apprendendo dalla letteratura periodica. Giova rilevare che gli è nel corso di detti studi che il Bellavitis fu condotto, forse per primo, alla « trasformazione per raggi vettori reciproci », e la collocò a base di quella che egli chiamò « geometria derivata ».

Oltre a questo campo, il Bellavitis coltivò con successo quasi tutte le teorie matematiche [1]: risoluzione delle equazioni, decomposizione delle funzioni in frazioni semplici, analisi combinatoria, teoria dei numeri, determinanti, sviluppi delle funzioni in serie, integrali ellittici, equazioni differenziali, arrecando a tutte ingegnose migliorie, che sgraziatamente non raggiunsero una sufficiente notorietà, essendo state per la maggior parte pubblicate in raccolte di difficile consultazione. Uomo di estesissima coltura e buon patriotta, non si lasciò sfuggire alcuna occasione senza rivendicare all'Italia invenzioni e scoperte a torto attribuite a stranieri; lo studio dei suoi lavori mostra che egli stesso non riuscì ad evitare siffatti infortuni.

---

[1] L'elenco completo delle sue pubblicazioni trovasi in calce a una biografia pubblicata da A. FAVARO nel T. XXVI, 1881, della *Zeitschrift für Math. und. Phys.* (Historisch-literarische Abth.).

727 - Nel mentre il Bellavitis elaborava il calcolo delle equipollenze, venivasi costituendo in Germania un sistema di « analisi geometrica », quale aveva vagheggiata Leibniz, e che, secondo le intenzioni dell'autore, avrebbe dovuto abbattere il confine divisorio fra geometria sintetica e geometria analitica. Il concetto fondamentale di questa nuova procedura consiste nell'introdurre nel calcolo le figure geometriche senza ricorrere a coordinate, giovandosi invece di opportune convenzioni relative ai segni da attribuirsi alle figure e chiamando « somma » di più punti il loro baricentro, « prodotto » di 2, 3 o 4 rispettivamente il segmento o la porzione di piano o spazio da essi determinati e correlativamente il « prodotto » di 2, 3 o 4 piani. Il risultante sistema geometrico incontrò gravi ostacoli alla sua accettazione; le vicende di esso, essendo strettamente legate ai casi della vita del suo creatore — H. G. Grassmann — risulteranno dal seguente cenno bio-bibliografico.

Egli nacque a Stettino il 15 aprile 1809; ottenuta (17 settembre 1827) la licenza dal patrio ginnasio, si recò a Berlino per compiervi gli studi universitari, ed è degno di nota il fatto che fra le lezioni da lui frequentate nessuna è di matematica. Nell'autunno 1830 ritornò a Stettino per prepararsi all'esame di abilitazione all'insegnamento secondario e lo superò il 22 maggio 1834; in conseguenza gli venne conferito il posto di professore di matematica nella Scuola industriale di Berlino, che Steiner aveva lasciato per passare all'Università; ma lo abbandonò poco dopo (1° gennaio 1835) per ritornare a Stettino, ov'era vacante la cattedra di materie scientifiche nella Otto-Schule. Nel 1838 chiese al Governo prussiano ed ottenne di essere sottoposto ad una nuova prova per dimostrare la propria attitudine all'insegnamento delle matematiche; gli fu assegnato come tema per il lavoro scritto la teoria del flusso e riflusso, ed egli lo svolse in un modo originale, nel quale lampeggiano molte delle sue idee caratteristiche; l'ambita patente gli fu conferita in data 1° maggio 1840.

Nello stesso anno inseriva nel *G. di Crelle* (TT. XXIV e XXV) la sua *Theorie der Centralen*, ove trovasi esposta e applicata la teoria delle polari rispetto a curve algebriche piane. Quattro anni più tardi pubblicava a Stettino un'opera di cui importa riferire qui il titolo completo: *Die Wissenschaft der etensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre, eine neue matehmatische Disziplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I Tl.: die lineale Ausdehnungslehre.* Il titolo non promette più di quanto l'opera mantenga; tuttavia il Grassmann non riuscì ad attirare su di essa l'attenzione dei matematici, neppure quella di Gauss e di Möbius, sui quali egli faceva sicuro assegnamento, e neppure quando decise di pubblicarne egli stesso una recensione (*Arch. f. Math. und Phys.*, T. IV, 1845); perciò rinunziò per il momento a pubblicarne la II Parte. A far nascere la speranza di tempi migliori venne il concorso bandito nel 1845 dalla Società Jablonowski di Lipsia, avente per tema la ricostruzione della « caracteristica geometrica » di Leibniz (cfr. n. 451); il Grassmann decise di partecipare alla gara e presentò una memoria nella quale campeggia l'idea-madre dell'*Ausdehnungslehre* e che venne coronata e stampata nel 1846, accompagnata da un commento di Möbius. Incoraggiato da tale successo egli inviò al Governo Prussiano la colle-

zione dei propri lavori a stampa, nell'intento di ottenere una cattedra universitaria; ma non conseguì lo scopo, in seguito al parere di Kummer, nelle cui parole è visibile la preoccupazione che l'insegnamento del Grassmann sarebbe riuscito troppo personale, epperò unilaterale. Questo insuccesso non allontanò il Grassmann dai diletti studi; infatti, una serie di memorie contenenti nuove applicazioni del suo metodo furono pubblicate da lui nei volumi XXXI (1846), XXXVI (1848), XLII (1851) e XLIV (1852) del *G. di Crelle;* ivi hanno gran parte i concetti di prodotti « interno » ed « esterno » ed occupano molte pagine nuovi metodi elegantissimi per generare le curve algebriche, i quali tuttora attendono chi li studi a fondo, per determinare il grado di generalità delle figure ottenute applicandoli (¹). Morto il padre (9 marzo 1852), il quale occupava una cattedra di matematica nel Ginnasio di Stettino, il nostro fu chiamato a succedergli. Il peso di questo nuovo ufficio non diminuì in lui il fervore per la ricerca scientifica; lo provano alcuni articoli pubblicati nel T. XLIX (1855) del *G. di Crelle*, con lo scopo di estendere allo spazio sia il concetto di moltiplicazione, che i metodi di generazione delle figure dianzi segnalati: tacendo di quanto concerne le quàdriche, rileviamovi la generazione delle superficie cubiche mediante tre stelle proiettive di piani. Il Grassmann, illudendosi di avere raggiunta la considerazione che meritava, decise di fare una nuova esposizione delle proprie idee; ma neppure *Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet* (Stettin, 1862) conseguì lo sperato successo. Prova ne sia che quando nell'Università di Greifswald fu creata una nuova cattedra di matematica, egli non l'ottenne, causa l'opposizione del Grunert, il quale temeva che Grassmann se ne sarebbe servito esclusivamente per fare propaganda alle proprie idee. Disgustato ed offeso egli allora ritornò ai giovanili studi filologici, e come sanscritista conseguì quella generale estimazione che i matematici gli avevano negata. Tuttavia anche fra questi non gli mancarono estimatori autorevoli: basti citare il Cremona, che dei metodi del Grassmann fece notevoli applicazioni, e il Clebsch, che ne proclamò il valore nella sua *Commemorazione di Plücker*. Da ciò incoraggiato egli tornò ancora una volta agli antichi amori, come provano alcune sue posteriori pubblicazioni; ma erano gli ultimi guizzi di una lampada in procinto di spegnersi, chè egli morì il 26 settembre 1877, mentre stava rivedendo le bozze di una ristampa dell'*Ausedehnungslehre* del 1844. L'edizione completa dei suoi lavori matematici fatta sotto gli auspici dell'Accademia Sassone prova che il suo valore è ormai generalmente riconosciuto.

## Quaternioni. Algebre

728 - Nella teoria delle equipollenze non si parla della questione (che pur si affacciò al Wessel e all'Argand) se fosse possibile rappresentare i punti dello spazio con un metodo non dissimile da quello fondato sull'applicazione degli ordinari numeri complessi: l'averla affrontata e ri-

(¹) Per le curve piane del terzo ordine la generalità della proposta costruzione venne dimostrata dal Clebsch, ricorrendo a funzioni ellittiche (*Math. Ann.*, T. V, 1872

soluta è gloria del matematico di cui ora parleremo: William Rowan Hamilton. Nato a Dublino il 4 agosto 1805, fu istruito nel Trinity College di Cambridge, ove era entrato nel 1823; manifestò sino da allora una così spiccata attitudine alla ricerca matematica (sino dal 1824 aveva compiute notevoli ricerche sulle caustiche) che nel 1827 (a soli ventidue anni) gli fu conferita la cattedra di astronomia (con la direzione del relativo Osservatorio) nell'Università di Dublino. L'anno seguente pubblicò nelle *Trans. of the R. Irish Acad*, l'importante *Theory of sistems of Rays,* ove fra l'altro, dallo studio matematico dei sistemi doppiamente infiniti di rette dello spazio si giunge alla rifrazione conica, fenomeno che fino a quel giorno era sfuggito all'attenzione dei fisici e che solo più tardi l'esperienza ha confermato. Nel 1843 inserì nelle P. T. altra memoria sopra le equazioni della dinamica, che gli assicura un posto importante nella storia della meccanica. Mentre — come risulta da quanto ora dicemmo — l'Hamilton dava opera feconda alle applicazioni delle matematiche all'indagine dei fenomeni naturali, s'interessava anche alle questioni che direbbersi di filosofia della nostra scienza. Ne è prova l'importante memoria intitolata *Theory of Conjugate Functions, or algebraic Couples, and Essay on Algebra as Science of pure Time* (Irish Trans., 1837) ([1]), ove è esposta quella teoria puramente aritmetica dei numeri complessi, fondata sull'uso delle coppie di numeri reali, che è oggi giudicata come l'unica pienamente soddisfacente e che suggerì le analoghe relative ai numeri negativi e frazionari. Da tali ricerche egli fu condotto a cercare il modo di rappresentare algebricamente i punti dello spazio e lo trovò (1843) nella considerazione di nuovi enti aritmetici composti mediante quattro unità linearmente indipendenti; così giunse alla scoperta dei quaternioni, che lo portò ai fastigi della gloria, malgrado la disapprovazione di coloro che non volevano ammettere la possibilità di un'aritmetica nella quale la moltiplicazione non godeva più la proprietà commutativa. La nuova teoria fu da parte di Hamilton oggetto di lezioni universitarie a cominciare dall'anno 1848 e si diffuse nel mondo nel 1853 grazie al volume intitolato *Lectures on Quaternions;* l'Hamilton si occupò poi di perfezionare ulteriormente il suo ritrovato, come risulta dal volume postumo *Elements of Quaternions* (London, 1866). La morte lo rapì il 2 settembre 1865. Il valore teorico dell'invenzione hamiltoniana fu riconosciuto universalmente; meno concorde fu il giudizio intorno alla sua pratica utilità, alcuni vantandone, altri negandone l'attitudine a tutte le ricerche geometriche. La verità sta probabilmente nel mezzo, chè Gauss osservò giustamente quanto segue (lettera a Schumacher nel 15 maggio 1843, a proposito del *Barycentrische Calcul*): « In generale accade riguardo a questi nuovi calcoli che col loro mezzo non si ottiene nulla che non si potrebbe ottenere senza di essi. Ma il vantaggio sta in ciò che, quando un tal calcolo corrisponde all'intima natura di frequenti bisogni, tutti quelli che se ne sono impratichiti, anche senza l'inconscia ispirazione del genio,

---

([1]) Nel concepire l'algebra come la scienza del puro tempo, il matematico inglese ebbe un precursore in M. Buée (1748-1826) di cui si ricorda il *Mémoire sur les quantités imaginaires,* lavoro mediocre che certo non è capace di oscurare il merito di Hamilton.

che nulla può dominare, possono risolvere automaticamente i corrispondenti problemi, persino nei casi più complicati, nei quali, senza quell'aiuto, anche il genio rimarrebbe impotente... Grazie a siffatti procedimenti, innumerevoli problemi che resterebbero isolati ed esigerebbero volta per volta nuovi sforzi (più o meno grandi), vengono riuniti in un tutto organico » [1].

Benchè i tre grandi temi — teoria dei raggi rettilinei, equazioni della dinamica, quaternioni — rappresentino i campi in cui Hamilton conquistò i più significanti allori, parecchi altri furono da lui coltivati con buon successo; e il fatto che i suoi conterranei, dopo più di mezzo secolo, abbiano giudicato opportuno di ristampar tutti i suoi scritti in una edizione completa mostra che essi hanno serbato, a decenni di distanza tutto il loro valore.

729 - Mentre notevole forza ed ardire furono necessari per concepire e introdurre nella scienza sistemi di numeri, qual è quello dei quaternioni, ove non sono rispettate tutte le leggi formali dell'ordinaria aritmetica, spontaneo e per così dire inevitabile fu il passaggio a sistemi di numeri con un numero qualunque di unità, cioè alle totalità $\infty^n$ della forma $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$, ove $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono unità fondamentali e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali arbitrari. Si convenne allora che due siffatti numeri $\sum\limits_k a_k u_k$, $\sum\limits_k b_k u_k$ si dovessero dire *eguali* quando e solo quando sussistono le $n$ relazioni $a_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ e si definì l'addizione per modo che fosse un'operazione uniforme, sempre possibile, invertibile e godente la proprietà associativa. Riguardo alla moltiplicazione si suppose che le unità fossero tali che il prodotto di due qualunque fosse zero oppure un nuovo numero della stessa specie, cosa che rendeva possibile conservare tutte le proprietà formali della moltiplicazione, all'infuori della commutatività. Senza addentrarci in una completa descrizione dei vari stadi che precedettero la costituzione della teoria generale, richiamiamo l'attenzione del lettore sopra l'importante volume intitolato *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen, nebst ihrer geometrischen Darstellung* (Leipzig, 1867). Ne è autore H. Hankel, n. a Halle il 14 febbraio 1839, professore successivamente nelle Università di Erlangen (1867) e Tübingen (1869), morto il 29 febbraio 1873. In quel volume — ammirevole per sostanza e per forma, per gli sviluppi scientifici e per le vaste e precise informazioni storiche — va rilevato, oltre quanto è elencato nel titolo, la teoria dei numeri alternanti », già incontrati da Grassmann, caratterizzati dalle seguenti relazioni fra le unità fondamentali $u_i u_k = - u_k u_i$, $u_i u_i = 0$; essi, a tacer d'altro, guidano a una nuova elegante esposizione della teoria dei determinanti.

Nel tempo in cui l'Europa adoperavasi a costituire la teoria dei numeri complessi di specie qualunque, lo stesso tema veniva studiato nel

---

[1] Si veda anche l'articolo di A. Cayley, *Coordinates versus Quaternions* (nei Proc. of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. XX, 1895) ove è argutamente osservato che « il concetto di quaternione è molto più bello di qualunque sua applicazione ».

Nuovo Mondo da colui che viene riguardato come capostipite della famiglia matematica fiorita negli Stati Uniti d'America durante quest'ultimo secolo: Beniamino Peirce [1]. Egli nacque a Salem (Mass.) il 4 aprile 1809; dal 1825 al 1829 fu studente nell'Università Harvard e in essa insegnò dal 1831; morì a Cambridge (Mass.) il 6 ottobre 1880, vivamente rimpianto dai numerosi suoi discepoli, che egli aveva trasformati in entusiasti ammiratori. Non i suoi lavori di astronomia, geodesia e meccanica devono venire qui ricordati, e nemmeno i suoi apprezzatissimi trattati di Trigonometria, Geometria analitica, Calcolo infinitesimale e Meccanica analitica; ma la memoria *Linear associative Algebra*, che vide la luce in litografia nel 1870 e fu riprodotta poi, per cura del figlio dell'autore, nel T. V. (1881) dell'*American Journal of Mathematics*; da essa emerge che il Peirce si è per primo proposto di determinare i vari tipi possibili di algebre, questione fondamentale che il Lie ha pienamente lumeggiato mediante la sua teoria dei gruppi di trasformazioni e che ha occupato molti matematici eminenti del periodo che segue quello dedicato dalla presente.

---

[1] Suo figlio Carlo (n. a Cambridge Mass. il 10 settembre 1839, m. il 19 aprile 1914) si illustrò come cultore della logica matematica, disciplina su cui pubblicò vari articoli nell'*Amer. Journ. of Math.*

## BIBLIOGRAFIA


W. Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria, introducendi* (T. I, Maros-Vasarhely, 1832, T. II, id., 1833; II ed., Budapest, 1897-1904). In fine: J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem.* Una versione libera in tedesco fu data in luce dall'autore a Maros-Vasarhely nel 1851, con un volume che reca un lungo titolo cominciante con le seguenti parole con cui è spesso citato *Kurzer Grundriss eines Versuches.*

F. Schmidt und P. Stäckel, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai* (Leipzig, 1899).

P. Stäckel und J. Kürschak, *Johann Bolyai's Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewschy's Geometrische Untersuchungen* (Math. Ber. Ungern., T. XVIII, 1902).

P. Stäckel, *Untersuchungen aus der absoluten Geometrie. Aus Johann Bolyai's Nachlass* (Ivi).

P. Stäckel, *Johann Bolyai's Raumlehre* (Id., T. XIX, 1903).

F. Engel und P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundesammlung zur Vorgeschichte der nicht-euklidischen Geometrie* (Leipzig, 1895).

N. Lobatschewsky, *Collection complète des Oeuvres géométriques en Russe et en Français* (due Vol., Kazan, 1883-1886).

N. Lobatschewsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (2 unveränderte Auflage; Berlin, 1887).

N. Lobatschewsky, *Pangéométrie ou Prècis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Parallèles.* (Kazan, 1835; reimpression fac-similé conforme à l'original, Paris, 1905). Trad. ted. di H. Liebmann fra i *Klassiker* dell'Ostwald, Leipzig, 1902).

N. Lobatschewsky, *Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übertsetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von* F. Engel (Leipzig, 1899).

N. LOBATSCHEWSKY, *Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übertsezt und mit Anmerkungen herausgegeben von* H. LIEBMANN (Abh. zur Gesch. der Math., XIX Heft., 1904).

E. B. CHRISTOFFEL, *Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung von* H. KRAZER *und* G. FABER *herausgegeben von* L. MAURER (due Volumi, Leipzig, 1910).

*Oeuvres mathématiques* d'EVARISTE GALOIS *publiées sous les auspices de la Société mathématique de France* (Paris, 1897).

P. DUPUY, *La vie d'Evariste Galois* (Ann. de l'Ec. norm. sup., III Ser., T. XIII, 1896).

J. TANNERY, *Manuscrits et papiers inédits de Galois* (Bull. des Sciences mathém., II Ser., T. XXX e XXXI, 1906 e 1907).

*Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von* F. ENGEL *bearbeitet von* S. LIE. I Abschn. (Leipzig, 1888), II Abschn. (1890), III Abschn. (1893).

S. LIE, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von* G. SCHEFFERS (Leipzig, 1891).

S. LIE, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von* G. SCHEFFERS (Leipzig, 1893).

*Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von* SOPHUS LIE *und* GEORG SCHEFFERS (Leipzig, 1896).

SOPHUS LIE, *Gesammelte Abhandlungen herausgegeben von* P. ENGEL *und* P. HEEGARD (Leipzig und Kristiania; finora pubblicati i volumi: III, 1922; IV, 1929; V, 1924; VI, 1927).

H. GRASSMANN, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke herausgegeben von* FRIEDRICH ENGEL. I Bd. I Tl.: *Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse.* II Tl.: *Die Ausdehnungslehre von 1862.* II Bd. I Tl.: *Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis.* II Tl.: *Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Phisyk.* III Bd. I Tl.: *Theorie der Ebbe und Flut und Abhandlungen zur mathematischen Physik. Aus dem Nachlasse.* II Tl.: *Grassmann's Leben mit einem Verzeichniss der von Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Uebersicht des handschriftlichen Nachlasses* (Leipzig, 1894-1911).

W. ROWAN HAMILTON, *The collected mathematical Papers.* Vol. I, *Geometrical Optics* (Cambridge, 1931).

C. S. PEIRCE, *Collected Papers,* 6 vol. (Cambridge, Mass., 1931-35).

## CAPITOLO XLIV

# L'ANALISI MATEMATICA DA CAUCHY E JACOBI A POINCARÉ E G. CANTOR

### Nei paesi di lingua francese

730 - Carlo Francesco Sturm nacque a Ginevra il 22 settembre 1803 ed entrò in quell'Accademia (Università) nel 1818. Rimasto orfano di padre, con l'insegnamento privato sopperì ai bisogni della famiglia, trovando però egualmente tempo per collaborare alle *Ann. de Math.*. Terminati i propri studi, passò l'inverno 1823-24 a Parigi e, grazie all'appoggio della famiglia Broglie, presso cui era istitutore, venne a contatto con i maggiori scienziati del tempo. A Parigi ritornò nel 1825, ove lavorò col fisico J. D. Colladon al *Mémoire sur la Compression des Liquides,* che fu premiato nel 1827 dall'Accademia delle Scienze. Nello stesso tempo si occupò di questioni relative alle equazioni algebriche, tema che, grazie a Lagrange e Fourier (della cui fondamentale opera, tuttora inedita, Sturm riuscì a conoscere il contenuto), era allora all'ordine del giorno; così giunse al celebre teorema che porta il suo nome il quale leggesi nel *Mémoire sur la Résolution des Equations numériques* letto all'Accademia di Parigi il 13 maggio 1829 e venne pubblicato in riassunto nel *Bulletin* di Férussac e nell'*Algèbre* di Choquet e Mayer, 1832, (lo fu per intero nel T. VI, 1835, della raccolta dei *Sav. Etr*). Una sua memoria sopra le equazioni differenziali di 2° ordine ottenne nel 1834 il Gran Premio delle Scienze matematiche che « devait être décerné à l'auteur de la decouverte la plus importante publiée dans les trois dernières années » (la si legge nel T. I, 1836, del *Journ. de Math.*). Sino dal 1830 Sturm insegnava nel Collegio Rollin, nel 1836 entrò all'Istituto di Francia due anni dopo fu destinato a insegnare alla Scuola Politecnica e nel 1840 alla Sorbona; morì a Parigi il 18 dicembre 1855. Due corsi, uno di analisi e l'altro di meccanica, per suo desiderio furono pubblicati dopo la sua morte e, grazie ai loro indiscutibili pregi, vennero ristampati più volte.

Lo Sturm, benchè analista, arrecò qualche contributo anche alla geometria; anzitutto nel suo *Mémoires sur les Lignes du second ordre* (Ann. de Math., TT. XVI-XVII, 1825-26), generalizzando un noto teorema di Desargues, dimostrò che tutte le coniche di un fascio determinano sopra una retta qualunque del suo piano una involuzione; poi, nelle sue *Recherches sur les Caustiques* (Ivi, T. XV, 1824) ha mostrato l'utilità di considerare l'evolvente di una caustica (« caustica seconda-

ria » secondo Quetelet). Estendendo poi tali considerazioni allo spazio (*Journ. de Math.*, T. III, 1838 e C. R., T. XX, 1845) ha scoperto che tutte le normali di una superficie nelle vicinanze della normale in un punto *P* incontrano due rette fisse, che sono le perpendicolari innalzate dai centri principali di curvatura della superficie in *P* alle corrispondenti sezioni normali; che si tratta di un teorema fondamentale nella teoria dei sistemi di raggi, di cui si occuparono poi con successo l'Hamilton (n. 728) e il Kummer (n. 739).

731 - J. Liouville nacque a St. Omer il 23 marzo 1809; dal 1838 insegnò alla Scuola Politecnica di Parigi, e dal 1839 al Collegio di Francia; nello stesso anno entrò all'Istituto; tre anni prima aveva fondato il *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* che diresse durante quarant'anni; morì a Parigi l'8 settembre 1882. Si deve a lui un'ottima edizione dell'*Application de l'Analyse à la Géométrie* di Monge (Paris, 1850), che arricchì di note importanti. Nel 1847 tenne un corso di *Leçons sur les Fonctions doublement périodiques*, che fu raccolto da due matematici tedeschi (Borchardt (n. 744) e Joachimsthal, 1818-1861) e poi dato alle stampe (*G. di Crelle,* T. LXXXVIII, 1880). Numerosissimi sono i lavori del Liouville relativi a questioni di analisi e geometria differenziale; sorvolando su quelle concernenti i differenziali a indice qualunque perchè non accrebbero la scienza di alcun risultato accettato da tutti, notiamo la bella memoria scritta in collaborazione con Sturm sul teorema di Cauchy relativo (v. n. 666) al numero delle radici complesse di un'equazione che cadono in un campo assegnato (*Journ. de Math.*, T. I, 1836). Notevole è un lavoro (Id., T. VI, 1841) ove della teoria delle equazioni algebriche è fatta applicazione alla dimostrazione di eleganti proprietà metriche delle curve e delle superficie. Si deve a lui la scoperta dei « numeri trascendenti », che non sono radici di alcuna equazione algebrica; di più il nome di « trasformazione per raggi vettori reciproci » (da lui suggerito in occasione di una memoria di W. Thomson sopra la distribuzione dell'elettricità; *Journ. de Math.*. T. XII, 1847), nonchè la scoperta che essa è l'unica corrispondenza conforme dello spazio (Nota VI alla succitata edizione di Monge). Risale pure a lui il concetto di « curvatura geodetica » di una curva tracciata sopra una superficie (Note I e II a Monge; *Journ. de Math.*, T. XVI, 1851). Di più ha scoperte numerose proprietà delle geodetiche d'un ellissoide (Id., T. IX, 1844 e C. R., T. XXII, 1846) e varie espressioni per la curvatura integra di una superficie, della cui invariabilità per flessione diede parecchie dimostrazioni (Nota IV a Monge e *Journ. de Math.,* T. XVI, 1851). Nell'ultimo periodo della sua esistenza egli si è occupato quasi esclusivamente di aritmetica superiore, pubblicando nel suo *Giornale* un gran numero di teoremi, in prevalenza soltanto annunciati, che sono ancora in attesa di dimostrazione [1].

732 - Eugenio Catalan, n. a Bruges il 30 maggio 1814, fu alunno della Scuola Politecnica di Parigi e nel 1838 vi fu chiamato come ripe-

(1) Per particolari al riguardo si ricorra al Cap. XI dell'*History of thr Theory of Numers* di E. L. Dickson (Washington 1920).

titore; passò poi nell'insegnamento secondario, ma nel 1852 dovette lasciarlo avendo rifiutato di prestare giuramento di fedeltà al III Napoleone. Nel 1865 accettò la cattedra di analisi nell'Università di Liegi e l'occupò sino al 1880; il collocamento a riposo non gli impedì di continuare a coltivare la scienza, da cui solo la morte (avvenuta il 14 febbraio 1894) potè staccarlo. Uomo di ammirabile operosità e solida dottrina, nel 1875 fondò e sempre diresse la *Nouvelle Correspondance mathématique* e pubblicò buon numero di opere didattiche molto pregiate e una cospicua collezione di memorie sopra svariati soggetti: geometria elementare (in particolare teoria dei poliedri), algebra, funzioni speciali (in particolare ellittiche), equazioni differenziali (fra cui le equazioni di Riccati) e teoria dei numeri. Col suo insegnamento contribuì efficacemente a promuovere le ricerche matematiche in Belgio [1].

Di poco più giovane del Catalan è J. A. Serret, n. a Parigi il 30 agosto 1819, m. a Versailles il 2 marzo 1885. Le sue memorie (*Journ. Éc. Pol.*, T. XXXV, 1853; *G. di Liouville*, TT. X-XI, 1845-46) sulle curve rettificabili mediante funzioni di data specie (circolari, ellittiche, ecc.), sulla teoria delle curve gobbe, che arricchì di formole di uso continuo (*G. di Liouville*, T. XVI, 1851) [2], sulle superficie a linee di curvatura piana o sferica (Id., T. XVIII, 1853), sulle curve di Bertrand (C. R., T. LXXXV, 1877), e sopra numerose e importanti questioni di algebra, di alta analisi e di meccanica analitica, per la scelta delle questioni trattate, la profondità dei mezzi usati, l'eleganza e lucidità dell'esposizione sono ancora considerate come veri modelli. Dagli insegnamenti da lui tenuti alla Scuola Politecnica, alla Sorbona e al Collegio di Francia ebbero origine il *Cours d'Algèbre supérieure* e il *Cours de Calcul différentiel et intégral* che fornirono (e somministrarono ancora) ottima istruzione a numerose generazioni di alunni; un sentimento di gratitudine spinge poi l'autore a ricordare il *Traité de Trigonométrie* che, malgrado le numerose opere congeneri posteriori, egli non esita a proclamare insuperato.

733 - Carlo Hermite nacque a Dieuze (Lorena) il 24 dicembre 1822; esauriti gli studi secondari — parte a Nancy, parte a Parigi — nel 1842 entrò nella Scuola Politecnica, ma dovette uscirne dopo un anno a cagione di un'imperfezione fisica. Sino dal 1843 si pose in corrispondenza con Jacobi, per comunicargli alcuni risultati da lui ottenuti studiando le funzioni ellittiche ed abeliane; tali lettere, grazie alla loro importanza, furono date alle stampe (*G. di Crelle*, T. XXXII, 1846). I lavori che egli venne poi pubblicando lo fecero scegliere nel 1848 da chi allora dirigeva la Scuola Politecnica come esaminatore e ripetitore della stessa; professore vi fu durante il periodo 1869-76; sino dal 1856 appartenne al-

(1) Nei Vol. XII, XIII e XV della 2ª Ser. dei *Mém. de la Societé Royale des Sciences de Liége* (1885, 1886, 1888) si trova raccolto un gran numero di scritti del CATALAN sotto il comune titolo di *Mélanges mathématiques*. Come esordio al primo si legge un discorso di P. Mansion ove sono analizzati i principali lavori del Catalan.

(2) Ricordiamo le espressioni delle derivate rispetto all'arco dei coseni direttori della tangente, normale principale e binormale, che per essere state scoperte contemporaneamente da un altro matematico francese F. Frenet, si designano ordinariamente col nome di « formole di Serret-Frenet ».

l'Istituto di Francia. Riordinata che fu la Scuola normale superiore ne fu « maître de conférences » nel periodo 1862-69; nel 1870 gli fu conferita la cattedra d'algebra superiore alla Sorbona e la tenne con plauso universale sino al suo collocamento a riposo (1897); continuò poi egualmente a coltivare i suoi diletti studi, sino al giorno della sua morte (14 gennaio 1901).

I lavori dell'Hermite sono generalmente brevi note, spesso in forma di lettere, ed essendo stati pubblicati in periodici svariatissimi fu provvida la deliberazione presa dall'Istituto di Francia di promuovere e dirigere la ristampa di tutti. Nell'impossibilità di esporne completamente i risultati, ci limiteremo a indicare i più cospicui.

I forti studi aritmetici da lui fatti da giovane gli consentirono di risolvere problemi difficili ed importanti della teoria dei numeri e di fare di questa notevoli applicazioni alla teoria di funzioni trascendenti; in particolare è suo merito di avere introdotta nell'aritmetica la variabilità continua e l'uso delle forme a variabili complesse coniugate. La teoria delle funzioni ellittiche lo condusse alla risoluzione delle equazioni di 5° grado; della stessa egli inserì un'ottima esposizione nella VI ed. del *Traité Elémentaire de Calcul infinitésimal* del Lacroix; finalmente a partire dal 1877 cominciò a pubblicare una serie di note *Sur quelques Applications des Fonctions Elliptiques,* ove sono date nuove soluzioni dei seguenti problemi: rotazione di un solido attorno ad un punto fisso, movimento del pendolo, determinazione della curva elastica. Egli collaborò con Cayley e Sylvester alla costituzione della teoria delle forme algebriche; perfezionò la teoria delle forme quadratiche ed estese il teorema di Sturm a sistemi di equazioni algebriche. Finalmente le sue reiterate, assidue e geniali ricerche sopra le frazioni continue algebriche lo condusse (1876) alla dimostrazione dell'irrazionalità del numero $e$, risultato la cui importanza fu di gran lunga aumentata quando portò (Lindemann) allo stesso risultato riguardo a $\pi$.

In tutti i suoi lavori l'Hermite si mostrò analista puro, di straordinaria genialità nei calcoli, da lui presentati sempre sotto forma la più semplice e spontanea. Delle sue doti di insegnante di eccezionale valore fanno fede due corsi di lezioni tenuti uno alla Scuola Politecnica e l'altro alla Sorbona; corrispondente diligentissimo, alcuni gruppi di sue lettere dati alle stampe fanno desiderare la pubblicazione completa del suo carteggio.

734 - G. Bertrand nacque a Parigi l'11 marzo 1822. La sua carriera scolastica essendo stata di uno splendore senza esempio, egli raggiunse sino da giovinetto grande celebrità. Uscito nel 1841 dalla Scuola Politecnica, ov'era stato ammesso in prima linea, passò alla Scuola delle miniere, ma la lasciò ben presto per entrare nell'insegnamento secondario. Da tale soggiorno ebbero nascimento i trattati di *Aritmetica* ed *Algebra* che, grazie ai loro meriti indiscutibili, conseguirono la più ampia diffusione, anche fuori della Francia. Passato ad insegnare nella Scuola Politecnica, raccolse materiali per il grande *Traïté de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, rimasto sfortunatamente in tronco al II vol., il manoscritto del III essendo stato distrutto, insieme alla biblio-

teca dell'illustre matematico, durante la rivoluzione comunista del 1871. Le sue lezioni al Collegio di Francia si trovano compendiate nei volumi intitolati *Thérmodynamique* (1887), *Calcul des probabilités* (1889) e *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Elasticité* (1890), nel secondo dei quali vanno notate le pagine dedicate alla critica delle ordinarie trattazioni dei problemi di probabiltà geometrica. Parecchi dotti e brillanti suoi volumi di carattere storico e letterario lo designarono come indicato al posto di segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze di Parigi, di cui faceva parte dal 1856; il posto gli fu conferito nel 1874, e appunto in qualità di segretario perpetuo egli pronunciò una serie di *Eloges académiques*, i quali, riuniti in due volumi, lo mostrano degno continuatore del Fontenelle. Nel 1876 veniva ammesso nell'Accademia francese; morì; il 2 marzo 1900.

La produzione scientifica del Bertrand è tanto ricca quanto varia. Nella teoria dei numeri il suo nome è legato alla seguente proposizione (chiamata ordinariamente « postulato di Bertrand »): se $n > 6$ fra $n/2$ e $n$-2 si trova sempre almeno un numero primo; egli ne riconobbe la verità sino a $n = 6000000$, la dimostrazione generale fu data poi da altri (v. n. 753). Numerosi e importanti sono i contributi da lui dati alla geometria infinitesimale, a cui egli applicò, con marcata preferenza ed insuperata perizia, consderazioni sintetiche; ricordiamo in particolare che il suo nome è dato alle curve gobbe per le quali flessione e torsione sono legate da una relazione lineare. A complemento dei lavori di Cauchy e Poinsot (v. n. 661) egli dimostrò che i vertici di un poliedro stellato sono vertici di un poliedro convesso, teorema che facilita e illumina la relativa teoria. Chiuderemo citando le sue ricerche di meccanica analitica, le più cospicue delle quali si leggono nelle *Note* di cui egli corredò l'edizione da lui curata della grande opera di Lagrange su questo argomento.

735 - A succedere al Bertrand nella carica di segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze fu chiamato Gastone Darboux. Egli era nato a Nîmes il 13 agosto 1842; ammesso nel 1861 come primo tanto alla Scuola Politecnica quanto alla Scuola Normale, preferì quest'ultima, onde dedicarsi all'insegnamento verso cui sentivasi attratto; ivi venne a contatto con Pasteur il quale, avendone misurato il valore, ve lo trattenne in qualità di assistente dopo la fine del corso; la laurea gli fu conferita il 14 luglio 1866.

Nel 1870 fondò, col concorso dell'Hoüel, il *Bulletin des Sciences mathématiques*, che poi diresse sempre. Dopo avere insegnato per qualche anno in un liceo, nel 1880 fu chiamato a succedere a Chasles nell'insegnamento della geometria superiore alla Sorbona. Nel 1884 entrava all'Istituto; morì il 23 febbraio 1917 in seguito ad un'operazione tardiva che aveva rimandato di anno in anno. Esaminando nel suo insieme l'imponente produzione scientifica del Darboux [1] si ravvisa in lui un degno continuatore di Monge, un membro di quella brillante coorte di matematici francesi per i quali le questioni di geometria infinitesimale offrono

[1] Per formarsene un concetto si ricorra all'opuscolo di E. LEBON, *Gaston Darboux. Biographie, Bibliographie analytique des écrits* (Paris, 1910).

l'occasione per ricerche ove i più raffinati metodi analitici e le considerazioni prettamente geometriche si prestano scambievole aiuto per raggiungere l'agognato scopo. Questa caratteristica mentale si palesa in tutto il suo splendore nella grande opera intitolata *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* (quattro volumi, Paris, 1889-96), ove tutto quanto si conosceva sull'argomento (fra cui naturalmente spiccano i contributi personali dell'autore) si trova esposto metodicamente, prendendo le mosse da eleganti considerazioni cinematiche, cosicchè oggi ancora essa si presenta quale un indispensabile « vade-mecum » per chiunque voglia consacrare le proprie forze alla geometria infinitesimale. Servono ad essa di complemento le *Leçons sur les Systèmes orthogonaux et les Coordonnées curvilignes* (Paris, 1898), soggetto su cui il Darboux aveva una speciale competenza, chè iniziò la sua carriera scoprendo il sistema triplo ortogonale costituito dalle superficie di IV ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all'infinito, e vi arrecò poi altri importanti contributi.

A coltivare con successo la geometria infinitesimale il Darboux era mirabilmente preparato grazie alle sue vaste e profonde cognizioni analitiche. Di queste egli diede prove con molti lavori, fra cui vanno ricordati il *Mémoire sur l'Approximation des Fonctions de très-grands nombres* (Journ. de math.,. Ser. III, IV, 1878), il *Mémoire sur les Fonctions discontinues* (Ann. de l'École norm. sup., Ser. II, T. IV, 1875; VIII, 1879), e il *Mémoire sur les Solutions singulières des Equations aux dérivées partielles du premier ordre* (Mém. de l'Acad. des Sciences, T. XXVII, 1880) che nel 1877 ottenne il Gran premio delle Scienze matematiche.

Daremo termine a questi rapidi cenni ricordando due volumi che segnano quasi l'$\alpha$ e l'$\omega$ della luminosa carriera del Darboux: *Sur une classe remarquable de Courbes et de Surfaces algébriques et sur la Théorie des imaginaires* (Paris, 1873) e *Principes de Géométrie analytique* (Paris, 1917), entrambi notevoli per eleganza di metodi ed originalità di risultati.

736 - Continueremo questa serie di matematici francesi con un grande nome: Enrico Poincaré. Egli nacque a Nancy il 29 aprile 1854; nel 1873, compiuti ivi gli studi secondari, entrò alla Scuola Politecnica alla testa della sua classe; due anni dopo entrava in qualità d'ingegnere alla Scuola delle miniere; nel 1874 conseguiva la laurea in matematica e subito venne incaricato di un corso alla Facoltà di scienze di Caen, donde nel 1881 passò a quella di Parigi, e alla Sorbona rimase occupando varie cattedre, sino alla morte (17 luglio 1912). Dal 1887 era membro dell'Accademia francese. La sua portentosa produzione abbraccia l'intera matematica e i principali rami della fisica; essa comprende 500 memorie, una dozzina di volumi pubblicati da lui stesso, e una ventina redatti dai suoi discepoli. Articoli e volumi di filosofia scientifica lo fecero conoscere ed ammirare all'infuori della stretta cerchia dei matematici di professione (alcuni fanno salire i suoi lettori a mezzo milione), dando luogo a discussioni appassionate ed anche a false interpretazioni

da parte di chi non era riuscito a raggiungere il fondo del pensiero del Poincaré.

I primi lavori matematici che gli diedero fama concernono le funzioni automorfe (fuchsiane e kleiniane) grazie a cui si possono (lo dimostrò appunto il Poincaré) esprimere razionalmente le coordinate dei punti di qualunque curva algebrica, nonchè gli integrali di tutte le equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici. Iniziò poi la ricerca degli integrali delle funzioni di due variabili complesse; così fu condotto allo studio dell'« analysis situs » degli spazi a quattro dimensioni. Della sua famigliarità col concetto d'infinito diede prova considerando e studiando i determinanti infiniti e le superficie di Riemann ad infiniti strati. Nè va dimenticata la teoria delle probabilità che deve a lui notevoli progressi: basti dire che egli è riuscito a spiegare un paradosso segnalato dal Bertrand in tale teoria (v. n. 734).

Dotato ad un tempo di spirito critico acutissimo e di straordinario genio inventivo, seppe arrecare perfezionamenti radicali a risultati considerati classici; così i metodi in uso nella meccanica celeste vennero da lui notevolmente raffinati con procedimenti che si trovano schizzati in una celebre memoria (*Acta mathem.*, T. VII, 1906), che ottenne il 21 gennaio 1889 il primo dei premi distribuiti dal Re di Svezia in occasione del suo LX compleanno, e sono completamente svolti nella grande opera intitolata *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (tre vol., Paris 1892, 1894, 1899); così aggiunse alle forme di equilibrio di una massa fluida rotante note da tempo (ellissoide di rotazione, ellissoide di Jacobi) infinite altre; e poichè accenniamo ai lavori del Poincaré sopra fenomeni naturali, ci corre l'obbligo di citare le applicazioni da lui fatte delle equazioni integrali allo studio delle maree. Mirabile è la potenza da lui dimostrata nell'abbracciare le questioni nella loro completa generalità e nel creare strumenti analitici capaci di risolverle; ma — a differenza di Gauss — egli non si arrestò a limare i propri lavori, quasi fosse assillato e sospinto dalla massa di pensieri che affollavansi alla sua mente, onde talvolta fu trascinato ad asserzioni non conformi al vero; ma si tratta di semplici nèi che non deturpano una produzione [1], che colloca l'autore al livello dei più grandi pensatori che siano sinora apparsi nel mondo.

Il secondo dei premi istituiti dal re di Svezia fu aggiudicato a una memoria *Sur les intégrales des Fonctions à multiplicateurs* (Acta mathem., T. XII, 1890); ne è autore P. Appell; egli nacque a Strassburgo il 27 settembre 1855; dal 1883 al 1886 fu alunno della Scuola normale superiore di Parigi; occupò poi vari uffici alla Sorbona; finalmente gli fu conferita la carica di professore di meccanica razionale, che tenne dal 1885 sino al suo collocamento a riposo; dal 1892 appartenne all'Istituto di Francia; a Parigi morì il 24 ottobre 1930. La sua cospicua produzione scientifica comincia con alcuni lavori geometrici e abbraccia tutti i rami dell'analisi, la fisica matematica e la meccanica; nell'impos-

[1] Per un elenco dei suoi lavori rinviamo il lettore all'opuscolo di E. Lebon, *Henri Poincaré. Biographie, Bibliographie analytique des écrits* (Paris, 1909).

sibilità di addentrarci in una enumerazione completa (1) ci limiteremo a ricordare le opere di maggior mole: con E. Goursat, *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs Intégrales* (Paris, 1895; II ed., 1930); con E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications* (Paris, 1897); *Mémoire sur les déblais et le remblais* (Mém. prés. par div. sav., T. XXIX, 1887; prix Bordin, 1884); *Traité de Mécanique rationnelle* (tre vol., Paris 1893-1903; altre ed. posteriori).

## In Germania

737 - Jacobi, durante gli ultimi anni della propria esistenza, ebbe al proprio fianco un matematico che si mostrò in grado di continuare degnamente la tradizione gaussiana: Gustavo Pietro Lejeune-Dirichlet. Nato a Düren addì 13 febbraio 1805, compiuti gli studi secondari, parte a Bonn e parte a Colonia, attratto dalla fama dei matematici francesi del tempo, si trasferì (maggio 1822) a Parigi; ivi, mentre seguiva con diligenza le lezioni di Lacroix, Biot, Hachette e Francoeur, intraprese lo studio delle *Disquis, arith.*, e siccome lo continuò durante l'intera vita, così col tempo divenne il conoscitore più profondo e il divulgatore più efficace delle idee di Gauss. A Parigi divenne istitutore dei figli del generale Foy, ma, malgrado il tempo che doveva dedicare a questo cómpito, scrisse il *Mémoire sur l'impossibilité de quelques Equations indéterminées du 5e degré* che, letto all'Accademia delle Scienze l'11 giugno 1825, venne favorevolmente giudicato da Lacroix e Legendre (fu pubblicato nel T. III, 1828, del *G. di Crelle*); trovasi ivi dimostrata l'impossibilità del grande teorema di Fermat nel nuovo caso $n = 5$ (2). Morto il Foy (1826), il giovane matematico rientrò in patria e fu nominato dottore « honoris causa » dall'Università di Bonn. Durante tre semestri funzionò come libero docente a Breslau; poi nell'autunno 1828 si trasferì a Berlino per insegnare in quella Scuola di guerra; tre anni dopo entrò nell'Accademia Prussiana e alla morte di Gauss (1855) accettò di succedergli; ma la cattedra di Göttingen occupò per breve tempo, un'affezione cardiaca avendolo spento il 5 maggio 1859. I suoi lavori non sono molto numerosi, ma possiedono tutti notevole importanza; grazie all'impeccabile rigore delle argomentazioni e all'accuratezza dello stile. sono riguardati come insuperabili modelli: di tali qualità godevano anche le sue lezioni, come emerge dall'esame di quelle date alle stampe. Un numero assai considerevole dei suoi scritti concerne la teoria dei numeri, alla quale egli fece compiere memorabili progressi. Infatti si deve a lui l'applicazione dell'analisi infinitesimale a questioni aritmetiche (*G. di Crelle*, TT. XIX e XXI, 1839-40); appunto grazie a tale artificio egli dimostrò (cosa che aveva arguito Legendre) l'esistenza di infiniti numeri primi in qualunque progressione aritmetica

(1) L'Appell ne fece egli stesso una luminosa analisi in una *Notice* pubblicata nel T. XLV (1925) degli *Acta Mathematica*. Per un elenco dei lavori di più antica data si ricorra a E. Lebon, *Paul Appell. Biographie, Bibliographie analytique des écrits* (Paris, 1910).

(2) Lo stesso teorema fu stabilito poi dal Dirichlet per $n = 14$ (*G. di Crelle*, T. IX, 1832).

in cui il primo termine e la ragione sono numeri primi relativi (*Berlin. Abhandl,* 1837), ossia che nella forma lineare $a + b\,x$ si trovano infiniti numeri primi quando $a$ e $b$ non hanno alcun fattore comune; dimostrò poi un fatto analogo riguardo alle forme quadratiche $a + b\,x + c\,x^2$, lasciando ai posteri di eventualmente estendere questo risultato a forme di grado superiore: così gettò qualche sprazzo di luce sull'oscura questione della frequenza dei numeri primi. Anche la teoria delle forme quadratiche è debitrice a lui di semplificazioni e miglioramenti (*Berlin. Abhandl.,* 1854). Altro campo coltivato con successo dallo stesso matematico è quello delle serie trigonometriche; questa teoria egli avvertì deplorevoli imperfezioni e insegnò a porvi rimedio (*G. di Crelle,* T. IV, 1829) e poi estese le proprie considerazioni alle serie di funzioni sferiche (Id., T. XVII, 1837): gli è nel corso di tali studi che egli osservò come, in certi casi, il valore della somma di una serie dipenda dall'ordine de' suoi termini, e così fu condotto a introdurre nella scienza il fondamentale concetto di « serie assolutamente convergenti ». Profondi studi sul calcolo di certi integrali (*Berlin. Abhandl.,* 1835) lo portarono a introdurre nella scienza « il fattore di discontinuità » e mostrarne la grande utilità. Finalmente alcuni suoi lavori traggono origine dall'esortazione, che egli ricevette da Fourier, quando da giovane trovavasi a Parigi, di non trascurare lo studio matematico dei fenomeni naturali; limitiamoci a ricordare quelli sulla teoria del potenziale (*G. di Crelle,* T. XXXII, 1846), nel corso dei quali egli applicò quel « principio » che porta il suo nome e che provocò tanti studi e tante discussioni; altri lavori si riferiscono su questioni d'idrodinamica (*Berlin. Ber.,* 1852; *Göttinga. Nachr.,* 1857; e una memoria postuma inserita nel T. VIII delle *Götting. Abhandl.*).

738 - Sulla via gloriosamente percorsa da Gauss, Jacobi e Dirichlet si pose per proprio impulso G. Eisenstein. Egli nacque a Berlino il 16 aprile 1823; ancora studente liceale frequentò le lezioni del Dirichlet; all'Università s'inscrisse nel 1843; ma i lavori da lui pubblicati nel *G. di Crelle* (nel volume XXVII se ne trovano non meno di sedici!) parvero a Jacobi di tale importanza che, dietro suo suggerimento, l'Università di Breslau, dopo soli tre semestri di studio, gli conferì la dignità dottorale « honoris causa ». Gauss, a cui egli fece visita durante le vacanze pasquali del 1844, provò per lui tanta ammirazione che accettò di scrivere la prefazione per una raccolta di sue memorie. La libera docenza gli fu conferita dall'Università di Berlino nel 1847, e quell'Accademia lo accolse nel proprio seno nel gennaio 1852. Dei conseguiti vantaggi potè fruire per breve tempo, chè egli — che era stato sempre di salute assai cagionevole — si spense l'11 ottobre di detto anno. Oltre a due note pubblicate nei *Monatsberichte* dell'Accademia di Berlino alla vigilia della sua morte, pubblicò non meno di 46 lavori nel *Giornale di Crelle* (TT. XXVII-XLIV), molti di aritmetica superiore, ma alcuni di algebra e altri sulla teoria delle funzioni ellittiche e sulle serie. L'Eisenstein appare dunque, al pari di Abel e Galois, come una fulgida meteora, troppo presto tramontata.

739 - A succedere a Dirichlet, tanto alla Scuola di guerra quanto all'Accademia di Berlino, venne chiamato da Breslau, ov'era professore ordinario, E. E. Kummer. Nato a Sorau il 29 gennaio 1810, nel 1828 si inscrisse nell'Università di Halle, ove ebbe a maestro quel E. F. Scherk (1798-1885) che ha un posto nella storia delle superficie d'area minima per avere scoperta una nuova superficie di tale specie. Laureatosi ivi il 10 settembre 1831, dal 1832 al 1840 insegnò nel Ginnasio di Lignitz, poi, sino al 1855, nell'Università di Breslau; nel 1855 passò a Berlino e nel 1883 chiese ed ottenne di essere dispensato dall'insegnamento; a Berlino morì il 14 maggio 1893.

I primi lavori che gli assicurarono un nome nella storia della scienza si riferiscono alle serie, agli integrali definiti e all'integrazione delle equazioni differenziali per necessità di spazio limitiamoci a ricordare la memoria sopra la funzione ipergeometrica (*G. di Crelle,* T. XV, 1836). che costituisce un importante complemento ad un lavoro di Gauss (v. n. 652). Dallo studio delle altre opere di questo grande egli fu portato ad occuparsi di questioni aritmetiche, con lo scopo precipuo di dimostrare il grande teorema di Fermat. Appunto a tale scopo creò (*Berlin. Abhandl.,* 1856) la teoria dei numeri complessi composti con le radici *n*-me dell'unità e la portò a notevole perfezione con l'introduzione dei « fattori ideali » da lui paragonati a quei corpi semplici di cui l'esistenza è accertata, quantunque non siano mai stati isolati. Alla dimostrazione di quel teorema egli diede un primo contributo occupandosi dell'ipotesi che l'esponente sia pari (*G. di Crelle,* T. XVII, 1837); lo dimostrò poi (*Berlin. Monatsber.,* 1847) per infiniti esponenti primi e in seguito (*G. di Crelle,* T. XL, 1850) per tutti gli esponenti $\lambda$ primi e che non entrano come fattori nei numeratori dei primi $(\lambda - 3)/2$ numeri di Bernoulli; in tale condizione sono tutti i numeri primi che trovansi nel primo centinaio, esclusi 37, 59, 67; ma Kummer non tardò a dimostrare (*Berlin. Abhandl.,* 1857) che anche per essi sussiste il teorema di Fermat. A stabilire la straordinaria importanza di questi risultati citeremo il seguente fatto: l'Accademia delle scienze di Parigi aveva proposto nel 1853 e riproposto nel 1856 come tema di concorso la dimostrazione del teorema di Fermat; nessuno dei lavori presentati essendo stato giudicato meritevole del premio, questo fu assegnato a Kummer, che non aveva partecipato alla gara, « pour ses belles recherches sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers ».

Esperto algebrista, egli ha insegnato a rappresentare come somma di sette quadrati il discriminante dell'equazione che serve a determinare gli assi di una quàdrica (*G. di Crelle,* T. XXVI, 1843), donde emerge la realtà delle radici.

Gauss suggerì a Kummer il suo primo importante lavoro; Gauss gli fu guida costante nelle sue ricerche aritmetiche; Gauss lo ispirò anche nell'ultimo ordine di ricerche in cui s'illustrò il geniale matematico tedesco. Volendo, infatti, studiare metodicamente i sistemi di $\infty^2$ rette nello spazio, distribuite secondo una determinata legge, egli (*G. di Crelle,* T. LVII, 1857) ne rappresentò gli elementi in funzione di due parametri; dal risultante sistema di formole (il quale presenta una meravigliosa analogia con quello che costituisce la base dell'ordinaria geome-

tria infinitesimale delle superficie) Kummer trasse con facilità ed eleganza tutte le proposizioni relative a quella teoria. Messosi sopra questa via, egli si è proposto ed ha completamente risolto il problema di determinare tutti i sistemi (algebrici) di $\infty^2$ rette tali che per ogni punto dello spazio ne passino due (*Berlin. Abhandl.*, 1866). Nel corso di tali ricerche egli si è imbattuto (come superficie focali) in superficie di IV ordine con punti doppi, fra cui spicca quella con 16 punti doppi e 16 piani tangenti doppi, che a ragione porta il suo nome (v. anche *Berlin. Monatsber.*, 1864); il fatto che questa è autocorrelativa lo portò alla determinazione di tutte le superficie dotate della medesima prerogativa (*Berlin. Monatsber.*, 1878). Aggiungiamo che Kummer con straordinaria sagacia ha anche determinate tutte le superficie di IV ordine con infinite coniche (Id., 1864); fra queste va notata la superficie romana di Steiner (v. n. 696), di cui il Kummer ha per primo costruito un modello. Non basta tutto ciò a dimostrare che al Kummer spetta nella storia della geometria un posto non meno elevato di quello che, per universale consenso, occupa nella storia dell'aritmetica superiore? [1].

740 - A completare e diffondere le scoperte aritmetiche di Dirichlet e Kummer si adoperò in modo superiore ad ogni elogio R. Dedekind. Nato a Braunschweig il 6 ottobre 1831, nel 1850 entrò nell'Università di Göttingen, ove si laureò sotto la direzione di Gauss, con una dissertazione sulla teoria degli integrali euleriani (cfr. *G. di Crelle*, T. XLV, 1853); ivi ottenne la libera docenza, ivi rimase anche quando venne a insegnarvi il Dirichlet, del quale non tardò a subire una decisiva influenza. Nel 1858 fu chiamato al Politecnico di Zurigo in qualità di professore ordinario di matematica; quattro anni dopo passò in quello di Braunschweig, ove professò non solo sino a quando (1894) fu dispensato dall'insegnamento, ma sino al giorno della sua morte (12 febbraio 1916). Con la pubblicazione delle *Vorlesungen über Zahlentheorie* del Dirichlet egli contribuì nel modo più efficace a far conoscere ciò che era questa branca della matematica in seguito alle ricerche di Dirichlet, di Kummer e di lui stesso. A chiarire i fondamenti dell'analisi diede opera efficace con i due opuscoli *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) e *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), nel primo dei quali si legge la definizione dei numeri irrazionali mediante « sezioni » che riscosse il plauso universale e si diffuse in ogni ordine di scuole.

Chiude questa splendida serie di cultori dell'alta aritmetica H. Minkowski; nacque a Alexton (Russia) il 23 giugno 1866, ma in Germania ricevette tutta la propria istruzione e passò quasi tutta la sua vita. A Königsberg compì il corso secondario e a soli sedici anni s'inscrisse in quella Università. Nel 1881 l'Accademia delle Scienze di Parigi (nell'ignoranza di lavori di H. S. H. Smith, n. 711) propose come tema per il Gran Premio delle Scienze matematiche lo studio della decomposizione

[1] L'Accademia di Berlino ha da tempo deliberato di patrocinare la stampa delle *Opere complete di* Kummer, ma sgraziatamente il relativo voto non fu peranco tradotto in atto. Chi desidera conoscere l'elenco dei suoi lavori lo troverà in appendice alla sua necrologia scritta da E. Lampe e pubblicata nel T. III (1894) del *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.*

di un numero nella somma di cinque quadrati. Cedendo ad un irresistibile impulso il giovane studente decise di concorrere, e la memoria da lui presentata nell'aprile 1883 divise con lo Smith gli allori della vittoria, quantunque essa, con patente violazione delle condizioni del concorso, fosse scritta in tedesco; prima di venire inserita nella raccolta dei « Savants Etrangers » fu tradotta in francese come risulta dal suo titolo: *Mémoire sur la Théorie des formes quadratiques à coefficients entiers*. Il Minkowski dopo il prescritto periodo di studi, compiuto parte a Königsberg e parte a Berlino, ottenne nel 1885 la laurea dottorale in quella Università, mentre la libera docenza gli fu conferita a Bonn nel 1887. In questa Università fu nominato professore straordinario, donde passò come ordinario successivamente a Königsberg (1894), al Politecnico di Zurigo (1896) e finalmente (1902) nell'Università di Göttingen; qui morì nel fiore della produttività il 12 gennaio 1909. L'aritmetica superiore deve a lui rilevanti progressi, un'originale esposizione e un capitolo totalmente nuovo (da lui intitolato *Geometria dei numeri*) del quale intraprese un'esposizione metodica, che la morte gli vietò di portare a termine.

741 - I matematici di cui ci siamo testè occupati e i loro immediati discepoli fecero raggiungere all'aritmetica un grado di perfezione quale forse neppure Gauss, loro primo alto ispiratore, aveva sognato. Accanto ad essi vissero in Germania ed operarono altri, di non minore grandezza, che dedicarono le loro forze a fare proseguire l'analisi nelle vie aperte da Cauchy, Abel e Jacobi; di essi dobbiamo occuparci, cominciando da colui che primo ci si presenta in ordine cronologico: Carlo Weierstrass.

Egli nacque ad Ostenfeld (Vestfalia) il 31 ottobre 1815; passò all'Università di Bonn gli anni 1834-38, inscritto in quella Facoltà giuridica, per uniformarsi ai desideri paterni; cedendo poi a un proprio irresistibile impulso si trasferì a Münster per studiare privatamente sotto un distinto matematico, C. Gudermann (1798-1852), a cui ci duole di non potere dedicare più di questa fugace menzione, e con tale profitto che nel 1841 superò con plauso l'esame d'abilitazione all'insegnamento della matematica nelle scuole medie; in conseguenza ottenne subito una cattedra liceale. Le memorie da lui pubblicate nel *G. di Crelle* (fra cui ci basti ricordare quelle sopra le funzioni abeliane inserite nei TT. XLVII, 1854 e LII, 1856) gli fecero conferire la laurea « ad honorem » da parte dell'Università di Königsberg. Durante un viaggio da lui compiuto a Berlino nel 1856 ricevette l'offerta di una cattedra in quell'Istituto industriale, ed egli si affrettò ad accettarla; poco dopo l'Università di Berlino lo chiamava in qualità di professore straordinario e l'Accademia prussiana gli apriva le sue porte; nel 1864 la promozione ad ordinario gli concesse di consacrare tutte le sue forze all'insegnamento superiore. La salute cagionevole lo costrinse a interrompere più volte le proprie lezioni; tuttavia egli potè continuare a coltivare la scienza sino a tarda età, essendo morto il 19 febbraio 1897.

Il Weierstrass fu un analista puro, anzi intransigente, giacchè volle che l'analisi procedesse senza mai ricorrere a considerazioni e illustrazioni geometriche; così diede origine al movimento detto *aritmetizza-*

*zione della matematica;* avendo riconosciuto che essa non era sufficientemente solida nelle sue più profonde radici, volle renderla inattaccabile, rafforzandone le basi aritmetiche; a tale scopo escogitò una nuova teoria dei numeri irrazionali, a cui i suoi discepoli diedero larga notorietà; gli è nel corso di tali studi metodologici che egli — senza conoscere i lavori del Bolzano (n. 659) — mostrò sopra un esempio l'esistenza di funzioni continue prive di derivate. Ispirandosi poi al concetto fondamentale della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange (n. 597), definì un ramo di funzione mediante una serie di potenze convergente in un campo assegnato, insegnando poi a « prolungarla » fuori dello stesso. Se quella serie è convergente in tutto il piano si ha (per usare un termine da lui proposto) una « funzione trascendente intera », e Veierstrass, generalizzando una formola di Cauchy, ha insegnato a trovarne l'espressione in un prodotto di infiniti fattori; questo risultato di non comune importanza si designa ordinariamente col nome di « teorema di Weierstrass ». Egli ha poi scoperto — contemporaneamente al Casorati (pagina 935) — che accostandosi la variabile ad un punto di singolarità essenziale una funzione tende ad infiniti valori; ha osservato che, indicando al solito con $\Gamma(z)$ la integrale euleriana di I specie, la funzione $1/\Gamma(z)$ è una trascendente intera! ed ha costruita una nuova teoria delle funzioni ellittiche, la quale ha su quella di Jacobi il vantaggio di avere *una* invece che *tre* funzioni fondamentali. Come applicazione della teoria delle funzioni di variabile complessa ha dato una luminosa rappresentazione analitica delle superficie di area minima, dalla quale emerge che ad ognuna di quelle funzioni corrisponde una di queste superficie. Va ancora ricordato che, non appena Lindemann ebbe stabilita la trascendenza di $\pi$, egli ne congegnò una dimostrazione originale. Passando al campo strettamente algebrico, rileveremo che il Weierstrass immaginò una dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche assai notevole in quanto porge gli sviluppi in serie di tutte le radici. A lui si deve poi una soluzione definitiva del problema della riduzione a forma canonica di due forme bilineari o quadratiche con quantesivogliano variabili. Finalmente diede soddisfacente risposta a una questione posta da Gauss e da Weierstrass enunciata sotto la seguente forma: quando si considerano numeri complessi a quantesivogliano unità, è possibile definire le quattro operazioni fondamentali per modo che tutte conservino le proprietà di cui godono nell'ordinaria aritmetica?

Sopra altri risultati di minore importanza siamo costretti a sorvolare; ma è nostro dovere osservare che il Weierstrass, essendo poco propenso a porre in carta le proprie scoperte, preferì esporle nel corso delle proprie lezioni, onde molte di esse vennero in dominio del pubblico prima per bocca dei suoi discepoli e poi grazie alle redazioni che di queste furono fatte dai migliori di essi; ora, essendo state inserite nella collezione delle sue *Opere,* si sono diffuse in tutto il mondo, accrescendo la fama del sommo maestro.

742 - Immensa fu l'influenza esercitata da Weierstrass sopra lo sviluppo dell'analisi; a dimostrarlo stanno le opere dei suoi discepoli (pre-

sa questa parola nel suo più ampio significato) fra cui ricorderemo soltanto i migliori:

C. H. A. Schwarz, n. a Hermsdorf il 25 gennaio 1843, dal 1860 fu studente nell'Università di Berlino, che gli conferì nel 1864 la laurea dietro presentazione di una Dissertazione sulle sviluppabili dei primi sette ordini che fu inserita nel T. LXIII del *G. di Crelle*, e nel 1866 la libera docenza; nel 1867 fu chiamato a Halle in qualità di professore straordinario, posto che lasciò due anni dopo essendo stato assunto, in qualità di ordinario, al Politecnico di Zurigo; nel 1875 passò all'Università di Göttingen e nel 1892 a quella di Berlino; qui morì il 3 dicembre 1921. Pubblicando la raccolta di *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass* (Göttingen, 1885) egli ha fatto conoscere la nuova forma sotto cui il suo maestro aveva posta la teoria delle funzioni ellittiche. Ha poi dati notevoli contributi alla teoria delle superficie d'area minima, anche prima che Weierstrass ne avesse rivelato l'intimo legame con la teoria delle funzioni di una variabile complessa; il calcolo delle variazioni deve a lui notevoli perfezionamenti e così il « principio di Dirichlet » che egli riuscì a porre al riparo dalle critiche rivoltegli da Weierstrass. Altri suoi lavori concernono la rappresentazione conforme, la funzione ipergeometrica, le serie trigonometriche, ecc.; tutti si distinguono, non solo per novità di risultati, ma anche per perfezione logica e stilistica.

Gösta M. Mittag-Leffler nacque a Stoccolma il 16 marzo 1846; l'Università di Upsala, che lo annoverò fra i propri studenti, gli conferì nel 1872 la laurea e poi la facoltà d'insegnare; nel 1877 fu chiamato come professore ordinario a Helsingfors, donde nel 1881 passò all'Università di Stoccolma. Nel 1882 fondò gli *Acta Mathematica*, che diresse sino alla sua morte, avvenuta il 7 luglio 1927. La sua rinomanza si fonda principalmente sopra ricerche intorno alle funzioni analitiche (*Atti della R. Accademia di Stoccolma*, 1877) ispirate dalla grande memoria di *Weierstrass, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen* (*Berlin. Abhandl.*, 1876); generalizzandone i risultati, il Mittag-Leffler giunse al teorema che reca il suo nome e la cui importanza fa subito rilevata da Weierstrass, che ne diede una propria dimostrazione e l'arricchì di nuovi sviluppi (*Berlin. Monatsber.*, 1880). Sullo stesso argomento egli ha continuato a meditare durante tutta la sua vita, come emerge dal gruppo di memorie intitolate *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (Acta Mathematica TT. XXIII, XXIV, XXVI, XXIX e XLII, 1900-1920) [1]. I lunghi e cordiali rapporti che egli ebbe col Weierstrass e con altri matematici del suo tempo gli permisero di conoscere molti particolari ignorati relativi alla storia dell'analisi nel periodo di cui ci stiamo occupando, e ne fece oggetto di pubblicazioni (Id., TT. XXI, XXV, XXVII e XXXIX) che saranno sempre consultate con profitto dagli storici dell'epoca moderna. Altra benemerenza di diversa specie si acquistò il Mittag-Leffler

---

[1] Chi desidera conoscere l'elenco completo degli scritti del Mittag-Leffler lo troverà nel T. L. degli *Acta Mathematica*.

legando tutta la sostanza di cui disponeva alla creazione, nei pressi di Stoccolma, di un grande Istituto matematico, il quale, nella ricchissima biblioteca di cui è fornito, offre preziosa ospitalità agli studiosi di tutto il mondo.

Chiude degnamente questa serie una lontana discendente di Matteo Corvino, il re umanista: Sonja-Corvin-Kruxowski, n. a Mosca il 15 gennaio 1850. Essa, per poter continuare all'estero i proprii studi, fece (come usavasi allora in Russia) un matrimonio fittizio con V. Kowalevsky e dal 1868 al 1870 frequentò a Heidelberg le lezioni di L. Königsberg (1837-1921). Si trasferì poi a Berlino: essendo vietato in quell'Università alle donne di inscrivervisi, ottenne che Weierstrass le impartisse lezioni private. Frutto di tali studi fu la dissertazione *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (G. di Crelle, T. LXXX, 1875) — ove sono esposti, svolti e applicati alcuni risultati inediti di Weierstrass — che le fece conseguire dall'Università di Göttingen la laurea« in absentia ». Ritornata in patria si dedicò per qualche tempo alla famiglia ed alla letteratura; ma disastri finanziari, di cui fu conseguenza il suicidio del marito, la costinsero a provvedere al proprio sostentamento e nel 1883, grazie all'oppoggio del Mittag-Leffler, ottenne una cattedra di matematica nell'Università di Stoccolma; il suo ritorno agli studi è contrassegnato dalle memorie *Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integralen 3-ten Ranges auf elliptische Integrale* (Acta Mathematica, T. IV, 1885) e *Ueber die Brechung des Lichtes in cristallischen Mitteln* (Id., T. VI, 1885). Nel 1888 l'Accademia di Parigi le conferì il premio Bordin nel concorso sul tema: « perfezionare in qualche punto importante la teoria del movimento di un corpo rigido »; la memoria coronata fu pubblicata in riassunto nel T. XII, 1889, degli *Acta Mathem.* e « in extenso » nel T. XXXI dei *Mém. Sav. Etr.* (veggasi anche la posteriore memoria, *Acta*, T. XIV, 1890). Altri suoi lavori (¹) stanno a provare che altri ne avrebbe certamente prodotti ove la morte non la avesse colpita poco più che quarantenne (10 febbraio 1891).

743 - Quando nel 1883 il Kummer abbandonò spontaneamente l'insegnamento universitario, a succedergli fu chiamato un matematico che era stato suo scolaro nel ginnasio di Lignitz: Leopoldo Kronecker. Questi era nato in detta città il 7 dicembre 1823; dal 1841 frequentò l'Università di Berlino, che nel 1845 gli conferì la dignità dottorale dietro presentazione della dissertazione *De Unitatibus Complexis*, che lo mostrò geniale continuatore di Gauss e Kummer. Si dedicò poi al riordinamento del patrimonio di famiglia, con tanto successo da assicurarsi per tutta la vita una cospicua agiatezza. Ma che anche in quel tempo non abbia abbandonata la ricerca scientifica emerge dalla memoria *Ueber die algebraische auflösbaren Gleichungen* presentata da Kummer all'Accademia di Berlino nella seduta del 20 giugno 1853. Nel 1855 si stabilì a Berlino e nel 1861 entrò in quell'Accademia, della quale fu una delle glorie sino alla sua morte (29 dicembre 1891) e che provvide alla pubblicazione integrale delle sue *Opere*. In lui aritmetica, algebra e

(¹) Se ne trova l'elenco, insieme all'indicazione dei corsi di lezioni universitarie tenuti dall'illustre scienziata, nel T. XVI degli *Acta Mathematica*.

analisi (in particolare teoria delle funzioni ellittiche) in mirabile collaborazione condussero a risultati di somma importanza, grazie alla straordinaria abilità algoritmica di cui era dotato. Fra le scoperte da lui fatte gode di grande e ben meritata celebrità la risoluzione delle equazioni di 5° grado a cui egli giunse contemporaneamente a Hermite (C. R., T. XLVI, 1° semestre 1858). Spetta a lui (si veggano gli importanti *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen;* G. di Crelle, T. XCII, 1882) l'introduzione nella scienza dei concetti di « campo di razionalità » e « campo d'integrità », grazie a cui fu precisato ed esteso quello di « irriducibilità » di un'equazione algebrica. Diede poi importanti contributi alla teoria delle funzioni ellittiche e a vari capitoli dell'algebra (determinanti, forme bilineari e quadratiche, teorema di Sturm, ecc.); alla geometria uno solo, chè, nel 1885, durante un suo soggiorno a Roma, fece all'Accademia dei Lincei una comunicazione *Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite sezioni piane che si spezzano in due curve;* di essa però non si conosce l'argomento, che è la dimostrazione dell'essere dette superficie rigate o superficie di Steiner. Verso il tramonto della sua gloriosa esistenza il Kronecker mosse in guerra contro i numeri irrazionali ed immaginari, asserendo che l'impiego metodico delle congruenze li rendeva superflui; non ebbe però il tempo di svolgere completamente il concetto che egli espresse un giorno pittorescamente dicendo: « Il buon Dio ci diede i numeri interi positivi; tutto il resto è opera dell'uomo ».

744 - Il Kronecker visse a Berlino nell'epoca gloriosa in cui di quell'Accademia facevano parte Steiner, Kummer, Weierstrass, Helmholtz e Kirchhoff (per non parlare che dei cultori delle scienze esatte). Vi si trovava anche C. W. Borchardt (n. a Berlino il 22 febbraio 1817, m. ivi il 27 giugno 1880), distinto algebrista che, dopo la morte del Crelle, tenne con grande abilità la direzione del *Giornale* da lui fondato, fino al giorno in cui la morte lo costrinse a cederla al Kronecker.

Fra i molti eminenti matematici che furono allora istruiti in quella grande scuola va ricordato con particolare onore Giulio Weingarten (n. a Berlino il 25 marzo 1836, per quasi trent'anni professore in quel Politecnico, m. a Freiburg i. Br. il 16 giugno 1910), il quale dedicò alla geometria differenziale la maggior parte della sua geniale attività. Limitiamoci a ricordare le sue fruttifere ricerche sulle superficie caratterizzate dalla proprietà che in ogni lor punto i raggi di curvatura sono legati da una relazione, le quali, appunto in suo onore sono chiamate « superficie W »; nè possono venire dimenticati i suoi importanti contributi alla teoria della deformazione delle superficie, i quali gli fecero aggiudicare nel 1894 dall'Istituto di Francia il Gran Premio delle Scienze matematiche (la memoria premiata leggesi nel T. XX, 1896, degli *Acta Mathem.*).

745 - Mentre la scuola di Berlino splendeva della sua più vivida luce, Göttingen provvedeva alla continuazione della tradizione iniziatasi con Gauss e degnamente continuata da Dirichlet, come mostra quanto segue.

Bernardo Riemann nacque a Breselenz (regno d'Hannover) il 17 settembre 1826. Esauriti gli studi secondari a Hannover e Lüneburg, nella

primavera del 1846 s'inscrisse nell'Università di Göttingen, ove però non rimase che un anno, ma vi ritornò nel 1849 dopo due anni trascorsi a Berlino. La laurea dottorale gli fu conferita appunto a Göttingen nel novembre 1851 dietro presentazione della dissertazione intitolata *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse,* la quale non tardò ad essere riconosciuta di fondamentale importanza. Nel 1854 gli venne conferita la libera docenza in seguito a presentazione della memoria *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,* la quale non venne pubblicata che dopo la sua morte. Egual sorte toccò allo scritto (a noi già noto, n. 721) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen;* essa è lo sviluppo di quella delle tre Tesi da lui presentate per il conseguimento del « venia docendi » che (dietro suggerimento di Gauss) la Facoltà aveva scelta. Sino dal semestre invernale 1854 Riemann iniziò il proprio insegnamento libero, e già nel successivo espose oralmente il contenuto della sua *Theorie der Abel'schen Functionen* (G. di Crelle, T. LVII, 1857). Alla morte di Dirichlet fu nominato (9 novembre 1857) professore straordinario e due anni dopo (30 luglio 1859) fu promosso ordinario. Nel 1861 inviò a Parigi una memoria scritta in latino per rispondere ad una questione di termodinamica proposta dall'Istituto di Francia; ma la scarsità di sviluppi dati ai principî da lui posti gli vietò di conseguire la vittoria. La sua salute, sempre delicata, andò col tempo continuamente declinando e lo costrinse a chiedere frequenti permessi e intraprendere viaggi verso climi temperati; si trattenne di preferenza a Pisa, attratto dalla presenza ivi del Betti, che egli aveva conosciuto personalmente quando il distinto matematico fu a Göttingen insieme a Brioschi e Casorati; anzi nel 1863 da quell'Università gli fu offerta la cattedra rimasta vacante per la morte del Mossotti (v. p. 935); egli non l'accettò; tuttavia fu in Italia (a Selasca sul Lago Maggiore) che egli si spense (20 luglio 1866), durante il terzo dei viaggi da lui compiuti al di qua delle Alpi.

746 - Le fisiche sofferenze non spensero in Riemann l'ardore per gli studi. Ne sono prove le importanti memorie sulla serie ipergeometrica (*Götting Abhandl.,* 1857), sulla distribuzione dei numeri primi (*Berlin. Monatsber.,* 1859), sulle funzioni $\Theta$ (*G. di Crelle,* T. LXV, 1865), sulle funzioni molteplicemente periodiche (Id., T. LXXI, 1870) e quelle sulla superficie d'area minima (postuma), per non parlare dei lavori di fisica e di filosofia; esse però gli vietarono di dare alle stampe i risultati di studi importanti sopra le equazioni differenziali lineari che furono il soggetto di lezioni universitarie; queste videro la luce recentemente.

Riemann è, con Cauchy, uno dei creatori della teoria delle funzioni di una variabile complessa; egli dopo avere dimostrato che una tale funzione stabilisce una corrispondenza conforme fra i piani che rappresentano al solito modo la variabile e la funzione considerate, dimostrò che esiste sempre una funzione capace di determinare una rappresentazione conforme di una porzione connessa del primo piano sopra un'analoga porzione del secondo. A lui appartiene totalmente e senza contrasto il concetto di quelle superficie a più strati che portano il suo nome; con-

temporaneamente a Weierstrass dimostrò che le funzioni di variabile complesse abilitano a costruire una superficie minima limitata da un contorno assegnato. I metodi generali che egli ha ideati furono da lui stesso applicati a tre ordini di funzioni, vale a dire: funzioni algebriche (cioè definite come radici di equazioni algebriche), funzioni abeliane (riguardo a cui risolse il problema d'inversione ricorrendo alle funzioni $\Theta$ a più variabili) e alla funzione ipergeometrica. Per studiare la distribuzione dei numeri primi egli ha introdotta la considerazione di un'importante funzione asintotica, enunciandone alcune proprietà che non furono peranco dimostrate completamente, malgrado i numerosi sforzi compiuti da eminenti matematici posteriori. In molte occasioni egli ricorse a quello da lui chiamato « principio di Dirichlet » (esistenza di una funzione reale capace di rendere minimo un certo integrale) di cui facemmo cenno altrove (v. n. 742). Già accennammo al significato ed all'importanza del suo lavoro sopra i fondamenti della geometria, come già tenemmo parola (n. 714) dell'influenza da lui esercitata sullo sviluppo della geometria algebrica delle curve e delle superficie; qui aggiungiamo che nei suoi studi relativi alle serie trigonometriche si scoprirono chiari accenni all'esistenza di funzioni continue non differenziabili. Confidiamo che da tutto ciò il lettore trarrà elementi per concludere che con pieno fondamento l'Hermite potè proclamare riguardo a Riemann che « la sua opera è la più bella e grande dell'Analisi nell'epoca moderna: essa fu consacrata da un'ammirazione unanime e lascierà nella scienza una traccia incancellabile ».

Ad agevolare l'intelligenza e la diffusione delle nuove idee che Riemann pose a base della teoria delle funzioni di una variabile affatto libera, contribuì in modo degno del nome glorioso che portava Carlo Neumann (n. a Königsberg il 7 maggio 1832, professore successivamente a Halle, Basilea, Tübingen e Lipsia, m. in quest'ultima città il 27 marzo 1925) con le sue *Vorlesungen über Riemann'sche Theorie der Abel'schen Integrale* (Leipzig, 1865; II ed., ivi, 1884), scritta con la « chiarezza neumanniana » che era proverbiale nell'Università di Lipsia; è dover nostro aggiungere che con numerosi ed importanti lavori originali lo stesso matematico fece in seguito compiere notevoli progressi all'analisi ed alle sue applicazioni alla fisica.

Prima di lasciare Riemann rileveremo che vi fu chi seppe completare le indagini da lui schizzate sopra la teoria delle equazioni differenziali lineari: è Lazzaro Fuchs (n. a Moschin il 5 maggio 1833, professore successivamente a Greifswald, Heidelberg e Berlino, m. il 26 aprile 1902), i cui lavori sul detto argomento sono di tale importanza che fu detto avere egli così aggiunta una nuova provincia al regno matematico; ricordiamo anche che il suo nome fu dato dal Poincaré a una classe importante di funzioni di variabile complessa.

747 - L'ultimo matematico di cui faremo menzione in questa sezione della nostra esposizione appartenne ad una famiglia danese abitante a Pietroburgo: Giorgio Cantor, n. in detta città il 19 febbraio-3 marzo 1845. Essendosi poi i suoi genitori trasferiti a Francoforte s/M., egli compì i suoi studi secondari in Germania; ma poichè in origine inten-

deva divenire ingegnere, nel 1862 s'inscrisse al Politecnico di Zurigo. Mortogli il padre, lasciò la Svizzera e continuò i proprî studi — che, nel frattempo, si erano orientati verso le matematiche pure — a Berlino (1863) e Göttingen (1866). La laurea gli fu conferita a Berlino il 14 dicembre 1867 e la libera docenza a Halle due anni più tardi; i lavori da lui presentati in queste occasioni appartengono alla teoria dei numeri e manifestano l'influenza esercitata su di lui da Kummer e Kronecker. Prese poi ad occuparsi delle serie trigonometriche e nel 1870 pubblicò nel *G. di Crelle* (T. LXXII) due importanti memorie sull'argomento, nella seconda delle quali si trova stabilita l'impossibilità di due serie di detta specie che rappresentino la stessa funzione di variabile reale. Nel 1872 fu chiamato all'Università di Halle in qualità di professore straordinario, dietro proposta di un matematico (n. 661) per un classico *Handbuch der Kugelfunctionen* (Berlin, 1861; II ed., id., 1881): parliamo di E. Heine (n. a Berlino il 15 marzo 1821, dal 1856 prof. a Halle, m. ivi il 24 ottobre 1881) e per l'importante memoria *Die Elemente der Functionenlehre* (G. di Crelle, T. LXXIV, 1872), nella quale va cercata la prima esposizione della teoria dei numeri irrazionali che porta a ragione appunto il nome del Cantor. Dalle sue meditazioni, che direbbersi di filosofia della matematica, questi fu condotto a quei concetti totalmente originali che gli assicurano l'immortalità [1]. Spetta a lui l'introduzione nella scienza del concetto di « potenza di un insieme » che prende il posto di quello di « numero » quando si passa a totalità infinite e la scoperta dell'insospettata possibilità di riferire biunivocamente (ma rinunciando alla continuità) due insiemi aventi un numero differente di dimensioni. Ci è impossibile enumerare completamente tutti i concetti ed i risultati con cui egli costruì la « teoria degli insiemi », la quale non tardò a divenire parte integrante della matematica moderna; limitiamoci a citare l'asserzione (sinora non completamente dimostrata) che tutti gli insiemi costituiti da punti di una retta sono numerabili oppure hanno la potenza del continuo. Approfondendo maggiormente siffatte considerazioni egli sostenne l'esistenza dei numeri attualmente (non virtualmente) infiniti e stabilì in conseguenza la « teoria dei numeri transfiniti », nuovi enti aritmetici di cui egli assegnò vari metodi di generazione. La novità di queste vedute dà ragione dell'opposizione che incontrarono da parte di chi paventò che esse rappresentassero un ritorno a Fontenelle (v. n. 531); mentre uno dei suoi antichi maestri — il Weierstrass — ne misurò subito il valore, un altro — il Kronecker — si schierò contro di esse; appunto a tale irriducibile opposizione si deve se il nostro matematico (il quale nel 1879 aveva conseguito a Halle l'ordinariato) non riuscì mai a ottenere una cattedra in una grande Università. Malgrado ciò il Cantor non si arrestò nella propria via, in omaggio alla sua massima « l'essenza della matematica sta nella sua libertà »; tuttavia il « Geschrei der Böoter » non fu certamente estraneo ai gravi di-

[1] I principali suoi lavori si leggono nei Volumi XV-XIX dei *Mathematische Annalen*; alcuni, tradotti in francese, si ritrovano nel T. II degli *Acta Matematica*. Per l'elenco completo delle sue pubblicazioni rinviamo il lettore al T. XXXIX del *Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver.* (1930).

sturbi nervosi che lo colpirono e che portarono nel 1905 alla sua dispensa dall'insegnamento e poi (6 gennaio 1918) alla sua morte in una clinica psichiatrica di Halle. Ma all'originale investigatore non mancò la soddisfazione di vedere riconosciute le sue benemerenze da eminenti corporazioni scientifiche e, ciò che più monta, di scorgere le sue idee fare nel mondo una marcia gloriosa (1), a conferma delle fatidiche parole da lui scritte in una delle sue ultime pubblicazioni: « Veniet tempus, quo ista, quae nunc latet, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia ». I lavori che documentano tale trionfo non possono però venir qui segnalati, appartenendo a un'epoca posteriore a quella compresa entro i limiti dell'opera presente; un'unica eccezione faremo a favore di una opera di un matematico che già conosciamo (v. n. 422): cioè ai *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* (Padova, 1891) di G. Veronese, la quale ci conduce in Italia, ove dobbiamo rimanere.

## In Italia

748 - La regione d'Italia che diede i natali a Lagrange vide sorgere, nell'epoca in cui i suoi scritti governavano il mondo matematico, due matematici che appartengono alla piccola schiera dei nostri connazionali, i cui lavori poterono varcare i confini naturali della patria ed attrarre l'attenzione dei forestieri. Il più anziano è Giovanni Plana; n. a Voghera l'8 novembre 1781, fu alunno della Scuola Politecnica nell'epoca gloriosa in cui v'insegnarono Monge e Lagrange; dal 1811 fu professore nell'Università e direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, città in cui morì il 20 gennaio 1864. Esperto analista, perfezionò varie importanti teorie (funzioni ellittiche, probabilità, attrazione degli ellissoidi, ecc.) (2); ma deve specialmente la sua rinomanza di cui gode tuttora, ai suoi lavori astronomici, in particolare ad una grande opera sulla teoria della luna, riguardata ancora come classica.

Fra i suoi discepoli emerge Felice Chiò; n. a Crescentino il 29 aprile 1813, occupò varie cattedre nell'Università di Torino sino al giorno della sua morte, avvenuta il 4 giugno 1870. Essendosi assimilati i metodi di Cauchy, ne fece applicazioni alle serie trigonometriche ed alla serie di Lagrange; i relativi lavori non avendo ottenuta l'approvazione dell'Accademia delle Scienze di Torino, egli nel 1847, incoraggiato appunto da Cauchy, presentò una sua memoria all'Accademia di Parigi, la quale riscosse, per bocca di questo grande analista, un giudizio talmente favorevole che le sue *Recherches sur la série de Lagrange* furono accolte nella raccolta dei *Sav. Etr.* (T. XII, 1853); e con ragione, chè sono ivi rettificate e completate le asserzioni del sommo matematico torinese intorno

(1) Basti dire che le dimostrazioni da lui date del costituire i numeri algebrici un gruppo numerabile, mentre lo stesso *non* accade riguardo ai numeri trascendenti, si trovano riprodotte anche in opere scolastiche.

(2) Un'antecipazione che fu di recente notata in una sua memoria consiglierebbe una revisione di tutti i suoi lavori fatta dal punto di vista della scienza odierna.

alla convergenza della sua serie e sulle radici dell'equazione risolvenda che essa è in grado di rappresentare (¹).

Le peripezie sofferte dai lavori del Chiò diedero luogo ad una polemica (*Bul. di Bibl. e Stor.*, TT. IV-VI) ove le ragioni di questo furono validamente sostenute da un suo eminente collega, Angelo Genocchi. Questi nacque a Piacenza il 5 marzo 1817; benchè propenso agli studi scientifici, s'inscrisse nella Facoltà giuridica, l'unica esistente nel patrio Ateneo; nel 1838 conseguì ivi la laurea dottorale e due anni dopo il diploma d'avvocato; esercitò la professione con tal plauso che nel 1845 fu nominato professore di diritto romano nell'Università piacentina. Dopo la rivoluzione del 1848, insofferente del giogo straniero, esulò a Torino, ove si dedicò completamente agli studi matematici con successo così grande che, sino dal 1851, potè pubblicare nelle *Nouv. Ann. de Math.* un pregevole lavoro d'aritmetica; continuò poi gli studi con grande intensità; ne è prova il fatto che aveva dati alle stampe più di quaranta lavori quando nel 1857 gli fu conferita nell'Università di Torino la cattedra di algebra e geometria complementare; passò poi all'insegnamento d'introduzione al calcolo e poi a quello di calcolo infinitesimale, che conservò sino alla morte, avvenuta a Torino addì 7 febbraio 1889. Fra le 177 memorie (²) da lui inserite nei volumi pubblicati dalle Accademie di Bruxelles, Parigi e Torino, dalla Società dei XL e dall'Istituto Lombardo, nel *G. di Crelle,* nelle *Nouv, Ann.*, negli *Annali delle Sc. mat. e fis.* e in molti altri periodici meno noti, emergono per numero ed importanza quelle relative a questioni aritmetiche: limitiamoci a segnalare quella sopra la legge di reciprocità dei resti quadratici, nella quale sono applicate considerazioni che il Kronecker scoperse molto più tardi. All'analisi infinitesimale arrecò rilevanti miglioramenti occupandosi di funzioni speciali (ellittiche, euleriane, interpolari, ecc.), di serie di prodotti infiniti e di equazioni differenziali per qualche ragione notevoli. Importante è la scoperta da lui fatta che ogni arco di un ovale di Descartes equivale alla somma di tre archi di ellisse. La sua vasta coltura ed il suo acuto senso critico sono visibili in molti suoi lavori nei quali è corretto qualche errore, chiarito qualche punto di storia e risolta qualche oscura questione di priorità; a conforto di questo giudizio citiamo le sue memorie sui principî della geometria (*Mem. Accad. di Torino,* II Ser., T. XXIX, 1887; *Mem. Sec. XL,* Ser. III, 1869). La produzione del Genocchi, trovandosi disseminata in un grande numero di periodici italiani e stranieri, è conosciuta molto meno di quanto meriterebbe; se, come auguriamo, sorgerà il giorno in cui la si vedrà riunita in un tutto, si potrà meglio valutarne l'importanza e il carattere, ed è probabile che si dovrà rimpiangere siano rimasti per lungo tempo ignorati epperò sterili molti germi di notevole valore.

L'inizio della carriera matematica del Genocchi coincide con la fon-

---

(¹) La stessa questione fu poi (1862) trattata da E. Rouché (1835-1882) in una memoria inserita nel XXXIX Cah. del *Journ.* de *l'Éc. Pol.* e riassunta dal Serret nel suo *Cours d'Algèbre sup.* (V ed., T. I, 1877, p. 467), ove duole di non vedere ricordato il lavoro del nostro egregio connazionale.

(²) L'elenco, redatto da G. Peano, trovasi nell'*Annuario* dell'Università di Torino, anno 1889-90.

dazione degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, pubblicazione progettata sino dal 1828 da G. Viessieux e caldamente appoggiata da Giuseppe Mazzini, che vi scorgeva una significante affermazione d'italianità. L'averla attuata e diretta dal 1850 al 1857 è merito di Barnaba Tortolini, n. a Roma il 19 novembre 1808, discepolo e poi professore dell'Università della Sapienza, m. nella sua città natale il 24 agosto 1874. I suoi lavori di applicazione del calcolo infinitesimale a varie classi di curve e superficie lo mostrano profondo conoscitore degli alti calcoli e provetto nel maneggio di ogni sorta di espedienti algebrici; che tale sia stato giudicato dai contemporanei risulta dal fatto che il Crelle ne accolse parecchi scritti nel suo *Giornale*. I rapidi progressi compiuti poi dall'analisi hanno fatto dimenticare i lavori del dotto prelato romano: ma chi aspira oggi a famigliarizzarsi con l'algoritmo infinitesimale troverà nei suoi scritti un'ottima guida.

749 - I matematici italiani della prima metà del secolo XIX, mentre con i loro scritti mostrarono piena conoscenza tanto della letteratura matematica del secolo precedente, quanto delle opere francesi del periodo napoleonico, sembrano essere tenuti lontani da quanto la Germania veniva producendo a partire da Gauss. È merito di Francesco Brioschi l'avere contribuito, con la parola e con gli scritti, a togliere l'Italia da questo stato d'isolamento ed a farla entrare nel concerto delle nazioni cultrici delle scienze esatte, vuoi collaborando a periodici che uscivano. non soltanto in Francia, ma anche in Germania ed in Inghilterra, vuoi stabilendo relazioni personali con matematici ultramontani (si ricordi la visita in Germania da lui compiuta nel 1858 con Betti e Casorati, quasi a restituzione di quella fatta nel 1843 da un gruppo di matematici tedeschi capitanati da Jacobi). Egli nacque a Milano il 22 dicembre 1824, fu discepolo del Bordoni, e si laureò in ingegneria a Pavia nel 1845. Durante le Cinque Giornate fu arrestato come supposto detentore di cartelle del Prestito mazziniano e dovette la propria salvezza alla fuga dell'esercito austriaco. Insegnò nell'Università di Pavia, prima (1850) come supplente, poi (1853) come professore ordinario; in seguito vi occupò (1859-1861) la cattedra di analisi superiore. Eletto deputato nel 1861, fu segretario generale del Ministero della P. I. quando ne era titolare il Matteucci. Nel 1863 fondò a Milano l'Istituto tecnico superiore, due anni dopo fu nominato senatore e, presa Roma, fu triumviro con Cadorna e Sella. È estraneo al nostro còmpito l'enumerare i numerosi uffici politici e finanziari che gli furono affidati; notiamo soltanto che è suo merito di avere — col Betti — imposto gli *Elementi di Euclide* come libro di testo nelle scuole italiane e così elevato il livello dell'insegnamento geometrico. Morì a Milano il 13 dicembre 1897.

Al Brioschi devesi (1854) la prima esposizione a carattere scolastico della teoria dei determinanti, e le traduzioni che ne furono fatte in tedesco ed in francese provano che essa corrispondeva ad un bisogno generalmente sentito e che seppe soddisfarlo. Molte sue memorie mostrano che egli, con Cayley, Sylvester e Hermite, contribuì alla costituzione della teoria delle forme binarie algebriche, teoria di cui scrisse anche una bella monografia. La teoria delle funzioni ellittiche ed iperellittiche lo

occupò durante tutta la sua vita; appunto la conoscenza profonda delle prime lo condusse, contemporaneamente a Hermite e Kronecker, alle formole di risoluzione delle equazioni di 5° grado, dandone anzi la dimostrazione che il Kronecker aveva taciuta. Più tardi (1888), servendosi di funzioni iperellittiche, giunse alle analoghe formole concernenti le equazioni di 6° grado, grande e bella scoperta che coronò degnamente la sua carriera di analista [1]. Sopra le equazioni a derivate parziali, sul calcolo delle variazioni, sull'interpolazione, sopra certe funzioni analoghe a quelle di Sturm, ecc., scrisse un grande numero di lavori che gli fecero conferire il grado di sommo analista e che destano ancora ammirazione leggendoli riuniti nella collezione delle sue *Opere*. Esse documentano il suo fattivo interesse anche per questioni geometriche, specialmente (ma non esclusivamente) di carattere infinitesimale (ricordiamo le sue ricerche sopra le geodetiche, le linee di curvatura e le superficie a linee di curvatura piane o sferiche). Chiuderemo questi cenni ricordando i cospicui contributi da lui dati alla meccanica razionale ed all'idraulica e citando l'opera utilissima da lui spiegata come direttore degli *Annali di Matematica*, rivista che è continuazione di quella fondata dal Tortolini, ma che il Brioschi fece assurgere al livello di una grande pubblicazione a carattere internazionale.

750 - Quale esimio cultore della geometria differenziale il Brioschi ci appare come appartenente ad una scuola pavese, di cui come capo può riguardarsi A. M. Bordoni [2] e di cui vanno ora ricordati gli altri componenti. Il primo ordine di tempo è un altro maestro del Brioschi, Angelo Mainardi (n. ad Abbiategrasso nel 1800, professore all'Università di Pavia dal 1840 al 1863, m. a Lecco il 9 marzo 1879) il cui nome è collegato ad alcune formole fondamentali nella teoria delle superficie. Alle quali però si suole anche unire il nome di Delfino Codazzi (n. a Lodi il 7 marzo 1824, dal 1865 professore nell'Università di Pavia, morto in questa città il 21 luglio 1873); assiduo cultore di quel ramo di scienza, presentò all'Istituto di Francia una memoria sopra l'*Application des Surfaces les unes sur les autres* e, non solo conseguì nel 1861 una menzione onorevole in un concorso bandito sull'argomento da quella grande corporazione, ma, ciò che è più importante, la pubblicazione (postuma) del suo scritto fra le memorie dei *Sav. Etr.* (T. XXVIII).

Le investigazioni sulle proprietà infinitesimali delle figure trovarono circa nello stesso tempo un valente cultore in Eugenio Beltrami. Nato a Cremona il 16 novembre 1836, fu inscritto nell'Università di Pavia nei tre anni scolastici 1853-56, ma nel febbraio 1856 fu espulso, per ragioni disciplinari, dal Collegio Ghislieri ove era stato ammesso; fu allora obbligato ad abbandonare gli studi ed accettare un modesto impiego nell'amministrazione ferroviaria (ufficio di Verona); costrettovi

[1] Non ne diminuisce il valore l'esservi giunto contemporaneamente un matematico tedesco, il Maschke.

[2] Questo matematico (n. a Mezzana Corti il 19 luglio 1788, m. a Pavia il 26 marzo 1860) scrisse un grande numero di pregevoli lavori di matematica pura ed applicata, alcuni dei quali sono analizzati nella mia *Storia della geometria descrittiva* (Milano, 1921, p. 193-200); ma la sua memoria è ancor meglio assicurata dalla sua efficace e multiforme azione didattica.

dalle proprie condizioni finanziarie, vi rimase per sei anni. Durante questo triste periodo non abbandonò del tutto gli studi, e due memorie pubblicate negli *Annali di Matematica* diedero forza ai suoi amici per fargli conferire un posto nel pubblico insegnamento; infatti, grazie all'appoggio del Brioschi, che lo aveva avuto fra i propri scolari, in data 18 novembre 1862 fu nominato professore straordinario di algebra e geometria analitica nell'Università di Bologna. Poco dopo passò a Pisa ordinario di geodesia, indi si restituì a Bologna per professare la meccanica razionale; accettò poi d'insegnare la stessa materia a Roma; ma poco dopo passò a Pavia per la meccanica superiore e la fisica matematica e finalmente a Roma, con gli stessi insegnamenti; ivi morì, carico di ben meritati onori, il 18 febbraio 1900.

I lavori che diedero al Beltrami fama di valente matematico rivelano in lui una profonda conoscenza delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Il più esteso è quello intitolato *Ricerche di analisi applicata alla geometria*. Contemporanea è la soluzione da lui data del problema di riportare i punti di una superficie su di un piano in modo che alle geodetiche corrispondano rette. Tale condizione potendosi soddisfare soltanto se la superficie considerata è a curvatura costante, il Beltrami fu condotto alla sua celebre interpretazione della geometria non-euclidea sulla pseudo-sfera (v. n. 721), la quale, benchè riposi sull'ipotesi che questa goda di una regolarità illimitata, che in fatto non possiede in tutta la sua estensione, contribuì efficacemente al trionfo delle idee di G. Bolyai e Lobacevskij. Estendendo le proprie considerazioni, il Beltrami diede importanti contributi alla geometria iperspaziale con le memorie *Teoria fondamentale degli spazi a curvatura costante* e *Teorica dei parametri differenziali*. Altri suoi lavori di pertinenza dell'ordinaria geometria infinitesimale concernono la flessione delle superficie rigate, le rigate che sono superficie *W* (v. n. 744) e le superficie minime; il lettore li troverà nella raccolta delle sue *Opere* pubblicata dopo la sua morte.

Da questo ordine d'idee il Beltrami fu tolto in conseguenza dei suoi svariati insegnamenti e diretto verso le applicazioni della matematica alla interpretazione dei fenomeni naturali; e ai principali capitoli della fisica matematica egli ha dato contributi d'indiscusso valore (cinematica dei fluidi, idrodinamica, teoria del potenziale, equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili), nei quali l'importanza dei risultati è fatta meglio valere dall'impeccabile perfezione di forma. Nell'impossibilità di entrare in particolari minuti, limitiamoci a rilevare come lo studio delle equazioni generali dell'elasticità lo guidarono all'inaspettata conseguenza che le formole di Lamé sono vincolate all'ipotesi che sussista il postulato di Euclide. Notiamo da ultimo che il Beltrami si è anche occupato di geometria algebrica, e della sua perizia in tal campo è, a tacer d'altro, documento una sua breve ma importante nota sulla equazione pentaedrale delle superficie di III ordine, con cui chiudiamo questi cenni.

Alla geometria differenziale volse la mente (quantunque non ne abbia fatto sua precipua occupazione) anche Felice Casorati (n. a Pavia il 17 dicembre 1835, dal 1863 insegnante di calcolo infinitesimale nel patrio

Ateneo, m. a Casteggio l'11 settembre 1890). Infatti la sua memoria *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie* (Ann. di Mat., III, 1869) mostra che egli fu uno dei primi a concepire quella branca di scienza come equivalente allo studio delle forme differenziali quadratiche; meno unanime fu il consenso da lui riscosso proponendo una nuova definizione della teoria della curvatura delle superficie (*Acta Mathem.,* T. XIV, 1889). Non sono questi però i lavori su cui riposa il buon nome del Casorati: merito suo principale è di avere diffuse in Italia le idee di Cauchy e Riemann con la sua *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (Pavia, 1868; T. I, unico pubblicato), ove dette idee sono esposte sotto forma personale, con commenti atti a farne meglio conoscere il significato e il valore. Continuando i suoi studi di analisi, Il Casorati perfezionò in alcuni punti varie fondamentali teorie analitiche, quali il calcolo delle differenze finite (*Ann. di Mat.,* II Ser., T. X), la teoria degli integrali abeliani (Id., T. III), le equazioni algebrico-differenziali (Id., T. VII e IX) e il concetto d'integrazione nel campo complesso (Id., TT. XV e XVI). Contemporaneamente al Mittag-Leffler diede notevoli estensioni al teorema di Weierstrass (Id., T. X). Avvertì, indipendentemente da questo, la proprietà caratteristica dei punti di singolarità essenziale di una funzione analitica (p. 923) e, contrariamente a quanto aveva opinato Jacobi, sostenne l'opportunità di ammettere nell'analisi anche le funzioni con infiniti valori. Distinto insegnante, lasciò grato ricordo in chi ne ascoltò le dotte ed accurate lezioni.

751 - Dal Piemonte ci richiama in Lombardia un matematico piemontese di origine ma lombardo per istruzione scientifica: O. F. Mossotti, n. a Novara il 18 aprile 1791; esauriti gli studi secondari si trasferì a Pavia, nella cui Università ottenne la laurea in scienze matematiche e fisiche. Grazie alla stima che gli tributavano i suoi maestri ottenne subito un'occupazione nell'Osservatorio astronomico di Milano ove rimase dal 1813 al 1825. Della fiducia dimostratagli egli si mostrò ben degno con parecchie pregevoli pubblicazioni. Per motivi politici dovette abbandonare l'Italia e trovò subito impieghi soddisfacenti prima in Inghilterra e poi nella Repubblica Argentina. Nel 1855 l'Università di Bologna lo designò per una cattedra di matematica, ma non potè occuparla per il veto del Governo Pontificio che temette destare l'ira della vicina Austria. Egli allora accettò d'insegnare a Corfù ove era stata fondata l'Università delle Isole Jonie; ma vi rimase per breve tempo, l'Università di Pisa avendolo chiamato a occupare dall'anno 1841-42 la cattedra di meccanica razionale e fisica matematica, e la conservò sino al giorno della sua morte (20 marzo 1863).

Nella storia del risorgimento italiano il Mossotti scrisse una fulgida pagina di eroismo avendo capitanato il battaglione degli studenti nella battaglia che ebbe luogo il 28 maggio 1849 a Curtatone e Montanara. La produzione scientifica del Mossotti comprende in gran parte lavori di geodesia, astronomia e meccanica; da citare quello in cui è dimostrata una formola sull'espressione approssimata dell'area di un triangolo sferico (Legendre). È suo merito di avere, con la parola e l'esempio,

dimostrata l'utilità pratica delle funzioni iperboliche e di averne patrocinata la compilazione di tavole relative (sono quelle di Angelo Forti ben note a tutti gli studiosi). La pubblicazione di recente iniziata della collezione delle sue opere complete varrà a dimostrare tutto il valore della sua produzione scientifica.

Fra i discepoli del Mossotti emerge Enrico Betti che militò nel battaglione da lui guidato. Nato a Pistoia il 21 ottobre 1823, iniziò la propria carriera didattica in quel Liceo, ma li compì nell'Università di Pisa, dove insegnò sino alla fine della sua vita (11 agosto 1892).

Fu dei primi a misurare il valore delle idee di Galois e adoperarsi a dimostrarne i risultati (*Ann. delle Sc. mat. e fis.*, T. IV). Alla teoria delle funzioni ellittiche dedicò un'importante monografia (*Ann. di Mat.* TT. III e VI), ove si servì del concetto di « fattori primari » molto prima che il Weierstrass ne ponesse in luce tutto il campo d'applicazione. Di fondamentale importanza sono le sue ricerche intorno alla « analysis situs » negli iperspazi (*Ann. di Mat.*, II Ser., T. IV), dalle quali trasse ispirazione il Poincaré (v. p. 917) nei suoi studi sull'argomento, e appunto il celebre matematico francese introdusse la denominazione di « numeri di Betti », ora generalmente usata, per quelli che caratterizzano la connessione di una varietà. Il Riemann durante il suo soggiorno a Pisa (p. 927) orientò il Betti verso gli studi di fisica matematica così ebbero origine la *Teoria delle Forze Newtoniane* (Pisa, 1879) e la memoria *Sopra le equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici* (Ann. di Mat., II Ser., T. VI); di quella l'importanza è documentata dalla traduzione tedesca di cui fu onorata (1886); riguardo a questa notiamo che vi si trova un celebre « teorema di reciprocità » che porta il nome del Betti; grazie alla stessa il nostro matematico appare come capo spirituale di una brillante schiera di italiani che coltivarono con successo la teoria dell'elasticità, importante capitolo della filosofia naturale.

752 - Degno discepolo e continuatore del Betti fu Ulisse Dini. Nato a Pisa il 14 novembre 1845, conseguì a 19 anni la laurea dottorale nel patrio Ateneo; ottenuto un posto di perfezionamento all'estero, potè studiare a Parigi sotto la guida sapiente di Hermite e Bertrand. Al suo ritorno ebbe l'incarico dell'insegnamento dell'algebra superiore e della geodesia teoretica; nel 1871 surrogò il Betti in qualità di professore ordinario di fisica matematica; tre anni dopo passò alla cattedra di analisi superiore, insegnamento a cui nel 1877 aggiunse quello dell'analisi infinitesimale; entrambi conservò con plauso universale sino al giorno (28 ottobre 1918) in cui dovette soccombere ad un morbo contro cui la scienza è ancora impotente.

Dal punto di vista scientifico la vita del Dini comprende due periodi. Nel primo egli si occupò di geometria infinitesimale, studiando, oltre questioni generali della teoria delle superficie, alcune classi particolari, quali rigate, superficie W, superficie a linee di curvatura piana o sferica (*Ann. di Mat.*, T. LVII; Ser. II, TT. I, III, IV, VIII). Colpito poi dalle imperfezioni che presentava l'analisi infinitesimale, tanto negli enunciati quanto in alcune dimostrazioni, ravvisò l'urgente necessità di radicali

miglioramenti; avendo saputo che osservazioni congeneri erano state fatte da Weierstrass e da altri matematici tedeschi e non avendo potuto ottenere precise informazioni al riguardo, grazie a un'assidua meditazione, sino dal 1872, giunse a un'esposizione pienamente soddisfacente delle teorie dei limiti, delle serie e delle derivate; è quella che fu resa di pubblica ragione nei *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878); la traduzione tedesca fattane le 1892 mostra che, anche a distanza di tempo e nella patria di Weierstrass, ne fu riconosciuta la grande importanza. Più tardi sviluppò le proprie idee nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale*, le quali, dopo avere girato per l'Italia in varie edizioni litografate, furono stampate (1907-1915), così arricchendo la nostra letteratura di un completo trattato sull'importante materia. Al Dini debbonsi eziandio geniali ricerche sopra gli sviluppi in serie di funzioni speciali, come si vede dall'altra sua opera *Serie di Fourier e altre Rappresentazioni analitiche delle Funzioni di variabili reali* (Pisa, 1880), a cui servono di complemento due serie di lezioni (litografate) tenute negli anni 1911 e 1912.

Tutti questi lavori concernono le funzioni di variabili reali; varie memorie del Dini mostrano che egli volse lo sguardo anche a quelle di variabile complessa: limitiamoci a citare una memoria (*Collectanea in mem. D. Chelini*, Milano, 1881) ove è dimostrato che le formole di Weierstrass e Mittag-Leffler possono ottenersi col procedimento che dicemmo (p. 936) applicato dal Betti nella teoria delle funzioni ellittiche. Chiuderemo notando che un quadro completo dell'opera del Dini (cospicua, malgrado la sua partecipazione attivissima alla vita politica) dovrebbe contenere anche un'esposizione dei suoi contributi alla teoria delle equazioni differenziali e a derivate parziali, di cui per ragioni cronologiche non potemmo far menzione.

## P. L. Cébyceff

753 - La storia della matematica in Russia è mal nota nel resto d'Europa; si conoscono coloro che vissero ed operarono nell'orbita euleriana (v. Capitolo XXXIV), ma ci è ignoto se prima la nostra scienza vi sia stata coltivata e mal si conoscono coloro che seguirono l'esempio dell'Euler: due soli di questi riuscirono a far partecipe delle loro opere il resto del mondo; di uno parlammo nel capitolo precedente (n. 720), dell'altro, P. L. Cébyceff, passiamo ad occuparci ora.

Nato di nobile famiglia residente nel « governo » di Kaloga il 14-26 maggio 1821, manifestò sino dalla più tenera età una grande disposizione a costruire apparati meccanici. Nel 1837 si trasferì a Mosca per proseguirvi i proprii studi ed in quell'Università rimase sino al 1841. Portano la data 1843 due sue memorie, una sopra gl'integrali definiti, l'altra sopra la serie di Taylor, che Liouville e Crelle si affrettarono ad accogliere nei loro *Giornali*. Poco dopo scrisse un'esposizione della teoria delle probabilità informata al concetto che essa può trattarsi con mezzi elementari, concetto al quale si mantenne fedele nelle sue posteriori pubblicazioni sull'argomento: grazie a tale lavoro gli fu conferito il titolo di « magister ». Molti suoi scritti appartengono al calcolo integrale; il

più noto è quello (*Journ. de Math.*, T. XVIII, 1853) in cui si trova dimostrato che non esistono casi d'integrazione dei differenziali binomi all'infuori di quelli scoperti da Newton ed Euler (v. n. 560). Nel 1847 cominciò ad insegnare nell'Università di Pietroburgo e fu invitato a collaborare alla progettata edizione dei lavori postumi di Euler; grazie a tale partecipazione videro la luce le *Commentationes Arithmeticae Collectae* del grande matematico di Basilea, e il Cébyceff fu indotto ad occuparsi della teoria dei numeri, a cui non tardò a dare rilevanti contributi: limitiamoci a ricordare che egli è riuscito a dimostrare il postulato di Bertrand (v. n. 734) e a correggere una formola data da Legendre, concernente la frequenza dei numeri primi nella serie naturale. Alla stessa orientazione del pensiero del matematico russo devesi quella *Teoria delle Congruenze* che gli fece conferire la dignità dottorale e che, grazie a versioni in tedesco ed in italiano, raggiunse larga e ben meritata notorietà. Fu professore titolare nell'Università di Pietroburgo dal 1853 al 1882; dall'insegnamento si ritirò spontaneamente per dedicarsi completamente alle ricerche scientifiche, che soltanto la morte (avvenuta il 26 novembre-8 dicembre 1894) potè fargli abbandonare. In coloro che lo conobbero o l'ascoltarono lasciò così grata e deferente memoria che, sotto gli auspici dell'Accademia di Pietroburgo, delle sue opere furono fatte contemporaneamente due edizioni, una in russo e l'altra in francese.

Sia per spontaneo impulso, sia per adempiere ai doveri del proprio insegnamento, il Cébyceff cotivò con grande impegno la teoria dei meccanismi (parallelogrammo di Watt, sistemi articolati, ecc.); alcuni apparecchi furono inventati da lui stesso (fra cui una macchina per eseguire addizioni e sottrazioni); ma di altri studiò le migliori condizioni di funzionamento mediante procedimenti totalmente originali ed estremamente opportuni. Tali ricerche lo portarono ad occuparsi anche di questioni d'interpolazione e della serie di Lagrange, di più a creare un nuovo tipo di calcolo per i massimi e minimi. Lo stesso ordine d'idee lo portò a studiare (sotto il curioso nome di « coupe des vêtements ») la questione di fissare il procedimento più opportuno per costruire la carta di un paese di grande estensione, come era appunto quello dove era nato. Su altre investigazioni ed altri risultati del Cébyceff ci è forza tacere; essi confermerebbero essere egli stato il matematico che meglio di qualunque altro contribuì a piegare l'alta analisi a risolvere questioni di meccanica pratica. Una schiera di posteriori matematici russi sta a provare che la sua voce non rimase inascoltata, che anzi contribuì potentemente ai progressi della nostra scienza nella terra che gli diede i natali.

## Chiusa

Malgrado le imperfezioni e le lacune che presenta il quadro, che tentammo di delineare nel presente Capitolo ed in alcuni paragrafi del precedente, dei progressi recentemente compiuti dell'Analisi matematica, il lettore non avrà mancato di constatare come (certamente in conseguenza di un accresciuto numero di investigatori, dell'aumento delle pubblicazioni periodiche ed anche di una più intensa collaborazione internazio-

nale) i progressi da essa compiuti sono veramente straordinari. Infatti la teoria dei numeri, uscita trasfigurata dalle mani di Gauss, si svolse in direzioni inattese ed oltremodo feconde, specie per merito dell'opera assidua dei connazionali di quel grande. Dal canto suo l'algebra, dopo di avere appreso da C. Sturm a eseguire senza tentennamenti la separazione delle radici di un'equazione numerica di grado qualunque, giunse a risolvere quelle di 5° e 6° grado, si arricchì di teorie del tutto nuove (sostituzioni e forme algebriche, trasformazioni di contatto e gruppi di trasformazioni) e finalmente giunse, con l'introduzione dei numeri complessi a più unità, a prospettive del tutto nuove e estremamente promettenti. Inoltre la teoria delle funzioni di variabili reali e quella non meno ampia di quella di variabili complesse — che appunto in quest'epoca videro la luce — diedero i mezzi per investigare intere classi di importanti funzioni (funzioni sferiche, abeliane, kleiniane, fuchsiane, ecc.), e, per merito di G. Cantor, si arricchirono di concetti nuovi e fecondi. Finalmente, grazie a siffatti ordigni raffinati e potenti, la Geometria infinitesimale (per non parlare della fisica matematica e dell'astronomia) potè affrontare con successo questioni dianzi ritenute inaccessibili. Quale delle epoche precedenti può vantare benemerenze altrettanto cospicue di questo operosissimo cinquantennio?... Il Sec. XX, sino dai suoi primordi, mostrò di essere in grado di seguire gloriosamente questo esempio ammirando.

## BIBLIOGRAFIA

C. Hermite, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (Paris, 1873).

*Faculté des Sciences de Paris. Cours de* M. Hermite. *Redigé en* 1882 *par* M. Andoyer. III édition revue par M. Hermite (Paris, 1887).

*Oeuvres de* Charles Hermite *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par* E. Picard (quattro Vol., Paris, 1909-1917).

*Correspondence d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de* B. Baillaud e H. Bourget, *avec une préface de* E. Picard (due Vol., Paris, 1905).

E. Lampe, *Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren* 1875-1888 (Arch. f. Math. und Phys., III Ser., T. XXIV, 1914).

*Oeuvres de* Henri Poincaré, *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences* (T. I, Paris, 1928; T. II, Paris, 1916).

G. Lejeune Dirichlet's, *Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften* (I Bd. herausg. *von* L. Kronecker, Berlin, 1889; II Bd. herausg. von L. Fuchs, 1897).

C. Lejeune Dirichlet's. *Vorlesungen über Zahlentheorie herausgegeben und mit Zusätzen versehen von* R. Dedekind (Braunschweig, 1880; molte edizioni e traduzione italiana).

G. Lejeune Dirichlet's *Vorlesungen über die im umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kräfte herausg. durch* F. Grube (Braunschweig, 1877).

G. Eisenstein, *Mathematische Abhandlungen besonders auf dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionem. Mit einer Vorrede von Prof. Dr.* Gauss (Berlin, 1847).

F. Rudio, *Eine Autobiographie von Gotthold Eisenstein* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, VII Heft, 1895).

*Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern herausgegeben von* A. Hurwitz *und* F. Rudio (Ivi).

R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke herausgegeben von* Fricke, Emmy Nöther *und* O. Ore (tre Vol., Braunschweig, 1930-32).

H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen, I Lieferung* (Leipzig, 1896).

H. MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie* (Leipzig, 1907).

H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen. Unter Mitwirkung von* A. SPEISER *und* H. WEIL *herausgegeben von* D. HILBERT (due Vol., Leipzig, 1911).

K. WEIERSTRASS, *Mathematische Werke*, Bd. I, II, III, Abhandlungen (Berlin, 1894, 1895 e 1903). Bd. IV: *Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Transcendenten, bearbeitet von* G. HETTNER *und* J. KNOBLAUCH (Berlin, 1902). Bd. V: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen bearbeitet von* J. KNOBLAUCH (Berlin, 1915). Bd. VI: *Vorlesungen über die Anwendungen den elliptischen Functionem bearbeitet von* R. ROTHE (Berlin, 1915). Bd. VII: *Vorlesungen über die Variationsrechnung bearbeitet von R.* ROTHE (Leipzig, 1927).

*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen bearbeitet und herausgegeben von* H. A. SCHWARZ (Göttingen, 1885).

S. PINCHERLE, *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass* (Giorn. di matem., T. XVIII, 1880).

H. A. SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (due Vol., Berlin, 1890).

LEOPOLD KRONECKER'S *Werke. Heausgegeben auf Veranlassung der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (cinque Vol., Leipzig-Berlin, 1895-1930).

*Vorlesungen über Mathematik von* L. KRONECKER. I Bd. *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale herausgegeben von* E. NETTO (Leipzig, 1894). *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik bearbeitet und herausgegeben von* K. HENSEL (due parti, Leipzig, 1901 e 1903).

G. W. BORCHARDT'S, *Gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der K. Preuss. Akad. der Wissenschaften von* G. HETTNER (Berlin, 1888).

BERNARD RIEMANN'S *Gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von* R. DEDEKIND *von* H. WEBER (Leipzig, 1876; III Aufl., 1902).

*Oeuvres mathématiques de* REIMANN *traduites par* L. LAUGEL. *Avec une Préface de* M. HERMITE *et un Discours de* M. F. KLEIN (Paris, 1808).

*Elliptischen Functionen. Vorlesungen von* BERNHARD RIEMANN, *mit Zusätzen herausgegeben von* H. STAHL (Leipzig, 1899).

BERNHARD RIEMANN'S *Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von* M. NOETHER *und* W. WIRTINGER (Leipzig, 1902).

C. L. SIEGEL, *Uber Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie* (Quellen und Studien zur Gesch. der Math. und Phisyk, T. II, 1932).

L. FUCHS, *Gesammelte mathematische Werke herausgegeben von* R. FUCHS *und* L. SCHLESINGER (tre Vol., Berlin, 1904-1909).

G. CANTOR, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Translated by* E. B. JOURDAIN (Chicago-London, 1915).

G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, mit erlauternden, Anmerkungen, sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind, herausgegeben von* E. ZERMELO, *nebst einem Lebenslauf Cantor's von* A. FRAENKEL (Berlin, 1932).

A. GENOCCHI, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* (Torino, 1884. Trad. tedesca di G. BOHLMANN e A. SCHEPP, Leipzig, 1898-99).

*Opere matematiche di* FRANCESCO BRIOSCHI (cinque Vol., Milano, 1901-1909).

*Opere matematiche di* ENRICO BETTI (due Vol., Milano, 1903 e 1914).

*Opere matematiche di* EUGENIO BELTRAMI (quattro Vol., Milano, 1902-1920).

*Oeuvres de* P. L. TCHEBYCHEF *publiées par les soins de* M. A. MARKOFF *et* N. SONIN (due Vol., St. Petersbourg, 1899-1907).

## CAPITOLO XLV

# GLI STORICI (¹)

754 - Se l'ammirazione pei sommi matematici del passato indusse B. Baldi (v. p. 555) a narrarne la vita, ben si comprende come un analogo sentimento dovette sorgere contemplando lo spettacolo offerto dalla fulgida letteratura relativa nelle sue posteriori fasi di sviluppo. E infatti allo scrivere una *Storia della Geometria* volse la mente un matematico che noi già conosciamo (v. n. 543), R. de Montmort, il quale, poco prima della sua morte, scriveva al primo Nicolò Bernoulli una lettera in cui si leggono le seguenti parole: « Il seroit à souhaiter que quelq'un voulut prendre la peine de nous apprendre comment et en quel ordre les decouvertes en mathématiques se sont succédées les unes aux autres, et à qui nous en avons l'obligation. On a fait l'Histoire de la Peinture, de la Musique, de la Medecine, etc. Une bonne Histoire des Mathématiques, en particulier de la Géométrie, seroit un ouvrage beaucoup plus curieux et plus utile. Quel plaisir n'auroit-on pas de voir la liaison, la connexion des méthodes, l'enchaînement des différentes théories, à commencer depuis les premiers temps jusqu'au nôtre ou cette science se trouve portée à un si haut degré de perfection. Il me semble qu'un tel Ouvrage bien fait pourroit être en quelque sorte regardé comme l'Histoire de l'esprit humain; puisque c'est dans cette science plus qu'en toute autre chose, que l'homme fait connaître l'excellence de ce don d'intelligence que Dieu lui a accordé pour l'élever au dessus de toutes les autres créatures ».

Certamente senza conoscere questa esortazione e non attenendosi a questo magnifico programma G. C. Heilbronner (n. a Ulm nel 1705, m. a Lipsia nel 1747) compose il volume che reca il lungo titolo seguente: *Historia Matheseos universae a mundo condito ad saeculum P. C. XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum operum mathematicorum atque historia aritmetices ad nostra tempora* (Lipsiae, 1742).

Dei cinque Libri di cui consta il I contiene brevi cenni intorno a matematici vissuti nel lungo periodo che va da Adamo a Bradwardin, nonchè qualche informazione intorno alla matematica dei Cinesi. Il II, a due secoli di distanza, conserva qualche valore perchè porge informazioni abbastanza ampie intorno a manoscritti matematici esistenti nelle principali biblioteche europee. Nel III si trova un elenco di circa cento

---

(¹) Il lettore desideroso di più minute informazioni sopra questo tema è rinviato alla II ed. della *Guida* dell'autore *allo studio della storia delle matematiche* (Milano, 1946).

opere matematiche importanti; nel IV si leggono notizie particolareggiate sull'aritmetica pratica in uso fra vari popoli europei; il V è estraneo alla storia, essendo una breve raccolta di ricreazioni matematiche.

755 - Sedici anni più tardi veniva pubblicata a Parigi, in due volumi l'*Histoire des Matématiques* di J. E. Montucla (n. a Lione il 5 settembre 1725, m. a Versailles, membro dell'Istituto Nazionale, il 18 dicembre 1799). A siffatti lavori egli non era del tutto nuovo, chè nel 1754 aveva dato un primo saggio delle sue attitudini alla storia della matematica con la pregevole *Histoires des recherches sur la quadrature du cercle* (a noi sta sott'occhio una II edizione curata dal Lacroix). L'« opus magnum » del Montucla riscosse un così lusinghiero successo, che, una nuova edizione essendosi manifestata necessaria, l'autore si accinse a rifondere il suo lavoro, arrecandovi notevoli aggiunte; ma non ebbe la soddisfazione di vedere pubblicati due dei quattro volumi in-4° da lui progettati; gli altri due apparvero grazie alle cure dell'astronomo G. Lalande (1737-1807). L'*Histoire* del Montucla è realmente la prima opera degna di tal nome; l'ampiezza del disegno è tale da « far tremare le vene e i polsi » ai più animosi, giacchè egli si propose di far conoscere le vicende di tutti i rami della matematica pura ed applicata. L'opera è divisa in cinque Parti, determinate in base a considerazioni cronologiche, mentre ognuna è ripartita in Libri, in ciascuno dei quali si trova delineata la storia di una branca speciale. La I Parte tratta della matematica europea durante il periodo che va dalle origini alla caduta dell'indipendenza greca; la II è dedicata all'Oriente; nella III viene narrata la storia delle scienze presso i Latini ed altri popoli occidentali sino a tutto il secolo XVII, al quale è poi dedicata la IV Parte; l'ultima (che riempie due interi volumi) contempla la maggior parte del secolo XVIII.

Circa contemporaneamente alla II ed. di quest'opera, G. A. Kästner (v. n. 644) pubblicava la sua *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des XVIII Jahrhunderts* (4 vol., Göttingen, 1796-1800).

Rimasta in tronco per la morte dell'autore, essa manca dell'indispensabile indice degli autori citati. Il programma di essa non differisce da quello del Montucla comprendendo essa tutti i rami delle matematiche pure ed applicate. Merito indiscutibile del Kästner è di essersi fatto campione del rigore nelle ricerche storiche, esigendo che uno storico avesse conoscenza diretta delle opere trattate od almeno dichiarasse le fonti a cui attingeva le proprie informazioni. Dotto bibliografo egli dà anche notizie attendibili intorno alle principali opere matematiche.

Ricordiamo di passaggio un'altra mediocre pubblicazione di un matematico a noi già noto, C. Bossut (vedi n. 605) cioè *l'Essai sur l'histoire générale des mathématiques* in due volumi (I ed., Paris, 1802; II, ivi, 1810); ad essa arrise una fortuna ben maggiore di quanto avrebbe meritato, chè venne tradotta in italiano (Milano, 1802), in inglese (London, 1803) e in tedesco (Hamburg, 1804) per opera rispettivamente di Gregorio Fontana, scienziato che già conosciamo (n. 613), di un insegnante alla celebre scuola militare di Woolwich, J. Bonnycastle (m. il 31 ottobre 1840) e di un professore dell'Università di Kiel, N. T. Rei-

mer (n. a Redensburg il 23 febbraio 1772, m. a Kiel il 23 gennaio 1832), il quale si era dianzi affermato come buon cultore della storia delle matematiche con una pregevole *Historia problematis de cubi duplicatione* (Göttingen, 1798); tutte queste versioni si raccomandano per notevoli correzioni all'originale e pregevoli aggiunte.

Va qui osservato che, grazie alle dotte e coscienziose notizie storiche sparse a piene mani nelle sue memorie e agli acuti e sereni giudizi sopra i lavori dei predecessori, Lagrange merita un posto nel gruppo di studiosi di cui stiamo ragionando, tanto più che egli in parecchie occasioni segnalò lavori ed autori ingiustamente dimenticati; inoltre, come già sappiamo (p. 593), studioso di Diofanto, non solo egli ne consigliò un'edizione francese commentata, ma dai suoi manoscritti conservati nella Biblioteca dell'Istituto di Francia emerge che egli stesso ne approntò preziosi elementi.

756 - Nell'elenco, non molto numeroso, degli storici della matematica occupa un posto eminente Pietro Cossali. Egli nacque a Verona il 29 giugno 1748; in data 1° luglio 1786 fu nominato professore di fisica nell'Università di Parma; passò poi (4 novembre 1790) alla cattedra di astronomia; si dimise l'8 novembre 1804 per trasferirsi all'Università di Padova, nella qualità di professore di matematica, e tale rimase sino alla morte (20 dicembre 1815). Sorvolando sopra alcuni suoi scritti algebrici, dobbiamo segnalare la poderosa opera in due vol. in-4° dal titolo *Storia critica dell'origine, trasporto in Italia e primi progressi in essa dell'algebra* (Parma, 1797) (1). Come è dichiarato nel titolo è ivi criticamente esposto (in base a uno studio diretto delle fonti) il contenuto delle opere di Fibonacci, Pacioli, Tartaglia, Cardano e Bombelli, i meriti delle quali non erano stati riconosciuti da tutti e in particolare dal Montucla; nè vi mancano acute osservazioni sopra Diofanto e alcune opere arabe. L'unica cosa che si può lamentare è che il Cossali abbia esposto il contenuto degli scritti dei matematici appartenenti all'epoca algebra retorica o sincopata con i caratteri in uso nell'algebra simbolica; nella matematica sostanza e forma sono connesse in modo indissolubile ed è di sommo interesse il conoscerle entrambe, mentre d'altra parte, non sempre riesce facile risalire — come a volte si desidererebbe — dalle formole del Cossali a quanto scrissero quei nostri progenitori scientifici.

Questo sentimento di mettere in valore le opere dei connazionali che animava il Cossali è visibile anche in Pietro Franchini. Egli nacque nei pressi di Lucca il 24 aprile 1768, insegnò lungamente nel Liceo di questa città, e vi morì il 26 luglio 1837. Più che i suoi numerosi manuali scolastici, più che alcune memorie non prive di valore, lo raccomanda alla attenzione nostra l'opera intitolata *La storia dell'algebra e de' suoi principali scrittori* (Lucca, 1837), la quale porge pregevoli notizie sopra matematici italiani imperfettamente conosciuti epperò non stimati a norma di giustizia.

(1) Qualche complemento a quest'opera si trova fra gli *Scritti inediti* del Cossali, dati in luce da B. Boncompagni (Roma, 1857).

Le tenebre di cui durante l'intero secolo XVIII erano avvolte le cognizioni matematiche del popolo indiano cominciarono a diradarsi durante il primo ventennio del consecutivo, specialmente grazie ai lavori di due inglesi i quali, essendosi trasferiti nel Bengala in conseguenza di missioni affidate loro dal patrio Governo, s'impadronirono della lingua classica dell'India e diedero in luce i primi documenti relativi sono: E. T. Colebrooke, che, nato a Londra il 15 giugno 1765, visse in India dall'agosto 1782 all'ottobre 1814 e morì in patria il 10 marzo 1837 in fama del più eminente sanscritista del proprio tempo; e E. Strachey (1774-1832) il quale visse lunghi anni nel Bengala in qualità di giudice. Non dissimili, nè minori benemerenze si acquistò A. Eisenlohr (n. a Mannheim il 6 ottobre 1832, m. a Heidelberg il 24 febbraio 1902) riguardo alle matematiche egiziane (v. n. 11), avendo per primo decifrato e dato in luce il Papiro Rhind, che è tuttora base sicura di tutte le nostre conoscenze intorno alle matematiche fiorite sulle rive del Nilo.

757 - Il secolo XIX, al quale ci condussero gli or citati scrittori, ha il vanto di avere creato il rigoroso metodo storico, il quale ha imposto e consentito una revisione « ab imis » delle conclusioni a cui erasi giunti anteriormente; e poichè l'applicazione di esso ai monumenti letterari e scientifici esige si abbia a propria disposizione testi meritevoli di assoluta fiducia, così sino dai primordi dell'800 si inizia la serie di edizioni critiche dei maggiori matematici. Fra coloro che se ne occuparono incontriamo anzitutto un bibliotecario della Scuola Politecnica di Parigi, F. Peyrard (n. a Vial nel 1760, m. a Parigi il 3 ottobre 1822), il quale, dopo avere diffusa in Francia, mediante pregevoli traduzioni (1804-1807), le opere di Euclide e di Archimede, pubblicò (1814-1818) una sontuosa edizione degli *Elementi* tratta da un codice Vaticano dianzi inesplorato, corredandola di una versione letterale in francese. Tale esempio fu seguito dall'abate N. B. Halma (n. a Sédan il 31 dicembre 1755, m. a Parigi il 4 giugno 1828), il quale, col valido concorso del grande storico dell'astronomia J. B. Delambre (n. ad Amiens il 31 dicembre 1749, m. a Parigi il 19 agosto 1822), arricchì la letteratura matematica di ottime versioni francesi (1813, 1822, 1828) delle principali opere di Tolomeo, accompagnate dai testi relativi.

Seguendo questo indirizzo G. B. Venturi (n. nei pressi di Reggio Emilia l'11 settembre 1746, m. in quella città il 16 settembre 1822), approfittò di un soggiorno a Parigi per prendere notizia dei manoscritti del pittore della Gioconda e con l'*Essai sur les Ouvrages physico-Mathèmatiques de Leonardo da Vinci* (Paris, 1797) diede un prezioso contributo ed un potente impulso ai numerosi studi che sfociarono nell'edizione completa delle opere di quel grande a cui attualmente si attende. Lo stesso, nei suoi *Commentarj sopra la storia e la teoria dell'Ottica* (Bologna, 1811), ha inserita la prima edizione del *Traguardo* di Erone Alessandrino (cfr. n. 75); finalmente, raccogliendo buon numero di *Memorie e Lettere inedite e disperse di Galileo Galilei* (Modena, 1818) ha contribuito validamente alla miglior conoscenza della vita e delle opere del sommo fiorentino.

Benemerenze indiscutibili ed indiscusse riguardo alla storia delle

matematiche ha Guglielmo Libri, conte Carrucci della Somaglia. Egli nacque a Firenze il 2 gennaio 1802; all'Università di Pisa, ove fu studente, manifestò così spiccata attitudine per le matematiche, che, non appena laureato, fu chiamato (1823) a occuparvi la cattedra di fisica matematica; ragioni di salute lo costrinsero ad abbandonarla l'anno successivo, e il regnante Granduca di Toscana lo nominò professore emerito con conservazione integrale dello stipendio. Fu due volte in Francia, stringendo legami di amicizia con i più eminenti matematici residenti allora a Parigi e qui riparò quando, in seguito ad un'inconsulta congiura antimonarchica da lui ordita a Firenze, fu costretto a esulare. In data 3 febbraio 1833 ottenne la nazionalità francese e così potè divenire membro dell'Istituto di Francia e conseguirvi le più alte cariche didattiche. Di carattere focoso, ebbe aspre polemiche con eminenti personalità francesi, onde trovò un ambiente ostile quando fu accusato di avere commesse gravi malversazioni in biblioteche francesi; benchè egli si proclamasse innocente, giudicò opportuno di riparare in Inghilterra, ove ottenne la nazionalità. Ciò però non lo sottrasse alla condanna di dieci anni di carcere, pronunciata a Parigi contro di lui il 22 giugno 1850 e di cui egli non riuscì mai ad ottenere la cassazione. Costituito che fu il regno d'Italia, rientrò in Firenze, ove morì il 28 settembre 1869. La fama del Libri come analista fu di breve durata, molte delle sue memorie essendo state bersaglio di critiche demolitrici da parte del Liouville; ma la sua rinomanza di storico erudito e brillante si conserva intatta specialmente in grazia della sua *Histoire des Sciences mathématiques en Italie* (4 vol., Paris, 1838-1841), ove nelle numerose ed estese Note che chiudono ciascun volume egli ha per primo pubblicati importanti documenti atti a stabilire la parte essenziale che ebbe la patria nostra nella rinascita della ricerca matematica. Però quest'opera non esaurisce la produzione storica del Libri; fra gli altri suoi scritti vanno ricordati con lode speciale quelli relativi a Fermat, i quali portarono a fissare le date fondamentali della vita di quel grande ed ebbero per tangibile conseguenza la deliberazione presa dal Governo francese di pubblicarne tutte le opere in un tutto organico.

758 - Fra coloro con cui il Libri armeggiò più volte trovasi un grande che noi già conosciamo come geometra (n. 685) e di cui ora dobbiamo descrivere l'opera di storico: M. Chasles. È ancora l'*Aperçu historique,* a noi già noto, che ci si presenta per primo lavoro sull'argomento: ivi con profonda conoscenza della materia e con stile affascinante è descritta l'evoluzione della geometria dall'epoca greca sino al 1837; tacendo (per non ripeterci) delle molte pagine di carattere strettamente dottrinale di quell'opera, e delle *Note* di egual natura che vi si trovano, citeremo le altre di carattere storico; sono anzitutto quella (III) sui porismi di Euclide, ove trovansi in germe le idee di quel grande sopra uno dei più oscuri enigmi dell'antica geometria e sono tracciate le primee linee della divinazione da lui fatta più tardi (1860) dell'opera perduta di Euclide; notevole è l'altra Nota (VII) ove è posto in luce il significato e il valore della principale opera di G. Ceva (v. n. 422); di indiscussa importanza è quanto espone l'autore sulla geometria degli indiani e sulle opere dei

Latini del Medio Evo (Nota XII), benchè riguardo all'autenticità della *Geometria* di Boezio sia opinione generale che Chasles, nella relativa discussione col Libri, si trovasse dalla parte del torto; un cenno va anche fatto sulla Nota (XIV) destinata a dimostrare tutto il valore di Desargues come geometra. Alcuni di questi temi ed altri vennero ulteriormente svolti da Chasles in parecchie comunicazioni fatte all'Accademia di Parigi, ove, fra l'altro, è mostrata, contro il Libri, la grandezza dell'opera di F. Viète. Come prezioso complemento della parte storica dell'*Aperçu historique* ci appare il *Rapport sur l'état de la Géométrie en France* (Paris, 1870), quadro vivente delle vicende della geometria non solo in Francia dal 1822 al 1870. Prima di chiudere questo cenno bio-bibliografico ci corre l'obbligo di notare che la passione di Chasles per i documenti concernenti le scienze esatte lo fece vittima di un falsario — di cui ci ripugna scrivere qui il nome — il quale gli vendette come autentici alcuni fogli, da cui sarebbe risultato che la gravitazione universale fu scoperta da Pascal; i tribunali francesi s'incaricarono di confermare gli indiscutibili diritti di proprietà di Newton (1).

Alle esortazioni e all'aiuto di Chasles devesi se un antico alunno della Scuola Politecnica, M. Poudra (m. a Parigi il 19 aprile 1894) intraprese quell'edizione completa delle opere di Desargues (v. p. 514) che permise fosse resa piena giustizia a quello che Poncelet non esitò a chiamare « il Monge del suo secolo ».

759 - Ulteriori contributi alla storia delle matematiche in Italia diede Silvestro Gherardi (n. a Lugo il 17 dicembre 1802, m. a Firenze il 20 luglio 1879) specialmente con la memoria a noi già nota (v. p. 304) intitolata *Materiali per la storia dell'Università di Bologna,* a cui una versione tedesca ha fatto acquistare notevole diffusione.

Di portata ancora più vasta è l'azione esercitata dal Principe Baldassarre Boncompagni (n. a Roma il 10 maggio 1821, m. ivi il 13 aprile 1894; profondo conoscitore della matematica dei secoli tenebrosi, si deve a lui (v. p. 238) l'« editio princeps » degli *Scritti di Leonardo Pisano,* la quale fece occupare al modesto ragioniere del Comune di Pisa il posto che gli compete nella storia delle matematiche. Altre sue pubblicazioni destinate a gettar luce sopra la matematica medioevale; ma ciò che è dovere nostro ricordare è che il largo censo di cui godeva il Boncompagni gli consentì di raccogliere una biblioteca ricca di 600 manoscritti e 40.000 volumi (sgraziatamente dispersa dopo la sua morte) e di pubblicare, con grande dispendio, i venti monumentali volumi del *Bullettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche e fisiche,* oggi indispensabile strumento di lavoro per chiunque si dedica allo studio dell'evoluzione storica delle scienze esatte.

Durante il secolo XIX i cultori della storia delle matematiche si moltiplicarono tanto notevolmente che un intero volume non basterebbe a un elenco dei loro lavori; ne indicheremo alcuni, chiedendo venia per le inevitabili omissioni.

(1) Il lettore che desidera conoscere i particolari delle discussioni sull'argomento avvenute in seno all'Accademia delle Scienze di Parigi, ricorra ai C. R., TT. LXV-LXIX, 1867-69.

Un posto eminente in tale elenco spetta a *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842, I Parte e sgraziatamente anche unica) di un *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra;* frutto di uno studio profondo sulle precedenti storie delle matematiche e sopra l'antica letteratura dei Greci (in particolare sulle opere di Diofanto) ancor oggi può riguardarsi come un modello per i lavori congeneri. L'autore, G. H. F. Nesselmann (n. vicino a Elbing il 14 febbraio 1811) ci è noto (v. p. 214) per la pubblicazione di un'opera araba; grazie ad essa egli ebbe la cattedra di sanscrito e arabo nell'Università di Königsberg; i conseguenti doveri lo distolsero dagli studi matematici; a Königsberg morì il 7 gennaio 1881.

760 - Ci si presentano poi i due volumi *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863) e *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Vermesskunde* (Leipzig, 1875); ne è autore uno storico eminente su cui ritorneremo alla fine del presente Capitolo: Moritz Cantor (n. a Mannheim il 29 agosto 1829, m. il 10 aprile 1920 a Heidelberg, nella cui Università insegnò durante l'intera sua vita). Oltre che per i suoi lavori è benemerito della storia delle matematiche per avere fondati e diretti due periodici sulla materia; cioè la Sezione storico-bibliografica della *Zeitschrift für Mathematik und Physik* e le *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.*

Accando a lui va ricordato Siegmund Günther (n. a Nürnberg il 6 febbraio 1848, m. il 5 febbraio 1923 a München, nel cui Politecnico era professore); la sua produzione è estremamente ricca e assai variata, abbracciando tutte le scienze di ragionamento e di osservazione. A noi interessa specialmente il volume dal titolo *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (Leipzig, 1876), raccolta di vari saggi sulla storia dei poligoni stellati, delle frazioni continue, del parallelogramma di Newton, dei quadrati magici, della teoria dei logaritmi, dell'astronomia ebraica nel Medio Evo e dell'orologio a pendolo.

Un cenno laudativo merita anche un matematico a noi già noto (v. n. 729) da cui la storia come la scienza riponeva grandi speranze che furono deluse da una morte immatura: H. Hankel. Il volume *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), pubblicato postumo per cura del padre, mostra che l'autore avrebbe potuto scrivere una storia generale delle matematiche capace di soddisfare le più rigorose esigenze degli scienziati e degli eruditi.

761 - Passiamo in Francia per segnalare i numerosi e essenziali perfezionamenti che la storia della matematica presso i Greci, nel Medio Evo e nell'epoca cartesiana è debitrice a Paul Tannery (n. a Mantes il 20 dicembre 1843, m. a Parigi il 27 dicembre 1904); i quindici poderosi volumi di suoi *Mémoires scientifiques* (Paris, 1912-1932) non esauriscono la sua cospicua produzione storica; bisogna aggiungervi i tre *Pour l'histoire de la science Hellène* (Paris, 1887, II ed., 1930), *La géométrie grecque* (Ib., id.) e *Recherches sur l'Astronomie grecque* (Paris, 1893).

Accanto al Tannery va ricordato un eminente matematico le cui scoperte nel campo geometrico saranno citate con sommo onore da chi pro-

seguirà la presente storia: H. G. Zeuthen (n. a Grimstrup il 15 febbraio 139, m. a Copenaghen il 6 gennaio 1920); discepolo in geometria di Chasles, egli se ne è mostrato degno continuatore anche per molti lavori storici, di cui ci limitiamo a citare il più originale e cospicuo; è il volume che nella versione dal danese porta il seguente titolo: *Die Theorie der Kegelschnitte im Altertum* (Copenaghen, 1886); ivi con ammirabile acume, l'autore ha messo in chiaro l'intima struttura dell'antica geometria, completando con geniali divinazioni le monche informazioni offerte dagli antichi scrittori.

Vanno eziandio ricordati quegli storici che si proposero di narrare le glorie dei matematici di una determinata nazione; fra i lavori di tal fatta ci limiteremo a ricordare i due di A. Quetelet (v. p. 861): *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Bruxelles, 1864) et *Sciences mathematiques et physiques chez les Belges au commencement du XIX siecle* (Ivi, 1866); e la *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München, 1877) di C. E. Gerhardt (n. a Hezberg il 2 dicembre 1816, m. a Halle il 5 maggio 1899), benemerito anche per la pubblicazione delle opere di Leibniz.

Non mancarono neppure investigatori che tutta la lor vita dedicarono allo studio della vita e delle opere di un solo scienziato; come tipico al riguardo ci si presenta Antonio Favaro (n. a Padova il 21 maggio 1847, m. il 30 settembre 1922 pure a Padova, nella cui Università insegnò durante tutta la sua vita); chè, senza escludere totalmente altri soggetti, egli spese il meglio della sua inesauribile energia a Galileo Galilei, curandone un'edizione delle opere, superiore ad ogni elogio, e illustrandone in tutti i particolari la vita e l'ambiente familiare e scientifico in cui visse.

762 - Buon numero di benemeriti eruditi somministrarono agli storici testi definitivi di opere importanti o anteriormente sconosciute. Per quanto riguarda l'antichità acquistarono in tale campo ai di nostri [1] ben meritata celebrità: F. Hultsch (n. a Dresda il 23 luglio 1833, m. ivi il 6 aprile 1906) per le edizioni di Autolico da Pitane, Erone e Pappo; J. L. Heiberg (n. a Aalborg il 27 novembre 1854, m. a Copenaghen il 27 novembre 1928) per quelle di Archimede, Euclide, Apollonio, Erone e Tolomeo e P. Tannery per quella di Diofanto. Riguardo al Medio Evo latino nessuno lavorò con maggiore diligenza e migliori frutti di quanto abbia fatto M. Curtze (n. a Ballenstadt il 4 agosto 1837, m. a Thorn il 3 gennaio 1903); notevoli contributi al riguardo diede anche A. A. Björnbo (il quale sino al 1901 portava il cognome Christensen), che una morte precoce spense nel fiore della maturità (n. a Copenaghen il 20 aprile 1874, m. ivi il 6 ottobre 1911). Finalmente nel far conoscere autori e opere arabe emersero F. Woepcke (n. a Dessau il 6 maggio 1826, m. a Parigi il 24 marzo 1864) e H. Suter (n. a Zurigo il 4 gennaio 1848, m. a Hedigen il 17 marzo 1922).

---

(1) In questo campo brillò nel secolo XVI Corrado Dasipodio — Randfuss o Hasenfuss — (1531 - 26 aprile 1600) per lunghi anni professore e rettore dell'Università di Strasburgo.

763 - I contributi dati alla storia delle matematiche durante i primi ottant'anni del decorso secolo sono tanto numerosi, cospicui e decisivi che non si tardò a manifestarsi il bisogno di una grande opera che, meglio del Montucla, rispecchiasse lo stato delle nostre cognizioni sull'argomento. Tentativi più o meno riusciti non mancarono; ma colui che con migliore preparazione vi si è accinto e con maggiore successo vi è riuscito è un uomo insigne che già conosciamo, M. Cantor. Avendo fatto della materia di cui ci occupiamo argomento di lezioni universitarie, potè scrivere la grande opera (in tre poderosi volumi) che (piuttosto per ricordarne la genesi che per designarne la struttura) intitolò *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Saggiamente l'autore ridusse il troppo vasto programma fissato dal Montucla, occupandosi esclusivamente delle matematiche pure; meno unanime suona l'approvazione per il criterio strettamente cronologico adottato nella ripartizione della materia, chè ciò (specialmente nei due ultimi volumi) ebbe per conseguenza brusche interruzioni, che riescono penose al lettore. Il I vol. tratta il periodo che va dalle origini al 1200, il II gli anni 1200-1668 e il III dal 1668 al 1758 (ricordisi che nel 1759 Lagrange cominciò la serie delle sue pubblicazioni). Un IV volume, che porta sino alla fine del secolo XVIII, fu aggiunto più tardi da un gruppo di specialisti.

L'immensa quantità di materiale ivi raccolto e ben ordinato, lo stile alieno da ogni tendenza polemica, la costante serenità di giudizio, assicurarono gran fama all'autore (ne sono documento due volumi giubilari a lui presentati in occasione del suo settantesimo e del suo ottantesimo natalizio) e cospicuo successo alla sua opera; esse viene tuttora riguardata come la più ricca e sicura fonte di notizie per chi aspira a conoscere come l'umanità assurse dai rudimenti dell'aritmetica e della geometria ai più elevati concetti e metodi dell'analisi infinitesimale. Tuttavia (oltrepassando eccezionalmente i limiti imposti all'opera presente) osserviamo che a partire dai primordi del corrente secolo e per più di un decennio si fece udire con insistenza una voce, la quale in nome di quella scrupolosa esattezza storico-bibliografica tanto cara a B. Boncompagni, sottopose ogni pagina dell'opera cantoriana ad un esame microscopico e, convien pur dirlo, non sempre esente da spunti personali. Alludiamo alla lunga serie di *Osservazioni* che G. Eneström (n. a Nora (Svezia) il 5 settembre 1852, m. a Stoccolma il 10 giugno 1923) inserì nei quattordici volumi della III Ser. dell'importante rivista *Bibliotheca Mathematica* da lui fondata e costantemente diretta. Ora, se l'esattezza costituisce un imprescindibile dovere per qualunque scrittore, per uno storico come per uno scienziato, va tenuto presente che il conseguirla nella ricerca storica riesce spesso impossibile, non essendo rari i casi in cui è precluso ogni mezzo di quella verifica diretta, così necessaria quando si tratta di notizie che furono trasmesse di bocca in bocca o di penna in penna. Nè va dimenticato e taciuto che se all'autore di una memoria sopra un soggetto ristretto si può far colpa di ogni piccola trascuranza, non si deve negare il perdono al pittore che, nel delineare una tela di vaste proporzioni, in qualche momento dimentica di guidare la propria mano con assoluta fermezza.

Oggi i due antagonisti riposano entrambi nella pace del sepolcro.

L'opera del Cantor conserva intatto il proprio credito e la propria autorità, mentre d'altra parte è da tutti accolto, quale canone fondamentale di ogni ricerca storica, il principio ispiratore della campagna eneströmiana. In conseguenza, ogni cultore della storia della matematica, rendendo omaggio al mirabile sforzo compiuto dal Cantor, ricorre costantemente alle sue *Vorlesungen* come guida sicura nel suo procedere: ma non crede recare offesa alla memoria di quel valentuomo tenendo sempre presenti le *Osservazioni* dell'erudito svedese, ricordando le saggie parole di W. K. Clifford: *A man of science explains as much as ever he can, and then says*: « *This is all I, can do; for the rest you must ask to the next man* ».

## Congedo

Grazie alla scoperta delle trasformazioni cremoniane si chiude il periodo eroico delle indagini sulle trasformazioni proiettive e s'inizia la geometria algebrica, nel senso più vasto della parola; in conseguenza la geometria proiettiva, pur manifestando di quando in quando una indistruttibile vitalità, abbandona le vie tracciate da Poncelet e Steiner e si rifugia sotto le grandi ali della geometria cartesiana. D'altra parte, per effetto della creazione di sistemi geometrici nei quali cessa di valere il postulato di Euclide, delineasi la possibilità di nuove geometrie e si manifesta la necessità di sottoporre ad un'esauriente analisi i principi della geometria (e per analogia quelli dell'aritmetica); sorge così l'Assiomatica (1). In altro campo, le originali vedute di G. Cantor aprono orizzonti del tutto nuovi, non soltanto a tutti i rami dell'analisi pura, ma anche alle applicazioni di questa ed alla geometria. Ancora: la topologia che appariva un tempo come un capitolo isolato, tende oggi a divenire sangue e midollo di molte branche della scienza nostra. Finalmente la relatività e la costante aspirazione di giungere a soddisfacenti spiegazioni di fenomeni che l'esperienza giornalmente rivela, danno direzioni del tutto nuove alle ricerche di fisica matematica ed esigono la creazione di nuovi metodi analitici.

Tutto ciò sta a dimostrare come nell'ultimo ventennio del secolo XIX si delinei l'alba di un'èra novella per la matematica, èra che con la sua apparenza vivace e brillante porge una nuova prova della perenne giovinezza di questa mirabile scienza. L'autore di questa opera, la cui mano ormai stanca si rifiuta ad una nuova fatica, depone la penna e, non senza rammarico, lasciando ad altri di narrare le gesta dei più recenti investigatori e di descrivere i risultati degli sforzi da essi compiuti a vantaggio della scienza, ed a onore dell'umanità.

---

(1) Molti materiali concernenti la storia della geometria nel periodo 1830-1930 sono raccolti nell'opera dell'autore intitolata *Il Passato ed il Presente delle principali teorie geometriche* (IV ed., Padova, 1930).

## APPENDICE

# LE MATEMATICHE NELL'ESTREMO ORIENTE

764 - Colui che in avvenire assumerà di scrivere la storia delle matematiche a partire dal punto in cui si chiude la presente opera dovrà occuparsi, non soltanto di quanto accadde in Europa e negli Stati Uniti d'America, ma anche dei contributi dati alla nostra scienza da un popolo il quale, benchè orgoglioso di una propria antica civiltà, a partire dal 1868 fece gettito di tutto l'avito patrimonio intellettuale, per assumere il posto prima di discepolo e poi di collaboratore efficace dei corifei del movimento culturale europeo. Ora poichè nei secoli precedenti non fu possibile sorprendere uno scambio d'idee fra l'Europa ed il Giappone, così nessun suddito del Mikado potè ottenere un posto nella nostra esposizione; e poichè fu foggiata laggiù una scienza matematica sufficiente ai bisogni ivi avvertiti, così giudichiamo doveroso e opportuno, a complemento di quanto precede, dare qui alcune informazioni intorno alla fisonomia di essa ed ai risultati a cui essa ha condotto.

Notisi però che a comporre una completa storia della matematica giapponese si oppongono due fatti, e cioè: 1° che i frequenti incendi che devastarono quelle isole distrussero certamente gran numero di preziosi documenti; 2° che per lungo volgere di secoli fu abitudine costante fra i pensatori di quella stirpe il comunicare le proprie idee soltanto ai propri discepoli oralmente o mediante rapidi appunti, con l'obbligo di tenerle segrete.

Che neppure si possa pensare a redigere un elenco prossimo al vero dei sudditi del Mikado che coltivarono la nostra scienza è dimostrato da alcuni fatti che devono venire qui registrati. I nomi propri venivano espressi dai Giapponesi mediante ideogrammi che furono interpretati in modi diversi dai competenti in materia; inoltre frequenti erano i mutamenti di nome; finalmente era diffusissima fra gli scrittori giapponesi l'abitudine di firmare i loro scritti con un nome fittizio o con quello di uno scolare particolarmente diletto; vi è poi l'esempio di un certo Wada il quale vendeva le proprie scoperte per procurarsi i mezzi onde soddisfare il vizio del vino, che non riusciva a vincere.

765 - Malgrado tutte queste avverse circostanze si salvarono i nomi di alcuni matematici relativamente recenti, che meritano di venir qui registrati.

Vola fra essi quale superba aquila Seki Kowa, il quale nacque da cospicua famiglia (*samurai*) l'anno stesso (1642) in cui si spense Galileo e che, in conseguenza, fu contemporaneo di Newton. La sua rinomanza,

già considerevole quando egli era ancora giovinetto, si accrebbe durante tutta la sua vita e non finì neppure con la morte; infatti, per la sua precocità, a cinque anni fu chiamato « divino fanciullo », in età matura ebbe il nome di « saggio aritmetico »; ottant'anni dopo la sua morte (avvenuta il 24 ottobre 1708) la sua tomba (a Tokio) che cadeva in rovina venne ripristinata e il 15 novembre 1907 il Mikado gli conferì un'alta onorificenza postuma. La sua carriera di scrittore s'iniziò quando nel 1674 egli pubblicò le soluzioni di 15 problemi costituenti una sfida lanciata nel 1670 ai matematici del tempo; si dice che le sue opere ascendessero in totale a cento (la maggior parte è oggi perduta); ma coloro che poterono leggerle riconobbero che in Seki era maggiore la perizia didattica che l'originalità del pensiero.

Fra i suoi discepoli emerge un altro *samurai*, Takede Hikoijro Kenko, n. a Yedo (la moderna Tokio) nel sesto mese del 1664, m. ivi il 20 luglio 1739. Segue a lui Arima Raido (1714-1783), ricco signore ricordato tanto per avere pubblicato il metodo « tezan » (pag. seg.), tenuto sino a quel giorno segreto, quanto per essersene servito (1769) per risolvere non meno di 150 problemi, in un'opera recante il nome di un suo vassallo.

Vassallo di Arima fu anche Henda Teiken (1734- 1807), il quale come matematico è conosciuto sotto il nome di Fuijta Sadasuke ed è celebre per una disputa, duranta dodici anni, che egli ebbe con altro matematico di buon nome, Aida Ammei (1747-1817), di cui va citata con onere un'opera data in luce nel 1784 contenente una ricca collezione di problemi su argomenti tratti dalla vita quotidiana. Un matematico di singolare perizia, che fu celebre per la sua modestia, è Aijma Chokuyen (1739-1798); vengono poi ricordati Furukawa Uijkiyo (1758-1820), Sakabe Kokan (1759-1824) e più ancora Wada Nei (1787-1840), il cui nome originario era Koyana Naoki; e con tali nomi chiudiamo questo arido elenco perchè i matematici posteriori appartengono all'epoca in cui, anche nel campo matematico, l'influenza straniera nell'Estremo Oriente si fece già sentire in maniera indiscutibile.

766 - Del resto, che i Giapponesi anche in tempi remoti abbiano avute relazioni scientifiche coi popoli europei, dei Cinesi e degli Indiani è possibile, anzi probabile, benchè prove dirette al riguardo non siano state peranco scoperte. E nemmeno argomenti intrinseci possono servire allo scopo, chè negli scritti dei matematici di cui parliamo si trovano soltanto regole semplicemente enunciate o applicate in casi concreti; in geometria poi non devono avere raggiunto un livello molto elevato se nel secolo XVII un signore, volendo dividere fra i propri figli una canna di prezioso incenso, ricorso nientemeno che a Seki: eppure (ammesso, come sembra, che quella canna avesse la forma di un tronco di cono) si tratta di una questione che Erone Alessandrino era in grado di risolvere! In generale di uno studio metodico dell'estensione figurata non si è trovata traccia alcuna nella letteratura giapponese; molte delle figure che s'incontrano nei loro volumi sembrano ispirate da motivi estetici e si direbbero appartenere a un nuovo capitolo di geometria da intitolarsi « Geometria dei ventagli » (v. Fig. 78); una di esse sembra provare che i Giapponesi siansi imbattuti nel « problema di Malfatti »

limitato forse a triangoli isosceli. Altra figura nota da secoli in Europa e che fu studiata da Aijma è quella determinata dall'intersezione di due cilindri circolari retti fra loro eguali e ad assi ortogonali; ma, mentre Archimede (v. n. 45) insegnò un'espressione in termini finiti del volume ad essi comune, il matematico giapponese ne diede un'incomoda espressione in serie. Alle sezioni coniche essi prestarono mediocre attenzione; conobbero però due procedimenti per descrivere l'ellisse con moto continuo; uno basato sopra la costanza della somma dei raggi vettori, l'altro conseguenza della possibilità di considerare l'ellisse come una curva ciclica (è il metodo che in Europa fu scoperto circa nello stesso tempo dal Suardi). Altre curve che si incontrano nella letteratura giapponese sono la cicloide, la spirale d'Archimede e la catenaria, considerate,

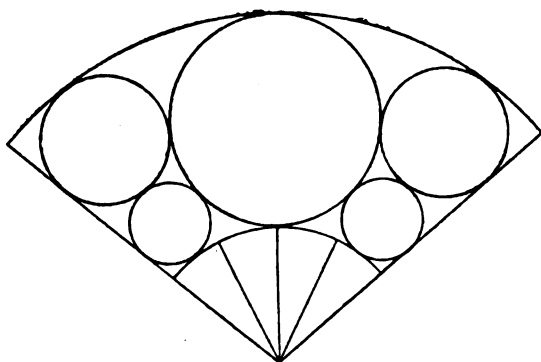



Fig. 78.

ma non investigate. Di superficie i Giapponesi conobbero quelle studiate negli elementi della geometria e incidentalmente incontrarono la superficie (paraboloide iperbolico) che nasce congiungendo i punti corrispondenti di due punteggiate simili, situate sopra due lati opposti di un quadrilatero sghembo.

Di maggiore iniziativa i Giapponesi diedero prova nella scienza del numero e specialmente nella parte algoritmica; ebbero una loro algebra, che chiamavano *Tezan,* nome derivato dal cinese e la cui etimologia presenta una sorprendente analogia con quella del vocabolo algebra. Conobbero le frazioni continue e le usarono per calcolare le radici quadrate dei numeri; prima di Leibniz (v. n. 458) giunsero ai determinanti, di cui Seki conobbe le proprietà essenziali e l'applicabilità al calcolo del risultante di due equazioni algebriche. Per risolvere un'equazione numerica in generale ricorsero alla falsa posizione, ma non ignorarono il metodo di Newton. Nel corso di siffatti studi essi concepirono alcuni algoritmi infiniti sinora ignorati in Europa e che meriterebbero di venire studiati dal punto di vista della convergenza. Aggiungiamo — piuttosto a titolo di curiosità — che mentre in Europa l'equazione di grado più elevato di cui si è serbata memoria è quella di 45° grado proposta da van Roomen a Viète (v. n. 276), Seki ne ha considerata una di grado 1458 e un suo discepolo altra di grado $2^{10} = 1024$. Alcuni scritti giap-

ponesi appartenenti alla prima metà del secolo XVIII si riferiscono alla analisi indeterminata di secondo grado e provano che essi affrontarono la questione di determinare il numero delle cifre del periodo che si manifesta svolgendo in decimali una frazione fondamentale. Alle applicazioni dell'aritmetica appartiene la costruzione dei quadrati magici; i Giapponesi se ne occuparono per impulso dato da Seki ed arrivarono a costruire una di dette figure con 25 nodi; ma di più si occuparono di altre figure congeneri, nascenti dal cerchio; sono i circoli magici di cui un esempio è offerto dalla Fig. 79 (¹).

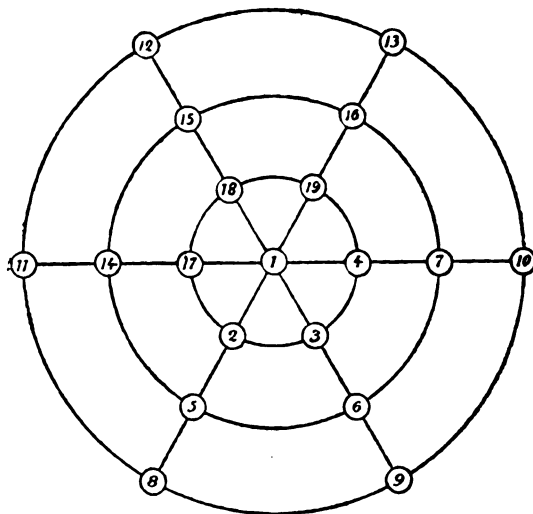



Fig. 79.

767 - Una questione che interessò i Giapponesi non meno che gli Europei è la quadratura del cerchio e di alcune sue parti (calcolo *Yenri*); applicando il metodo dei poligoni inscritti e circoscritti, che spinsero sino al poligono di $2^{15}$ lati, ottennero per $\pi$ un valore molto approssimato; nè si arrestarono allo stadio aritmetico della celebre questione chè all'epoca di Seki ottennero alcune espressioni notevoli per la lunghezza di un arco di cerchio, che si riconobbero casi particolari della serie ipergeometrica. Con analoghi scopi stabilirono equazioni algebriche le quali, avendo coefficienti numerici di 15 cifre, appaiono ai nostri occhi come oggetti di semplice curiosità. Dopo il cerchio, considerarono l'ellisse, ma, riguardo alla quadratura e la rettificazione, non giunsero a risultati concludenti. Intorno alla quadratura e la cubatura

(¹) Un « circolo magico » dotato di altre proprietà venne immaginato e costruito da B. FRANKLIN (v. l'opera *Experiments and Observations on Electricity*, London, 1751); il che osserviamo per conchiudere che il celebre fisico (n. a Boston il 17 gennaio 1706, m. a Filadelfia il 17 aprile 1799) ha diritto di un posto anche nella storia delle matematiche.

della sfera i Giapponesi conobbero le proposizioni fondamentali scoperte da Archimede, ma chi si sente di farsi garante che vi siano giunti con mezzi propri? Va però osservato che Seki vi aggiunse la considerazione della figura nascente dalla rotazione di un arco attorno alla propria corda.

La teoria dei massimi e minimi ha essa pure attratta l'attenzione del popolo di cui ci occupiamo; sino a qual punto essi vi si siano spinti non ci è noto, perchè sono riferite imprecisamente le risposte da essi date a due questioni relative; una concerne la ricerca dei valori estremi del rapporto sen $\varphi/\varphi$; dell'altra riferiamo l'enunciato, che ci sembra degno

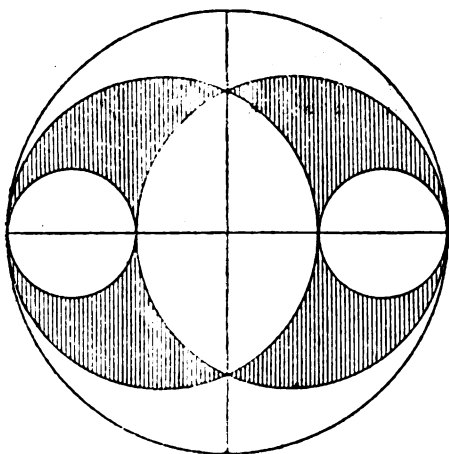



Fig. 80.

di venir qui registrato: « Si suppone che una sfera sia tagliata da quattro cilindri circolari retti eguali due a due, come indica la Fig. 80, la quale riproduce una sezione retta passante per il centro della sfera e normale alla direzione comune delle generatrici di quei cilindri. Supposto conosciuto il diametro della sfera, si vogliono determinare quelli dei cilindri considerati, in modo che risulti massima l'area della porzione di superficie sferica che si proietta nella parte tratteggiata della figura ».

768 - Uno sguardo d'insieme alla matematica degli antichi Giapponesi mostra che ad essi faceva difetto l'energia argomentativa; forse per un morboso sentimento estetico, essi non ammettevano se non regole brevi, preferendole alle migliori ma lunghe; essi poi applicavano con imperdonabile leggerezza la generalizzazione per analogia e con disinvoltura colpevole si servirono di passaggi al limite.

Col secolo XIX la facilità dei viaggi e le conseguenti intense relazioni fra popoli lontani, rivelarono ai Giapponesi le gravi imperfezioni della scienza che i loro antenati riguardavano come il « nec plus ultra » del metodo matematico; allora videro che, se non volevano rimanere pe-

rennemente alla retroguardia nell'esercito dei ricercatori del vero, il mezzo migliore era l'apprendere e l'applicare una scienza sicura, due volte millenaria, qual'era quella in uso in Europa. Quanto provvida sia stata tale decisione emerge dalla posizione eminente che essi vi hanno già acquistata e che va di giorno in giorno migliorando.

## BIBLIOGRAFIA

T. Hayashi, *A brief History of the Japanese Mathematics* (Nieuw Archief voor Wiskunde, 1905).

D. E. Smith and Y. Mikami, *A History of Japanese Mathematics* (Chicago, 1914).

Y. Mikami, *The development of Mathematics in China and Japan* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, XXX Heft, 1913).

.Y Mikami, *Mathematical Papers from the Far West* (Id., XXVIII, 1910).

# INDICE DEI NOMI

**B**

D

E

F

I



J



K



L

## M

P

S

T

U



V



W

## X



## Y



## Z